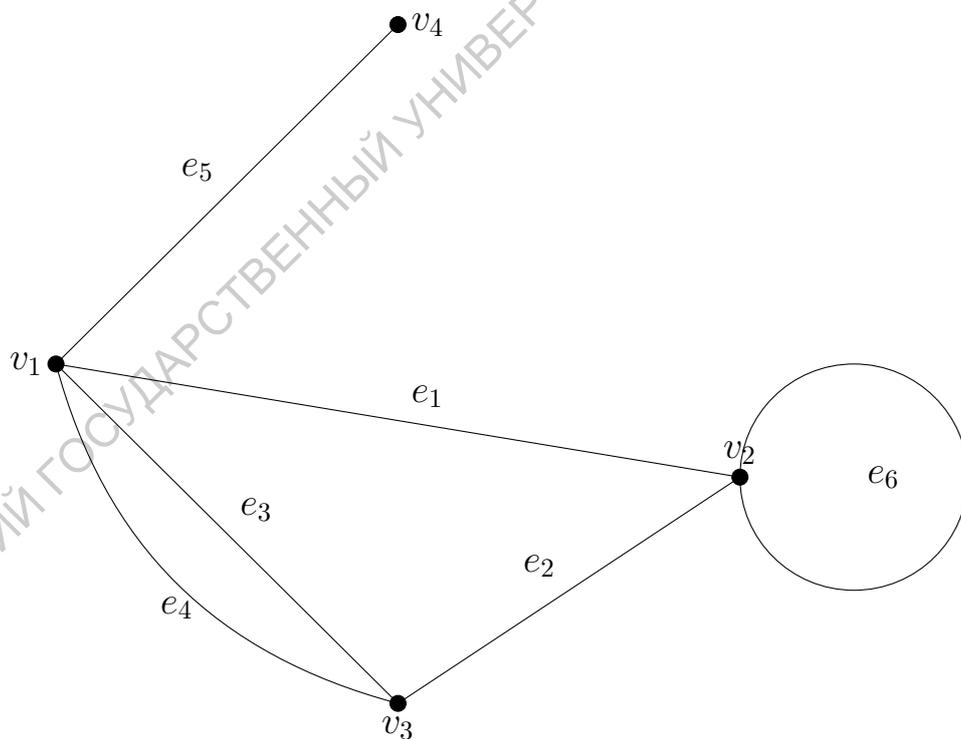


Бондаренко Н.П.

Дискретные математические модели



САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНА Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

УДК 517.9

Бондаренко Н.П. Дискретные математические модели: Учеб. пособие для студ. матем. спец. Саратов, 2015. – 52 с.

Учебное пособие содержит материал лекций и упражнения по дисциплине «Дискретные математические модели» для студентов магистратуры, обучающихся на направлении «Прикладная математика и информатика».

Рекомендуют к печати:

*Кафедра математической физики
и вычислительной математики
Саратовского государственного университета
имени Н.Г. Чернышевского*

Кандидат физико-математических наук *С.А. Бутерин*

© Н.П. Бондаренко, 2015

Учебное пособие содержит теоретический материал по курсу «Дискретные математические модели» для студентов магистратуры механико-математического факультета, обучающихся на направлении «Прикладная математика и информатика».

Курс посвящен квантовым графам (англ. quantum graphs), или, другими словами, дифференциальным операторам на геометрических графах. Идеи квантового графа как модели органической молекулы восходят к работам химиков 30-х годов XX века. Завершенную форму это понятие приобрело в статье Руденберга и Шера [1]. В настоящее время дифференциальные операторы на графах имеют приложения в квантовой механике, химии, нанотехнологиях, теории волноводов и других областях естествознания [2]. Математическая теория квантовых графов получила развитие в конце XX – начале XXI века. Сейчас эта область математики продолжает активно изучаться российскими и зарубежными учеными. Ей посвящена обширная литература, обзор которой можно найти в [3, 4]. В последние годы обратные задачи для дифференциальных операторов на графах являются одной из тем исследований научной группы, работающей под руководством В.А. Юрко на кафедре математической физики и вычислительной математики СГУ.

В данном пособии изложены основы спектральной теории квантовых графов и введение в обратные задачи на графах. Лекционный материал снабжен упражнениями для самостоятельной работы студентов.

С автором пособия можно связаться по электронной почте VondarenkoNP@info.sgu.ru. Буду благодарна за любые замечания и предложения.

Содержание

1. Понятие квантового графа	5
1.1. Геометрический граф	5
1.2. Дифференциальный оператор на каждом ребре	6
1.3. Условия склейки	6
2. Самосопряженность стандартных условий склейки	11
3. Собственные значения и собственные функции	15
4. Общий вид самосопряженных условий склейки	20
5. Характеристический определитель	26
6. Матрица рассеяния	29
7. Обратные задачи на графах	35
8. Восстановление потенциала на графе-звезде	39
8.1. Постановка обратной задачи	39
8.2. Асимптотики решений	43
8.3. Локальная обратная задача	47
8.4. Решение обратной задачи на графе	49
Список литературы	51

1. Понятие квантового графа

Квантовый граф — это геометрический граф с заданным на нем дифференциальным оператором. Понятие квантового графа включает в себя три составляющих.

1.1. Геометрический граф

Пусть $\Gamma = (V, E)$ — геометрический граф с множеством вершин $V = \{v_i\}$ и множеством ребер $E = \{e_j\}$. Каждому ребру можно поставить в соответствие пару вершин, которые оно соединяет: $e_j = (v_i, v_k)$. В этом случае говорят, что ребро e_j *инцидентно* вершинам v_i и v_k , а эти вершины, в свою очередь, *инцидентны* ребру e_j . Количество ребер, инцидентных вершине, называется *степенью* вершины. Мы в основном будем рассматривать графы с конечными множествами вершин и ребер, хотя, вообще говоря, они могут быть бесконечными. В графе могут быть петли (ребра, у которых начало и конец совпадают) и кратные ребра (несколько ребер соединяют одну и ту же пару вершин).

Припишем каждому ребру e_j некоторое положительное число l_j , называемое длиной ребра. На ребре e_j введем вещественный параметр x_j , изменяющийся от 0 до l_j . Точка $x_j = 0$ соответствует одному концу ребра, а $x_j = l_j$ — другому концу ребра. Иногда рассматривают графы с бесконечными ребрами $l_j = \infty$. В этом случае обычно не считают, что конец $x_j = \infty$ соответствует какой-то вершине, а просто ставят в соответствие бесконечному ребру луч $[0, \infty)$. Мы ограничимся изучением компактных графов, у которых длины всех ребер конечны. Ориентация ребер и параметризация для одного и того же графа могут быть выбраны произвольным образом, это вопрос удобства. Отметим также, что граф не обязательно предполагается нарисованным на плоскости и вообще вложенным в какое-либо евклидово пространство.

Имея геометрический граф, можно ввести понятие *функции* на нем. Функция на графе Γ — это вектор-функция $y = [y_j]_{j=1}^m$, каждая компонента y_j является функцией параметра x_j , заданной на отрезке $[0, l_j]$, т.е. соответствует ребру e_j . Количество компонент вектор-функции равно количеству ребер в графе (обозначим его m).

1.2. Дифференциальный оператор на каждом ребре

На каждом ребре геометрического графа вводится дифференциальный оператор. Это может быть оператор Лапласа:

$$y_j(x_j) \rightarrow -\frac{d^2 y_j(x_j)}{dx_j^2}$$

или в более общем случае оператор Штурма-Лиувилля (в литературе часто называемый оператором Шрёдингера):

$$y_j(x_j) \rightarrow -\frac{d^2 y_j(x_j)}{dx_j^2} + q_j(x_j)y_j(x_j).$$

Для оператора Штурма-Лиувилля нужно задать функцию $q = [q_j]_{j=1}^m$ на графе Γ , обычно называемую (электрическим) потенциалом. Иногда рассматривают оператор Штурма-Лиувилля с магнитным потенциалом:

$$y_j(x_j) \rightarrow \left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx_j} - a_j(x_j) \right)^2 y_j(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j).$$

Изучаются также операторы высших порядков на графах.

