2015

Вдовиченко А.А.

[ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 2: ГЕОМЕТРИЯ. ХРЕСТОМАТИЯ]

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

Механико-математический факультет

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 2: ГЕОМЕТРИЯ. ХРЕСТОМАТИЯ

для студентов, обучающихся по направлению 44.03.01 – Педагогическое образование, профиль – математическое образование

Саратов, 2015

Рекомендовано к печати
кафедрой математики и методики её преподавания
и кафедрой основ математики и информатики
Саратовского государственного университета имени Н.Г.Чернышевского

Вдовиченко А.А. Элементарная математика. Часть 2: геометрия. Хрестоматия : для студентов, обучающихся по направлению подготовки 44.03.01 – педагогическое образование, профиль – математическое образование / А.А. Вдовиченко – Саратов, 2015. – 72 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Игошин В.И. Логика с элементами математической логики 4
Понятие как форма мышления 4
Определение понятий 8
Суждение.. 12
Элементы логики высказываний 14
Элементы логики предикатов 16
Дедуктивные умозаключения 18
Правдоподобные умозаключения.. 21
Игошин В.И. Математическая логика как педагогика математики 23
Определения в математике.. 23
Математические теоремы как суждения.. 27
Прямая и обратная теоремы 30
Противоположная и обратная противоположной теоремы 33
Понятие доказательства... 37
Аксиоматический метод в математике 41
Аксиоматический метод в обучении математике..................................... 43
Игошин В.И. Задачи на построение.. 44
Пойа Д. Математическое открытие.. 50
Метод двух геометрических мест.. 50
О задачах 57
Рыжик В.И. О пользе теории множеств... 63
Стол Роберт Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории 66
Дальнейшие свойства неформальных теорий 66
Список литературы 68

Игошин В.И. Логика с элементами математической логики

Понятие как форма мышления

Понятия представляют собой тот материал, которым мы оперируем во всякой мыслительной деятельности, в том числе в рассуждениях.

Понятие – это мысль, выделяющая из универсума некоторый класс «предметов» посредством указания некоторых признаков. Понятие является основной формой мышления, с помощью которой мы отличаем определенные классы предметов и явлений от других.

С каждым понятием тесно связан *термин* – слово языка, обозначающее данное понятие. Существует насущнейшая необходимость в однозначном понимании языковых терминов. Понимать термин – это значит точно знать, какое понятие обозначено этим термином, т.е. какие именно предметы подпадают под него, т.е. по любому предъявляемому нам предмету уметь решать вопрос, можно ли данный предмет обозначить данным термином, т.е. подпадает ли данный предмет под понятие, обозначаемое данным термином.

Естественнее считать, что класс, выделяемый понятием, состоит не их предметов как таковых, а из представлений о них.

Приведенную формулировку «определения» понятия, конечно же, нельзя считать строгим определением: это не определение, а всего лишь приблизительное разъяснение смысла термина «понятие».

<u>Примеры.</u>

1) Понятие «прозрачный» выделяет класс предметов, не препятствующих видеть то, что находится за ними.

2) Понятие «часы» выделяет класс предметов, представляющих собой приборы для измерения времени.

3) Понятие «студент» выделяет класс людей, обучающихся в вузах.

4) Понятие «треугольник» выделяет класс геометрических фигур, состоящих из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих эти точки.

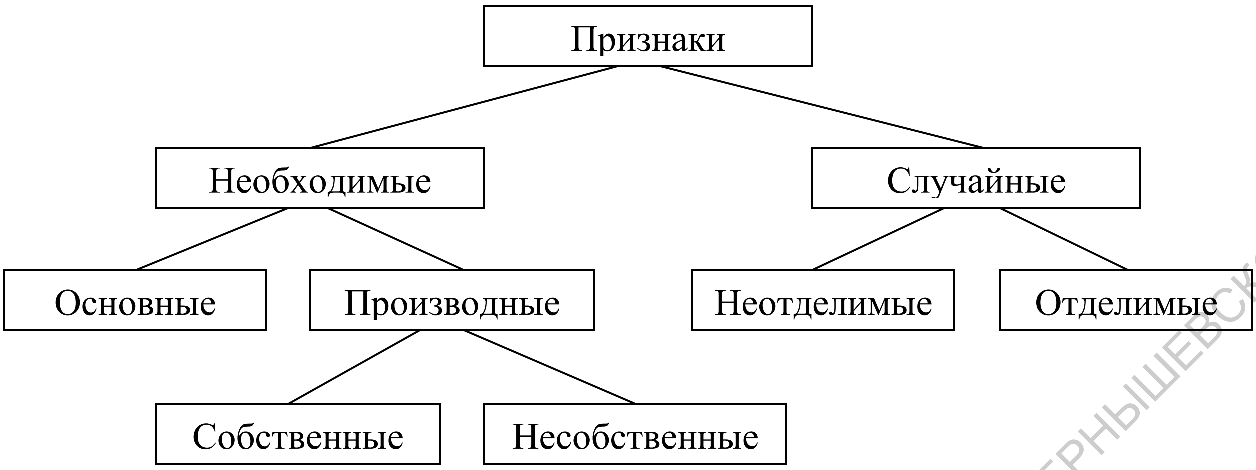
5) Понятие «кентавр» выделяет класс мифических существ с конским туловищем и человеческой головой.

6) Понятие «бежать» выделяет класс способов передвижения человека и животных с резким отталкиванием от земли или быстрым перебиранием лапами.

7) Понятие «удивление» выделяет класс чувств, вызываемых чем-либо странным или неожиданным.

Признаки предмета – это всё то, в чём предметы могут быть сходны друг с другом или отличны один от другого (любые свойства, состояния или отношения предмета к другим предметам).

Классификация признаков



Необходимые признаки – это те, без которых предмет утрачивает свое качество, перестает быть самим собой («плотно закрывающаяся» - необходимый признак канистры).

Случайные признаки – те, без которых предмет может вполне обойтись, не теряя своего качества, не переставая быть самим собой («зеленый забор», «легковой автомобиль», «красный кирпич»).

Неотделимые признаки – это такие случайные признаки, которые присущи всем мыслимым в понятии предметам, *отделимые* – присущи не всем.

Основные – это такие необходимые признаки, которые обусловливают все другие необходимые признаки, которые, в свою очередь, называются *производные*. (Например, равенство диагоналей в выпуклом четырехугольнике обусловлено равенством всех его углов; поэтому 1-ый признак является производным от 2-го). Основные необходимые признаки называются *существенными*.

Собственные – это такие производные признаки, которые присущи только предметам данного класса. (Например, признак «обладать членораздельной речью» – собственный для человека). *Несобственные признаки* присущи не только предметам данного класса, но и другим. (Например, «равнодиагональность» – несобственный признак квадрата, им обладают, в частности, все прямоугольники).

Логические приемы формирования понятий.

Понятие о предмете формируется в результате выявления его существенных признаков. С этой целью используются следующие логические приемы.

Сравнение – установление сходства или различия данного предмета с другими.

Анализ – мысленное расчленение предмета на части.

Абстрагирование – мысленное отвлечение от тех или иных признаков.

Синтез – прием, противоположный анализу, представляет собой мысленное соединение частей предмета, расчлененного анализом.

Обобщение – объединение отдельных предметов в группы на основе присущих им одинаковых свойств.

Содержание и объем понятия.

Содержание понятия – это совокупность всех признаков, характеризующих данное понятие, т.е. признаков, по которым собственно и происходит выделение предметов данным понятием.

Объем понятия – тот класс предметов, который данное понятие выделяет.

Примеры.

1) Понятие «часы». Признаки: «быть прибором», «служит для измерения времени». Объем: представления о всевозможных часах – старинных, современных, воображаемых, механических, электронных, солнечных и т.д.

2) Понятие «студент». Признаки: «быть человеком», «обучаться в вузе». Объем: представления о нынешних, прежних, будущих, вымышленных (литературных) студентах.

3) Понятие «кентавр». Признаки: «быть мифическим существом», «иметь конское туловище», «иметь человеческую голову». Объем: представления о нескольких кентаврах, которым мифология дала имена и наделила характерами (например, Хирон), о «кентаврах вообще».

Два понятия, различающиеся по содержанию, могут иметь один и тот же объем. Например, понятия «равнобедренный треугольник» и «треугольник, имеющий два равных угла» различны, но их объемы одинаковы.

Противоположный случай – когда два понятия имеют одно и то же содержание, но разные объемы – очевидно, невозможен.

Понятия, объемы которых совпадают, называются *равнообъемными* или *равнозначными*.

Примеры.

1) «Число, делящееся на 6», «Число, делящееся на 2 и на 3».

2) «Нынешняя столица России», «Город, в котором родился А.С. Пушкин».

Закон обратного отношения между объемом и содержанием понятия.

Чем богаче содержание понятия, тем уже (меньше) его объем; и наоборот, чем шире объем понятия, тем беднее его содержание.

Примеры.

1) «Натуральное число» и «Четное натуральное число».

2) «Преступление» и «Хозяйственное преступление».

3) «Прокурор» и «Генеральный прокурор».

Ограничение и обобщение понятий. Род и вид.

Если из содержания понятия удалить один или несколько признаков или заменить их более слабыми, то получится новое понятие, о котором говорят, что оно является *обобщением* исходного, или – *более общим* понятием.

Примеры.

1) Заменяя в содержании понятия «часы» признак «служить для измерения времени» более слабым признаком «служить для измерения чего-либо», получаем более общее понятие «измерительный прибор».

2) «Студент». Признак «обучаться в вузе» заменяем более слабым признаком «обучаться в каком-либо учебном заведении». Получаем более общее понятие «учащийся».

3) «Кентавр». Удаляем признаки «иметь конское туловище» и «иметь человеческую голову». Приходим к более общему понятию «мифическое существо».

Сама мыслительная операция по переходу от понятия к его обобщению называется *обобщением*. Обратная мыслительная операция – *ограничение*. В этом случае к содержанию исходного понятии добавляются новые признаки или некоторые признаки заменяются более сильными. В результате получается понятие с меньшим объемом, называемое *ограничением* исходного понятия.

Примеры.

1) Понятие «треугольник» является ограничением понятия «многоугольник».

2) Понятие «кража» является ограничением понятия «преступление».

Более общее понятие часто называют *родовым* по отношению к менее общему, а менее общее – *видовым* по отношению к более общему. [1, с. 32-35]

Определение понятий

Определение – это логическая операция, раскрывающая содержание понятия. Другими словами, *определение* – это такое соглашение об употреблении нового термина, которое позволяет сводить вопрос об истинности или ложности предложений, содержащих этот термин, к аналогичному вопросу о предложениях, не содержащих этого термина.

Таким образом, определения – это правила перевода с одного языка на другой, с языка, содержащего некоторый термин, на язык, не содержащий его. В этом смысле определения являются правилами исключения: они показывают, как следует исключать определяемые термины из содержащих эти термины контекстов. Определить термин – это значит объяснить, как следует производить исключение этого термина из текста, как можно обойтись без него.

Пример.

«Параллелограмм» – это «четырехугольник с двумя парами параллельных сторон».

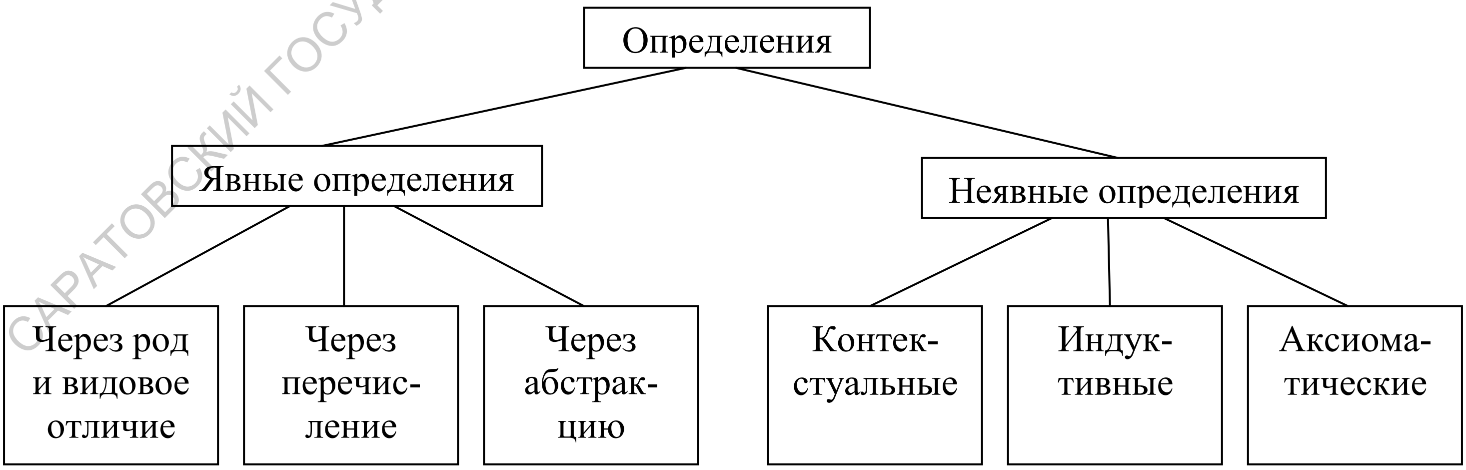
«Простое число» – это «натуральное число, имеющее ровно два натуральных делителя».

Евклид в своих «Началах» обходился без термина «гипотенуза», употребляя вместо него выражение «сторона, на прямой угол внизу натянутая».

Определения не вносят в теорию, в которой они употребляются, нового содержания. Они вносят в теорию не новые объекты или отношения, а лишь новые способы выражения утверждений о тех же объектах и тех же отношениях.

Тем не менее, то, что они всё же вносят, исключительно важно как для изложения теории, так и для процессов мышления. Определения существенно облегчают понимание результатов теории, когда они как бы «прорисовывают» то, что уже хотя и имелось в теории, но оставалось в ней скрытым и трудно различимым. В мыслительной деятельности определения позволяют нам мыслить «свернуто».

Виды определений.



Явные определения.

Они имеют вид $Dfd \stackrel{\text{def}}{=} Dfn$, где Dfd – определяемое понятие (дефиниендум, от лат. *definiendum*), а Dfn – определяющее выражение (дефиниенс, от лат. *definiens*), $\stackrel{\text{def}}{=}$ – равенство по определению. К явным определениям относятся определение через ближайший род и видовое отличие, через перечисление и через абстракцию.

Определение через ближайший род и видовое отличие – классический тип определения, выделенный еще Аристотелем. Для такого определения необходимо установить ближайший род, а которому относится определяемое понятие, и указать его видовое отличие.

Примеры.

Определяемое понятие	Признаки, устанавливающие род	Признаки, дающие видовое отличие
1. Квадрат	Прямоугольник	Все стороны равны
2. Квадрат	Ромб	Все углы равны
3. Кража	Хищение чужого имущества	Тайное
4. Республика	Форма государственного устройства	Высшая государственная власть предоставлена коллективному органу, избираемому на определенный срок
5. Мошенничество	Хищение чужого имущества или приобретение права на чужое имущество	Путем обмана или злоупотребления доверием
6. Амперметр	Физический прибор	Для измерения силы тока
7. Банда	Группа лиц	а) Не менее двух человек; б) оружие хотя бы у одного; в) устойчивость преступных связей, сплоченность

Определение через перечисление – это такое явное определение, в котором в определяющей части указываются разновидности предметов, мыслимых в определяемом понятии.

Примеры.

1) Соучастник преступления – это заказчик, организатор, исполнитель, пособник и подстрекатель.

2) Прямая, параллельная данной прямой – это прямая, лежащая с данной в одной плоскости и не имеющая с ней общих точек, а также сама данная прямая.

Определение через абстракцию осуществляется посредством указания особого рода отношений (типа отношения равенства).

Примеры.

1) Возраст (человека) – это то общее, что есть у всех людей, родившихся одновременно.

2) Вес – то общее, что есть у всех предметов, уравновешиваемых на чашечках весов.

3) Форма (геометрической фигуры) – это то общее, что есть у всех подобных фигур.

4) Число 3 – это то общее, что есть у всех множеств, содержащих три предмета (элемента).

Отметим, что с точки зрения критериев математической строгости эти определения не могут быть признаны удовлетворительными. Определения подобного типа Евклид давал более 2000 лет назад: «Точка – то что не имеет частей», «Прямая – это длина без ширины».

Неявные определения.

Это такие определения, в которых нельзя выделить форму явного определения. В них определяемое и определяющее отчетливо не разделены. К ним относятся контекстуальные, индуктивные и аксиоматические определения.

Контекстуальные определения – это такие явные определения, в которых значение определяемого термина задано некоторым контекстом, на основе которого определение может быть сформулировано в явном виде.

Пример.

Капитализм – это общественно-экономическая формация, характеризующаяся частной собственностью на средства производства и политическим господством собственников средств производства.

Индуктивные определения свойственны математике. В таком определении имеются: а) базисные пункты, где указываются некоторые конкретные объекты, именуемые определяемым термином; б) индуктивные пункты, где даются правила получения определяемых объектов из уже имеющихся, в частности, из объектов, перечисленных в базисных пунктах (пункты а и б называются прямыми); в) косвенный пункт, где говорится, что такие объекты исчерпываются объектами, задаваемыми в прямых пунктах.

Примеры.

1) Определение формулы алгебраических высказываний:

а) Каждая отдельно взятая пропозициональная переменная $P, Q, R, \dots, X, Y, Z, \dots$ есть формула.

б) Если F_1 и F_2 – формулы, то выражения $\neg F_1, (F_1 \wedge F_2), (F_1 \vee F_2), (F_1 \to F_2), (F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются формулами.

в) Никаких других формул, кроме тех, которые получаются по правилам, сформулированным в пп. а, б нет.

2) Определение четного числа:

а) 2 есть четное число;

б) если n четное число, то $n+2$ – четное число;

в) других четных чисел нет.

Близки к индуктивным определениям *рекурсивные определения*, в которых задаются те или иные функции посредством указания способа вычисления их значений с возвратом к их предыдущим значениям.

Примеры.

1) Определение операции сложения на множестве N натуральных чисел: (а) $(x+1) = x'$, (б) $x + y' = (x+y)'$.

2) Определение операции умножения на множества N натуральных чисел: (а) $x \cdot 1 = x$, (б) $x \cdot y' = x \cdot y + x$/

Аксиоматические определения. В них понятия определяются через перечисление их свойств в форме принимаемых без доказательства аксиом.

О реальных и номинальных определениях. Некоторые авторы находят нужным различать так называемые реальные и номинальные определения. В номинальных определениях, говорят они, определяются термины, а в реальных – объекты. Сравним два таких определения одного понятия.

Номинальное определение	Реальное определение
Слово «параллелограмм» обозначает четырехугольник с двумя парами параллельных сторон. ИЛИ: Будем говорить «параллелограмм» вместо «четырехугольник с двумя парами параллельных сторон».	Параллелограммом называется четырехугольник с двумя парами параллельных сторон.

Различие здесь не в определениях, а лишь в их словесных формах, в способах их словесной подачи. С другой стороны, поскольку, как мы уже отмечали, определения являются соглашениями об употреблении языка, поэтому определить объект невозможно; можно определить только термин. Поэтому никаких «реальных» определений не существует – существуют лишь номинальные определения, которые мы и называем просто определениями.

Первоначальные (неопределяемые понятия).

Отметим, что ни одна наука не может определить все свои понятия. Ведь определить понятие – значит выразить его через какие-то другие понятия; если мы и эти понятия захотим определить, то нам придется выразить их через третьи и т.д. Этот процесс не может продолжаться бесконечно, так что должны существовать понятия, которым не предшествуют никакие ранее определенные понятия. Этим первым понятиям нельзя дать определение, не впадая в ошибку, называемую «порочным кругом». Поэтому их называют первоначальными или неопределяемыми. Таковы исходные понятия всякой науки. Нужно стремиться к тому, чтобы таких понятий было по возможности немного и они были достаточно простыми.

Примеры.

1) Д. Гильберт при построении геометрии в своей книге «Основания геометрии» (1899) избрал в качестве первоначальных понятия: точка, прямая, плоскость.

2) Понятие «понятие» есть одно из первоначальных понятий логики. Именно поэтому невозможно дать ему достаточно строгого определения. [1, с. 42-48]

Суждение

В суждениях выражаются знания о связях между понятиями.

Суждения и высказывания.

Суждение – есть форма мысли, в которой утверждается (или отрицается) либо связь между предметом и его признаком, либо связь (отношение) между предметами, либо факт существования предмета; суждение может быть либо истинным, либо ложным, при это непременно одним из двух.

Высказывание – это предложение языка, выражающее суждение.

Образно выражаясь, можно сказать, что суждение – в голове, а высказывание – на языке. Поскольку иначе, как с помощью языка суждение выразить невозможно, поэтому суждение можно отождествить с высказыванием.

Итак, высказывание – это предложение, которое что-либо утверждает (или отрицает) и о котором можно судить, истинно оно или ложно. Аристотель в трактате «Об истолковании» писал: «Всякая речь что-либо означает… Но не всякая речь есть высказывающая речь, а лишь та, в которой содержится истинность или ложность чего-либо; мольба, например, есть речь, но на не истинная и не ложна. Итак, прочие речи оставлены здесь без внимания, ибо рассмотрение их более подобает искусству красноречия или стихотворному искусству; к настоящему исследованию относится высказывающая речь».

Таким образом, наличие у предложения значения истинности – то характеристическое свойство, которые выделяет высказывания их класса всех предложений языка.