1.3. Условия склейки

Будем считать, что компоненты вектор-функции y связаны между собой условиями склейки. Чаще всего рассматривают стандартные условия склейки, включающие условие непрерывности и условие Кирхгофа. *Условие непрерывности* состоит в

том, что если одна и та же вершина v инцидентна нескольким ребрам, то значения компонент функции y на этих ребрах в концах, соответствующих вершине v , совпадают. Условие Кирхгофа — это равенство нулю суммы нормальных производных компонент функции y в вершине v . Условно его можно записать в виде

$$\sum_{e_j \in E_v} \frac{dy_j}{dx_j}(v) = 0,$$

где E_v — множество ребер, инцидентных вершине v , $\frac{dy_j}{dx_j}(v)$ — производная от компоненты y_j в точке, соответствующей вершине v (это точка 0 или l_j), взятая в направлении «от конца внутрь ребра», т.е. со знаком «+», если v соответствует $x_j = 0$, и со знаком «-», если v соответствует $x_j = l_j$.

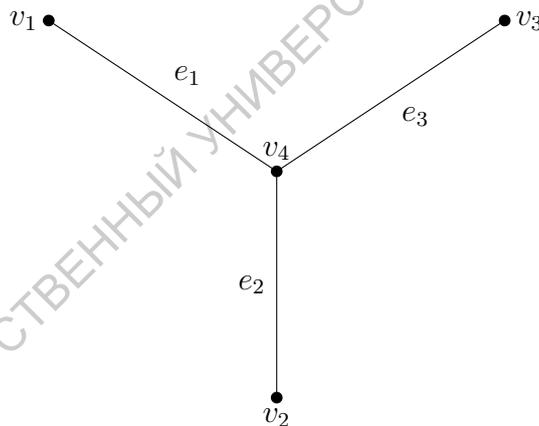


Рис. 1

В качестве примера рассмотрим граф-звезду из трех ребер. Обозначим его вершины и ребра, как показано на рис. 1. Введем параметризацию, как показано на рис. 2. У ребер e_1 и e_2 конец $x_j = 0$ соответствует граничным вершинам, а $x_j = l_j$ — вершине v_4 , у ребра e_3 — наоборот. Мы выбрали такой способ параметризации для примера, возможны и другие варианты. Рассмотрим функцию $y = [y_j]_{j=1,2,3}$ на заданном графе. Наи-

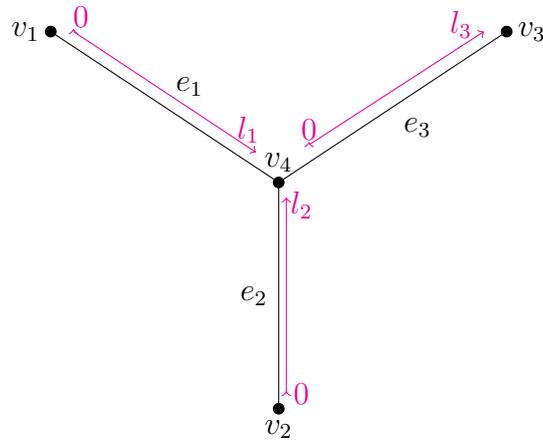


Рис. 2

большой интерес представляют условия склейки в вершине v_4 , инцидентной трем ребрам. Условие непрерывности примет вид

$$y_1(l_1) = y_2(l_2) = y_3(0),$$

условие Кирхгофа

$$-y_1'(l_1) - y_2'(l_2) + y_3'(0) = 0.$$

В вершинах степени два стандартные условия склейки обращаются в непрерывность функции и ее производной. Поэтому вершины степени два часто исключают из рассмотрения, объединяя инцидентные им ребра в одно ребро. Вершины степени один называются *граничными*. Условие непрерывности в граничных вершинах обычно исчезает (почему?), а условие Кирхгофа обращается в условие Неймана: $\frac{dy_j}{dx_j}(v) = 0$. Например, для графа-звезды на рис. 2 получим условия

$$y_1'(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0, \quad y_3'(l_3) = 0.$$

Часто в граничных вершинах рассматривают не условие Неймана, а условие Дирихле: $y_j(v) = 0$.

Мы описали стандартные условия склейки. Заметим, что они являются *локальными*, то есть задаются отдельно для каждой вершины. В дальнейшем будут рассмотрены другие варианты локальных условий склейки.

Перейдем к заданию *дифференциального оператора на графе*. Для того, чтобы ввести дифференциальный оператор, нужно задать его *область определения* и *правило*, по которому он действует на функции из области определения. В нашем случае областью определения будет являться множество $\mathcal{D}(H)$ функций y на графе Γ , принадлежащих классу $W_2^2(\Gamma)$ и удовлетворяющих условиям склейки. Напомним, что $W_2^2[a, b]$ — класс дважды дифференцируемых функций со второй производной из L_2 на отрезке $[a, b]$. Под $W_2^2(\Gamma)$ мы понимаем множество функций y на графе Γ , таких, что каждая компонента y_j принадлежит соответствующему классу $W_2^2[0, l_j]$. Аналогично вводятся другие пространства, в частности, $L_2(\Gamma)$. Оператор H действует на функции y из описанной области определения $\mathcal{D}(H)$, преобразуя каждую компоненту y_j по правилу из п. 2.2.

Упражнения

1. Введите параметризацию и выпишите стандартные условия склейки для графов на рис. 3.

2. Докажите, что число равенств, задаваемых стандартными условиями склейки, совпадает с удвоенным числом ребер для произвольного графа.

3. Вспомните определение самосопряженного оператора.

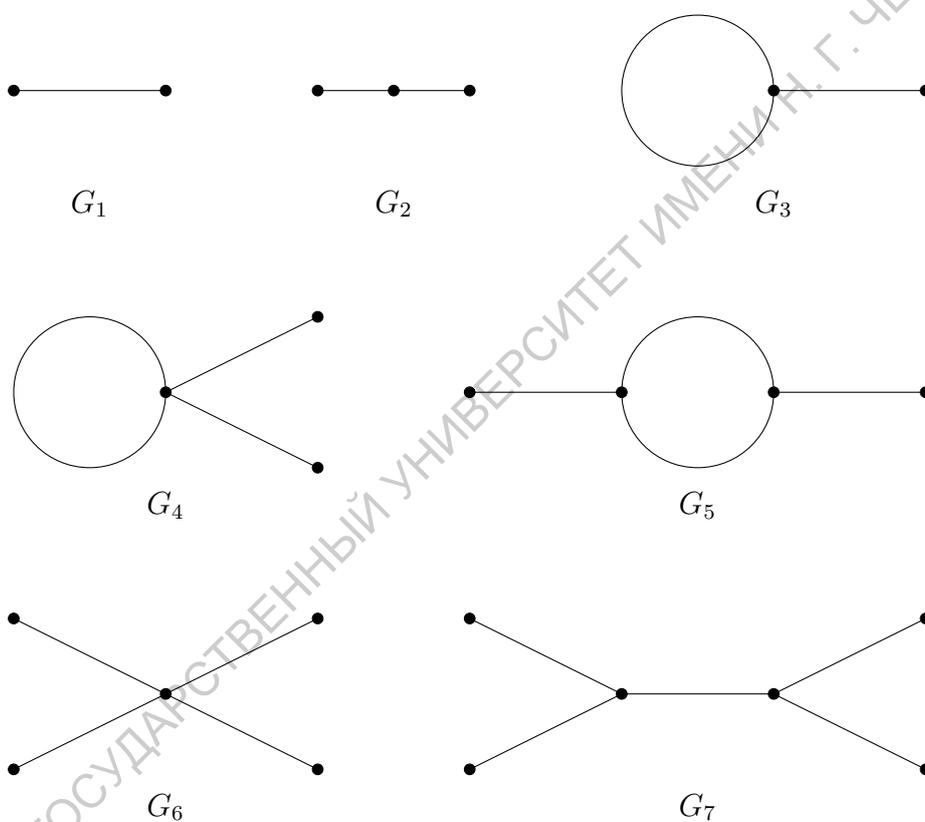


Рис. 3. Примеры графов

2. Самосопряженность стандартных условий склейки

Рассмотрим геометрический граф Γ и пространство

$$L_2(\Gamma) = \bigoplus_{j=1}^m L_2[0, l_j].$$

Иначе говоря, $L_2(\Gamma)$ — пространство вектор-функций $y = [y_j]_{j=1}^m$, где каждая компонента y_j задана на ребре e_j и принадлежит классу $L_2[0, l_j]$. Пространство $L_2(\Gamma)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(y, z) = \sum_{j=1}^m (y_j, z_j) = \sum_{j=1}^m \int_0^{l_j} y_j(x_j) \overline{z_j(x_j)} dx_j, \quad y, z \in L_2(\Gamma).$$

Рассмотрим оператор $H: L_2(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma)$ с областью определения

$$\mathcal{D}(H) = \{y \in W_2^2(\Gamma) : y \text{ удовл. станд. условиям склейки}\},$$

действующий по правилу

$$(Hy)_j = -y_j'' + q_j(x_j)y_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.1)$$

где $q = [q_j]_{j=1}^m \in L_2(\Gamma)$ — вещественный потенциал.

Теорема. Оператор H является самосопряженным в пространстве $L_2(\Gamma)$.

Доказательство. Построим оператор H^* , сопряженный оператору H , и убедимся, что $H = H^*$. Сопряженный оператор — это оператор с максимальной областью определения $\mathcal{D}(H^*)$, такой, что выполняется равенство

$$(Hy, z) = (y, H^*z), \quad y \in \mathcal{D}(H), \quad z \in \mathcal{D}(H^*). \quad (2.2)$$

Преобразуем скалярное произведение:

$$(Hy, z) = \sum_{j=1}^m \int_0^{l_j} (-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j)) \overline{z_j(x_j)} dx_j.$$

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} - \int_0^{l_j} y_j''(x_j) \overline{z_j(x_j)} dx_j &= \\ &= (-y_j'(x_j) \overline{z_j(x_j)}) \Big|_0^{l_j} + \int_0^{l_j} y_j'(x_j) \overline{z_j'(x_j)} dx_j = \\ &= (y_j(x_j) \overline{z_j'(x_j)} - y_j'(x_j) \overline{z_j(x_j)}) \Big|_0^{l_j} - \int_0^{l_j} y_j(x_j) \overline{z_j''(x_j)} dx_j. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (Hy, z) &= \sum_{j=1}^m \int_0^{l_j} y_j(x_j) \overline{(-z_j''(x_j) + q_j(x)z_j(x_j))} dx_j + \\ &+ \sum_{j=1}^m (y_j(x_j) \overline{z_j'(x_j)} - y_j'(x_j) \overline{z_j(x_j)}) \Big|_0^{l_j} =: \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2. \end{aligned}$$

Первая сумма \mathcal{S}_1 имеет вид (y, H^*z) , где оператор H^* действует по тому же правилу (2.1), что и оператор H . Для выполнения равенства (2.2) необходимо и достаточно обращения в ноль суммы \mathcal{S}_2 . То есть область определения оператора H^* включает те и только те функции из $W_2^2(\Gamma)$, для которых $\mathcal{S}_2 = 0$ при любых функциях y , удовлетворяющих стандартным условиям склейки.

Перейдем в сумме \mathcal{S}_2 от суммирования по ребрам к суммированию по вершинам. Для каждой вершины $v \in V$ графа Γ обозначим через E_v множество ребер, инцидентных этой вершине. Перепишем сумму \mathcal{S}_2 в виде

$$\mathcal{S}_2 = \sum_{v \in V} \sum_{e_j \in E_v} \left(y_j'(v) \overline{z_j(v)} - y_j(v) \overline{z_j'(v)} \right),$$

где введены обозначения

$$y_j(v) = y_j(0), \quad y'_j(v) = y'_j(0),$$

если вершина v соответствует концу $x_j = 0$ ребра e_j и

$$y_j(v) = y_j(l_j), \quad y'_j(v) = -y'_j(l_j),$$

если вершина v соответствует концу $x_j = l_j$, и аналогично для функции z .

Для того, чтобы сумма \mathcal{S}_2 обращалась в ноль при любой функции $y \in \mathcal{D}(H)$, необходимо и достаточно, чтобы обращалась в ноль сумма

$$\mathcal{S}_2(v) = \sum_{e_j \in E_v} \left(y'_j(v) \overline{z_j(v)} - y_j(v) \overline{z'_j(v)} \right)$$

для каждой отдельной вершины $v \in V$. Действительно, стандартные условия склейки являются локальными, значит, векторы $[y_j(v), y'_j(v)]_{e_j \in E_v}$ независимы друг от друга. Любой вектор значений $[y_j(v), y'_j(v)]_{v \in V, e_j \in E_v}$, удовлетворяющий стандартным условиям склейки, можно представить в виде суммы векторов y_v , $v \in V$, где каждый вектор y_v имеет нулевые компоненты $y_j(u)$ и $y'_j(u)$ в вершинах $u \neq v$. Поэтому достаточно отдельно исследовать суммы $\mathcal{S}_2(v)$, и условия на z тоже будут носить локальный характер.

Преобразуем сумму

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2(v) = & \left(\sum_{e_j \in E_v} y'_j(v) \right) \overline{z_{j_0}(v)} + \\ & + \sum_{e_j \in E_v} y'_j(v) (\overline{z_j(v)} - \overline{z_{j_0}(v)}) - \sum_{e_j \in E_v} y_j(v) \overline{z'_j(v)}. \end{aligned}$$

Здесь e_{j_0} — произвольное фиксированное ребро из множества E_v . Согласно стандартным условиям склейки,

$$y_j(v) = y_{j_0}(v), \quad e_j \in E_v, \quad \sum_{e_j \in E_v} y'_j(v) = 0. \quad (2.3)$$

Следовательно,

$$\mathcal{S}_2(v) = \sum_{e_j \in E_v \setminus \{e_{j_0}\}} y'_j(v) (\overline{z_j(v)} - \overline{z_{j_0}(v)}) - y_{j_0}(v) \left(\sum_{e_j \in E_v} \overline{z'_j(v)} \right).$$

Компоненты $y_{j_0}(v)$, $y'_j(v)$, $e_j \in E_v \setminus \{e_{j_0}\}$, могут принимать любые значения независимо друг от друга. Поэтому $\mathcal{S}_2(v) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$z_j(v) = z_{j_0}(v), \quad e_j \in E_v, \quad \sum_{e_j \in E_v} z'_j(v) = 0.$$

Мы получили, что область определения сопряженного оператора H^* ограничена стандартными условиями склейки. Тем самым мы показали, что $H^* = H$. \square

Упражнения

1. Покажите, что пространство $L_2(G)$ гильбертово.
2. Где в доказательстве теоремы используется вещественность потенциала q ?
3. Рассмотрим вектор $[y_j(0), y'_j(0), y_j(l_j), y'_j(l_j)]_{j=1}^m$ как элемент линейного пространства \mathbb{C}^{4m} . Докажите, что вектора, удовлетворяющие стандартным условиям склейки (2.3), образует линейное подпространство размерности $2m$.

3. Собственные значения и собственные функции

Рассмотрим оператор Штурма-Лиувилля H на графе Γ , изучавшийся в прошлой главе. Из самосопряженности этого оператора вытекает следующий факт.

Следствие. Все собственные значения оператора H вещественные. Собственные вектор-функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в $L_2(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть λ — собственное значение оператора H , то есть существует такая ненулевая функция $y \in \mathcal{D}(H)$, что

$$Hy = \lambda y.$$

Поскольку оператор H — самосопряженный,

$$\lambda(y, y) = (\lambda y, y) = (Hy, y) = (y, Hy) = (y, \lambda y) = \bar{\lambda}(y, y).$$

Так как $y \neq 0$, имеем $(y, y) \neq 0$. Следовательно, $\lambda = \bar{\lambda}$.

Пусть $y, z \in \mathcal{D}(H)$ — собственные функции оператора H , отвечающие собственным значениям $\lambda \neq \mu$:

$$Hy = \lambda y, \quad Hz = \mu z.$$

Тогда

$$\lambda(y, z) = (Hy, z) = (y, Hz) = (y, \mu z) = \mu(y, z).$$

Здесь мы воспользовались самосопряженностью оператора H и вещественностью собственного значения μ . Поскольку $\lambda \neq \mu$, отсюда следует $(y, z) = 0$. \square

Полученные свойства собственных значений и собственных функций имеют место для любого самосопряженного оператора.

Рассмотрим пример вычисления собственных значений и собственных функций графа-звезды из трех ребер. Для простоты предположим, что длины всех ребер равны π и потенциал q

нулевой. Введем параметризацию таким образом, что для всех трех ребер конец $x_j = 0$ соответствует граничной вершине, а конец $x_j = \pi$ — внутренней вершине (см. рис. 4). Такая параметризация более удобна, чем введенная на рис. 2.