Что такое «истина» и что такое «ложь»? Как определить истинное значение высказывания? Вот что говорит по этому поводу Аристотель: «… Истину говорит тот, кто считает разъединенное разъединенным и связанное – связанным, а ложное – тот, кто думает обратно тому, как дело обстоит с вещами… Не потому ты беден, что мы считаем тебя бедным, а наоборот, именно потому, что ты беден, мы, утверждающие это, говорим правду»[1]. И еще он же: «В самом деле, говорить, что сущее не существует или несущее существует, это – ложь, а говорить, что сущее существует а несущее не существует, это – правда»[2].

Таким образом, *истинное суждение* (высказывание) – такое, в котором связь понятий правильно отражает реальные свойства и отношения предмета мысли. *Ложное суждение* (высказывание) – такое, в котором связь понятий искажает объективные свойства и отношения предмета мысли.

Простые и сложные суждения.

Простым суждением называется суждение, ни одна связная часть которого, в свою очередь, не является суждением.

<u>Примеры</u>.

1) «Кража есть преступление», «Окружность есть плоская фигура».

[1] Аристотель. Соч.: в 4-х т. – М.: Мысль, 1976, т. 1, с. 250.
[2] Аристотель. Метафизика IV. – М. – Л.: Соцэкгиз, 1934, с. 75.

Сложным суждением называется суждение, имеющее в своем составе другие суждения.

<u>Примеры</u>.

1) «Кража и разбой относятся к умышленным преступлениям».

2) «Окружность – плоская фигура, но пирамида не является плоской фигурой».

Когда в логику вошла математика, то выяснилось, что сложные суждения устроены в определенном смысле проще, чем те, которые традиционная логика назвала простыми. Это различие особенно проявилось при анализе умозаключений с простыми и сложными суждениями. В математической логике выделились два фундаментальных раздела – логика (алгебра) высказываний и логика предикатов. Первый из них был посвящен изучению строения сложных суждений – получения их из более простых суждений с помощью логических связок (языковых союзов). Второй раздел стал изучать строение простых высказываний в их понимании традиционной логикой. [1, с. 49-50]

Элементы логики высказываний

Высказывания и их логическое значение.

Будем сопоставлять истинному высказыванию символ – 1, а ложному – символ 0. Другими словами, введем функцию λ, заданную на совокупности всех высказываний и принимающую значение в двухэлементном множестве {0,1} по следующему правилу:

$$\lambda(P) = \begin{cases} 1, & \text{если высказывание } P \text{ истинно}, \\ 0, & \text{если высказывание } P \text{ ложно} \end{cases}$$

Функция λ называется *функцией истинности*, а значение $\lambda(P)$ – *логическим значением* или *значением истинности* высказывания P.

Примеры высказываний:

A_1: «Москва – столица России»,

A_2: «Саратов находится на берегу Невы»,

A_3: «Все люди смертны»,

A_4: «Сократ – человек»,

A_5: «7 < 4»,

A_6: «Волга впадает в Каспийское море»,

A_7: «А.С. Пушкин – великий русский математик»,

A_8: «Снег – белый».

Для приведенных высказываний имеем логически значения: $\lambda(A_1) = 1$, $\lambda(A_2) = 0$, $\lambda(A_3) = 1$, $\lambda(A_4) = 1$, $\lambda(A_5) = 0$, $\lambda(A_6) = 1$, $\lambda(A_7) = 0$, $\lambda(A_8) = 1$.

Примеры невысказываний:

1) Сегодня плохая погода.

2) Математика – интересный предмет.

3) Да здравствуют музы!

4) Который час?

5) Определения не являются высказываниями.

Операции над высказываниями.

В рассуждениях мы строим из одних высказываний другие при помощи так называемых логических союзов (связок) «не», «и», «или» и некоторых других. С математической точки зрения эту процедуру можно рассматривать как операцию над высказываниями. Чтобы дать точные определения этих союзов-операций, нужно сказать, каким образом зависит истинное значение высказывания, полученного с помощью логического союза, от истинности значений тех высказываний, из которых оно получено.

Над высказываниями определяются следующие основные *операции (логические связки)*, которые позволяют из имеющихся высказываний строить новые:

1) *отрицание*: $\urcorner P$ (читается «не P»);

2) *конъюнкция*: $P \wedge Q$ (читается «P и Q», используется также иное обозначение: P&Q);

3) *дизъюнкция*: $P \vee Q$ (читается «P или Q»);

4) *импликация*: $P \to Q$ (читается «если P, то Q», или «из P следует Q», или «P достаточно для Q», или «Q необходимо для P»);

5) *эквивалентность*: $P \leftrightarrow Q$ (читается «P равносильно Q», или «P тогда и только тогда, когда Q», или «P необходимо и достаточно для Q»).

При этом логические значения результатов этих операций связаны с логическим значением исходных высказываний так, как указано в следующих таблицах, называемых таблицами истинности соответствующих операций:

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(\neg P)$	$\lambda(P \wedge Q)$	$\lambda(P \vee Q)$	$\lambda(P \to Q)$	$\lambda(P \leftrightarrow Q)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1		0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1		1	1	1	1

Каждую из этих операций можно рассматривать как операцию над символами 0 и 1. Так, например, дизъюнкция и импликация задают соответственно следующие правила действий с указанными символами:

$0 \vee 0 = 0,\ \ 0 \vee 1 = 1,\ \ 1 \vee 0 = 1,\ \ 1 \vee 1 = 1$ и

$0 \to 0 = 1,\ 0 \to 1 = 1,\ 1 \to 0 = 0, 1 \to 1 = 1.$

Отметим, что традиционная логика рассматривает еще одну логическую связку – *строгую дизъюнкцию*. Ее определяющая таблица истинности отличается от таблицы истинности дизъюнкции тем, что в последней строке стоит 0. Она обозначается $P \dot{\vee} Q$, читается «P или и только или Q». [1, с. 50-52]

Элементы логики предикатов

Понятие предиката обобщает понятие высказывания и является вторым после высказывания важнейшим понятием, изучаемым математической логикой.

Предикат и его множество истинности.

n-местным предикатом (или *функцией-высказыванием* от n переменных), определенным на множествах (областях) $M_1, M_2, \ldots, M_n$, называют выражение, содержащее n (предметных) переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных конкретных элементов (предметов) из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно. Для n-местного предиката будем использовать обозначение $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Высказывание будем считать 0-местным предикатом.

Примеры.

1) "$x^2 + y^2 \leq 1$ – двухместный предикат над R.

2) «Река x впадает в озеро Байкал» – одноместный предикат над множеством названий рек.

Множество истинности n-местного предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданного над множествами $M_1, M_2, \ldots, M_n$, есть следующее подмножество декартова произведения $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ этих множеств:

$P^+ = \{(a_1, \ldots, a_n) : \lambda\big(P(a_1, \ldots, a_n)\big) = 1\}$.

Множество истинности 1-местного предиката $P(x)$, заданного над множеством M, есть следующее подмножество множества M:

$P^+ = \{(a_1, \ldots, a_n) : \lambda\big(P(a_1, \ldots, a_n)\big) = 1\}$.

Предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$, заданный над $M_1, \ldots, M_n$, называется выполнимым, если $P^+ \neq \emptyset$, опровержимым, если $P^+ = M_1 \times \ldots \times M_n$, тождественно ложным, если $P^+ = \emptyset$.

Равносильность и следование предикатов.

Предикаты $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над одними и теми же множествами называют *равносильными* или *эквивалентными*, если $P^+ = Q^+$, т.е. если один из них обращается в истинное высказывание на тех и только тех наборах значений переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание обращается другой предикат. Предикат $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *следствием* предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданного над теми же множествами, что и предикат $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если он обращается в истинное высказывание на всех наборах значений переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание обращается предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т.е. если $Q^+ \supseteq P^+$.

Операции над предикатами.

На предикаты естественным образом переносятся все операции (логические связки), которые мы проделывали над высказываниями: $\urcorner P(x)$, $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$, $P(x) \rightarrow Q(x)$, $P(x) \leftrightarrow Q(x)$. Например, дизъюнкцией n-местных предикатов $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданных над множествами $M_1, M_2, \ldots, M_n$, называют новый n-местный предикат над этими множествами, обозначаемый $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, который обращается в ложное высказывание на тех и только тех значениях переменных из множеств M_1, M_2, …, M_n, на которых в ложное высказывание обращаются оба данных предиката.

Кроме того, для предикатов определяются еще две операции:

1) *квантор общности* $(\forall x)(P(x))$ (читается: «Для всех x имеет место $P(x)$»); 2) *квантор существования* $(\exists x)(P(x))$ (читается: «Существует x, для которого имеет место $P(x)$»). Эти операции применяются к одному предикату. Они ставят в соответствие одноместному предикату $P(x)$ высказывания $(\forall x)(P(x))$ и $(\exists x)(P(x))$ соответственно, логические значения которых определяются следующими формулами:

$$\lambda[(\forall x)(P(x))] = \begin{cases} 1, & \textit{если } P(x) - \textit{ тождественно истинный предикат,} \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\lambda[(\exists x)(P(x))] = \begin{cases} 0, & \textit{если } P(x) - \textit{ тождественно ложный предикат,} \\ 1, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Применение кванторов по переменной x_1 к n-местному предикату $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ превращает его в (n-1)-местные предикаты $(\forall x_1)(P(x_1, x_2, \dots, x_n))$ и $(\exists x)(P(x_1, x_2, \dots, x_n))$ от переменных $x_2, \dots, x_n$. В последних выражениях переменная x_1 *связанная*, а $x_2, \dots, x_n$ – *свободные*.

Вместо $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)(P(x_1, x_2, \dots, x_n))$ пишут $(\forall x_1 \dots x_n)(P(x_1, x_2, \dots, x_n))$.

Вместо $(\exists x_1) \dots (\exists x_n)(P(x_1, x_2, \dots, x_n))$ пишут $(\exists x_1 \dots x_n)(P(x_1, x_2, \dots, x_n))$.

Если предикат $P(x)$ задан над конечным множеством $M = \{a_1, \dots, a_n\}$, то высказывание $(\forall x)(P(x))$ равносильно конъюнкции $P(a_1) \wedge \dots \wedge P(a_n)$, высказывание $(\exists x)(P(x))$ – дизъюнкции $P(a_1) \vee \dots \vee P(a_n)$.

Ограниченные кванторы.

Выражение $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$ обозначают $(\forall P(x))(Q(x))$. Символ $(\forall P(x))$ называют *ограниченным квантором общности*. Выражение $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$ обозначают $(\exists P(x))(Q(x))$. Символ $(\exists P(x))$ называют *ограниченным квантором существования*.

<u>Примеры</u>.

1) $(\forall x \in N)(x \geq 1)$ означает $(\forall x)(x \in N \to x \geq 1)$.

2) $(\exists x \in R)(x^2 < 0)$ означает $(\exists x)(x \in R \wedge x^2 < 0)$.

3) $(\forall x \in R)(\forall y \in R)(\exists n \in N)(nx > y)$ означает

$(\forall x)\big[x \in R \to \big((\forall y)(y \in R) \to (\exists n)(n \in N \wedge nx > y)\big)\big]$. [1, с. 56-58]

Дедуктивные умозаключения

Умозаключение – третий, после понятия и суждения, важнейший объект изучения традиционной логики, восходящей к Аристотелю. В умозаключениях выражаются логические связи между суждениями. В самом общем виде умозаключение представляет собой мыслительный процесс получения нового знания, выраженного в суждении, из других знаний, также выраженных в суждениях. Исходные суждения называются посылками умозаключения, а получаемое суждение – заключением или следствием. Таким образом, посредством умозаключений мы получаем приращение знаний, не обращаясь к исследованию предметов и явлений самой действительности, имеет возможность открывать такие связи и отношения действительности, которые невозможно усмотреть непосредственно.

Умозаключения делятся на дедуктивные и правдоподобные (или индуктивные, или интуитивные). Это тесно связано с двумя качествами человеческого мышления – логикой и интуицией.

Теория умозаключений – это по существу апофеоз логики, ее вершина, поскольку в ней устанавливается, какие суждения следуют (вытекают, выводятся) из каких. В нахождении такого порядка в хаосе суждений и состоит высшее предназначение логики как науки. Здесь уместно вспомнить слова одного из основоположников кибернетики американского математика Норберта Винера: «Высшее назначение математики состоит в нахождении порядка в хаосе, который нас окружает». Вершиной теории умозаключений в традиционной логике является аристотелевская теория силлогизмов, созданная Аристотелем почти 2500 лет назад.

Тем не менее, в традиционной логике не были выработаны достаточно универсальные критерии правильности умозаключений: в ней был выделен ряд отдельных типов умозаключений, правильность которых была очевидна или могла быть обоснована с помощью несложных рассуждений. Только став математической логика смогла создать завершенную теорию умозаключений, включившую в себя теорию умозаключений традиционной логики.

Общая характеристика дедуктивных умозаключений.

Глобальное деление умозаключений на дедуктивные и индуктивные связано с двумя качествами человеческого мышления – логикой и интуицией. Дедуктивные умозаключения связаны с логикой, индуктивные – с интуицией. Расхожим является мнение о том, что дедуктивные умозаключения – это «умозаключения от общего к частному», а индуктивные – это «умозаключения от частного к общему». Эти «определения» лишь в самых общих чертах характеризуют, в частности, дедуктивные умозаключения. Это одно приведенное свойство еще не является для них определяющим. Постараемся понять, чем же в действительности отличаются друг от друга дедуктивные и индуктивные умозаключения.

Будем называть *умозаключением* логическую операцию, сопоставляющую одному или нескольким данным суждениям (высказываниям) новое суждение (высказывание). В зависимости от того, по каким правилам происходит это сопоставление, умозаключения и делятся на дедуктивные (от лат. *deductio* – выведение) и индуктивные (от лат. *inductio* – наведение) или правдоподобные. Дедуктивное умозаключение основано, прежде всего, на анализе формальной (логической) структуры посылок и следствия, индуктивное умозаключение основано на анализе содержания посылок и следствия.

Дедуктивные умозаключения.

Анализ формальной структуры посылок и следствия дедуктивного умозаключения состоит в следующем. Каждое суждение, входящее в состав умозаключения, может быть представлено выражением (формулой) на языке логики высказываний (или логики предикатов): $F_1(A_1, \ldots, A_n)$,…, $F_m(A_1, \ldots, A_n)$ – посылки, $G(A_1, \ldots, A_n)$ – заключение (следствие), где $A_1, \ldots, A_n$ – простые суждения, образующие составные суждения $F_1, \ldots, F_m, G$. Отвлечемся (абстрагируемся) теперь от конкретного содержания высказываний $A_1, \ldots, A_n$. Это означает, что в рассматриваемых формальных выражениях конкретные высказывания $A_1, \ldots, A_n$ должны быть заменены произвольными пропозициональными переменными $X_1, \ldots, X_n$ соответственно. В итоге будут получены формулы логики высказываний (или логики предикатов): $F_1(X_1, \ldots, X_n)$, …, $F_m(X_1, \ldots, X_n)$, $G(X_1, \ldots, X_n)$. Если теперь формула $G(X_1, \ldots, X_n)$ окажется логическим следствием формул $F_1(X_1, \ldots, X_n)$, …, $F_m(X_1, \ldots, X_n)$, т.е.

$$F_1(X_1, \ldots, X_n),\ \ldots,\ F_m(X_1, \ldots, X_n) \vDash\ G(X_1, \ldots, X_n)$$

(т.е. будет обращаться в истинное высказывание при всякой такой подстановке вместо всех ее пропозициональных переменных конкретных высказываний, при которой в истинные высказывания превращаются все формулы $F_1(X_1, \ldots, X_n)$, …, $F_m(X_1, \ldots, X_n)$), то рассматриваемое дедуктивное умозаключение называется *правильным* (или *верным*). В противном случае, т.е. если логическое следование для соответствующих формул не выполняется, рассматриваемое дедуктивное умозаключение называется *неправильным* (или *неверным*).

Таким образом, свойство правильности и неправильности умозаключения относится фактические к целому классу дедуктивных умозаключений, имеющих идентичную структуру посылок и следствия. Это обстоятельство дает возможность введения правильных и неправильных схем умозаключений и дальнейшей эффективной математизации (формализации) этого раздела традиционной логики.

Пример 1.

Если четырехугольник является квадратом, то его диагонали равны.
Четырехугольник KLMN – квадрат.
___
Диагонали четырехугольника KLMN равны.

Пример 2.

Если Шекспир – великий драматург, то его пьесы ставятся в театрах.
Шекспир – великий драматург.
___
Пьесы Шекспира ставятся в театрах.

Нетрудно видеть, что в примере 1 из посылок, имеющих строение $\mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_2$ и A_1, выводится следствие A_2, и в примере 2 из посылок, имеющих строение

$B_1 \to B_2$ и B_1, выводится следствие B_2.Таким образом, оба эти умозаключения, никак не связанные друг с другом по содержанию, основаны на одной и той же логической схеме:

$$\frac{\begin{array}{l} X \to Y \\ X \end{array}}{Y}$$

Значит, оба эти умозаключения являются дедуктивными и, поскольку имеет место логическое следование $X \to Y, X \vDash Y$, являются правильными.

Правильность и неправильность дедуктивного умозаключения.

Проверка правильности дедуктивного умозаключения состоит в проверке выполнимости логического следования для формул логики высказываний или логики предикатов, выражающих логическую структуру посылок и заключения данного умозаключения. Чтобы доказать неправильность данного дедуктивного умозаключения, нужно привести конкретный пример другого умозаключения с такой же логической структурой посылок и следствия, в котором все посылки были бы истинными, а следствие – ложным. Такой пример называется *опровергающим* (или *контрпримером*).

Важно понимать, что не следует путать правильность и неправильность дедуктивного умозаключения с истинностью и ложностью получаемого в результате суждения. Рассмотрим в связи с этим пример.

Пример 3.

Все адвокаты – юристы.

Некоторые юристы – выпускники СГУ.

Некоторые адвокаты – выпускники СГУ.

Из двух истинных суждений-посылок мы пришли к истинному заключению. И, тем не менее, данное умозаключение неверно. Для его опровержения, как было отмечено выше, нужно привести опровергающий пример, т.е. умозаключение такой же логической структуры, но в котором все посылки были бы истинными, а следствие – ложным. Таким примером может служить следующий.

Пример 4.

Все студенты СГУ – граждане Российской Федерации.

Некоторые граждане Российской Федерации – пенсионеры.

Некоторые студенты СГУ – пенсионеры.

В правильном дедуктивном умозаключении следствие должно быть истинным при условии истинности всех посылок. Отсюда не надо делать вывода, что если среди посылок правильного дедуктивного умозаключения имеются ложные, то следствие должно быть ложным. Рассмотрим, например, такое умозаключение.

Пример 5.

Все ромбы являются правильными четырехугольниками.

Все квадраты являются ромбами.

Все квадраты – правильные четырехугольники.

Ясно, что оно правильное, его заключение истинно, а из посылок первая ложна, а вторая истинна. Можно указать и такое правильное дедуктивное умозаключение, в котором ложны все посылки, но, тем не менее, заключение истинно. Наконец, возможна ситуация, когда в правильном умозаключении при наличии ложных посылок приходят к ложному умозаключению. Вот такой пример.

Пример 6.

Все деревья – лиственные.
Сосна – дерево.
Сосна – лиственное дерево. [1, с. 69-72]

Правдоподобные умозаключения.

Правдоподобными называются умозаключения, в которых заключение B не следует с необходимостью из посылок $A_1, A_2, \dots, A_m$, но посылки дают возможность считать заключение вероятным. В этом случае суждения $A_1, A_2, \dots, A_m$ используются не для осуществления дедуктивного вывода суждения B из посылок $A_1, A_2, \dots, A_m$, а применяются как некая «подсказка», «намек», «подводящий» (или «наводящий») нас на мысль о возможности принятия высказывания B. Переход от посылок к заключению носит здесь не достоверный (как при дедукции), а лишь правдоподобный (проблематичный, вероятностный) характер. Посылки лишь подтверждают заключение B, делают истинность B более достоверной, более вероятной, нежели истинность B без наличия посылок $A_1, A_2, \dots, A_m$. Правдоподобный характер связи между посылками и заключением иногда обозначают посредством записи $A_1, A_2, \dots, A_m \mid\approx B$, которая читается: «из посылок $A_1, A_2, \dots, A_m$ правдоподобно следует B». Отношение правдоподобного следования «$\approx$», конечно же, следует отличать от отношения логического следования «$\vDash$», лежащего в основе теории дедукции.

Большой класс правдоподобных умозаключений образуют индуктивные умозаключения, состоящие в том, что из справедливости некоторого числа суждений о единичных фактах делается заключение о справедливости общего суждения (иначе говоря, из того, что некоторые элементы класса обладают каким-то свойством, делается заключение, что им обладают все его элементы), или из справедливости менее общего суждения делается заключение о справедливости более общего суждения. Как мы уже отмечали, если дедуктивное умозаключение основано на анализе формальной структуры посылок и следствия умозаключения, то индуктивное умозаключение основано на анализе их содержания. В индуктивном умозаключении мысль действительно развивается «от частного к общему», и основная функция индуктивных выводов в процессе познания – это генерализация знаний, т.е. получение все более общих суждений. Если посредством дедуктивных умозаключений некоторая мысль «выводится» из других мыслей, то индуктивные умозаключения лишь «наводят» на мысль. В связи с таким характером индуктивных умозаключений они обеспечивают получение при истинных посылках лишь правдоподобного заключения. Это заключение может быть истинным лишь с той или иной степенью вероятности. При получении индуктивных умозаключений большую роль начинает играть интуиция; логика, игравшая первостепенную роль в дедуктивных умозаключениях, отступает на второй план. В этом, собственно, и состоит принципиальное отличие индуктивных умозаключений от дедуктивных: к первым не могут быть применены методы логического анализа формальной структуры посылок и следствия умозаключения и проверки правильности самого умозаключения.