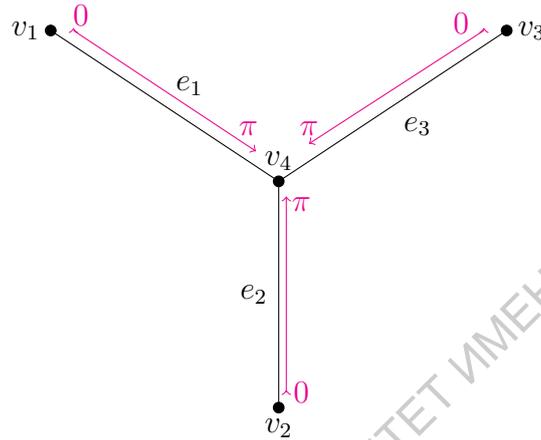


Рис. 4

Пусть λ — собственное значение оператора H на графе-звезде и $y = [y_j]_{j=1,2,3}$ — отвечающая этому собственному значению собственная функция. Тогда, согласно (2.1),

$$-y_j'' = \rho^2 y_j, \quad \rho = \sqrt{\lambda}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Кроме того, функция y удовлетворяет условиям склейки

$$y_1(\pi) = y_2(\pi) = y_3(\pi), \quad y_1'(\pi) + y_2'(\pi) + y_3'(\pi) = 0 \quad (3.2)$$

во внутренней вершине и условиям

$$y_1'(0) = y_2'(0) = y_3'(0) = 0 \quad (3.3)$$

в граничных вершинах.

При каждом фиксированном j общее решение уравнения (3.1) может быть найдено методом Эйлера. Оно имеет вид

$$y_j(x_j) = A_j(\rho) \cos \rho x_j + B_j(\rho) \sin \rho x_j \quad (3.4)$$

при $\rho \neq 0$ (случай $\lambda = 0$ требует отдельного рассмотрения). Заметим, что мы имеем 6 неизвестных коэффициентов $A_j(\rho)$, $B_j(\rho)$, $j = 1, 2, 3$, и 6 условий (3.2), (3.3). Подставим решение в виде (3.4) в равенства (3.3):

$$\begin{aligned} y'_j(x_j)|_{x_j=0} &= (-\rho A_j(\rho) \sin \rho x_j + \rho B_j(\rho) \cos \rho x_j)|_{x_j=0} = \\ &= \rho B_j(\rho) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $B_j(\rho) = 0$ и $y_j(\rho) = A_j(\rho) \cos \rho x_j$.

Условия (3.3) дают систему линейных уравнений относительно коэффициентов $A_j(\rho)$. Запишем эту систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \cos \rho\pi & -\cos \rho\pi & 0 \\ 0 & \cos \rho\pi & -\cos \rho\pi \\ -\rho \sin \rho\pi & -\rho \sin \rho\pi & -\rho \sin \rho\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(\rho) \\ A_2(\rho) \\ A_3(\rho) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.5)$$

Это однородная система, и нас интересуют ее нетривиальные решения. (При $A_1(\rho) = A_2(\rho) = A_3(\rho) = 0$ имеем $y \equiv 0$). Нетривиальные решения существуют, когда определитель системы равен нулю. Найдем определитель:

$$\Delta(\rho) = -3\rho \sin \rho\pi \cos^2 \rho\pi.$$

и его нули:

$$\rho_{n,1} = n, \quad \rho_{n,2} = n + \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Переходя к $\lambda = \rho^2$ и исключая из рассмотрения $\rho = 0$, получаем две последовательности собственных значений:

$$\begin{aligned} \lambda_{n,1} &= n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \lambda_{n,2} &= \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Чтобы найти собственные функции, вернемся к системе (3.5).

Подставим $\rho = \rho_{n,1}$:

$$\begin{pmatrix} \cos n\pi & -\cos n\pi & 0 \\ 0 & \cos n\pi & -\cos n\pi \\ -n \sin n\pi & -n \sin n\pi & -\rho \sin n\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = A_2, \\ A_2 = A_3. \end{cases}$$

Таким образом, все решения системы при $\rho = \rho_{n,1}$ имеют вид (A, A, A) , где A — произвольная константа. Собственные функции имеют вид

$$y_{n,1} = \begin{pmatrix} \cos nx_j \\ \cos nx_j \\ \cos nx_j \end{pmatrix}$$

с точностью до умножения на произвольную постоянную A .

Теперь подставим в систему (3.5) $\rho = \rho_{n,2}$. После упрощения получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow A_1 + A_2 + A_3 = 0.$$

Система имеет линейное подпространство решений размерности 2. Выберем базис в этом подпространстве. Например, можно взять $A_1 = -A_2 = 1$, $A_2 = -A_3 = 1$, тогда получим векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

и соответствующие им собственные функции:

$$y_{n,2} = \begin{pmatrix} \cos nx_j \\ -\cos nx_j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_{n,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos nx_j \\ -\cos nx_j \end{pmatrix}.$$

Отметим, что каждому собственному значению $\lambda_{n,2}$ отвечают две линейно независимые собственные функции $y_{n,2}$ и $y_{n,3}$. Про такие собственные значения говорят, что они имеют *кратность* 2. Нетрудно видеть, что любая линейная комбинация $C_1 y_{n,2} + C_2 y_{n,3}$ тоже будет собственной функцией, отвечающей собственному значению $\lambda_{n,2}$. Собственных функций, отвечающих одному собственному значению, всегда бесконечно много, они образуют линейное пространство. Однако как правило, говоря о собственных функциях, выбирают некоторый базис с этом пространстве. Размер этого базиса определяет кратность собственного значения. В нашем случае собственные значения $\lambda_{n,1}$ имеют кратность 1, а собственные значения $\lambda_{n,2}$ — кратность 2.

В общем случае нахождение собственных значений и собственных функций оператора на графе — очень трудная задача, она не может быть решена аналитически.

Упражнения

1. Докажите, что линейная комбинация собственных функций, отвечающих одному и тому же собственному значению оператора, тоже является собственной функцией, отвечающей этому собственному значению.

2. Исследуйте случай $\lambda = 0$ в рассмотренном примере.

3. Найдите собственные значения и собственные функции для графа-звезды из трех ребер, аналогичного описанному в примере, со стандартными условиями склейки во внутренней вершине и следующими условиями в граничных вершинах:

а) условиями Дирихле, б) $y_1'(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$.

4. Общий вид самосопряженных условий склейки

Мы получим обобщение стандартных условий склейки, сохраняющее два важных свойства: локальность и самосопряженность.

Будем называть условия *локальными*, если они связывают значения $y_j(v)$, $y'_j(v)$ отдельно в каждой вершине v графа Γ . Напомним, что

$$y_j(v) = y_j(0), \quad y'_j(v) = y'_j(0),$$

если вершина v соответствует концу $x_j = 0$ ребра e_j и

$$y_j(v) = y_j(l_j), \quad y'_j(v) = -y'_j(l_j),$$

если вершина v соответствует концу $x_j = l_j$.

Фиксируем вершину v . Без ограничения общности можно считать, что ей инцидентны ребра e_1, e_2, \dots, e_n . Обозначим

$$y(v) = \begin{pmatrix} y_1(v) \\ y_2(v) \\ \dots \\ y_n(v) \end{pmatrix}, \quad y'(v) = \begin{pmatrix} y'_1(v) \\ y'_2(v) \\ \dots \\ y'_n(v) \end{pmatrix}.$$

Локальные условия склейки в вершине v можно представить в общем виде

$$Ay(v) + By'(v) = 0, \quad (4.1)$$

где $A = A(v)$ и $B = B(v)$ — $n \times n$ матрицы коэффициентов.

Зададим вопрос:

При каких матрицах A и B локальные условия склейки (4.1) будут самосопряженными?

Иначе говоря, когда оператор Штурма-Лиувилля H на графе Γ , действующий по правилу (2.1) и имеющий область определения

$$\mathcal{D}(H) = \{y \in W_2^2(\Gamma) : A(v)y(v) + B(v)y'(v) = 0, v \in V\},$$

является самосопряженным?

Напомним, что при доказательстве теоремы о самосопряженности стандартных условий склейки мы свели вопрос о построении сопряженного оператора H^* к исследованию суммы

$$\mathcal{S}_2(v) = \sum_{j=1}^n (y'_j(v) \overline{z_j(v)} - y_j(v) \overline{z'_j(v)}).$$

Функция $z \in W_2^2(\Gamma)$ принадлежит области определения оператора H^* тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}_2(v) = 0$ в любой вершине $v \in V$ при любой функции y из $\mathcal{D}(H)$.