Рассмотрим два примера.

Пример 1.

Обь замерзает зимой.
Енисей замерзает зимой.
Лена замерзает зимой.
Обь, Енисей, Лена – сибирские реки.
Все сибирские реки замерзают зимой.

Пример 2.

Дуб – лиственное дерево.
Береза – лиственное дерево.
Липа – лиственное дерево.
Дуб, береза, липа – деревья.
Все деревья – лиственные.

Переходя в этих умозаключениях от посылок к следствиям, мы не может отвлечься от анализа их содержания. Хотя эти умозаключения имеют одинаковую структуру, анализ их содержания показывает, что в примере 1 мы от всех истинных посылок переходим к истинному заключению, а в примере 2 – от всех истинных посылок – к ложному заключению. Таким образом, умозаключения этих примеров не носят дедуктивный характер, они не основаны на анализе формальной структуры умозаключения. Это – индуктивные умозаключения.

Еще более ярким примером индуктивного умозаключения, в котором связь между посылками и следствием является связью не по логической форме, а по содержанию, может служить следующее умозаключение.

Пример 3.

Спичка зажжена.
Зажженная спичка поднесена к бумаге.
Бумага воспламеняется.

В нем связь между посылками и следствием носит вовсе некий физический, причинно-следственный характер.

Индуктивные умозаключения не могут изучаться в рамках математической логики. Традиционная логика дала описания и характеристики различных видов таких умозаключений. Попытки математического изучения индуктивных умозаключений предпринимаются с использованием теории вероятностей. [1, с. 112-114]

Игошин В.И. Математическая логика как педагогика математики

Определения в математике

В математике определения различаются по тому, к каким семантическим категориям относятся определяемые в них термины. Это связано с тем, что требования, которым должно удовлетворять «хорошее» определение, как раз и зависит от того, к какой семантической категории относятся определяемый в данном определении термин. В математике наиболее часто встречаются определения знаков отношений, знаков операций и констант. Именно такие определения мы и рассмотрим.

Определение знаков отношений.

Если F – произвольное предложение некоторой математической теории (записанные на логико-математическом языке этой теории), то оно может быть использовано для введения отдельного знака отношения. Делается это следующим образом. Если $x_1, \dots, x_n$ – некоторые предметные переменные, то говорят, что эквивалентность

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow F \qquad (1)$$

является правильным определением знака n-арного отношения φ в указанной теории, если:

а) знак φ не встречался ранее в этой теории;

б) переменные $x_1, \dots, x_n$ попарно различны;

в) все свободные переменные предложения F содержатся среди $x_1, \dots, x_n$.

Пример 1. Определение знака «≤» отношения «ментше или равно» выглядит так: $\varphi(x, y) \Leftrightarrow F(x, y)$, где $\varphi(x, y)$: «$x \leq y$», а $F(x, y)$: $x < y$ или $x = y$. Это означает, что всюду, где встречается предложение «$x < y$ или $x = y$» разрешается вместо него писать «$x \leq y$», и наоборот, всюду, где встречается «$x \leq y$», писать вместо него «$x < y$ или $x = y$».

Пример 2. Определение обратимости числа из теории действительных чисел: (x – обратимо) $\Leftrightarrow (\exists y)(xy = 1)$. Заметим, что хотя в правой части имеется две переменные, свободна в ней только одна переменная x, как и в левой части. Чтобы осознать этот факт для правой части, требуется некоторое умственное усилие. По отношению к левой части этого не требуется: в ней зависимость лишь от x видна сразу.

Пример 3. Еще нагляднее это качество определений видно на примере определения периодичности:

(Функция $f(x) -$ периодическая) $\Leftrightarrow (\exists T > 0)(\forall x \in M)[(x + T \in M) \wedge (x - T \in M) \wedge (f(x - T) = f(x) = f(x + T))]$.

Требуется значительное усилие, чтобы за переплетением скобок и кванторов в правой части определения увидеть, что она зависит от одной лишь переменной f. В левой части это видно с одного взгляда.

Отметим, что в определении (1) правильного определения в качестве определяющего положения F для введения нового знака отношения в какой-либо теории берется предложение этой же теории. Этим исключается употребление любых терминов, не принадлежащих рассматриваемой теории. В частности, исключается и возможность появления в определяющем предложении самого определяемого термина, т.е. возможность того, что называют «порочным кругом в определении».

Далее, условие а) в определении (1) исключает возможность двойного (противоречивого) толкования одного и того же знака. В условии б) требуется, чтобы переменные $x_1, \dots, x_n$ были попарно различными. Если это будет не так, то определяемое понятие (знак отношения φ) будет определено не в полном объеме, и, в частности, найдутся контексты, из которых будет невозможно исключить знак φ. Например, если мы определим знак бинарного отношения «≤» условием: $x \leq x \Leftrightarrow x < x$ или $x = x$, то мы не сможем истолковать, в частности, соотношение 3≤5.

Наконец, если будет нарушено третье условие в) и в определяющем понятии найдутся свободные предметные переменные, отсутствующие в определяемом, то может нарушиться однозначность истолкования предложений, содержащих определяемый знак. Например, определив рациональное число следующим образом:

$$(x - \text{рационально}) \Leftrightarrow (x = m/n \text{ и } m, n \in Z),$$

мы не сможем понять, является ли 1 рациональным числом, ибо при одних значениях m и n соответствующее определяющее предложение истинно «$1 = 2/2$ и $2{,}2 \in Z$», а при других – ложно: «$1 = 3/5$ и $3{,}5 \in Z$».

Определение знаков операций.

Эти определения могут быть сведены к определениям знаков отношений, если использовать равенство: вместо того, чтобы определять знак n-арной операции «$\varpi(x_1, \dots, x_n)$», определяют знак (n+1)-арного отношения «$x = \varpi(x_1, \dots, x_n)$» или «$\varpi(x_1, x_2 \dots, x_n, x)$».

Пусть F – произвольное предложение некоторой математический теории (записанное на логико-математическом языке этой теории). Если $x, x_1, \dots, x_n$ – некоторые предметные переменные, то говорят, что эквивалентность

$$x = \varpi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow F \qquad (2)$$

является правильным определением знака n-арной операции ώ в указанной теории, если:

а) знак ώ не встречался ранее в этой теории;

б) переменные $x, x_1, \dots, x_n$ попарно различны;

в) все свободные переменные предложения F содержатся среди $x, x_1, x_2 \dots, x_n$;

г) для любых значений переменных $x_1, \dots, x_n$ существует не более одного значения переменной x, при котором выполняется предложение F (предложение F представляет собой открытую формулу логики предикатов со свободными предметными переменными $x, x_1, \dots, x_n$, которая при подстановке вместо всех свободных предметных переменных конкретных предметов прекращается в конкретное высказывание – истинное или ложное).

По этому соглашению всюду, где встретится равенство вида $x = \varpi(x_1, \ldots, x_n)$, его можно заменить предложение вида F и обратно.

Пример 4. Введение знака операции деления действительных чисел.

Введем сначала тернарное отношение ώ$_1$ на множестве действительных чисел: $\varpi_1(x_1, x_2, x) \Leftrightarrow x_2 \neq 0$ и $x \cdot x_2 = x_1$. Нетрудно проверить однозначность этого отношения: для любых значений x_1 и x_2 существует не более одного (точнее, точно одно) значение x, что $x_2 \neq 0$ и $x \cdot x_2 = x_1$. Поэтому можем ввести знак операции деления действительных чисел: $x = x_1 : x_2 \Leftrightarrow x_2 \neq 0$ и $x \cdot x_2 = x_1$.

Если в определении отношения ώ$_1$ мы опустим условие $x_2 \neq 0$, то проверка выполнения условия его однозначности не проходит: при $x_1 = x_2 = 0$ существует более одного x, для которого $x \cdot x_2 = x_1$. Поэтому эквивалентность $x = x_1 : x_2 \Leftrightarrow x \cdot x_2 = x_1$ не является правильным определением знака операции деления.

Определение констант основано на тех же идеях, что и определение знаков операций. Здесь только требуется, чтобы предложение, выбранное в качестве определяющего, содержало ровно одну свободную переменную и выполнялось бы не более чем для одного значения этой переменной.

Пусть F – произвольное предложение некоторой математической теории (записанное на логико-математическом языке этой теории). Если x – некоторая предметная переменная, то говорят, что эквивалентность

$$x = C \Leftrightarrow F \tag{3}$$

является правильным определением константы C в указанной теории, если:

а) знак C не встречался ранее в этой теории;

б) x является единственной свободной предметной переменной в предложении F;

в) предложение F выполняется (т.е. формула F превращается в истинное высказывание) лишь при одном значении x.

По этому соглашению всюду, где встретится равенство вида $x = C$, его разрешается заменить предложением вида F и обратно.

Пример 5. Определение нейтрального элемента в системе натуральных (или действительных) чисел: $x = 1 \Leftrightarrow (\forall y)(y \cdot x = y)$.

Определения через равенство.

Рассмотренные выше определения называются определениями через эквивалентность. Наряду с ними в математике нередко используются и определения через равенство.

Опишем, например, правило определения знаков операций через равенство. Пусть t – всюду определенное выражение какой-либо математической теории (термин языка этой теории), $x_1, \ldots, x_n$ – предметные переменные. Говорят, что равенство

$$\varpi(x_1, \ldots, x_n) = t \tag{4}$$

является правильным определением (через равенство) знака n-арной операции ώ в указанной теории, если:

а) знак ώ не встречался ранее в этой теории;

б) переменные $x_1, \ldots, x_n$ попарно различные;

в) все свободные переменные выражения t содержатся среди $x_1, \ldots, x_n$.

Добавлять к этому условие однозначности не требуется, ибо и без того любое выражение при любых значениях переменных принимает не более одного значения.

Пример 6. Операцию вычитания в теории действительных чисел можно определить равенством $x - y = x + (-y)$.

Отметим, что с выражениями, определенными не всюду, подобные действия не проходят. Например, мы не может определить знак операции деления равенством: $x : y = x \cdot y^{-1}$. Дело в том, что приняв это равенство, мы должны принять и все его частные случаи, в том числе и те, в которых $y = 0$, но это невозможно. [2, с. 23-26]

Математические теоремы как суждения

Мы уже отмечали, что суждение как форма мысли играет в процессе познания чрезвычайно важную роль. Всякое знание существует в логической форме суждения. Суждения в математике традиционно называются теоремами. Математическое знание – это система математических теорем и логических взаимосвязей между ними. К числу теорем можно отнести также и математические аксиомы. Это связано с тем, что, во-первых, в каждом данном математическом контексте аксиома может рассматриваться как частный случай теоремы, а, во-вторых, понятие аксиомы вообще относительно: утверждение (суждение), являющееся в одной теории аксиомой, а в другой может оказаться теоремой, и наоборот – теорема может стать аксиомой.

1. Как же устроена математическая теорема являющаяся суждением в области математики? Начнем с двух примеров математических теорем: «*Натуральное число, оканчивающееся цифрой 5, само делится на 5*», «*Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины угла с равными сторонами, является медианой этого треугольника*». Данные теоремы являются суждениями о свойствах (или категорическими суждениями). Их можно представить в форме такого суждения «*Всякое S есть P*». Для первой теоремы: «*Натуральное число, оканчивающееся цифрой 5 (S), само делится на 5(P)*». Для второй: «*Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины угла с равными сторонами (S), является медианой этого треугольника (P)*».

Математическая традиция, восходящая к математикам Древней Греции, требует, чтобы подобные теоремы формулировались с участием логического союза «если …, то». Тогда первая теорема будет сформулирована так: «*Если натуральное число n оканчивается цифрой 5, то n делится на 5*». Вторая теорема: «*Если отрезок является биссектрисой равнобедренного треугольника, проведенной из вершины угла с равными сторонами, то этот отрезок является медианой этого треугольника*».

В последних формулировках завуалирован универсальный (общий) характер проводимых суждений. Для его выявления в формулировку математической теоремы вводят явно слова «все», «всякий», «каждый», «любой» и тому подобные. Тогда формулировки принимают вид: «*Для всякого натурального числа n, если число n оканчивается цифрой 5, то число n делится на 5*», «*Для всякого равнобедренного треугольника ABC, в котором AB = BC, если BM – биссектриса треугольника ABC, то BM – медиана треугольника ABC*». Такие формулировки уже максимально близки к тому, чтобы быть записанными на формализованном логико-математическом языке. Первая теорема:

$(\forall n \in N)[(\text{число } n \text{ оканчивается цифрой } 5) \rightarrow (\text{число } n \text{ делится на } 5)]$.

Введя предикаты $O_5(n)$ и $5|n$, можем последнюю формулировку представить в виде:

$$(\forall n \in N)[O_5(n) \rightarrow 5|n]. \qquad (1)$$

Вторая теорема:

$$(\forall \Delta ABC, AB = BC)\big[(BM - \text{биссектриса}) \rightarrow (BM - \text{медиана})\big]. \qquad (2)$$

Из формулировок (1) и (2) отчетливо видно, что рассматриваемые теоремы представляют собой общеутвердительные суждения.

2. Приведем примеры математических теорем, являющихся суждениями об отношениях. Первая теорема: «*Средняя линия треугольника параллельна основанию*». Вторая теорема: «*В окружности меньшая хорда расположена дальше от центра*». Переформулируем эти теоремы в соответствии со сформулированными в предыдущем пункте замечаниями. Первая теорема: «*Во всяком треугольнике ABC, в котором $M \in AB, N \in BC$, если MN – его средняя линия, то MN || AC*». Запишем ее на логико-математическом языке:

$$(\forall \Delta ABC, M \in AB, N \in BC)[(AM = MB \wedge BN = NC) \to MN||AC]. \quad (3)$$

Вторая теорема: «*Во всякой окружности S(O,r) каковы бы ни были ее хорды AB и CD, если AB ≤ CD, то d(O,AB) ≥ d(O,CD)*». Запишем ее на логико-математическом языке:

$$(\forall S(O,r))(\forall AB, CD - \text{хорды})[AB \leq CD \to d(O,AB) \geq d(O,CD)]. \quad (4)$$

Первая теорема есть суждение об отношении параллельности отрезков, вторая – об отношении сравнения и удаленности отрезков от фиксированной точки.

Здесь следует отметить, что в математике много теорем (суждений) об отношениях, потому что математика изобилует различными отношениями: сравнения и делимости чисел, параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, равенства и подобия треугольников и так далее.

3. Рассмотрим подробнее структуру теорем (1) – (4), о которых говорилось в предыдущих пунктах. В строении этих теорем и им подобных можно выделить три части [1]. Сначала дается разъяснительная часть теоремы, т.е. запись $(\forall n \in N)$, $\forall \Delta ABC$, $\forall S(O,r)$, $\forall AB$ и т.д., сопровождаемая разъяснением, что понимает под введенными символами n, ΔABC, $S(O,r)$, *AB*, а затем пишутся два утверждения, соединенные знаком $\to$. Первое из этих утверждений (стоящее после разъяснительной части и перед знаком $\to$) называется условием теоремы, второе (стоящее после знака $\to$) называется заключением теоремы. Например, в разъяснительной части теоремы (1) говорится, что рассматривается любое натуральное число n (т.е $n \in N$), в разъяснительной части теоремы (2) – что рассматривается любой треугольник ΔABC, вершины которого обозначены буквами *A, B, C* и две стороны которого *AB* и *BC* равны, т.е. рассматривается любой равнобедренный треугольник ΔABC, равными сторонами которого считаются стороны *AB* и *BC*. Условия и заключения этих теорем отчетливо видны.

Часто разъяснительная часть теоремы начинается словом «пусть», а переход к условию теоремы отмечается словом «тогда». Вот как в этом случае формулируются теоремы (1) и (4): «*Пусть n – произвольное натуральное число. Тогда если n оканчивается цифрой 5, то n делится на 5*»; «*Пусть S(O,r) – произвольная окружность (с центром в точке O и радиуса r) и AB и CD – любые ее хорды. Тогда, если AB ≤ CD, то расстояние от O до AB не меньше, чем расстояние от O до CD*».

Таким образом, структуру рассмотренных теорем можно представить в следующем виде:

$$(\forall x)(A(x) \to B(x)), \tag{5}$$

где в разъяснительной части указано, что означает (какое множество пробегает) переменная *x* (натуральное число, треугольник, отрезок и т.д.), и так же точно указано, что собой представляют (одноместные) предикаты *A(x)* и *B(x)*. Нередко предикаты *A* и *B* (т.е. условие и заключение теоремы) зависят не от одной переменной *x*, а от нескольких переменных, и теорема в этом случае имеет вид:

$$(\forall x)(\forall y)\dots(\forall z)(A(x, y, \dots, z) \to B(x, y, \dots z)). \tag{6}$$

Вот пример такой теоремы: «Если произведение двух чисел равно нулю, то хотя бы одно из них равно нулю». Символически:

$$(\forall x)(\forall y)[(x \cdot y = 0) \to (x = 0 \lor y = 0)]. \tag{7}$$

Все рассмотренные теоремы представляют собой общеутвердительные или общеотрицательные (если $B(x) \cong \urcorner C(x)$) суждения. Очень многие математические теоремы имеют именно такое строение. Но, помимо теорем, имеющих вид (6), в математике встречаются и теоремы иного типа. Например, в курсе алгебры доказываются теоремы:

$$(\forall x \in R)(\forall y \in R)[x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)],$$
$$(\forall x \in R)(\forall y \in R)[x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + xy + y^2)].$$

Знак $\forall$ указывает на всеобщий характер выписанных соотношений, т.е. показывает, что эти соотношения являются тождествами. Выделить же условие и заключение в этих теоремах затруднительно. Тем не менее, при строго логическом подходе с учетом определения ограниченного квантора общности и их можно представить в виде (6):

$$(\forall x \in R)(\forall y \in R)[(x \in R \land y \in R) \to x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)].$$

Аналогично для второго тождества.

Но все же, теоремы, в которых возможно четко выделить условие теоремы и ее заключение, в математике существуют. Эти теоремы представляют собой суждения о существовании и называются теоремами существования.

4. *Теоремы существования* записываются в форме $(\forall x)(\exists y)(A\,(x, y))$, или в аналогичной форме, содержащей большое число переменных

$$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\exists y)(A\,(x_1, \dots, x_n, y)). \tag{8}$$

Теоремы существования играют огромную роль в математике. Имеются они и в школьном курсе математики. Вот пример:

$$(\forall \Delta ABC)(\exists M)(AM = BM = CM). \tag{9}$$

В этой теореме утверждается существование во всяком треугольнике точки, одинаково удаленной от всех его вершин (т.е. точки, являющейся центром описанной окружности).

Важным примером теоремы существования является так называемая основная теорема алгебры, утверждающая, что любое алгебраическое уравнение (с действительными или комплексными коэффициентами) имеет хотя бы один (действительный или комплексный) корень. Считая, что $a_0, a_1, \dots, a_n, x$ обозначают комплексные числа, эту теорему можно записать так:

$$(\forall a_0, a_1, \dots, a_n, \text{где } n > 0, a_0 \neq 0)(\exists x)(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0). \tag{10}$$

Вот еще примеры теорем существования. «*Через каждую точку плоскости проходит единственная прямая* l_1 *перпендикулярная данной прямой* l *плоскости*». Символически:

$$(\forall l)\ \dots (\forall M)(\exists l_1)(M \in l_1 \land\ l_1 \perp l). \tag{11}$$

(Мы не заостряем пока здесь внимания на символической записи единственности существующей прямой). Вторая теорема: «*Для всякой окружности* ϖ *и точки А вне ее существуют две прямые, проходящие через А и касающиеся* ϖ». Символически: (12)

$(\forall\varpi)(\forall \text{А}, \text{А вне } \varpi)(\exists l_1)(\exists l_2)[A \in l_1 \land A \in l_2 \text{ и } l_1 \text{ касается } \varpi \text{ и } l_2 \text{ касается } \varpi]$.

Этими теоремами мы негласно пользуемся всякий раз, когда приблизительно, «от руки», проводим прямые, о существовании которых говорится в этих теоремах и рассуждаем о них. [2, с. 52-55]

Прямая и обратная теоремы

Прежде чем приступить к рассмотрению этого вопроса обратим внимание на следующую терминологическую особенность.

5. Термином «теорема» в математической литературе, как правило, называют предложение математической теории, истинность которого доказана с помощью логических рассуждений. Таким образом, теорема – это, по меньшей мере, истинное утверждение. С этой точки зрения термины «верная (справедливая, истинная) теорема» и «неверная (ложная) теорема» являются некорректными. Первый представляет собой своего рода словесную тавтологию, т.е. двукратное повторение одного и того же, а второй – внутренне противоречив, так как теорема по самой своей сути не может быть неверной (неистинным утверждением). Тем не менее, такая терминология имеет место. Говорят, что и «теорема верна», и «теорема справедлива» и что «теорема не верна». Особенно такая практика распространена в школьном преподавании математики.

Перейдем теперь к понятию обратной теоремы. Пусть дана теорема, имеющая следующее строение:

$$(\forall x)(A(x) \to B(x)), \tag{5}$$

Поменяем в ней местами условие и заключение, оставив без изменения разъяснительную часть. Получим утверждение следующего строения:

$$(\forall x)(B(x) \to A(x)), \tag{13}$$

Это утверждение называется утверждением, *обратным* для исходной теоремы. Это утверждение может оказаться не теоремой, т.е. может оказаться ложным утверждением. Если же оно само является теоремой (т.е. может быть доказано), то оно называется *обратной теоремой* для данной теоремы. Данная теорема (5) в этом случае называется *прямой теоремой*. В этом случае также нетрудно понять, что если исходить из второй теоремы (13), названной нами обратной, и считать её прямой теоремой, то теорема (5), названная нами прямой, окажется обратной. Поэтому в этом случае говорят также о двух *взаимно обратных теоремах* (5) и (13).

В качестве примеров построим обратные утверждения для теорем (1) – (4), рассмотренных выше.

$$(\forall n \in N)[5|n \to O_5(n)]. \qquad (1')$$

Словесная формулировка: «*Для всякого натурального числа n, если n делится на 5, то n оканчивается цифрой 5*». Полученное обратное утверждение не верно, т.е. теоремой не является.

Обращение теоремы (2):

$$(\forall \Delta ABC, AB = BC)\big[(BM - \text{медиана}) \to (BM - \text{биссектриса})\big]. \qquad (2')$$

Словесно: «*Для всякого равнобедренного треугольника ABC, в котором AB = BC, если BM – медиана, то BM – биссектриса*». Это обратное утверждение верно, т.е. является обратной теоремой для теоремы (2). В итоге (2) и (2') – две взаимно обратные теоремы.

Обращение теоремы (3):

$$(\forall \Delta ABC, M \in AB, N \in BC)[MN||AC \to (AM = MB \wedge BN = NC)]. \qquad (3')$$

Словесно: «*Во всяком треугольнике ABC, в котором M принадлежит AB, N принадлежит BC, если MN параллельно AC, то MN – средняя линия этого треугольника*».

Наконец, обратим теорему (4). Получим утверждение: «*Во всякой окружности S(O,r) каковы бы ни были ее хорды AB и CD, если d(O,AB) ≥ d(O,CD), то AB ≤ CD*». На логико-математическом языке:

$$(\forall S(O,r))(\forall AB, CD - \text{хорды})[d(O,AB) \geq d(O,CD) \to AB \leq CD]. \qquad (4')$$

Полученное утверждение верно, т.е. является обратной теоремой для теоремы (4), так что (4), (4') – две взаимно обратные теоремы.

Вывод, который следует сделать их рассмотрения этих примеров, состоит в следующем. Доказав некоторую теорему, мы еще не можем утверждать, что теоремой (т.е. верным утверждением) будет обратное ей утверждение. Справедливость (истинность) обратного утверждения требует отдельного доказательства. Этот факт соответствует тому, что в алгебре высказываний формулы $X \to Y$ и $Y \to X$, выражающие структуры взаимно обратных утверждений, не равносильны.

6. Обратные теоремы играют исключительно важную роль в математических исследованиях. Поэтому математики, доказав ту или иную теорему, никогда не жалели времени и сил, чтобы выяснить, будет ли теоремой обратное утверждение. Одни теоремы обращались легко, другие – требовали значительных усилий. Обратная задача всегда оказывалась неожиданной. В качестве примера упомянем, например, следующую несложную теорему: «*В равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основаниях равны*». Обратное для нее утверждение: «*Если две биссектрисы треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный*» также справедливо, т.е. является теоремой. Оно носит название теоремы Штейнера-Лемуса.

Что называется «с ходу» доказать эту теорему вряд ли удастся. (Заметим, что аналогичные утверждения для высот и медиан треугольника доказываются совсем несложно). Первое известное доказательство этой теоремы дал лишь в 1840 году немецкий геометр швейцарского происхождения Я. Штейнер в ответ на просьбу другого немецкого геометра С. Лемуса, приславшего ему эту задачу. Доказательство Штейнера было довольно сложным, поэтому попытки найти другие более простые доказательства теоремы Штейнера-Лемуса породили в последующем ряд публикаций в математических журналах (особенно в 1854 – 1864 гг.).

7. Отметим следующее важное обстоятельство. Содержание обратного утверждения и его истинность зависят не только от условия и заключения исходной прямой теоремы, но и от разъяснительной части этой теоремы. Возьмем для примера теорему: «*Диагонали ромба взаимно перпендикулярны*». Прежде чем сформулировать обратное утверждение для данной теоремы, переформулируем последнюю, четко выделив в ней разъяснительную часть, условие и заключение. Первый шаг на этом пути: «Если *ABCD* – ромб, то если диагонали взаимно перпендикулярны». Остается сформулировать разъяснительную часть, в которой необходимо указать, что представляет собой фигура *ABCD*. Здесь нам могут представиться, по меньшей мере, две возможности: *ABCD* может быть произвольным (выпуклым) четырехугольником или же *ABCD* может быть параллелограммом. В первом случае исходная прямая теорема формулируется так:

$$(\forall ABCD - \text{четырехугольник})[(ABCD - \text{ромб}) \rightarrow AC \perp BD]. \qquad (14)$$

Во втором случае:

$$(\forall ABCD - \text{параллелограмм})[(ABCD - \text{ромб}) \rightarrow AC \perp BD]. \qquad (15)$$

По существу, мы получаем, конечно же, две различные теоремы (14) и (15). Для каждой из них сформулируем обратное утверждение. Для теоремы 14: «Всякий четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями является ромбом». Символически:

$$(\forall ABCD - \text{четырехугольник})[AC \perp BD \rightarrow (ABCD - \text{ромб})]. \qquad (14')$$

Очевидно, что это утверждение ложно, т.е. не является теоремой: существует четырехугольник с перпендикулярными диагоналями и не являющийся ромбом.

Обратное утверждение теоремы (15): «Всякий параллелограмм со взаимно перпендикулярными диагоналями является ромбом». Символически:

$$(\forall ABCD - \text{параллелограмм})[AC \perp BD \rightarrow (ABCD - \text{ромб})]. \qquad (15')$$

Как известно, это утверждение истинно, т.е. является теоремой, обратной теореме (15).

Итак, разъяснительная часть теоремы существенно влияет на истинность утверждения, обратного для этой теоремы.

8. Присмотримся внимательнее к разъяснительным частям теорем (14) и (15). Кванторы, стоящие там, представляют собой ограниченные кванторы общности. В теореме (15) этот квантор можно расшифровать следующим образом:

$$(\forall ABCD - \text{четырехугольник})[(ABCD - \text{параллелограмм}) \rightarrow \big((ABCD - \text{ромб}) \rightarrow AC \perp BD\big). \qquad (16)$$

Бескванторная часть этой теоремы имеет структуру, выражающуюся следующей формулой алгебры высказываний: $X_1 \rightarrow (X_2 \rightarrow Y)$. На основании равносильности алгебры высказываний, называемой правилом объединения посылок, эта формула равносильна следующей: $(X_1 \wedge X_2) \rightarrow Y$. Последняя формула равносильна следующей $(X_2 \wedge X_1) \to Y$, которая, в свою очередь, в силу правила разъединения посылок, равносильна формуле $X_2 \to (X_1 \to Y)$. Таким образом, мы получили три равносильные формулировки исходной прямой теоремы (15):

$$X_1 \to (X_2 \to Y), X_2 \to (X_1 \to Y), (X_1 \wedge X_2) \to Y.$$

Посмотрим теперь на теорему (15'), обратную теореме (15). Также расшифруем в ней ограниченный квантор общности:

$$(\forall ABCD - \text{четырехугольник})[(ABCD - \text{параллелограмм}) \to \left(AC \perp BD \to (ABCD - \text{ромб})\right). \quad (17)$$

Бескванторная часть этой теоремы имеет структуру, выражающуюся следующей формулой алгебры высказываний: $X_1 \to (Y \to X_2)$ или $(X_1 \wedge Y) \to X_2$. Сравнив структуры прямой теоремы (15) $(X_1 \wedge X_2) \to Y$ и обратной теоремы (17) $(X_1 \wedge Y) \to X_2$, можно сделать следующий вывод. При построении утверждения, обратного данной прямой теореме, в качестве заключения можно взять не все условия прямой теоремы, а лишь часть этих условий (в данном случае X_2), а остальную часть условий прямой теоремы (в данном случае X_1) вместе в ее заключением (Y) сделать условием обратного утверждения. Таким образом, комбинируя различным образом условия, накладываемые на рассматриваемый объект теоремы, и утверждения, содержащиеся в заключении теоремы, мы можем из данной прямой теоремы получить несколько обратных утверждений, некоторые их которых могут оказаться теоремами.

Итак, для теорем, имеющих строение, выражаемое формулой $(X_1 \wedge X_2) \to Y$, можно сформулировать обратные утверждения, строения которых выражаются формулами: $Y \to (X_1 \wedge X_2)$, $(X_1 \wedge Y) \to X_2$, $(Y \wedge X_2) \to X_1$. При этом, обратной в классическом понимании будет лишь первая форма. Остальные две будем считать обобщенными обратными утверждениями для исходной прямой теоремы. [2, с. 60-63]

Противоположная и обратная противоположной теоремы

9. Для теоремы, имеющей строение (5), можно сформулировать *противоположное утверждение*. Оно получается путем замены условия и заключения исходной теоремы их отрицаниями и, следовательно, имеет вид:

$$(\forall x)(\neg A(x) \to \neg B(x)). \quad (18)$$

Утверждение, противоположное данное теореме, может также быть теоремой, т.е. быть истинным высказыванием, но может таковым и не быть. Это следует из того, что формулы $X \to Y$ и $\neg X \to \neg Y$ не равносильны, в чем нетрудно убедиться, составив таблицы истинности данных формул. В этом можно убедиться и на примерах. Возьмем теорему $A \to B$: «*Если в четырехугольнике все стороны равны, то его диагонали перпендикулярны*». Составляем противоположное утверждение $\neg A \to \neg B$: «*Если в четырехугольнике все стороны не равны, то его диагонали не перпендикулярны*». Последнее утверждение неверно, т.е. теоремой не является. Рассмотрим еще одну теорему: «*Если сумма цифр натурального числа делится на три, то и само число делится на три*». Противоположное утверждение для этой теоремы также справедливо, то есть является теоремой, противоположной данной: «*Если сумма цифр натурального числа не делится на три, то и само число не делится на три*». Итак, в том случае, когда утверждение $X \to Y$ истинно, утверждение $\neg X \to \neg Y$ может быть как истинным, так и ложным. Это означает, что утверждение, противоположное доказанной теореме, в свою очередь нуждается в доказательстве или опровержении.

В то же время, в силу закона контрапозиции $Y \to X \cong \neg X \to \neg Y$ противоположное утверждение $\neg X \to \neg Y$ равносильно обратному утверждению $Y \to X$ для исходной теоремы $X \to Y$. Поэтому если обратное утверждение является теоремой, то и противоположное – теорема тоже. Если условие исходной теоремы состоит из нескольких условий и заключение также содержит несколько утверждений, то, заменяя только некоторые из них их отрицаниями, можно получить ряд противоположных утверждений, каждому из которых будет соответствовать равносильное ему обратное утверждение. Таким образом, при получении формулировок противоположных утверждений для теорем сложных структур можно воспользоваться построенными обратными утверждениями. Каждой формулировке обратного утверждения для данной теоремы соответствует одна равносильная ей форма противоположной теоремы; эта противоположная теорема получается путем отрицания тех частей данной теоремы, которые при образовании соответствующей обратной теоремы переставлялись местами.

Вспомним, например, теорему $((X_1 \wedge X_2) \to Y)$: «*Если круги равны (X_1) и принадлежащие им хорды равны (X_2), то хорды одинаково удалены от центров своих кругов (Y)*». Сформулируем для нее обратные утверждения:

1) $(X_2 \to Y) \to X_1$: «Если из равенства из равенства хорд двух кругов следует равноудаленность этих хорд от центров своих кругов, то эти круги равны».

2) $(X_1 \to Y) \to X_2$: «Если прямолинейные отрезки обладают следующим свойством: будучи хордами в равных кругах, они оказываются равноудаленными от центров этих кругов, то эти отрезки равны между собой».

3) $Y \to (X_1 \wedge X_2)$: «Если две хорды двух кругов равноудалены от соответствующих центров кругов, то эти круги равны между собой и сами хорды равны друг другу».

4) $X_1 \to (Y \to X_2)$: «При условии равенства кругов, содержащих хорды, из равноудаленности хорд от соответствующего центра вытекает равенство самих хорд».

5) $X_2 \to (Y \to X_1)$: «Если хорды, проведенные в двух кругах, равны, то из равноудаленности этих хорд от центров соответствующих кругов будет следовать равенство самих кругов».

Из пяти приведенных обратных утверждений третье не верно, а остальные верны при условии, что один и тот же круг можно рассматривать как два равных круга с совпавшими центрами.

Сформулируем пять соответственных противоположных утверждений для данной теоремы.

1) $\urcorner X_1 \to \urcorner(X_2 \to Y)$: «Если круги, в которых проведены хорды, не равны, то из равенства хорд двух кругов не следует равноудаленность этих хорд от центров своих кругов».

2) $\urcorner X_2 \to \urcorner(X_1 \to Y)$: «Если хорды не равны, то из равенства кругов, в которых они проведены, не следует их равноудаленность от центров этих кругов».

Обратим внимание на то, что в формулировках этих утверждений нельзя пронести отрицание внутрь круглых скобок по правилу $\urcorner X_2 \to \urcorner Y$. Полученное таким образом, например, в первом случае утверждение $\urcorner X_1 \to (\urcorner X_2 \to \urcorner Y)$ будет не равносильно первоначальному и его нельзя считать противоположным утверждением для данной теоремы $(X_1 \wedge X_2) \to Y$.

3) $\urcorner(X_1 \wedge X_2) \to \urcorner Y$: «Если или круги, в которых проведены хорды, или сами хорды не равны друг другу, то такие хорды находятся на различных расстояниях от центров соответствующих кругов».

4) $X_1 \to (\urcorner X_2 \to \urcorner Y)$: «В равных кругах неравные хорды неодинаково удалены от центров своих кругов».

5) $X_2 \to (\urcorner X_1 \to \urcorner Y)$: «Если хорды равны, то из неравенства кругов, в которых они проведены, следует, что эти хорды не равноудалены от центров соответствующих кругов».

Ввиду равносильности этих утверждений с соответствующими обратными утверждениями, из этих пяти противоположных утверждений, как и из пяти соответствующих обратных утверждений, неверным будет лишь третье утверждение, а остальные, следовательно, являются теоремами, противоположными исходной теореме.

10. Рассмотрим теперь утверждение, обратное противоположному утверждению (18):

$$(\forall x)(\urcorner B(x) \to \urcorner A(x)). \tag{19}$$

В силу закона контрапозиции $X \to Y \cong \urcorner Y \to \urcorner X$, это утверждение равносильно исходной прямой теореме (5). Это означает, что вместе с теоремой (5) утверждение (19) также будет теоремой. Она называется теоремой, обратной противоположной для исходной прямой теоремы. Нетрудно понять, что если мы сначала рассмотрим обратную теорему для исходной теоремы (5): $(\forall x)(B(x) \to A(x))$, а затем для нее построим противоположную теорему $(\forall x)(\urcorner B(x) \to \urcorner A(x))$, то мы снова придем к теореме (19). Таким образом, обратная для противоположной и противоположная для обратной для исходной теоремы есть одна и та же теорема; причем, она равносильна исходной теореме.

Приведем примеры теорем для рассмотренных видов.

Прямая теорема ($X \to Y$)*: «Если четырехугольник является параллелограммом, то его диагонали точкой пересечения делятся пополам».*

Обратная теорема ($Y \to X$)*: «Если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник является параллелограммом».*

Противоположная теорема ($\urcorner X \to \urcorner Y$)*: «Если четырехугольник не является параллелограммом, то его диагонали точкой пересечения не делятся пополам».*

Теорема обратная противоположной ($\urcorner Y \to \urcorner X$)*: «Если в четырехугольнике диагонали не делятся пополам точкой пересечения, то этот четырехугольник не является параллелограммом».*

В данном примере все четыре утверждения действительно являются теоремами, т.е. могут быть доказаны.

11. Подведем итоги. Вместе с каждой теоремой вида $X \to Y$ связываются еще три утверждения: обратное ($Y \to X$), противоположное ($\urcorner X \to \urcorner Y$), обратное противоположному ($\urcorner Y \to \urcorner X$). Среди них равносильны первое и четвертое $X \to Y \cong \urcorner Y \to \urcorner X$ (закон контрапозиции). Это означает, что для прямой теоремы $X \to Y$ теоремой будет также и обратное противоположному утверждение $\urcorner Y \to \urcorner X$. Обратное утверждение $Y \to X$, а вместе с ним и противоположное утверждение $\urcorner X \to \urcorner Y$ теоремами могут не быть. Проверка того, являются ли они теоремами, должны быть проведена дополнительно. [2, с. 72-74]

Понятие доказательства

С точки зрения гильбертовского подхода в строгом смысле о доказательстве можно говорить лишь в рамках какой-либо формальной аксиоматической теории. Под доказательством (выводом (из аксиом)) утверждения C в такой теории понимают такую конечную последовательность $A_1, A_2, \ldots, A_s \equiv C$ предложений теории, оканчивающуюся доказываемым утверждением С, в которой каждое предложение есть либо аксиома, либо получено из предшествующих предложений это последовательности по какому-нибудь (из принятых в базисной логической системе) правилу вывода. Определение понятия вывода из множеств гипотез *Г* отличается от сформулированного тем, что члены последовательности-вывода могут быть так же и элементами из *Г*. Утверждение *С доказуемо* (*выводимо из аксиом*), если существует доказательство этого утверждения, т.е. доказательство, оканчивающееся этим утверждением *С*.

Данное определение представляет собой формализацию процесса доказательства в конкретно-содержательных математических теориях. Именно так устроены доказательства в математике, как в высшей, так и в школьной. Чрезвычайно важно наглядно и доступно продемонстрировать это студенту и убедить его в этом.

Итак, доказательство в математике представляет собой конечную последовательность применений правил вывода, т.е. последовательность правильных умозаключений, в которых вывод каждого предыдущего умозаключения служит посылкой для следующего, а последним заключением является утверждение, истинность которого требуется установить. При этом исходными посылками могут служить не только аксиомы, но и утверждения, истинность которых установлена (доказана) раньше (они-то и образуют множество гипотез *Г*).

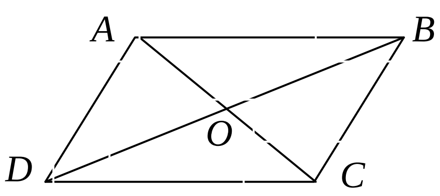
В формальных аксиоматических теориях в качестве правил вывода обычно используется правило МР – Modus ponens (правило заключения или отделения). В содержательных аксиоматических теориях опираются на содержательную логику высказываний и предикатов и на те правила вывода (правила логических умозаключений), которые в них получены. Поскольку при применении умозаключений мы от истинных суждений переходим снова к истинным суждениям, поэтому процесс доказательства есть процесс установления истинности новых суждений в данной математической теории.

Рассмотрим несколько примеров доказательств теорем, которые представим в виде последовательности утверждений, предусмотренной в определении доказательства.

Пример 1.

Рассмотрим теорему 6.3 из учебника А.В. Погорелова «Геометрия 7-11» (или более позднего издания «Геометрия 7-9»): «У параллелограмма противолежащие стороны равны». Воспроизведем сначала доказательство этой теоремы, приводимое в учебнике:

«Пусть *ABCD* – данный параллелограмм. Проведем диагонали параллелограмма. Пусть *O* – точка их пересечения.



Равенство противолежащих сторон *AB* и *CD* следует из равенства треугольников *AOB* и *COD*. У них углы при вершине *O* равны как вертикальные, а *OA=OC* и *OB=OD* по свойству диагоналей параллелограмма. Точно так же из равенства треугольников *AOD* и *COB* следует равенство другой пары противолежащих сторон – *AD* и *BC*».

Мы опустили вторую часть этой теоремы, утверждающую, что у параллелограмма противолежащие углы равны.

Представим это доказательство в виде последовательности (цепочки) узловых утверждений, составляющих его:

а) *ABCD* –параллелограмм (по условию);

б) O – точка пересечения его диагоналей (по построению);

в) $\angle AOB = \angle COD$ (как вертикальные, по теореме 2.2);

г) *OA* = *OC* (по свойству диагоналей параллелограмма, теорема 6.2);

д) *OB* = *OD* (по свойству диагоналей параллелограмма, теорема 6.2);

е) $\Delta AOB = \Delta COD$ (из в, г, д по первому признаку равенства треугольников, теорема 3.1);

ж) *AB* = *CD* (из е по определению равенства треугольников).