Введем обозначение

$$[y_v] = \begin{pmatrix} y(v) \\ y'(v) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}.$$

Обозначим через M_v подпространство \mathbb{C}^{2n} , образуемое векторами $[y_v]$, удовлетворяющими обобщенным условиям склейки (4.1). Размерность пространства M_v равна разности $2n$ и количества линейно независимых условий в (4.1). Систему (4.1) можно представить в виде

$$[A \ B][y_v] = 0,$$

где $[A \ B]$ — матрица размера $n \times 2n$, получаемая при добавлении матрицы B справа от матрицы A . Из этого представления видно, что количество линейно независимых условий равно рангу матрицы $[A \ B]$, который не превосходит n . Следовательно,

$$\dim M_v = 2n - \text{rank}[A \ B] \geq n. \quad (4.2)$$

Заметим, что

$$\mathcal{S}_2(v) = ([y_v], [z_v]),$$

где

$$[z_v] = \begin{pmatrix} -z'(v) \\ z(v) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}.$$

По определению скалярное произведение $([y_v], [z_v])$ равно нулю для всех $[y_v] \in M_v$ тогда и только тогда, когда $[z_v]$ принадлежит ортогональному дополнению M_v^\perp .

$$\dim M_v^\perp = 2n - \dim M_v.$$

Согласно (4.2) $\dim M_v^\perp \geq n$.

Итак,

$$\mathcal{D}(H) = \{y \in W_2^2(\Gamma) : [y_v] \in M_v\},$$

$$\mathcal{D}(H^*) = \{z \in W_2^2(\Gamma) : [z_v] \in M_v^\perp\}.$$

Следовательно, равенство $H = H^*$ возможно лишь в случае

$$\dim M_v = \dim M_v^\perp = \text{rank}[A \ B] = n.$$

Согласно (4.1) столбцы эрмитово сопряженной матрицы $\begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix}$ ортогональны векторам $[y_v] \in M_v$. Эта матрица имеет n линейно независимых столбцов, следовательно, их линейная оболочка образует ортогональное дополнение M_v^\perp . Любой вектор $z_v \in M_v^\perp$ может быть представлен в виде

$$[z_v] = \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix} \psi,$$

где ψ — произвольный вектор из \mathbb{C}^{2n} , то есть

$$z(v) = B^* \psi, \quad z'(v) = -A^* \psi. \quad (4.3)$$

Если оператор H — самосопряженный, область определения H^* описывается условиями (4.1):

$$Az(v) + Bz'(v) = 0.$$

Подставляя сюда (4.3), получаем

$$(AB^* - A^*B)\psi = 0.$$

В силу произвольности ψ заключаем, что матрица $AB^* - A^*B$ — эрмитова. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема ([5]). Оператор Штурма-Лиувилля с вещественным потенциалом q на компактном графе Γ с локальными условиями склейки общего вида (4.1) является самосопряженным тогда и только тогда, когда для каждой вершины $v \in V$ ранг матрицы $[A(v) B(v)]$ равен степени вершины v и матрица $A(v)B^*(v)$ эрмитова.

Рассмотрим два основных типа самосопряженных условий склейки вида (4.1).

Пример 1. Условия δ -типа. Функция y непрерывна на Γ и

$$\sum_{e_j \in E_v} y'_j(v) = \alpha_v y(v),$$

где α_v — некоторые числа. В наших обозначениях условия принимают вид

$$y_1(v) = y_2(v) = \dots = y_n(v), \quad \sum_{j=1}^n y'_j(v) = \alpha_v y_1(v)$$

Выпишем условия в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ -\alpha_v & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(v) \\ y_2(v) \\ \dots \\ y_{n-1}(v) \\ y_n(v) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1(v) \\ y'_2(v) \\ \dots \\ y'_{n-1}(v) \\ y'_n(v) \end{pmatrix} = 0.$$

Ясно, что строки матрицы

$$[A B] = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha_v & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{array} \right)$$

линейно независимы. Значит, ее ранг равен n .

$$\begin{aligned}
 AB^* &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ -\alpha_v & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_v \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Матрица AB^* эрмитова, когда константа α_v вещественная. Стандартные условия склейки представляют собой частный случай условий δ -типа с $\alpha_v = 0$.

Пример 2. Условия δ' -типа. Функция y' непрерывна на Γ и

$$\sum_{e_j \in E_v} y_j(v) = \alpha_v y'(v).$$

В наших обозначениях условия принимают вид

$$y'_1(v) = y'_2(v) = \dots = y'_n(v), \quad \sum_{j=1}^n y_j(v) = \alpha_v y'_1(v).$$

По сравнению с условиями δ -типа матрицы A и B поменялись местами.

$$\begin{aligned}
 AB^* &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_v \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_v \end{pmatrix}$$

Следовательно, константа α_v должна быть вещественной.

В заключение отметим, что выбор матриц A и B в условиях (4.1) неоднозначен. Их можно домножить на любую невырожденную матрицу C слева, при этом условия не изменятся.

Упражнения

1. При каких условиях на константы c_j следующие условия склейки в вершине v являются самосопряженными?

- а) $y_j(v) + c_j(y'_{j-1}(v) + y'_{j+1}(v)) = 0, \quad j = \overline{1, n},$
- б) $y_j(v) + y_{j+1}(v) + c_j(y'_j(v) - y'_{j+1}(v)) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$

Считаем, что $y_0 = y_n, y_{n+1} = y_1$.

5. Характеристический определитель

Рассмотрим оператор Штурма-Лиувилля H на компактном графе Γ с обобщенными самосопряженными условиями склейки вида

$$A(v)y(v) + B(v)y'(v) = 0, \quad v \in V. \quad (5.1)$$

Исследуем задачу на собственные значения для этого оператора: $Hy = \lambda y$. Как мы уже отмечали при рассмотрении примера для графа-звезды из трех ребер, при $q = 0$ имеем уравнение Лапласа на каждом ребре:

$$-y_j'' = \rho^2 y_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad \lambda = \rho^2.$$

Его общее решение имеет вид

$$y_j(x_j) = D_j(\rho) \cos \rho x_j + E_j(\rho) \frac{\sin \rho x_j}{\rho}. \quad (5.2)$$

Здесь мы берем второе решение в виде $\frac{\sin \rho x_j}{\rho}$, чтобы отдельно не разбирать случай $\rho = 0$. При $\rho = 0$ мы рассматриваем это решение как предел и фундаментальная система решений $\{\cos \rho x_j, \frac{\sin \rho x_j}{\rho}\}$ обращается в $\{1, x_j\}$. Кроме того, функции $\cos \rho x_j$ и $\frac{\sin \rho x_j}{\rho}$ являются целыми по λ (см. [10]).

Подставим решение в виде (5.2) в условия (4.1). Число линейно независимых условий в (4.1) совпадает с удвоенным количеством ребер $2m$, поэтому в результате мы получим систему $2m$ линейных уравнений с $2m$ неизвестными $D_j, E_j, j = \overline{1, m}$. Заметим, что $D_j = y_j(0), E_j = y_j'(0)$. Обозначим через $y(0)$ вектор из $2m$ значений $y_j(0), y_j'(0), j = \overline{1, m}$. Тогда систему можно записать в виде

$$T(\lambda)y(0) = 0, \quad (5.3)$$

где $T(\lambda)$ — $2m \times 2m$ матрица, элементы которой — функции, целые по λ (линейные комбинации $\cos \rho l_j, \frac{\sin \rho l_j}{\rho}$).

В случае $q \neq 0$ на каждом ребре будет уравнение Штурма-Лиувилля

$$-y_j'' + q_j(x_j)y_j = \lambda y_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (5.4)$$

Согласно теореме о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнение (5.4) имеет единственные решения $C_j(x_j, \lambda)$ и $S_j(x_j, \lambda)$, удовлетворяющие начальным условиям

$$C_j(0, \lambda) = 1, \quad C_j'(0, \lambda) = 0, \quad S_j(0, \lambda) = 0, \quad S_j'(0, \lambda) = 1,$$

и называемые *решениями типа косинуса и синуса* соответственно. Эти решения образуют фундаментальную систему и при каждом фиксированном x_j являются целыми функциями по λ . Поэтому любое решение y_j уравнения (5.4) может быть представлено в виде

$$y_j(x_j) = D_j(\lambda)C(x_j, \lambda) + E_j(\lambda)S(x_j, \lambda).$$

Подставляя это разложение в условия (5.1), также приходим к системе (5.3).

Система (5.3) имеет нетривиальные решения при тех и только тех λ , при которых определитель $\Delta(\lambda) = \det T(\lambda)$ равен нулю. Мы пришли к следующему результату.

Теорема. *Число λ является собственным значением оператора Штурма-Лиувилля на компактном графе Γ тогда и только тогда, когда оно является нулем определителя $\Delta(\lambda)$ системы (5.3), называемого характеристическим определителем.*

Таким образом, задача о собственных значениях для оператора на графе сводится к нахождению нулей аналитической функции. Множество нулей аналитической функции, тождественно не равной нулю, не более чем счетно и не может иметь конечных предельных точек. Известно, что оператор Штурма-Лиувилля на компактном графе с самосопряженными условиями склейки имеет счетное множество собственных значений.

Упражнения

Условия склейки во всех упражнениях предполагаются стандартными.

1. Выпишите характеристические определители для операторов Лапласа на графах на рис. 3. Найдите кратность нулевого собственного значения для них. Совпадает ли его кратность с кратностью нуля $\lambda = 0$ соответствующей аналитической функции $\Delta(\lambda)$?

2. Докажите, что нулевому собственному значению оператора Лапласа на произвольном компактном графе отвечает единственная собственная функция, равная константе.

3. Найдите собственные значения и собственные функции операторов Лапласа на графе G_1 с длиной ребра 2π и графе G_2 с длинами ребер π с рис. 3.

6. Матрица рассеяния

Одной из часто используемых спектральных характеристик квантового графа является матрица рассеяния в вершине. Для простоты рассмотрим граф с одной внутренней вершиной — граф-звезду из n ребер. Введем параметризацию таким образом, чтобы конец $x_j = 0$ соответствовал внутренней вершине для всех ребер (см. рис. 5).

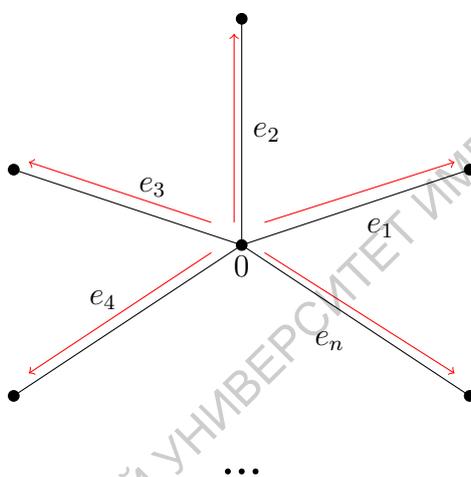


Рис. 5

Рассмотрим на каждом ребре e_j уравнение Лапласа

$$-y_j'' = \rho^2 y_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (6.1)$$

Пусть во внутренней вершине заданы самосопряженные условия склейки общего вида

$$Ay(0) + By'(0) = 0, \quad (6.2)$$

где

$$y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \dots \\ y_n(0) \end{pmatrix}, \quad y'(0) = \begin{pmatrix} y'_1(0) \\ y'_2(0) \\ \dots \\ y'_n(0) \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$y_j(x_j) = b_j e^{-i\rho x_j} + a_j e^{i\rho x_j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \rho \neq 0,$$

решение системы уравнений (6.1), удовлетворяющее условиям (6.2). Здесь мы используем фундаментальную систему решений $\{e^{-i\rho x_j}, e^{i\rho x_j}\}$. Решения $e^{-i\rho x_j}$ называют *входящими волнами*, решения $e^{i\rho x_j}$ — *исходящими волнами* (относительно вершины, соответствующей $x_j = 0$), константы b_j и a_j — их *амплитудами*. Рассмотрим векторы

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Соотношения (6.2) устанавливают связь между амплитудами входящих и исходящих волн, позволяющую, например, выразить вектор a через вектор b :

$$a = S(\rho)b,$$

или

$$a_j = \sum_{k=1}^n S_{jk}(\rho)b_k, \quad j = \overline{1, n}. \quad (6.3)$$

Матрица $S(\rho) = [S_{jk}(\rho)]_{j,k=1}^n$, $\rho > 0$, называется *матрицей рассеяния*.

Для вычисления матрицы рассеяния рассмотрим решения $\Psi^k(x, \rho) = [\Psi_j^k(x, \rho)]_{j=1}^n$, соответствующие входящей волне по k -му ребру, для которой

$$b_k = 1, \quad b_j = 0, \quad j \neq k.$$

Тогда из (6.3) вытекает $a_j = S_{jk}(\rho)$. То есть элемент $S_{jk}(\rho)$ равен амплитуде исходящей волны по j -му ребру. Поэтому диагональные элементы матрицы рассеяния $S_{kk}(\rho)$ называются *коэффициентами отражения*, а внедиагональные элементы $S_{jk}(\rho)$,

$j \neq k$, — коэффициентами прохождения. Они характеризуют разложение входящей волны, изображенной красным цветом на рис. 6 на исходящие, изображенные синим цветом. Таким образом,

$$\Psi_j^k(x, \rho) = \begin{cases} e^{-i\rho x} + S_{kk}(\rho)e^{i\rho x}, & j = k, \\ S_{jk}(\rho)e^{i\rho x}, & j \neq k. \end{cases} \quad (6.4)$$

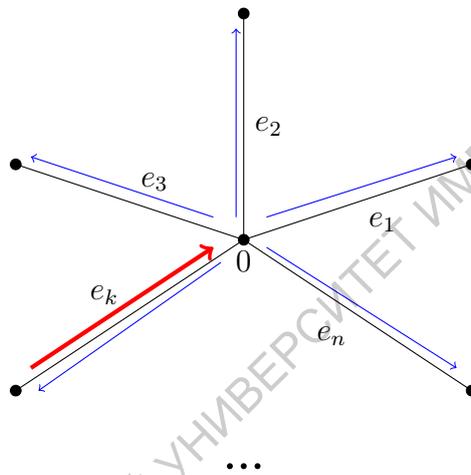


Рис. 6

Составим матрицу Ψ из столбцов Ψ^k . Согласно (6.4),

$$\Psi(x, \rho) = e^{-i\rho x} I + e^{i\rho x} S(\rho), \quad (6.5)$$

где I — единичная матрица. Все столбцы матрицы Ψ удовлетворяют условию (6.2), поэтому

$$A\Psi(0, \rho) + B\Psi'(0, \rho) = 0. \quad (6.6)$$

Используя (6.5), получаем

$$\Psi(0, \rho) = I + S(\rho), \quad \Psi'(0, \rho) = -i\rho I + i\rho S(\rho).$$

Подставим эти равенства в соотношение (6.6):

$$A(I + S(\rho)) - i\rho B(I - S(\rho)) = 0. \quad (6.7)$$

Преобразуем полученное соотношение:

$$\begin{aligned} A - i\rho B + (A + i\rho B)S(\rho) &= 0, \\ (A + i\rho B)S(\rho) &= -(A - i\rho B). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Лемма ([5]). При $\rho > 0$ матрицы $(A + i\rho B)$ и $(A - i\rho B)$ обратимы.

Доказательство. Докажем от противного. Предположим, что $\det(A + i\rho B) = 0$. Тогда существует вектор $\xi \neq 0$, такой что

$$(A + i\rho B)\xi = 0.$$

Если матрица A обратима, то

$$\begin{aligned} \xi + i\rho A^{-1}B\xi &= 0, \\ A^{-1}B\xi &= \frac{i}{\rho}\xi. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\frac{i}{\rho}$ — собственное значение матрицы $A^{-1}B$.

Согласно утверждению теоремы о самосопряженности условий склейки общего вида, матрица AB^* эрмитова, то есть $AB^* = BA^*$. Отсюда

$$B^*(A^*)^{-1} = A^{-1}B.$$

Иначе говоря, матрица $A^{-1}B$ эрмитова, а эрмитова матрица может иметь только вещественные собственные значения. Мы пришли к противоречию, которое доказывает утверждение леммы в случае обратимой матрицы A .

В общем случае имеем: $\det(A^* - i\rho B^*) = 0$. Пусть $\xi \neq 0$ — вектор, удовлетворяющий соотношению

$$(A^* - i\rho B^*)\xi = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= (\xi, (A + i\rho B)(A^* - i\rho B^*)\xi) = ((A^* - i\rho B^*)\xi, (A^* - i\rho B^*)\xi) = \\ &= (A^*\xi, A^*\xi) - i\rho(B^*\xi, A^*\xi) + i\rho(A^*\xi, B^*\xi) + \rho^2(B^*\xi, B^*\xi). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$(A^*\xi, A^*\xi) \geq 0, \quad (B^*\xi, B^*\xi) \geq 0,$$

$$(B^*\xi, A^*\xi) = (\xi, BA^*\xi), \quad (A^*\xi, B^*\xi) = (\xi, AB^*\xi).$$

В силу эрмитовости матрицы AB^* , второе и третье слагаемые в полученной сумме взаимно уничтожаются. В результате получаем

$$(A^*\xi, A^*\xi) = 0, \quad (B^*\xi, B^*\xi) = 0,$$

откуда $A^*\xi = 0, B^*\xi = 0$.