Наконец, расширим эту последовательность до такой последовательности утверждений, которая предусмотрена в определении доказательства:

(1) *ABCD* – параллелограмм.	*Гипотеза*
(2) *O* – точка пересечения его диагоналей.	*Гипотеза*
(3) Углы $\angle AOB$ и $\angle COD$ вертикальные.	Гипотеза
(4) Если углы $\angle AOB$ и $\angle COD$ вертикальные, то $\angle AOB = \angle COD$.	Теорема 2.2
(5) $\angle AOB = \angle COD$	*(MP) : (3), (4)*
(6) *ABCD* – параллелограмм и *O* – точка пересечения его диагоналей.	$\wedge$*-введ.: (1), (2)*
(7) Если *ABCD* – параллелограмм и *O* – точка пересечения его диагоналей, то *OA* = *OC*.	*Теорема 6.2*
(8) *OA* = *OC*.	*(MP) : (6), (7)*
(9) Если *ABCD* – параллелограмм и *O* – точка пересечения его диагоналей, то *OB* = *OD*.	*Теорема 6.2*
(10) *OB* = *OD*.	*(MP) : (6), (9)*
(11) $\angle AOB = \angle COD$ и *OA* = *OC* и *OB* = *OD*.	$\wedge$*-введ.: (5), (8)*
(12) Если $\angle AOB = \angle COD$ и *OA* = *OC* и *OB* = *OD*, то $\Delta AOB = \Delta COD$.	*Теорема 3.1*
(13) $\Delta AOB = \Delta COD$.	*(MP) : (11), (12)*
(14) Если $\Delta AOB = \Delta COD$, то *AB* = *CD*.	*По опр. равных треугольников (с. 14)*
(15) *AB* = *CD*.	*(MP) : (13), (14)*

Аналогично доказывается, что *AD* = *BC*. Теоремы 2.2, 6.2 и 3.1, указанные в доказательстве, это – доказанные ранее теоремы из учебника А.В. Погорелова. В пунктах (5), (8), (13) и (15) используется правило вывода *Modus Ponens* (MP):

$$\frac{P;\ \text{Если } P, \text{то } Q}{Q},$$

а в пунктах (6) и (11) – правило введения конъюнкции (∧-введ.):

$$\frac{P, Q}{P \text{ и } Q}, \text{ или } \frac{P,\ \ Q,\ \ R}{P \text{ и } Q \text{ и } R}.$$

Итак, из гипотезы «*ABCD* – параллелограмм» мы вывели *AB* = *CD*. В результате мы заключаем, что нами доказана теорема: «Если *ABCD* – параллелограмм, то *AB* = *CD*». Это заключение основано, фактически, на правиле введения импликации:

$$\frac{\Gamma, \mathrm{P} \vDash Q}{\Gamma \vDash \mathrm{P} \to Q}.$$

Здесь Г – некоторая совокупность известных (ранее доказанных) теорем: в нашем случае теоремы 2.2, 6.2 и 3.1; Р – «*ABCD* – параллелограмм», Q: «*AB* = *CD*». Формализацией (аналогом) этого правила (в формализованном) исчислении высказываний служит теорема о дедукции: если Г, $F \vdash G$, то Г $\vdash F \to G$.

В процессе доказательства теоремы 6.3 из учебника А.В. Погорелова была использована теорема 6.2 из того же учебника (с.83): «Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам».

Представим доказательство и этой теоремы в виде, отвечающем определению (формального) доказательства:

(1) ABCD – параллелограмм	Гипотеза
(2) O – середина диагонали BD : BO = OD	Гипотеза
(3) C_1 – точка луча AO такая, что AO = OC_1	Гипотеза
(4) BO = OD, AO = OC_1	*∧-введ.: (2), (3)*
(5) Если BO = OD, AO = OC_1, то ABC_1D – параллелограмм	По теореме: «Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм».
(6) ABC_1D – параллелограмм	MP: (4), (5)
(7) Если ABC_1D – параллелограмм, то $BC_1 \parallel AD$	По определению параллелограмма
(8) $BC_1 \parallel AD$	MP: (6), (7)
(9) Если ABCD – параллелограмм, то $BC \parallel AD$	По определению параллелограмма
(10) $BC \parallel AD$	MP: (1), (9)
(11) $BC_1 \parallel AD \wedge BC \parallel AD$	*∧-введ.: (8), (10)*
(12) Если $BC_1 \parallel AD$ и $BC \parallel AD$, то BC_1 = BC	Аксиома параллельности
(13) BC_1 = BC	MP: (11), (12)

(14) *Восстановите здесь*	
(15) *последовательность*	
(16) *утверждений, аналогичных*	
(17) *утверждениям (7)-(12),*	
(18) *приводящую к доказательству*	
(19) *утверждения (20)*	
(20) $DC_1 = DC$	MP: (18), (19)
(21) $BC_1 = BC \wedge DC_1 = DC$	∧-*введ.: (13), (20)*
(22) Если $BC_1 = BC$ и $DC_1 = DC$, то $C_1 = BC_1 \cap DC_1 = BC \cap DC = C$	По свойствам равенства
(23) $C_1 = C$	MP: (21), (22)
(24) $C_1 = C \wedge AO = OC_1$	∧-*введ.: (23), (3)*
(25) Если $C_1 = C$ и $AO = OC_1$, то $AO = OC$	По свойствам равенства
(26) $AO = OC$	MP: (24), (25)

Поясним только, о каких свойствах равенства идет речь в пунктах (22) и (25). В пункте (22), во-первых, равное заменяется равным: $BC_1 \cap DC_1 = BC \cap DC$. Во-вторых, две величины C_1 и C порознь равны третьей и, значит, они равны между собой. Такую аксиому рассматривал еще Евклид в своих «Началах». Из 10 постулатов, с которых начинается его трактат, данный постулат стоит на 6 месте: «Равные одному и тому же, равны и между собой». В шаге (25) равное заменяется равным.

Итак, на примерах доказательств геометрических теорем, мы убедились в том, что понятие формального доказательства не есть абстрактное изобретение логики, а есть достаточное строгое и точное отражение тех процессов и рассуждений, которые осуществляются в математической науке. Но курс геометрии своим построением и всем своим методическим оснащением нацеливает учителя на отношение к этому курсу именно как к аксиоматической теории. Курс должен, прежде всего, развивать навыки логического мышления: «теоремы (свойства) должны быть доказаны – выведены путем логических рассуждений из уже известных (ранее доказанных) свойств; при этом, какие-то свойства – основные свойства основных фигур – постулируются, т.е. принимаются без доказательств»[3]. [2, с. 119-123]

[3] Земляков А.Н. Геометрия в 9 классе. – М. : Просвещение, 1985, с. 11.

Аксиоматический метод в математике

Охарактеризуем кратко существо аксиоматического метода в математике и понятие аксиоматической теории.

Первые идеи, связанные с этим методом, восходят к титанам античной мысли Платону и Аристотелю (IV в. до н.э.). Первый практический шаг на этом пути был сделан более двух тысяч лет назад древнегреческим математиком Евклидом (около 300 г. до н.э.). Его труд «Начала» явился энциклопедией геометрических знаний и образцом написания математических работ на протяжении более двадцати веков. Именно благодаря этому авторитетнейшему произведению сформировалось общечеловеческое представление об аксиоме как об утверждении, не требующем доказательства, обоснования, являющем собой некую абсолютную истину. Тем не менее, внутри математической науки этот взгляд на аксиомы претерпел самые решительные изменения. Такой процесс шел постепенно, но качественный скачок в нем произошел после того, как в 20-30е годы XIX века великим русским математиком Н.И. Лобачевским (1792-1856), независимо от него молодым венгром Яношем Бояи (1802-1860), а также великим немецким ученым К.-Ф. Гауссом (1777-1855) было сделано открытие неевклидовой геометрии. Суть открытия состояла в том, что вместо пятого постулата Евклида в систему аксиом было включено утверждение, являющееся его отрицанием, и затем на базе полученной системы аксиом была построена непротиворечивая геометрическая теория, названная Н.И. Лобачевским «воображаемой геометрией». Важным этапом в процессе эволюции взглядов на аксиомы явилось построение во второй половине XIX века различных моделей геометрии Лобачевского. Оказалось, что терминам, входящим в аксиомы, и самим аксиомам можно придавать различный смысл, а не только тот наглядный, который имел ввиду Евклид. В начале XX века, благодаря, главным образом, работам немецкого математика Д. Гильберта (1862-1943), окончательно сформировались принципиальные положения данного метода и было обосновано его значение для математики.

Такой развитие взглядов на природу аксиом и аксиоматический метод привело к следующей концепции *аксиоматической теории*. Выбирается ряд *первоначальных понятий*, которые не определяются и используются без объяснения их смысла. Вместе с тем, все другие понятия, которые будут использоваться, должны быть строго определены через первоначальные неопределяемые понятия и через понятия, смысл которых был определен раньше. Высказывание, определяющее таким способом значение понятия, называется *определением*, а само понятие, смысл которого определен, носится название *определяемого понятия*. Евклид сделал попытку строго определить все первоначальные понятия геометрии: точки, прямые, плоскости и т.д. Но совершенно ясно, что эти понятия должны определяться через какие-то другие, те, в свою очередь, должны опираться на следующие понятия, и так далее, так что процесс бесконечен. Таким образом, первоначальные понятия аксиоматической теории не определяются.

Далее, совершенно аналогична ситуация с утверждениями о первоначальных и об определяемых понятиях. Невозможно доказать все истинные утверждения об этих понятиях, потому что при доказательстве нужно опираться на какие-то предыдущие утверждения, при их доказательстве, в свою очередь, – на следующие, и так без конца. Поэтому и здесь необходимо выделить некоторые утверждения и объявить их истинными. Такие утверждения, принимаемые без доказательства, называются *аксиомами* аксиоматической теории. Совокупность аксиом обозначается буквой $\sum$. Вопрос о том, какие утверждения о первоначальных понятиях выбираются в качестве аксиом, заслуживает специального рассмотрения. Отметим только, что Евклид в качестве пяти своих аксиом (постулатов) выбрал наиболее, на его взгляд, очевидные утверждения о точках и прямых, т.е. такие утверждения, которые многократно подтверждались практическим опытом человечества.

После того, как система аксиом аксиоматической теории выбрана, приступают к развитию самой аксиоматической теории. Для этого, исходя из выбранной системы аксиом, пользуясь правилами логического умозаключения, выводят новые утверждения о первоначальных понятиях, а также об определяемых понятиях. Получаемые утверждения называются теоремами данной аксиоматической теории.

Можно более точно сформулировать понятие теоремы аксиоматической теории и ее доказательства. *Доказательством* утверждения C, сформулированного в терминах данной теории, называется конечная последовательность $B_1, B_2, \dots, B_s$ высказываний теории, в которой каждое высказывание есть либо аксиома, либо оно получено из одного или более предыдущих высказываний данной последовательности по логическим правилам вывода, а последнее высказывание B_s есть утверждение C. При этом, C называется *теоремой* или *доказуемым утверждением* аксиоматической теории.

Аксиоматической теорией, построенной на основе системы аксиом $\sum$, называется совокупность всех теорем, доказываемых, исходя из этой системы аксиом. Она обозначается $Th(\sum)$.

Изложенный метод построения математической теории носит название *аксиоматического* или *дедуктивного метода*. Выбор системы аксиом есть дело условия: одно и то же утверждение теории может быть аксиомой, если оно так выбрано, а может выступать в качестве теоремы, если выбор аксиом осуществлен по-иному. Итак, если в обыденной жизни за термином «аксиома» утвердился его изначальный смысл (в переводе с греческого «аксиома» означает «достойный признания»), именно смысл самоочевидной, безусловной истины, то в математике, при построении аксиоматических теорий, аксиомы условны. Они «достойны признания» не сами по себе, не ввиду их самоочевидной истинности, а потому что на их основе строится та или иная аксиоматическая теория. При новом выборе системы аксиом прежние аксиомы становятся теоремами. Коротко говоря, аксиомы – это то, из чего выводятся теоремы, а теоремы – то, что выводится из аксиом.

Таким образом, суть аксиоматического построения математической теории состоит в том, что сначала выбирается ряд первоначальных понятий, которые не определяются и используются без объяснения их смысла. Далее, формулируется ряд первоначальных утверждений об этих первоначальных понятиях, которые принимаются без доказательства и которые называются аксиомами. Наконец, исходя из выбранной системы аксиом, доказывают новые утверждения о первоначальных понятиях, а также о понятиях, которые определяются в процессе развития аксиоматической теории. Эти доказываемые утверждения называются теоремами, а совокупность всех теорем, выводимых (доказываемых) из данной системы аксиом, называется аксиоматической теорией, построенной на базе этой системы аксиом.

Аксиоматический метод в обучении математике

Рассмотрим теперь положительные и отрицательные стороны использования аксиоматического метода в процессе обучения математике. Основополагающий труд Евклида «Начала», в котором тот собрал, систематизировал и развил существующие геометрические знаний и который, по существу, стал началом аксиоматического подхода к обоснованию и развитию математики, явился также и первым учебником по геометрии, по которому на протяжении более чем 2000 лет учились неисчислимые поколения учащихся. Написанные на аксиоматико-дедуктивном духе евклидовские «Начала» по настоящее время остаются той основой, на которой строится преподавание геометрии в школе. Прекрасно сказал об этом известный математик и историк математики Б.Л. вандер Варден: «… Евклид по заслугам обрел эту славу, благодаря своим исключительным дидактическим достоинствам. Он – величайший школьный учитель, которого только знает история математики». [1, с.268] «Начала» Евклида пережили даже мрачнейшие времена европейского средневековья и дошли до нас практически полностью, в то время, как почти все достижения древнегреческой науки были забыты, а многое пропало безвозвратно. Это свидетельствует о популярности и широкой распространенности этого труда, что в свою очередь объясняется прежде всего необычайно высоким дидактическим уровнем «Начал». Многие предложения и теоремы из этой книги до сих пор входят в учебники геометрии и алгебры вместе с их доказательствами. Р.Н. Щербаков и Л.Ф. Пичурин отмечают: «Благодаря этому они приобрели характер своего рода «вечной истины» – и деды, и внуки из поколения в поколения штудировали одни и те же «логические фигуры», а всякая попытка изменить хотя бы отдельные детали вызывала и вызывает активное сопротивление со стороны учителей и особенно родителей». [4, с.13] Вплоть до конца XIX столетия в английских школах геометрия просто называлась «Евклид».

Тем не менее, в настоящее время отношение к аксиоматическому методу как методу обучения математике весьма неоднозначно. [2, с. 232-235]

Игошин В.И. Задачи на построение

Как известно, задача на построение в планиметрии состоит в том, чтобы исходя из заданных на плоскости геометрических фигур, применяя заранее предписанные средства (инструменты), построить новую геометрическую фигуру, находящуюся в определенных отношениях с данными фигурами. В качестве средств построения выступают либо классические инструменты – циркуль и линейка, либо ограниченные средства построения – угольник (математическая модель прямого угла); линейка с параллельными краями; только одна линейка при условии, что на плоскости изображена окружность и ее центр (построения Штейнера); только один циркуль (построения Мора-Маскерони), или другие средства.

В современном школьном курсе геометрии роль задач на построение заметно снизилась по сравнению с их ролью в курсах геометрии предыдущих времен. Зарубежные математики-методисты задачам на построение уделяют немало внимания (см., например, книгу [4]). В частности, первая глава книги Д. Пойа «Математическое открытие» целиком посвящена геометрическим задачам на построение, и это не случайно. Пойа считает, что «место, занимаемое геометрическими построениями в программе обучения, полностью оправданно, так как они … лучше всего подходят для освоения путей решения задач» [4, с. 25]. Задачи на построение не просты. Не существует единого алгоритма для решения всех таких задач. Каждая из них по-своему уникальна, и каждая требует индивидуального подхода для решения. Именно поэтому научиться решать задачи на построение чрезвычайно трудно, а, может быть, невозможно. Во всяком случае, здесь мы не ставим такой цели. Но эти задачи дают уникальный материал для индивидуального творческого поиска учащимися путей решения с помощью своей интуиции и подсознания. Настоящие заметки предназначены не для обучения поиску решения задач на построение, а для того, чтобы на сознательном уровне перед тем, как решать задачу, и после того, как ее решение найдено, проанализировать логику задачи и логику поиска ее решения.

Остановимся на четырех моментах решения задач на построение:

аксиоматический характер решения;

взаимосвязь двух этапов – анализа и доказательства;

логика алгебраического метода;

общая логическая схема применения геометрических преобразований.

Аксиоматический аспект. Приступая к задачам на построение и методам их решения, нужно, прежде всего, уяснить, что решение таких задач весьма похоже на процесс развития аксиоматической теории на базе некоторой системы аксиом. Предположим, что в качестве средств построения выбраны циркуль и линейка. Сначала выбираются первичные неопределяемые понятия. Такими являются понятия построенных основных фигур, т.е. фигур, входящих в условие задачи. Другими словами, каждая из фигур, участвующих в условии задачи, считается изначально построенной. При этом каждая из первичных фигур рассматривается как единый объект.

Далее формулируются правила, по которым к имеющимся фигурам с использованием средств построения – циркуля и линейки, применяя их конечное число раз, можно присоединять (строить новые фигуры). Вот эти правила (постулаты).

(П1). Если есть две различные точки A и B, то можно построить отрезок AB, прямую AB и четыре луча.

(П2). Если есть три точки A, B, C ($B \neq C$), то можно построить окружность с центром в точке A с радиусом, равным отрезку BC.

(П3). Если построение две непараллельные прямые, то можно найти точку их пересечения.

(П4). Если построены пересекающиеся прямая и окружность, то можно найти точки их пересечения (в частности, на данной прямой отложить отрезок, равный данному отрезку).

(П5). Ели построены две пересекающиеся окружности, то имеет точки их пересечения.

В общем виде задача на построение формулируется следующим образом. Дано конечное множество основных (первичных) построенных фигур $F_1, \ldots, F_k$ и описано свойство, характеризующее искомую непостроенную фигуру Φ. Требуется, используя постулаты П1–П5, получить конечное множество построенных фигур, содержащие фигуру Φ.

С помощью сформулированных постулатов П1–П5 можно обосновать возможность построения точек, не принадлежащих построенным прямым и окружностям, а также возможность построения центра построенной окружности. Далее обычно решается набор простейших задач на построение (деление пополам отрезка и угла; проведение через точку прямой, перпендикулярной или параллельной данной прямой; построение треугольника по двум сторонам и углу между ними; по стороне и двум прилежащим к ней углам; по трем сторонам и т.п.). После этого всякая задача на построение считается решенной, если она сведена к конечному числу простейших задач.

Осознание такого существа задач на построение и процесса их решения является первым залогом успеха.

Анализ и доказательство в процессе решения. Как известно, в решении задач на построение выделяются следующие четыре этапа: анализ, построение, доказательство и исследование. В процессе *анализа*, собственно, и происходит поиск решения задачи. Из предположения, что задача решена и требуемая фигура построена, пытаются вывести такие следствия, которых окажется достаточно для того, чтобы требуемую фигуру построить. *Построение* предлагается поэтапное, шаг за шагом, выполнение построений с помощью циркуля и линейки, т.е. подробное описание последовательности простейших задач на построение, к решению которых сводится построение фигуры в данной задаче. В *доказательстве* требуется доказать, как построенная фигура действительно удовлетворяет всем требованиям задачи. Наконец, в *исследовании* нужно установить, при каком выборе начальных данных задача имеет решение и сколько решений имеет задача при каждом допустимом выборе начальных данных.

С точки зрения логики *узловыми этапами решения задачи на построение являются два – анализ и доказательство*. Рассмотрим эти этапы подробнее и установим тесную логическую взаимосвязь между ними. Анализ начинается с того, что требуемая фигура построена, т.е. выполнены все те свойства, которые сформулированы в условии задачи. В ходе анализа из этих свойств мы пытаемся извлекать какие-то выводы, и каждый такой вывод анализируем на то, можно ли от него вернуться к данному условию. Другими словами, мы ищем такие необходимые следствия данных условий задачи, которые, в свою очередь, для этих условий окажутся достаточными. Что же происходит при доказательстве? Выведенные в процессе анализа следствия становятся условиями. Из этих условий должны быть выведены те свойства, которые сформулированы в условии задачи. Таким образом, *следствия анализа становятся условиями доказательства, а условия анализа – следствиями доказательства*. Это означает, что в процессе анализа мы устанавливаем ряд прямых теорем, а в процессе доказательства используем обратные для них теоремы. Отсюда *задача анализа – выявить в его ходе такие теоремы, обратные утверждения для которых сами будут справедливы, т.е. сами будут теоремами*.

Из этой логики вытекает методика обучения решению задач на построение. Указать учащимся на эту логическую связь анализа и доказательства и предложить им каждый раз обнаруживать и четко формулировать прямые теоремы в ходе анализа и обратные для них теоремы в ходе доказательства. Если навык такого подхода будет выработан, то учащиеся будут отчетливо представлять логику решения задач на построение и свою задачу на каждом этапе решения.

Последуем далее совету Д.Пойа. В своей книге «Математическое открытие» [4, с.27] (кстати, по поводу решения задач на построение) он писал: «Примеры лучших рецептов – установление метода само по себе не принесет вам больших благ. Метод будет приобретать новые краски, становиться интереснее и ценнее с каждым новым примером, к которому вы его успешно примените». Итак, проиллюстрируем на *примерах суть логической связи между анализом и доказательством*.

Пример 1. Даны две прямые p и q, пересекающиеся в точке Q под непрямым углом, и точка $D \in p$. Требуется построить на прямой p точку M, равноудаленную от точки D и прямой q (рис. 1).

Пусть такая точка M построена и $MD = MN$, где $MN \perp q$. Построим отрезок DN. Тогда треугольник DMN равнобедренный. В ходе анализа обнаруживаем первую прямую теорему. $A_1 \rightarrow B_1$

Если треугольник равнобедренный, то углы при его основании равны. В нашем случае $\angle MDN = \angle MND$.