Пусть φ и φ' — произвольные векторы из \mathbb{C}^n . Тогда

$$(A\varphi + B\varphi', \xi) = (\varphi, A^*\xi) + (\varphi', B^*\xi) = 0,$$

то есть ненулевой вектор ξ принадлежит ортогональному дополнению пространства

$$M_\varphi = \{A\varphi + B\varphi' : \varphi, \varphi' \in \mathbb{C}^n\}.$$

Значит, $\dim M_\varphi < n$. Но согласно теореме о самосопряженности условий склейки общего вида, $\text{rank}[A \ B] = n$ и $\dim M_\varphi = n$. Полученное противоречие доказывает лемму. \square

Теорема ([5]). Матрица рассеяния описанного выше графа при $\rho > 0$ удовлетворяет соотношению

$$S(\rho) = -(A + i\rho B)^{-1}(A - i\rho B) \quad (6.9)$$

и является унитарной.

Доказательство. Соотношение (6.9) непосредственно вытекает из равенства (6.8) с учетом доказанной леммы.

Ясно, что

$$S^*(\rho) = -(A^* + i\rho B^*)(A^* - i\rho B^*)^{-1},$$

$$S^{-1}(\rho) = -(A - i\rho B)^{-1}(A + i\rho B).$$

Для доказательства унитарности матрицы $S(\rho)$ нужно показать, что

$$(A^* + i\rho B^*)(A^* - i\rho B^*)^{-1} = (A - i\rho B)^{-1}(A + i\rho B),$$

что эквивалентно

$$(A - i\rho B)(A^* + i\rho B^*) = (A + i\rho B)(A^* - i\rho B^*),$$

$$AA^* - i\rho BA^* + i\rho AB^* + \rho^2 BB^* = AA^* + i\rho BA^* - i\rho AB^* + \rho^2 BB^*.$$

В силу эрмитовости матрицы AB^* получаем требуемое. \square

Пример вычисления матрицы рассеяния. Пусть $n = 3$ и условия склейки стандартные:

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0), \quad y_1'(0) + y_2'(0) + y_3'(0) = 0.$$

Матрицы A и B в представлении (6.2) имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления матрицы рассеяния воспользуемся формулой (6.9):

$$S(\rho) = - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ i\rho & i\rho & i\rho \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -i\rho & -i\rho & -i\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Прделайте вычисления и убедитесь в правильности результата, полученного в примере. Для нахождения обратной матрицы можно использовать метод Гаусса.

2. Найдите матрицу рассеяния в случае произвольного n для стандартных условий склейки.

7. Обратные задачи на графах

Обратные задачи спектрального анализа состоят в восстановлении дифференциальных операторов по их спектральным характеристикам. Квантовый граф представляет собой сложный объект, включающий три составляющих:

1. Геометрическая структура графа.
2. Дифференциальный оператор на ребрах.
3. Условия склейки в вершинах.

В большинстве работ решаются обратные задачи, состоящие в восстановлении одной из трех составляющих, в то время как две другие известны. Например, определение неизвестной геометрической структуры графа при известном операторе и известных условиях склейки по некоторым спектральным данным. Или, напротив, геометрическая структура графа и условия склейки известны, требуется восстановить неизвестные коэффициенты дифференциального оператора (например, потенциал q оператора Штурма-Лиувилля). Таким образом, обратные задачи на графах можно разделить на три типа в зависимости от неизвестных характеристик. Восстановление одновременно и геометрической структуры, и коэффициентов дифференциального оператора, и условий склейки по спектральным данным — пока нерешенная проблема.

Начнем с изучения простейшей обратной задачи для графа-звезды, описанного в прошлой главе. Эта задача была решена в работе [6].

Дана матрица рассеяния $S = S_{A,B}(\rho_0)$ в некоторой фиксированной точке $\rho_0 > 0$. Построить матрицы A и B в условиях склейки (6.2).

Эта задача относится к третьему типу обратных задач, состоящих в восстановлении условий склейки. Оператор на реб-

рах (оператор Лапласа) и структура графа (граф-звезда) нам известны.

Отметим, что поставленная задача не может быть решена однозначно, поскольку если матрицы A и B являются ее решением, то решением также будут матрицы CA и CB , где C — любая невырожденная матрица.

Итак, пусть задана матрица $S = S_{A,B}(\rho_0)$. Рассмотрим соотношение (6.7) при $\rho = \rho_0$. Очевидно, ему удовлетворяют матрицы

$$A' = -\frac{1}{2}(S - I), \quad B' = \frac{1}{2i\rho_0}(S + I). \quad (7.1)$$

Действительно,

$$A'(I + S) - i\rho B'(I - S) = -\frac{1}{2}(S^2 - I) - \frac{1}{2}(I - S^2) = 0.$$

Если мы предположим, что S — матрица рассеяния, полученная при некоторых условиях склейки вида (6.2) с матрицами A и B , то она представима в виде (6.9):

$$S = -(A + i\rho_0 B)^{-1}(A - i\rho_0 B).$$

Подставляя это соотношение в (7.1), получаем

$$\begin{aligned} A' &= -\frac{1}{2}(-(A + i\rho_0 B)^{-1}(A - i\rho_0 B) - I) = \\ &= \frac{1}{2}(A + i\rho_0 B)^{-1}(A - i\rho_0 B + A + i\rho_0 B) = (A + i\rho_0 B)^{-1}A. \end{aligned}$$

Аналогично

$$B' = (A + i\rho_0 B)^{-1}B.$$

Таким образом, $A' = CA$, $B' = CB$, где $C = (A + i\rho_0 B)^{-1}$ (согласно лемме из прошлой главы, матрица $(A + i\rho_0 B)$ обратима). Значит, матрицы A' и B' дают одно из возможных решений обратной задачи.

Ранее мы предполагали, что S — матрица рассеяния при некоторых условиях вида (6.2). Теперь пусть S — произвольная унитарная матрица и ρ_0 — известное положительное число.

Покажем, что построенные по формулам (7.1) матрицы A' и B' удовлетворяют условиям теоремы о самосопряженности условий склейки и задают условия склейки, для которых S будет матрицей рассеяния.

Проверим, что $\text{rank}[A' B'] = n$. Заметим, что

$$A' + i\rho_0 B' = -\frac{1}{2}(S - I) + \frac{1}{2}(S + I) = I.$$

Но если $\text{rank}[A' B'] < n$, то существует вектор $\xi \neq 0$, для которого $\xi A' = 0$, $\xi B' = 0$. Тогда приходим к противоречию:

$$\xi(A' + i\rho_0 B') = \xi I = 0,$$

которое доказывает требуемое.

Убедимся в том, что матрица $A' B'^*$ — эрмитова:

$$A' B'^* = -\frac{1}{2}(S - I) \left(-\frac{1}{2i\rho_0} \right) (S^* + I) = \frac{1}{4i\rho_0} (SS^* + S - S^* - I).$$

Используя унитарность матрицы S , заключаем, что

$$A' B'^* = \frac{1}{4i\rho} (S - S^*)$$

— эрмитова матрица.

Следовательно, условия склейки

$$A'y(0) + B'y'(0) = 0$$

самосопряженные. Построим соответствующую матрицу рассеяния по формуле (6.9):

$$\begin{aligned} S(\rho) &= -(A' + i\rho B')^{-1} (A' - i\rho B') = \\ &= - \left((S - I) + \frac{\rho}{\rho_0} (S + I) \right)^{-1} \left((S - I) - \frac{\rho}{\rho_0} (S + I) \right) = \\ &= - (-\rho_0(S - I) + \rho(S + I))^{-1} (-\rho_0(S - I) - \rho(S + I)). \end{aligned}$$

В результате приходим к соотношению

$$S(\rho) = ((\rho - \rho_0)S + (\rho + \rho_0)I)^{-1}((\rho + \rho_0)S - (\rho - \rho_0)I). \quad (7.2)$$

Заметим, что при подстановке $\rho = \rho_0$ в (7.2) получаем $S(\rho_0) = S$, то есть построенная матрица рассеяния совпала с изначально заданной матрицей.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема ([6]). Пусть S — унитарная матрица и ρ_0 — положительное число. Тогда существуют матрицы A' и B' , единственные с точностью до умножения слева на невырожденную матрицу, которые задают самосопряженные условия склейки вида (6.2) и для которых матрица рассеяния $S_{A',B'}(\rho)$ совпадает с S при $\rho = \rho_0$. Матрицы A' и B' могут быть найдены по формулам (7.1), матрица рассеяния — по формуле (7.2).