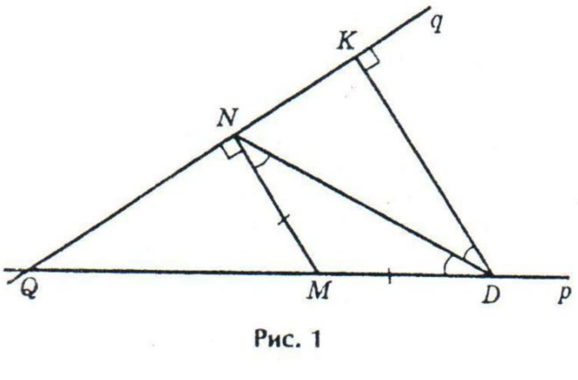


Рис. 1

Опустим перпендикуляр $DK \perp q$. Обнаруживаем вторую прямую теорему $A_2 \rightarrow B_2$.

Если две прямые перпендикулярны третьей, то они параллельны. В нашем случае $DK \parallel MN$.

Обнаруживаем третью прямую теорему. $A_3 \to B_3$.

Если две прямые параллельны, то при пересечении их третьей внутренние накрест лежащие углы равны. В нашем случае получаем $\angle MND = \angle NDK$.

В итоге приходим к равенству углов $\angle MDN = \angle NDK$ и выводу о том, что *DN* – биссектриса угла $\angle QDK$, дающему ключ к построению требуемой точки *M*. Нужно опустить перпендикуляр $DK \perp q$, затем построить биссектрису *DN* угла $\angle QDK$ и, наконец, восстановить в точке *N* перпендикуляр к прямой q до его пересечения с прямой p в точке M, $NM \perp q$.

Теперь приступаем к *доказательству* того, что точка *M* искомая.

Сначала также работают две прямые теоремы $A_2 \to B_2$, $A_3 \to B_3$. На основании первой из условия $DK \perp q$ и $MN \perp q$ заключаем, что $MN \parallel DK$, а на основании второй из последнего утверждения заключаем, что $\angle MND = \angle NDK$.

Учитывая еще, что *DN* по построению есть биссектриса угла $\angle QDK$, заключаем, что в треугольнике *DMN* имеется два равных угла $\angle MDN = \angle MND$.

Мы приходим к условию, которое в процессе анализа было заключением прямой теоремы: $A_1 \to B_1$. Утверждение, обратное для этой теоремы, также является теоремой: $B_1 \to A_1$.

Если в треугольнике два угла равны, то равны и противоположные им стороны этих углов, сходящиеся в вершине третьего угла.

На основании этой теоремы заключаем, что *MN* = *MD*. Поскольку, кроме того, по построению $MN \perp q$, поэтому точка *M* – искомая.

Пример 2. Дана точка *A* на прямой *l* и точка *B*, не принадлежащая прямой *l*. На прямой l найти точку *M* так, чтобы сумма *AM* + *MB* была бы равна данному отрезку *PQ* (рис. 2).

Предположим, что требуемая точка *M* построена и *AM* + *MB* = *PQ*. Построим точку $B' \in l$ так, чтобы $AB' = PQ$. Тогда

$MB = (AM + MB) - AM = PQ - AM = AB' - AM = MB'$,

т.е. точка *M* равноудалена от концов отрезка *BB'*. Внимание, *прямая теорема анализа*:

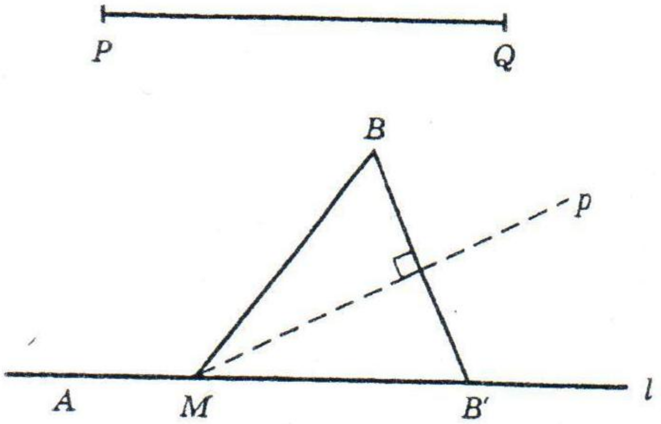


Рис. 2

Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.

Эта теорема обратима, так что, построив к отрезку *BB'* серединный перпендикуляр *p*, мы можем, опираясь на *обратную теорему*, утверждать, что точка *M* пересечения серединного перпендикуляра к отрезку *BB'* с прямой *l* (если она существует) будет равноудалена от точек B и B', откуда уже нетрудно доказать, что M – искомая.

Пример 3. Даны две окружности и точка A вне ее. Через эту точку проведите секущую так, чтобы она точкой пересечения с окружностью разделилась пополам (рис. 3).

Пусть ACB – требуемая секущая и $AC = CB$. Пусть BD – диаметр окружности. Тогда в треугольнике ADB медиана DC одновременно является высотой. Следовательно (и это будет *прямая теорема анализа*), этот треугольник – равнобедренный, $AD = BD$. Значит, описав из данной точки A дугу окружности, радиус которой равен диаметру данной окружности, получим точку D пересечения этих окружностей. Проведя через точку D диаметр данной окружности, получим точку B, соединив которую с точкой A, получим искомую секущую. Для доказательства этого нужно воспользоваться обратной теоремой:

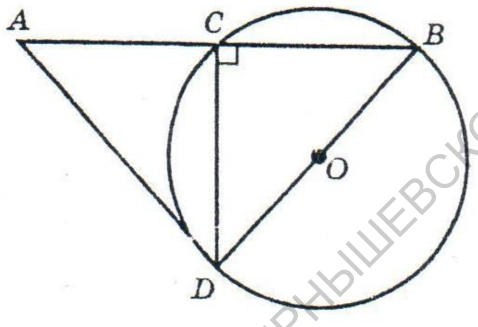


Рис. 3

В равнобедренном треугольнике высота является одновременно его медианой.

Пример 4. Построить касательную к окружности, проходящую через данную точку, лежащую вне окружности (рис. 4).

Проверьте, что в процессе анализа используется *прямая теорема*:

Если прямая касается окружности, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания,

а в ходе доказательства – ей *обратная*:

Если прямая, имеющая с окружностью общую точку, перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то прямая касается окружности в этой точке (т.е. не имеет с окружностью других общих точек).

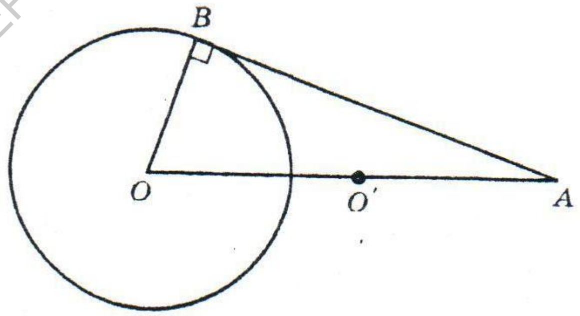


Рис. 4

Пример 5. В круге проведите хорду заданной длины, проходящую через данную точку (рис. 5).

Пусть AB – хорда заданной длины, проходящая через данную точку P, удаленную от центра O на расстояние OM. *Прямая теорема анализа*:

Если хорда KL = AB, то хорда KL удалена от центра O на такое же расстояние ON = OM, что и хорда AB.

Отсюда следует вывод: все хорды равной длины касаются окружности, концентрической с данной окружностью, радиуса, равного общему расстоянию этих хорд от центра.

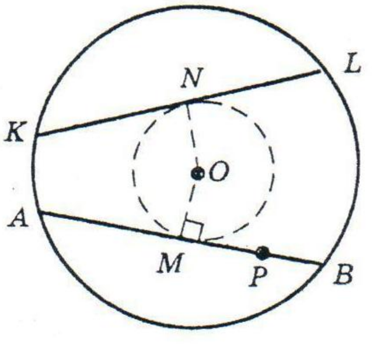


Рис. 5

Отсюда вытекает построение. Проводим в данном круге произвольную хорду заданной длины KL, опускаем перпендикуляр $ON \perp KL$, проводим окружность с центром O радиуса ON, через точку P проводим касательную AB к этой окружности. Для доказательства того, что хорда AB имеет данную длину, пользуемся обратной теоремой:

Если две хорды одинаково удалены от центра, то она равны.

Приведенный логический анализ будет способствовать не только более четкому уяснению методики решения задач на построение, но и еще раз продемонстрирует учащимся практическое значение различий между прямой и обратной теоремой. [3, с. 1-4]

Пойа Д. Математическое открытие

Метод двух геометрических мест

Геометрические построения

Вычерчивание или построение геометрических фигур с помощью циркуля и линейки традиционно занимает большое место в преподавании планиметрии. Простейшие из этих построений используются чертежниками, но в остальном практическая ценность геометрических построений незначительна, а теоретическое значение их невелико. И все же место, занимаемое такими построениями в программе обучения, полностью оправдано, так как они представляют собой наиболее пригодное средство для ознакомления начинающего с геометрическими фигурами и лучше всего подходят для освоения путей решения задач. Именно в силу этого последнего соображения мы собираемся обсудить здесь вопрос о геометрических построениях.

Подобно многим другим традициям, присущим преподаванию математики, геометрические построения восходят к Евклиду, в системе которого они играют важную роль. Уже в самой первой задаче евклидовых «Начал» – в Предложении 1 из книги I – предлагается «на данной ограниченной прямой [отрезке] построить равносторонний треугольник». Система, принятая Евклидом, дает достаточно оснований для того, чтобы сузить задачу, ограничившись рассмотрением *равностороннего* треугольника; по существу же, решение остается столь же легким и для следующей более общей задачи: *построить треугольник по трем данным сторонам*.

Уделим немного времени анализу этой задачи.

В любой задаче должно содержаться *неизвестное* – если все известно, то нечего искать, нечего делать. В нашей задаче неизвестное (объект, который желательно или требуется найти), есть геометрическая фигура, треугольник.

Далее, в каждой задаче что-то должно быть известно или *дано* (известные объекты мы называем данными) – если ничего не дано, то нет никакой возможности узнать требуемый объект: мы не смогли бы его указать даже и в том случае, если бы он оказался перед нашими глазами. В нашей задаче данными являются три «ограниченные прямые» – три прямолинейных отрезка.

Наконец, в любой задаче должно содержаться условие, которое конкретизирует связь между неизвестным и данными. В нашей задаче условие определяет, что три данных отрезка должны быть сторонами искомого треугольника.

Условие является существенным элементом задачи. Сравните нашу задачу, например, со следующей: «Построить треугольник, если даны три его высоты». В обеих задачах данные одни и те же (три прямолинейных отрезка), неизвестное – геометрическая фигура одного и того же типа (треугольник). Однако связь между неизвестным и данными различна, неодинаково условие, – и поэтому задачи действительно очень различны (наша задача легче).

Читателю, конечно, знакомо решение нашей задачи. Пусть a, b и c обозначают длины трех данных отрезков. Отложим отрезок a, концы которого назовем B и C (чертеж сделайте сами). Мы проводим две окружности, одну радиуса

b с центром в C, другую радиуса c с центром в B; пусть A – одна из двух точек их пересечения. Тогда ABC – искомый треугольник.

От примера к методу

Вернемся к предыдущему решению и постараемся обнаружить в нем характерные особенности, которые с некоторой надеждой на успех можно будет использовать при решении других, родственных задач.

Отложив отрезок a, мы тем самым зафиксировали две вершины искомого треугольник, B и C; остается найти еще только одну. Отложив этот отрезок, мы, по существу, преобразовали поставленную задачу в другую, ей эквивалентную, но отличную от первоначальной. В этой новой задаче

неизвестным является точка (третья вершина искомого треугольника);

данными являются две точки (B и C) и две длины b и c;

условие требует, чтобы искомая точка находилась на расстоянии b от данной точки C и на расстоянии c от данной точки B.

Это условие состоит из двух частей, одна из которых относится к b и C, другая – к c и B. *Сохраните только одну часть условия и опустите вторую; насколько определенным останется после этого неизвестное, как оно может изменяться?* Точка плоскости, расположенная на данном расстоянии b от заданной точки C, не будет ни полностью определенной, ни полностью произвольной: ее положение ограничено «геометрическим местом» – она должна принадлежать окружности радиуса b с центром в C, но может при этом перемещаться по этой окружности. Неизвестная точка обязана принадлежать двум таким геометрическим местам и определяется как их пересечение.

Мы подмечаем здесь метод («метод двух геометрических мест»), который можно применить с некоторой надеждой на успех при решении геометрических задач на построение:

Сначала сводим задачу к построению ОДНОЙ точки.

Затем разбиваем условие на ДВЕ части, каждая из которых приводит к геометрическому месту для неизвестной точки; каждое из этих геометрических мест должно быть либо прямой линией, либо окружностью.

Примеры лучше рецептов – установление метода само по себе не принесет вам больших благ. Метод будет приобретать новые краски, становиться интереснее и ценнее с каждым новым примером, к которому вы его успешно примените.

Примеры

Почти все построения, которые традиционно включаются в программу средней школы, являются непосредственными приложениями метода двух геометрических мест.

1. *Описать около данного треугольника окружность*. Сведем эту задачу к построению *центра* требуемой окружности. В получаемой таким образом задаче

неизвестным является точка, обозначим ее X;

данными являются три точки A, B и C;

условие заключается в равенстве трех расстояний:

$$XA=XB=XC.$$

Мы разбиваем условие на две части:

Первая – $XA=XB$

Вторая – $XA=XC$.

Каждой части условия соответствует геометрическое место. Первое геометрическое место представляет собой перпендикуляр, восстановленный к отрезку AB в его середине; второе – такой же перпендикуляр, восстановленный к отрезку AC. Искомая точка является точкой пересечения этих двух прямых линий.

Мы могли бы расчленить условие иначе: первая часть – $XA=XB$, вторая часть – $XB=XC$. Это привело бы к другому построению. Но может ли оказаться другим и результат построения? Почему нет?

2. *Вписать в данный треугольник окружность*. Мы сводим и эту задачу к построению *центра* требуемой окружности. В полученной таким образом задаче

неизвестным является точка, допустим X;

данными являются три (бесконечные) прямые линии a, b и c;

условие состоит в том, чтобы точка X находилась на одном и том же (измеренном по перпендикуляру) расстоянии от всех трех данных прямых.

Мы разбиваем условие на две части:

Первая – X находится на равных расстояниях от a и b;

Вторая – X находится на равных расстояниях от a и c.

Геометрическое место точек, удовлетворяющее первой части условия, состоит из двух прямых линий, перпендикулярных друг другу, а именно – биссектрис вертикальных углов, образованных прямыми a и b. Второе геометрическое место аналогично первому. Эти два геометрических места пересекаются в четырех точках, и мы получаем помимо центра вписанной окружности, заключенной внутри треугольника, еще три центра вневписанных окружностей.

Заметьте, что последний пример требует небольшого видоизменения нашей формулировки метода двух геометрических мест (эта формулировка приведена в конце параграфа «От примера к методу»). Какого именно?

3. *Даны две параллельные прямые и точка между ними. Построить окружность, касающуюся обеих прямых и проходящую через заданную точку*. Мысленно представляя себе требуемую фигуру (полезно начертить ее на бумаге), можно заметить, что *задачу легко решить частично*: расстояние между двумя заданными параллелями будет, очевидно, диаметром искомой окружности, а половина этого расстояния – радиусом.

Мы сводим задачу к нахождению центра X неизвестной окружности.

Зная радиус, – обозначим его через r, – мы разбиваем условие следующим образом:

первая часть – X находится на расстоянии r от данной точки;

вторая часть – X находится на расстоянии r от каждой из данных прямых.

Первая часть условия приводит к окружности, вторая – к прямой линии, параллельной двум данным прямым и проходящей посередине между ними.

Не зная радиуса искомой окружности, мы могли бы разбить условие следующим образом:

первая часть – X находится на одинаковом расстоянии от данной точки и первой из заданных прямых;

вторая часть – X находится на одинаковом расстоянии от данной точки и второй заданной прямой.

Разделение условия на такие две части не может вызвать возражений с логической стороны, но тем не менее оно практически бесполезно: соответствующими геометрическими местами будут *параболы*; мы не можем начертить их с помощью циркуля и линейки – в нашей схеме существенно, чтобы получающиеся в процессе решения задачи геометрические места были *окружностями* или *прямыми линиями*.

Последний пример может способствовать лучшему пониманию метода двух геометрических мест. Этот метод, как показывают соответствующие примеры, помогает во многих случаях, но не во всех без исключения случаях.

Предположим, что задача решена

Мечтать – это значит создавать в своем воображении вещи, которыми хочешь обладать, но не обладаешь. Голодный человек, у которого нет ничего, кроме большого куска черствого хлеба, говорит себе: «Если бы у меня было немного ветчины, то я бы мог приготовить яичницу с ветчиной, конечно, при условии, что у меня было бы также еще и несколько яиц».

Люди вам скажут, что мечтание – бессмыслица. Не верьте им, – это одно из широко распространенных заблуждений. Мечты могут быть плохи, как плохо слишком большое количество соли в супе или чеснок в шоколадном торте. Я хочу сказать, что мечты плохи, если они чрезмерны или неуместны, но вообще мечтать полезно, и это часто помогает в жизни, в частности, при решении задач. Вместе с маленькой мечтой о яичнице с ветчиной наш бедняга может получить больше удовольствия от своего куска черствого хлеба и лучше переварить его. А теперь мы собираемся рассмотреть следующую задачу (см. рис. 1а).

Даны три точки A, B и C. Провести прямую, пересекающую AC в точке X, а BC в точке Y так, что

$$AX = XY = YB.$$

Предположим, что мы знаем положение одной из двух точек X или Y. Тогда мы могли бы найти другую точку (восстановив перпендикуляр из середины отрезка). Беда в том, что ни одна из этих двух точку нам не известна, – задача не так легка, как кажется.

Предадимся еще более приятной мечте и *предположим, что задача решена*, иными словами, допустим, что рис. 1а построен в соответствии с условием задачи, т.е. три звена ломаной $AXYB$ в точности равны друг другу. Поступая таким образом, мы воображаем, что имеет место результат, который пока не достигнут, а именно воображаем, что нашли требуемое положение отрезка XY; по существу, мы воображаем, что нашли решение задачи.

И все же хорошо иметь рис. 1а перед глазами. На нем изображены все геометрические элементы, с которыми мы имеем дело, как данные, так и неизвестные; они собраны вместе и расположены в соответствии с условием задачи. Имея перед собой этот рисунок, мы можем размышлять над тем, какие элементы можно было бы построить, основываясь на данных задачи, и какие элементы можно использовать для построения неизвестного.

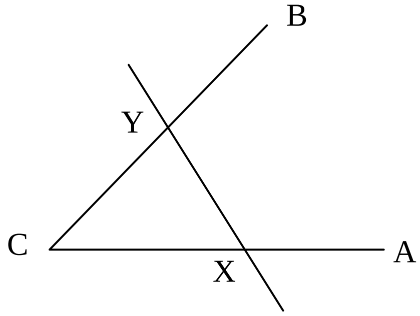


Рис. 1а. Неизвестное, данные, условие

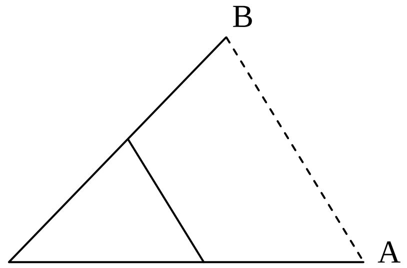


Рис. 1б. Продвижение от начала к концу (от данных к неизвестному).

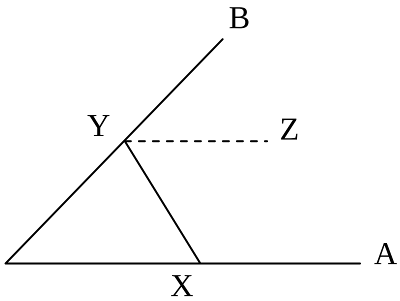


Рис. 1в. Продвижение от конца к началу (от неизвестного к данным).

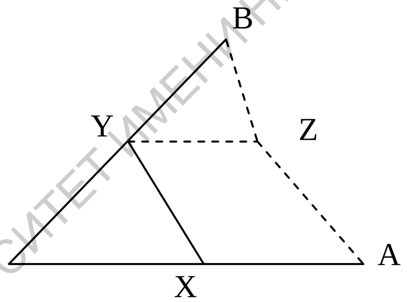


Рис. 1г. Связь с ранее уже известным.

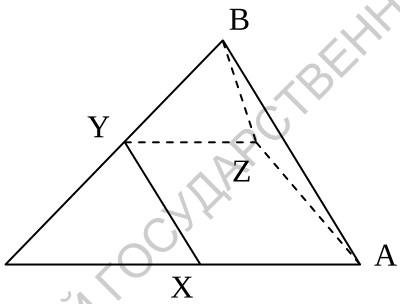


Рис. 1д. Объединение двух рисунков.

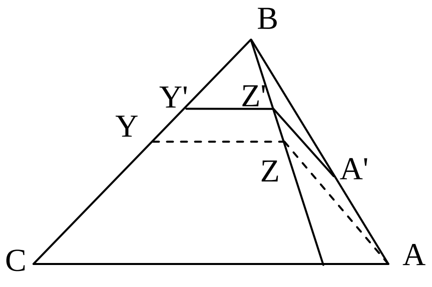


Рис. 1е. Ключ к решению.

Можно начать с данных и продвигаться вперед к решению или же начать с неизвестных и двигаться назад – экскурсы в обоих направлениях бывают весьма поучительны.

Могли бы вы объединить хотя бы некоторые из элементов нашей двусторонней головоломки? *Могли бы вы решить какую-нибудь часть этой задачи?* На рис. 1а имеется треугольник *XCY* – можно ли его построить? Для этого нам нужно было бы знать три элемента этого треугольника, но, к сожалению, мы имеем только один (угол при вершине *C*).

Вы можете воспользоваться тем, что имеется в нашем распоряжении, но нельзя употребить то, чего у вас нет. *Сумеете ли вы извлечь что-нибудь полезное из данных?* Нетрудно, например, соединить точки *A* и *B*, и можно надеяться, что связывающий их отрезок пригодится для решения задачи; проведем его (рис. 1б). Но как использовать отрезок *AB*? Это не так-то легко усмотреть – может быть, лучше оставить его?

Рис. 1а кажется слишком малосодержательным. Мы почти не сомневаемся в том, что в искомом построении потребуются дополнительные линии, но какие именно линии?

Отрезки *AX, XY* и *YB* равны (наше предположение, – помечтаем об этом), но они так неудачно расположены друг относительно друга – равные отрезки можно расположить так, чтобы они составляли гораздо более удачные фигуры. Быть может, стоило бы добавить еще несколько равных отрезков или, для начала, один такой отрезок?

Удача или интуиция могут побудить нас провести на чертеже линию, на первый взгляд достаточно хорошо выбранную, если помнить о цели, которую мы имеем в виду: начертим отрезок *YZ*, параллельный и равный отрезку *XA* (рис. 1в). (Мы начинаем с искомого – помечтаем о нем – и пытаемся продвигаться в обратном направлении: к данным).

Отрезок *YZ* был пробным – и, кажется, этот отрезок совсем неплох. Он приводит к знакомым геометрическим образам. Соединим *Z* с *A* и с *B* (рис. 1г); мы получаем ромб *XAZY* и равнобедренный треугольник *BYZ*. *Не могли бы вы решить теперь какую-нибудь часть задачи?* Можно ли построить треугольник *BYZ*? Для построения равнобедренного треугольника нам нужно было бы знать два элемента, но, к сожалению, мы имеет только один (угол при вершине *Y*, равный данному углу при *C*). И все же мы кое-чего достигли. Даже если треугольник *BYZ* полностью нам не известен, мы знаем его форму: о размерах пока ничего сказать нельзя, но мы можем построить треугольник, подобный *BYZ*.

Мы как будто приближаемся к решению, – но пока мы его еще не достигли; придется испробовать еще что-нибудь. Рано или поздно мы можем вспомнить одну из первых попыток, связанную с рис. 1б. А что получится, если связать ее с последующими попытками? Наложив друг на друга рис. 1б и рис. 1г, мы получим рис. 1д, на котором имеется новый треугольник *BZA*. Можем ли мы его построить? Это было бы возможно, если бы мы знали треугольник *BYZ*: в этом благоприятном случае мы могли бы набрать три элементы – две стороны, *ZB* и *ZA* = *ZY* и угол *B*. Да, но треугольника *BZA* у нас нет; во всяком случае мы не знаем его полностью, нам известен только его вид. Но тогда можно…

Мы сумеем начертить четырехугольник *BY'Z'A'* (рис. 1е), подобный четырехугольнику *BYZA* (рис. 1д), представляющему собой существенную часть искомого построения. А это может оказаться ключом к решению задачи!

Метод подобия

Выполним построение, идея которого подсказана цепочкой рисунков 1а –1е.

На данном отрезке *BC* (см. рис. 1е) выберем произвольную точку *Y'* (но не очень далеко от точки *B*). Проведем *Y'Z'* параллельно *CA* так, чтобы было

$$Y'Z' = Y'B.$$

Найдем, далее, на отрезке *AB* такую точку *A'*, что

$$A'Z' = Y'Z'.$$

Проведем теперь через *A* параллель к *A'Z'* до пересечения с продолжением отрезка *BZ'*: это пересечение дает точку *Z*. Остальное просто.

Два четырехугольника *AZYB* и *A'Z'Y'B* не только подобны, но и *«подобно расположены» (гомотетичны).* Точка *B* является их *центром подобия*. Это означает, что любой отрезок, соединяющий соответственные точки наших двух подобных фигур, должен проходить через *B*.

Вот еще одно замечание, из которого можно кое-что извлечь для решения задач: из двух рассмотренных выше подобных фигур фигура *AZYB*, пришедшая нам на ум первой, в действительности была построена последней.

Предыдущий пример наталкивает на общий метод: *если вы не можете построить требуемую фигуру сразу, подумайте над возможностью построения фигуры, ей подобной*. [4, с. 25-32]

О задачах

Что такое задача?

Слово «задача» мы будем употреблять дальше в весьма широком смысле; поэтому, прежде всего, уточним, что будет подразумеваться под этим словом.

При современном укладе жизни добывание пищи обычно представляет собой задачи. Если я проголодаюсь дома, то тащу что-нибудь из холодильника, в городе же – иду в какое-нибудь кафе или закусочную. Однако совсем другое дело, когда холодильник пуст или когда я оказываюсь в городе без денег; в таких случаях желание поесть приводит к задаче, иногда достаточно трудной. Вообще говоря, желание может иногда приводить к задаче, а иногда – нет. Если одновременно с желанием в моем мозгу сразу же, без какого бы то ни было усилия возникает очевидное средство, с помощью которого наверное можно осуществить это желание, то задача не возникает. Если же такого средства нет, то это – задача. Таким образом, задача *предполагает необходимость сознательного поиска соответствующего средства для достижения ясно видимой, но непосредственно недоступной цели*. Решений этой задачи означает нахождение этого средства.

Задача может быть сложной или простой; в первом случае найти ее решение трудно, во втором – легко. Кстати, трудность решения в какой-то мере входит в само понятие задачи: там, где нет трудности, нет и задачи.

Одна из самых типичных задач – это задача о нахождении пути к заранее указанному месту в каком-то ограниченно знакомом районе. Легко себе представить, насколько серьезной была бы эта задача для наших первобытных предков, обитавших в девственном лесу. Возможно, что именно поэтому процесс решения задачи мы склонны представлять себе как поиск некоторого пути преодоления трудностей, пути обхода препятствий; впрочем, на этой гипотезе происхождения точки зрения на решение задачи как на путь я не склонен настаивать.

Основная часть нашего сознательного мышления связана с решением задач. Когда мы не развлекаемся и не мечтаем, наши мысли направлены к какой-то конечной цели, мы ищем пути и средства к достижению этой цели, мы пытаемся выработать какой-то курс, следуя которому, можно достичь нашей конечной цели.

Решение задач – специфическое достижение разума, разум же – особый дар, которым наделен человек. Способность к преодолению препятствий, к нахождению обходного маневра там, где не видно прямого пути, возвышает умное животное над тупым, человека – над самым умным животным и талантливых людей – над другими людьми.

Нет ничего более интересного, чем изучение проявлений человеческой деятельности. Наиболее характерными из них являются решение задач, размышление над тем, как можно достичь некоторой определенной цели, придумывание необходимых для этого средств. Мы стремимся хорошо разобраться в этой деятельности, и мне кажется, что такое стремление представляет большой интерес.

Классификация задач

Учащийся сдает письменный экзамен по математике; предположим, что это – средний учащийся, но не лентяй и что он затратил определенное время и некоторые усилия на подготовку к экзамену. Ознакомившись с предложенной ему задачей, он спросит себя: «Какого типа эта задача?» И действительно, постановка такого вопроса может принести пользу, так как если удастся отнести рассматриваемую задачу к определенному классу, установить ее тип, сопоставить с таким-то и таким-то место из знакомого учебника, то этим он достигнет некоторого прогресса: теперь он может вспомнить метод решения задач подобного типа, изученный им ранее.

Это в известной степени справедливо при решении задач любой сложности. Вопрос: «К какому типу относится эта задача?» ведет к следующему вопросу: «Что можно предпринять для решения задачи рассматриваемого типа?» – подобные вопросы можно с успехом задавать даже в очень серьезных исследованиях.

Итак, при решении задач может оказаться полезной их классификация, проведение различия между задачами в соответствии с их типами. Хорошая классификация предполагает разбиение задач на такие типы, что *тип задачи предопределяет метод ее решения*.

Мы сейчас не собираемся заниматься детальной классификацией задач; не собираемся мы также стремиться к совершенству такой классификации. Достаточно свободно интерпретируя традицию, восходящую к Евклиду его комментаторам, мы охарактеризуем здесь только два весьма общих типа задач.

Евклидовы Начала содержат аксиомы, определения и «предложения». Его комментаторы и кое-кто из переводчиков различают два вида предложений: конечной целью предложений первого рода (латинское название их *problema*) является *построение* фигуры; конечной целью предложений второго рода (латинское название их *theorema*) является *доказательство* теоремы. Мы придадим этому различию более широкий смысл, рассматривая два вида задач: *задачи на нахождение* и *задачи на доказательство*. Конечной целью *задачи на нахождение* является нахождение (построение, проведение, получение, отождествление, …) некоторого объекта, т.е. неизвестного данной задачи. Конечной целью *задачи на доказательство* является установление правильности или ложности некоторого утверждения, подтверждение его или опровержение.

Так, например, когда вы спрашиваете: «Что он сказал?» – вы ставите задачу на нахождение. Но когда вы задаете вопрос: «Сказал ли он это?» – вы ставите задачу на доказательство.

Задачи на нахождение

Целью задачи на нахождение является нахождение определенного объекта, *неизвестного* этой задачи, удовлетворяющего *условию* задачи, которое связывает неизвестное с *данными* этой задачи. Рассмотрим два примера.

«Даны два отрезка a и b и угол γ; требуется построить параллелограмм, у которого данные отрезки являются смежными сторонами, образующими данный угол γ».

«Даны два отрезка a и b и угол γ; требуется построить параллелограмм, у которого данные отрезки являются диагоналями, образующими данный угол γ».

В обеих задачах данные одни и те же – это прямолинейные отрезки a и b и угол γ. В обеих задачах неизвестное одно и то же – параллелограмм, и, таким образом, если иметь в виду только характер неизвестного, наши задачи a priori неразличимы. Отличает же их друг от друга *условие*, т.е. требуемое соотношение между неизвестным и данными; ясно, что форма параллелограмма поиному связана с его сторонами, чем с его диагоналями.

Неизвестное может принадлежать к самым разнообразным категориям. В геометрических задачах на построение неизвестное – это фигура, например треугольник. При решении алгебраических уравнений неизвестное – это число, корень данного уравнения. Когда мы спрашиваем: «Что он сказал?», неизвестным может быть слово или несколько слов, предложение или несколько предложений, *сказанное*. Четко сформулированная задача должна указывать категорию (множество), к которой принадлежит неизвестное; мы должны знать с самого начала, какого рода неизвестное мы предполагаем найти: треугольник, или число, или слово, или …

Четко сформулированная задача должна точно устанавливать *условие*, которому обязано удовлетворять неизвестное. Во множестве объектов, характеризуемых условием задачи, к которым должно принадлежать неизвестное, содержится подмножество тех объектов, которые удовлетворяют этому условию, и каждый объект, принадлежащий этому подмножеству, называется *решением*. Это подмножество может содержать один-единственный объект – и тогда решение будет *единственным*. Это множество может быть пустым – тогда решение вовсе отсутствует. Отметим здесь, что задачу на нахождение можно понимать по-разному. В строгом смысле – это задача, в которой требуется найти (провести, построить, отождествить, перечислить, охарактеризовать, …) все решения (все упомянутое выше подмножество полностью). В менее строгом смысле в задаче может требоваться найти *одно* (какое-то, хотя бы одно) решение или несколько решений. Иногда бывает достаточно убедиться в *существовании* решения, т.е. установить, пусто или непусто множество решений. Под решением математической задачи принято понимать ее решение в строгом смысле (если нет явного указания о противном); однако во многих практических задачах «строгий смысл» может иметь очень мало смысла.

Когда мы имеем дело с математическими задачами, то (если только из контекста не вытекает противное) мы будем пользоваться термином «данные», чтобы указать все заданные (известные, допускаемые) объекты (или все множество их), связанные с неизвестным при помощи условия. Если задача заключается в построении треугольника по его сторонам a, b и c, то данными будут отрезки a, b и c. Если задача состоит в решении квадратного уравнения

$$x^2 + ax + b = 0,$$

то данными будут два числа a и b. Задача может включать только одно данное или не иметь данных вовсе. Вот пример: «Найти отношение площади круга к площади описанного около него квадрата». Искомое частное не зависит от размера фигуры, и поэтому нет необходимости задавать радиус или какие-нибудь другие данные такого рода.

Неизвестное, условие и данные мы будем называть *главными частями* задачи на нахождение. В самом деле, мы не может надеяться решить задачу, которую не понимаем. А для того чтобы понять задачу, нужно знать – и притом знать очень хорошо, – что представляет собой неизвестное, что дано и в чем состоит условие. Таким образом, в процессе работы над задачей необходимо уделять особое внимание именно этим главным частям.

Задачи на доказательство

Ходят слухи, что государственный секретарь в обращении к одному конгрессмену употребил по некоторому поводу довольно грубое выражение (которое нам здесь даже неудобно привести). Правда, это только слухи, которые вызывают довольно сильное сомнение. Однако вопрос «Сказал ли он?» волновал многих лиц, дебатировался в печати, упоминался на заседании комитета конгресса и мог дойти до суда. Тот, кто воспринял слух всерьез, имеет перед собой готовую «задачу на доказательство»: ему предстоит снять со слуха покров сомнения, он должен *доказать* (или опровергнуть!), что инкриминируемое выражение было употреблено, и это доказательство или опровержение должно быть им мотивировано со всей доступной в данном случае убедительностью.

Когда мы встречаемся с математической задачей на доказательство, нам предстоит снять сомнение в правильности четко сформулированного математического утверждения A – мы должны доказать или опровергнуть A. Одной из самых занимательных задач подобного рода является доказательство или опровержение гипотезы Гольдбаха*: Если целое число n четно и* $n > A$*, то n является суммой двух (нечетных) простых чисел*.

Утверждение Гольдбаха (пока это только предположительное утверждение, мы не знаем, справедливо оно или ложно) сформулировано здесь в наиболее *естественной для математических утверждений форме*, так как оно состоит из *условия* и *заключения*: первая его часть, начинающаяся словом «если», является условием, вторая часть, начинающаяся словом «то», – заключением.

Когда нам нужно доказать или опровергнуть математическое предложение, сформулированное в наиболее естественной форме, мы называем его условие (предпосылку) и заключение главными частями задачи. И в самом деле, эти главные части заслуживают особого внимания. Чтобы доказать предложение, нужно обнаружить логическое звено, связывающее его главные части – условие (предпосылку) и заключение; чтобы опровергнуть предложение, нужно показать (если возможно – на контрпримере), что одна из главных частей – условие – не приводит к другой – к заключению. Многие математики – самые выдающиеся и самые рядовые – пытались снять покров неизвестности с гипотезы Гольдбаха, но безуспешно; несмотря на то, что для понимания смысла условия и заключения требуется совсем немного знаний, еще никому не удалось установить между ними строго аргументированную связь и никто не смог привести противоречащий этой гипотезе пример.

Компоненты неизвестного, пункты условия

Если задача заключается в том, чтобы построить окружность, то нам, по существу, требуется найти два элемента: центр окружности и ее радиус. Возможно, что будет полезно расчленить нашу задачу: вместо того, чтобы искать сразу оба интересующих нас элемента – центр и радиус, можно попытаться найти сначала один, а затем другой.

Если задача состоит в том, чтобы определить положение точки в пространстве, и мы пользуемся для этого аналитической геометрией, то, по существу, нам требуется найти три числа – три координаты x, y и z этой точки.

В зависимости от точки зрения, на которую мы предпочтем стать, можно говорить, что в первом случае имеется два неизвестных или же только одно, а во втором – что имеется три неизвестных или опять же только одно. Есть и еще одна, отличная от упомянутых, точка зрения, которая часто бывает полезной: можно говорить, что в обоих примерах имеется только одно неизвестное, но что оно в известном смысле «подразделено». Так, в нашем первом примере неизвестное – это окружность, но это «*двухэлементное*» или «*двухкомпонентное*» неизвестное; его компоненты – центр и радиус. Подобным же образом в нашем втором примере точка является «*трехэлементным*» или «*трехкомпонентным*» неизвестным; его компоненты – три координаты x, y и z. Вообще говоря, можно рассматривать «*многоэлементное*» или «*многокомпонентное*» неизвестное с n компонентами $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Одно из преимуществ только что введенной терминологии состоит в том, что при обсуждении некоторых общих вопросов устраняется необходимость проводить различие между задачами с одним неизвестным и задачами с несколькими неизвестными: ведь мы всегда можем свести второй случай к первому, рассматривая упомянутые неизвестные как компоненты одного «многокомпонентного» неизвестного.

Если перед нами стоит задача на нахождение, то может оказаться выгодным подразделение условия на несколько частей или *пунктов*; у нас уже было достаточно случаев заметить. При решении геометрической задачи на построение мы можем разбить условие на две части так, чтобы каждая из этих частей порождала геометрическое место искомой точки. При решении алгебраической «словесной задачи» мы разбиваем условие на столько частей, сколько имеется неизвестных, причем так, чтобы каждая часть порождала уравнение.

Если перед нами стоит задача на доказательство, то может оказаться полезным подразделение условия (предпосылки), или заключения, или как того, так и другого, на соответствующие части или пункты.

Ищем соответствующую процедуру

При построении фигур в стиле евклидовых «Начал» мы не можем выбирать чертежные приспособления или инструменты произвольно, так как a priori предполагается, что такое построение выполняется при помощи циркуля и линейки. Таким образом, решение задачи, по существу, заключается в применении последовательности *целенаправленных геометрических операций*, начинающихся с данных и заканчивающихся искомой фигурой; в нашем случае эти операции состоят в проведении прямых линий и окружностей и нахождении точек их пересечения.

Этот пример может прояснить нам многое, и тогда, глубже вникая в суть дела, мы ясно увидим, что решение многих задач существенно зависит от *процедуры*, линии действия, схемы увязанных между собой операций, от *modus operandi* (образа действия).

Возьмите, далее, задачу о решении уравнения второй степени (или третьей, или четвертой). Оно заключается в указании последовательности правильно увязанных между собой *алгебраических операций*, начинающихся с данных – известных коэффициентов уравнения – и заключающихся искомыми корнями; операциями здесь являются сложение, вычитание, умножение или деление заданных или предварительно найденных количеств, а также извлечение корней из этих количеств.

Рассмотрите еще и «задачу на доказательство». Процесс решения этой задачи – результат наших умственных усилий – есть доказательство, т.е. последовательность хорошо координированных *логических* операций или шагов, начинающихся с условия (предпосылки) и заканчивающихся заключением теоремы, к которому мы стремились; каждый шаг приводит к некоторому новому положению, полученному из соответствующим образом подобранных частей условия (предпосылки), или из уже известных фактов, или из ранее доказанных положений.

Нематематические задачи можно представлять себе в том же аспекте. Строителю моста предстоит организовать, координировать, укладывать в согласованную схему огромное множество операций: конструктивные решения, плавсредства, сооружение лесов, заливку бетона, склепывание металлических конструкций и т.д., и т.п. Сверх того, в его обязанности может входить согласование этих операций с операциями совершенно иного характера, например, финансовыми, юридическими или даже с политическими сделками. Все эти операции взаимосвязаны, причем в большинстве из них предполагается, что некоторые из этих операций были выполнены заранее.

Или возьмите детектив. Неизвестное – убийца; автор старается ошеломить нас действиями героя – сыщика, который придумывает схему или линию действия, начинающуюся с первичных улик и заканчивающуюся опознаванием и поимкой убийцы.

Объектом наших поисков может оказаться любое неизвестное любой природы или раскрытие истины, относящейся к любому виду вопросов; наша задача может быть теоретической или практической, серьезной или пустячной. Чтобы решить ее, мы должны составить хорошо продуманную, согласованную схему операций (логических, математических или материально обеспечивающих), начинающуюся с условия (предпосылки) и заканчивающуюся заключением, ведущую от данных к неизвестному, от объектов, находящихся в нашем распоряжении, к объектам, которых мы собираемся достичь. [4, с. 143-151]

Рыжик В.И. О пользе теории множеств

… Пусть есть утверждение вида $p \Longrightarrow q$ – из p следует q. Тогда p называется достаточным условием для q, а q называется необходимым условием для p. Любой десятиклассник понимает фразу: «если число делится на 10, то оно делится на 5», которую схематически можно записать так: $x \vdots 10 \Longrightarrow x \vdots 5$. Но сформулировать эту же мысль в терминах необходимости и достаточности получится далеко не у всех. Причина, по всей вероятности, в том, что соответствующее умственное действие не является достаточно обобщенным. Для решения этой методической задачи я использовал некоторые положения теории поэтапного формирования умственных действий, развитой П.А. Гальпериным. Согласно ей, формирование умственного действия проходит в нескольких формах: материализованной, внешнеречевой и умственной. Освоение умственного действия начинается в материализованной форме, которая характеризуется тем, что объект действия задан ученику в виде реальных предметов и моделей. Далее, в формировании умственного действия решающую роль играет ориентировочная основа действия. Их всех ее типов наиболее существенным является тот из них, в котором ориентиры деятельности представлены в обобщенном виде и в полном составе.

В нашем случае материализованная форма деятельности – та форма, в которой ученики оперируют с объектами, доступными для наглядного восприятия, – появляется в результате перевода задачи на язык, использующий множества. Именно, каждая высказывательная форма имеет множество истинности. Множество истинности высказывательной формы *P(x)* запишем так: $\tilde{P}$. Тогда запись высказывания $P(x) \Longrightarrow Q(x)$ равносильна тому, что $\tilde{P} \subset \tilde{Q}$. Запись $A \subset B$ может быть проиллюстрирована кругами Эйлера (рис. 1).

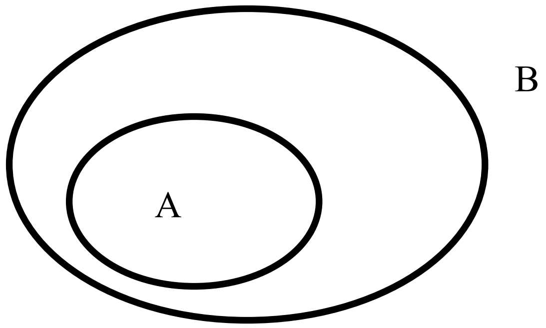


Рис. 1

Первая часть работы с учениками состоит в том, чтобы добиться понимания записи $A \subset B$. При этом каждое упражнение выполняется в материализованной форме, т.е. с кругами.

Используя обычные житейские представления, формулируются два утверждения:

1. Чтобы элемент *x* принадлежал множеству *B*, достаточно, чтобы он принадлежал множеству *A*.

2. Чтобы элемент *x* принадлежал множеству *A*, необходимо, чтобы он принадлежал множеству *B*.

Этот рисунок можно «подать» как задачу о «попадании в две мишени: *A* и *B*». Ответ: чтобы попасть в мишень *B*, достаточно попасть в мишень *A*, а чтобы попасть в мишень *A*, необходимо попасть в мишень *B*. Дальше начинается «сворачивание фраз». В конце концов приходим к таким фразам: «*A* достаточно для *B*» и «*B* необходимо для *A*».

… Теперь переходим к решению содержательных задач. На простейших примерах устанавливается предписание для выполнения данного умственного действия. Пусть, например, даны две высказывательные формы $x \vdots 10$ и $x \vdots 5$. Требуется их связать терминами «необходимо» и «достаточно». Пусть A – множество истинности первой формы, B – множество истинности второй высказывательной формы. Нарисуем условно множество *А*. Берем любой элемент из A, т.е. любое число, делящееся на 10, и спрашиваем себя: а будет ли этот элемент принадлежать множеству *B*, т.е. делиться на 5? Ответ – да, и в случае такого ответа сразу рисуем круг, содержащий *А*.

Вот еще один пример использования понятия множества в школьном курсе – на этот раз речь пойдет о доказательствах некоторых теоретических утверждений стереометрии. Нам понадобится операция пересечения множеств и ее свойства. Доказательства этих свойств станут очевидны, как только будут сделаны соответствующие рисунки для самого общего случая.

Итак, если даны множества *A, B, C*, то

1) $A \cap B = B \cap A$,

2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,

3) $\emptyset \cap A = \emptyset$,

4) если $A \subset B$, то $A \cap B = A$.

Из этих свойств ясно, что когда мы имеем пересечение нескольких множеств, то его результат можно находить в любом порядке. Если в записи пересечения одно и то же множество встречается несколько раз, то его достаточно оставить даже в единственном числе. Кроме того, в записи пересечения нескольких множеств без скобок можно эти скобки расставлять как нам угодно.

Теперь заметим, что параллельность двух прямых a и b на плоскости можно записать так: $a \cap b = \emptyset$, принадлежность прямой a плоскости α можно записать так: $a \cap \alpha = a$, параллельность прямой a и плоскости α можно записать так: $a \cap \alpha = \emptyset$, параллельность двух плоскостей α и β можно записать так: $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Перейдем к задачам.

Задача 1. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой *c*, плоскости β и γ пересекаются по прямой *a*, плоскости γ и α пересекаются по прямой b, прямые a и b пересекаются в точке *А*. Доказать, что прямая *c* пересекает как прямую *a*, так и прямую b, причем в одной и той же точке.

Решение. Любопытно, что эту задачу можно решить безо всякого рисунка. Сначала перепишем условие с помощью множеств: $\alpha \cap \beta = c$, $\beta \cap \gamma = a$, $\gamma \cap \alpha = b$, $a \cap b = A$. Нас интересует пересечение трех прямых: a, b и c, т.е. множество $c \cap a \cap b$. Имеем: $c \cap a \cap b = (\alpha \cap \beta) \cap (\beta \cap \gamma) \cap (\gamma \cap \alpha) = (\beta \cap \gamma) \cap (\gamma \cap \alpha) = a \cap b = A$. Отсюда и получается нужный нам результат.

Задача 2. Пусть три плоскости пересекаются по трем различным прямым, причем никакие две из этих прямых не пересекаются. Доказать, что каждая из данных прямых не пересекает той плоскости из данных, в которой она не лежит.

Решение аналогично.

Задача 3 (признак параллельности прямой и плоскости). Если прямая a параллельна прямой b, лежащей в плоскости α, но сама не лежит в плоскости α, то она параллельна α. Доказать.

Решение. Пусть a и b лежат в плоскости β. Тогда: $a \cap \alpha = (a \cap \beta) \cap \alpha = a \cap (\beta \cap \alpha) = a \cap b = \emptyset$, что и требовалось получить.

Задача 4 (признак параллельности двух прямых). Если прямая a параллельна плоскости α, а плоскость β проходит через a и пересекает α по прямой a_1, то $a \parallel a_1$. Короче это можно сказать так: «прямая, параллельная плоскости, параллельна своей проекции на эту плоскость» (имеется ввиду параллельная проекция). Доказать.

Решение. $a \cap a_1 = a \cap (\alpha \cap \beta) = (a \cap \alpha) \cap \beta = \emptyset \cap \beta = \emptyset$.

Задача 5. Две плоскости параллельны и пересекаются третьей. Доказать, что полученные в пересечении прямые параллельны.

Задача 6. Имеются две пары пересекающихся плоскостей. Плоскости этих пар соответственно параллельны. Доказать, что прямые пересечения этих плоскостей параллельны.

Задача 7. Два круговых сечения шара имеют единственную общую точку. Доказать, что окружности этих кругов имеют общую касательную.

Решение. Пусть первый круг K_1 получился при пресечении шара *Ш* и плоскости α, а второй круг K_2 получился при пересечении шара *Ш* и плоскости β. Так как эти круги по условию имеют общую точку, то плоскости этих кругов имеют общую прямую, которую обозначим через a: $\alpha \cap \beta = a$. Рассмотрим теперь пересечение прямой a с шаром:

$a \cap \text{Ш} = (\alpha \cap \beta) \cap \text{Ш} = (\alpha \cap \text{Ш}) \cap (\beta \cap \text{Ш}) = K_1 \cap K_2 = A$. Но тогда прямая a имеет с каждым кругом единственную общую точку, а значит, является касательной к окружности каждого круга.

Задача 8. К сфере проведены две касательные плоскости, которые пересекаются по некоторой прямой. Доказать, что эта прямая не имеет со сферой общих точек.

Задача 9. Две сферы имеют единственную общую точку. Через эту точку проведена плоскость, касательная к одной из сфер. Доказать, что плоскость будет касаться и другой сферы.

Задача 10. Доказать, что плоскость, опорная к цилиндру и проходящая через его образующую, пересекает плоскость основания цилиндра по прямой, опорной к его основанию.

Напомню, что плоскость называется опорной к фигуре, если она имеет с фигурой хотя бы одну общую точку, а вся фигура лежит с одной стороны от этой плоскости. (Аналогичное определение для опорной прямой).

Задача 11. Два цилиндра имеют единственную общую образующую. Через нее проводится плоскость, опорная к одному из них. Доказать, что она будет опорной и к другому. [5, с. 73-78]

Дальнейшие свойства неформальных теорий

В этом параграфе мы введем несколько понятий, относящихся к неформальным аксиоматическим теориям. Понятия эти позволяют определенным образом классифицировать аксиоматические теории по их свойствам и возможностям.

Пусть S – высказывание некоторой теории $\mathcal{F}$, обладающее тем свойством, что как S, так и ~ S являются теоремами этой теории. В таком случае, если используемая в теории логическая система включает в себя исчисление высказываний с *modus ponens* в качестве правил вывода, то любое предложение T этой теории является теоремой. В самом деле, $S \to (\sim S \to T)$ есть теорема, так как это высказывание – тавтология; пользуясь дважды правилом *modus ponens*, выводим T в качестве теоремы. Теория $\mathcal{F}$ называется *противоречивой* (или *несовместной*), если она содержит такое высказывание S, что как S, так и его отрицание ~ S являются теоремами. Теория, не являющаяся противоречивой, называется *непротиворечивой* (или *совместной*); иными словами, в непротиворечивой теории нет такого высказывания S, что и S и ~ S являются теоремами.

Поскольку во всех теориях, которые нам предстоит рассматривать, используется логический аппарат исчисления высказываний, противоречивые теории следует считать не имеющими никакой ценности, так как любое предложение такой теории есть теорема. Таким образом, проблема установления непротиворечивости теории приобретает первостепенную важность. Для неформальных (аксиоматических) теорий вопрос этот во многих случаях удается решить с помощью понятия модели. В самом деле, если теория противоречива, каждая ее модель содержит противоречие, так как пара противоречащих друг другу теорем теории переводится в два противоречащих друг другу высказывания о модели. Значит, теория непротиворечива, если для нее удается указать свободную от противоречий модель. Если для теории $<X, \ldots>$ можно найти такую интерпретацию, что интерпретацией для X служит *конечное* множество, то можно рассчитывать на то, что вопрос об отсутствии в этой интерпретации противоречий удастся решить непосредственным ее рассмотрением. Например, то обстоятельство, что одноэлементное множество, состоящее из единственного предмета e, вместе с определенной на нем операцией $e \cdot e = e$ является моделью теории групп, позволяет без всяких колебаний решить в положительную сторону вопрос о непротиворечивости теории групп.

Однако в других случаях обоснование непротиворечивости модели (т.е. отсутствие в ней противоречий) может быть достигнуто лишь посредством сложной цепи далеко не очевидных рассуждений. Это может иметь место, например, в том случае, когда теория имеет только бесконечные модели (т.е. такие модели, в которых интерпретации предметной области теории бесконечны). Таким образом, во многих случаях попытки установления непротиворечивости с помощью модели по самому своему существу имеют относительную ценность: теория непротиворечива, если непротиворечива сама модель. Рассмотрим несколько примеров. Можно предложить интерпретацию геометрии Бойаи-

Лобачевского средствами геометрии Евклида. Тем самым установлена относительная непротиворечивость геометрии Бойаи-Лобачевского: она непротиворечива, если непротиворечива евклидова геометрия. Непротиворечивость же евклидовой геометрии (точное описание которой было дано в 1899 году немецким математиком Д. Гильбертом в его *Grundlagen der Geometrie*[4]) никогда не была доказана, хотя почти все «уверены» в ее непротиворечивости. Доказательство ее относительной непротиворечивости может быть получено с помощью интерпретации, при которой точки интерпретируются посредством упорядоченных пар действительных чисел, а прямые – посредством отношений, определяемых линейными уравнениями; разумеется, эта интерпретация по существу содержится в хорошо известной идее декартовой координатной системы в евклидовой геометрии. Но непротиворечивость системы действительных чисел также до сих пор не доказана, так что мы может лишь сказать, что евклидова геометрия непротиворечива при условии непротиворечивости системы действительных чисел. Таким же или каким-либо другим образом непротиворечивость обширных областей классической математики сводится в конечном счете к непротиворечивости арифметики натуральных чисел, например, к теории, основанной на аксиомах Пеано, или к теории множеств, достаточно сильной, чтобы вывести ее средствами пеановские аксиомы.

В предположении, что непротиворечивость некоторой теории доказана или хотя бы принята на веру, имеет смысл поставить проблему *полноты* этой теории. Теория называется *полной*, если она содержит достаточное для какой-нибудь цели количество теорем. Исходя из различных целей, которые мы ставим при построении теории, мы приходим к различным техническим значениям понятия полноты. Ограничимся следующим из возможных определений: теория Ғ называется полной, если для любого высказывания S этой теории либо S, либо ~ S есть теорема. Определение это исходит из того обстоятельства, что любое высказывание S теории Ғ, будучи интерпретировано в некоторой модели, оказывается непременно либо истинным, либо ложным. Следовательно, в этом случае либо S, либо ~ S оказывается истинным и должно быть теоремой в теории Ғ. Теория, являющаяся одновременно непротиворечивой и полной, является максимальной в отношении непротиворечивости – в том смысле, что добавление к такой теории в качестве аксиомы любого предложения, которое можно в ней сформулировать, но не являющегося ее теоремой, приводит к непротиворечивой теории. Проблема полноты может быть лучше всего рассмотрена по отношению к таким аксиоматическим теориям, в которые явным образом включена используемая теория логического вывода. Для многих важных математических теорий задача сочетания обоих названных качеств – непротиворечивости и полноты – оказывается невыполнимой.

Приведенной здесь краткой характеристики понятия полноты оказывается вполне достаточно для обсуждения следующего понятия, относящегося к аксиоматическим теориям. Понятие это характеризует теорию относительной той цели, ради которой теория строилась. Если исходить из того, что аксиоматиче-

[4] Русский перевод: Д. Гильберт. Основания геометрии. М. – Л., Гостехисздат, 1948. – Прим. перев.

ская теория предназначается для формализации некоторой интуитивной теории, тогда мерой успешности этой аксиоматизации служит неразличимость любых двух моделей этой теории (с точностью до терминологии и обозначений). В таком случае мы можем сказать, что первичные термины и аксиомы дают исчерпывающую совокупность основных принципов интуитивной теории. Этот тип неразличимости двух моделей известен под именем *изоморфизм*. Попытка предложить точное определение этого понятия, покрывающее все мыслимые ситуации, где оно может встретиться, была бы слишком затруднительной для осуществления. По этой причине мы предпочитаем дать несколько определений, относящихся к различным интересующим нас случаям употребления термина «изоморфизм». Мы ограничимся тремя такими точными определениями (обозначаемыми ниже, соответственно через I_1, I_2 и I_3).

I_1. Пусть $<X_1,\rho_1>$ и $<X_2,\rho_2>$ суть две модели какой-либо теории, первичными терминами которой являются некоторое множество и определенное на нем отношение. Тогда $<X_1,\rho_1>$ изоморфна $<X_2,\rho_2>$, если существует такая функция f, что:

1) f есть взаимно-однозначное соответствие между X_1 и X_2;
2) из $x, y \in X_1$ и $x\, \rho_1 y$ следует $f(x)\, \rho_1 f(y)$;
3) из $x, y \in X_2$ и $x\, \rho_2 y$ следует $f^{-1}(x)\, \rho_1 f^{-1}(y)$.

Это определение приложимо к случаю, когда ρ_i есть функция, определенная на X_i со значениями в X_i $(i=1,2)$. Для этого случая оно может быть упрощено следующим образом.

Пусть $<X_1,f_1>$ и $<X_2,f_2>$ суть две модели какой-либо теории, первичными терминами которой являются некоторое множество и функция, отображающая это множество в себя. Тогда $<X_1,f_1>$ изоморфна $<X_2,f_2>$, если существует такая функция f, что:

1) f есть взаимно-однозначное соответствие между X_1 и X_2;
2) из $x \in X_1$ следует $f(f_1(x)) = f_2(f(x))$.

Как видим, в этом случае для установления изоморфизма двух моделей достаточно доказать выполнение только одного из условий 2) и 3) определения I_1; второе из этих условий, характеризующее симметричность, присущую понятию изоморфизма, немедленно вытекает из первого.

I_2. Пусть $<X_1,o_1>$ и $<X_2,o_2>$ суть две модели какой-либо теории, первичными терминами которой являются некоторое множество и бинарная операция в этом множестве. Тогда $<X_1,o_1>$ изоморфна $<X_2,o_2>$, если существует такая функция f, что:

1) f есть взаимно-однозначное соответствие между X_1 и X_2;
2) из $x, y \in X_1$ следует $f(x o_1 y) = f(x) o_2 f(y)$.

I_3. Пусть $<X_1,Y_1,\rho_1>$ и $<X_2,Y_2,\rho_2>$ суть две модели какой-либо теории, первичными терминами которой являются два множества и отношение, областью определения которого служит одно из этих множеств, а областью значений – второе. Тогда $<X_1,Y_1,\rho_1>$ изоморфна $<X_2,Y_2,\rho_2>$, если существует такая функция f, что:

1) f есть взаимно-однозначное соответствие между $X_1 \cup Y_1$ и $X_2 \cup Y_2$, причем $f(X_1) = X_2$ и $f(Y_1) = Y_2$;

2) f сохраняет отношение ρ_1 и ρ_2 в смысле определения I_1.

Это, конечно, не единственный возможный вариант определения изоморфизма для моделей указанного вида. Данное определение относится к сохранению теоретико-множественных взаимосвязей между множествами X_i и Y_i $(i=1,2)$.

Аксиоматическая теория, две любые модели которой изоморфны[5], называется категоричной. Таким образом, категоричная теория имеет по существу единственную модель. Именно достижение такой ситуации преследуется при аксиоматизации некоторых интуитивных теорий, скажем, евклидовой геометрии или теории действительных чисел.

Некатегоричная теория имеет существенно различные (т.е. неизоморфные) модели. Это как раз то, что следует ожидать от теории, предназначенной для аксиоматизации общих свойств нескольких различных теорий. Превосходным примером такой теории служит теория групп. Именно в силу своего общего характера она имеет разнообразные модели, что и обусловливает многообразие ее применений.

В заключение этого параграфа – несколько дополнительных замечаний. Первое из них ставит своей целью уточнение смысла неоднократно употреблявшегося слова «формулировка». Неформальная теория $\mathcal{F}$ включает в себя некоторый список T_0 неопределяемых терминов, список T_1 определяемых терминов, список P_0 аксиом и список P_1 всех остальных высказываний, которые можно вывести из P_0 по некоторым фиксированным логическим правилам. Назначение множества T_0 состоит в том, чтобы получить из него множество $T_0 \cup T_1$ всех используемых в теории $\mathcal{F}$ терминов; аналогично, множество P_0 нужно для получения множества $P_0 \cup P_1$ всех теорем теории $\mathcal{F}$. Упорядоченную пару $<T_0, P_0>$ мы и предлагаем называть «формулировкой» теории $\mathcal{F}$.

Различные формулировки какой-либо теории – это не что иное, как различные возможные подходы к одной и той же математической структуре. В зависимости от принятых критериев можно предпочесть ту или иную из таких различных формулировок. Основаниями для такого предпочтения могут, например, служить соображения эстетического характера; важную роль может здесь играть и желание иметь как можно более простое множество аксиом, а также возможность более изящных доказательств теорем.

Формулировки неформальной теории можно характеризовать с помощью такого понятия, как независимость множества аксиом. Множество аксиом называется *независимым*, если исключение любой из аксиом из этого множества приводит к уменьшению запаса теорем; в противном случае множество аксиом называется *зависимым*. Отдельная аксиома (рассматриваемая как элемент множества аксиом некоторой формулировки) *независима*, если ее исключение из этого множества уменьшает запас теорема, и *зависима* в противном случае. Ясно, что независимая аксиома не может быть выведена из остальных аксиом. Разумеется, независимость какого-либо множества аксиом равносильна тому, что

[5] В смысле любого из данных определений или любой их модификации. – Прим. перев.

независима каждая аксиома из этого множества. Для установления независимости аксиом можно пользоваться моделями. Зависимое множество аксиом попросту содержит одну или более излишних аксиом, но сама теория не становится от этого сложнее. [6, с. 155-162]

Список литературы

1. Игошин В.И. Логика с элементами математической логики (лекции для студентов гуманитарных специальностей) / В.И. Игошин. – Саратов : Изд-во «Научная книга», 2004. – 144 с.
2. Игошин В.И. Математическая логика как педагогика математики / В.И. Игошин. – Саратов : Издательский центр «Наука», 2009. – 360 с.
3. Игошин В.И Задачи на построение / В.И. Игошин // газета «Математика», издательский дом «Первое сентября», № 31, 2001. – с. 1-5.
4. Пойа Д. Математическое открытие / пер. с англ. В.С. Бермана. Под ред. И.М. Яглома. – 2-е изд., стер. – М. : Издательство «Наука», 1976. – 448 с.
5. Рыжик В.И. 25000 уроков математики: Кн. для учителя. – М. : Просвещение, 1993. – 240 с.
6. Стол Роберт Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / пер. с англ. Ю.А. Гастева и И.Х. Шмаина. Под ред. Ю.А. Шихановича. – М. : «Просвещение», 1968. – 231 с.

Алена Александровна Вдовиченко

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 2: ГЕОМЕТРИЯ. ХРЕСТОМАТИЯ

Работа издана в авторской редакции

Бумага офсетная	Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$
Усл. печ. л. 4,5	Гарнитура Times