Отметим, что при $\rho_0 = 1$ получаем, что условия (6.2) могут быть представлены в виде

$$(S - I)y(0) + i(S + I)y'(0) = 0,$$

где $S = S(1)$. Это равенство дает способ представления самосопряженных условий склейки общего вида при помощи одной унитарной матрицы S , альтернативный способу их представления через две матрицы A и B , связанные определенными соотношениями.

8. Восстановление потенциала на графе-звезде

В данной главе рассмотрена обратная задача на графе, относящаяся к задачам второго типа: при известных структуре графа и условиях склейки восстановить потенциал оператора Штурма-Лиувилля по спектральным характеристикам. Решение этой задачи для деревьев (графов без циклов) было получено В.А. Юрко в статье [7] при помощи метода спектральных отображений [8]. Позднее этот результат был обобщен на случай произвольных графов [9]. Мы приведем это решение на примере графа-звезды.

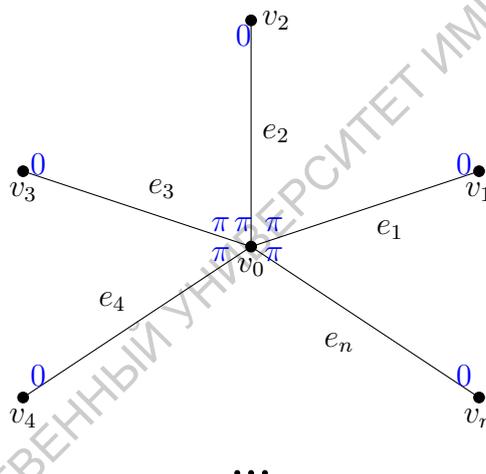


Рис. 7

8.1. Постановка обратной задачи

Рассмотрим граф-звезду $\Gamma = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{v_i\}_{i=0}^n$ и множеством ребер $E = \{e_j\}_{j=1}^n$. Вершины и ребра пронумерованы так, как показано на рис. 7, то есть вершина v_0 — внутренняя, каждое ребро e_j соединяет вершину v_0 с граничной вершиной v_j , $j = \overline{1, n}$. Для простоты предположим, что длины всех ребер равны π . Зададим на каждом ребре e_j параметр x_j таким образом, чтобы конец $x_j = 0$ соответствовал вершине v_j , а конец $x_j = \pi$ — вершине v_0 .

Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля на графе Γ :

$$-y_j'' + q_j(x_j)y_j = \lambda y_j, \quad x_j \in [0, \pi], \quad j = \overline{1, n}, \quad (8.1)$$

где $q = [q_j]_{j=1}^n$ — вещественная функция, интегрируемая на графе Γ . Пусть в вершине v_0 заданы стандартные условия склейки:

$$y_j(\pi) = y_n(\pi), \quad j = \overline{1, n-1}, \quad (8.2)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j'(\pi) = 0. \quad (8.3)$$

Фиксируем некоторую граничную вершину v_k . Решение уравнения (8.1) $\psi^k = [\psi_j^k]_{j=1}^n$ на графе Γ , удовлетворяющее условиям склейки (8.2) и (8.3), а также условиям в граничных вершинах:

$$\psi_k^k(0) = 1, \quad \psi_j^k(0) = 0, \quad j = \overline{1, m} \setminus k, \quad (8.4)$$

называется *решением Вейля* для (8.1) относительно граничной вершины v_k . Функции $M_k(\lambda) = \psi_k^{k'}(0, \lambda)$ называются *функциями Вейля*.

Рассмотрим пример решения Вейля и функции Вейля относительно вершины v_1 при $n = 3$. Для простоты обозначений мы в дальнейшем будем опускать верхний индекс $k = 1$ и вместо ψ^1 писать просто ψ . Пусть $C_j(x_j, \lambda)$ и $S_j(x_j, \lambda)$ — решения типа косинуса и синуса уравнения (8.1) на ребре e_j , то есть решения, удовлетворяющие начальным условиям

$$C_j(0, \lambda) = 1, \quad C_j'(0, \lambda) = 0, \quad S_j(0, \lambda) = 0, \quad S_j'(0, \lambda) = 1.$$

Функция $\psi_j(x_j, \lambda)$ является решением уравнения (8.1) на каждом ребре, поэтому она может быть представлена в виде линейной комбинации

$$\psi_j(x_j, \lambda) = M_j^0(\lambda)C_j(x_j, \lambda) + M_j^1(\lambda)S_j(x_j, \lambda), \quad (8.5)$$

где $M_j^0(\lambda)$ и $M_j^1(\lambda)$ — некоторые коэффициенты. Условия (8.4) в данном случае принимают вид

$$\psi_1(0) = 1, \quad \psi_2(0) = \psi_3(0) = 0.$$

Подставляя в данные условия ψ_j в виде (8.5), получаем

$$M_1^0(\lambda) = 1, \quad M_2^0(\lambda) = M_3^0(\lambda) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1, \lambda) &= C_1(x_1, \lambda) + M_1^1(\lambda)S_1(x_1, \lambda), \\ \psi_2(x_2, \lambda) &= M_2^1(\lambda)S_2(x_2, \lambda), \\ \psi_3(x_3, \lambda) &= M_3^1(\lambda)S_3(x_3, \lambda). \end{aligned}$$

Стандартные условия склейки (8.2), (8.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \psi_1(\pi, \lambda) &= \psi_2(\pi, \lambda) = \psi_3(\pi, \lambda), \\ \psi_1'(\pi, \lambda) + \psi_2'(\pi, \lambda) + \psi_3'(\pi, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Они дадут систему трех уравнений относительно $M_j^1(\lambda)$:

$$\begin{cases} C_1 + M_1^1 S_1 = M_2^1 S_2, \\ M_2^1 S_2 = M_3^1 S_3, \\ C_1' + M_1^1 S_1' + M_2^1 S_2' + M_3^1 S_3' = 0. \end{cases}$$

Здесь мы для краткости опускаем аргументы (π, λ) у C_j и S_j . Перепишем полученную систему в матричной форме

$$\begin{pmatrix} S_1 & -S_2 & 0 \\ 0 & S_2 & -S_3 \\ S_1' & S_2' & S_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1^1 \\ M_2^1 \\ M_3^1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \\ C_1' \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Согласно определению функции Вейля

$$M_1(\lambda) = \psi_1'(0, \lambda) = M_1^1(\lambda).$$

Решая систему (8.6) по формулам Крамера, находим

$$M_1(\lambda) = - \frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad (8.7)$$

где $\Delta(\lambda)$ — определитель системы (8.6) и $\Delta_1(\lambda)$ получается из $\Delta(\lambda)$ заменой S_1 на C_1 .

Мы вывели формулу для функции Вейля относительно вершины v_1 для графа-звезды из трех ребер. Проводя аналогичные рассуждения для вершин произвольного графа-звезды, приходим к соотношению

$$M_k(\lambda) = -\frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta(\lambda)}. \quad (8.8)$$

Нетрудно видеть, что $\Delta(\lambda)$ является характеристическим определителем краевой задачи для уравнения Штурма-Лиувилля (8.1) с условиями склейки (8.2), (8.3) и условиями Дирихле в граничных вершинах:

$$y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Обозначим эту задачу через L_0 . Функции $\Delta_k(\lambda)$ являются характеристическими функциями аналогичных задач L_k со следующими условиями в граничных вершинах:

$$y'_k(0) = 0, \quad y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, n} \setminus k.$$

Краевые задачи L_k , $k = \overline{0, n}$, имеют дискретные спектры $\Lambda_k = \{\lambda_{ks}\}_{s \geq 0}$. Аналогично классическим операторам Штурма-Лиувилля можно показать, что последовательности собственных значений $\{\lambda_{ks}\}_{s \geq 0}$ вещественны и ограничены снизу. Характеристические определители $\Delta_k(\lambda)$ являются целыми функциями по λ порядка $1/2$. Согласно теореме Адамара [10], они могут быть представлены в виде бесконечных произведений:

$$\Delta_k(\lambda) = C_k \prod_{s=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{ks}}\right).$$

Константы C_k можно найти, построив характеристические определители $\tilde{\Delta}_k(\lambda)$ для уравнения Лапласа ($q = 0$). Рассуждения для скалярного случая можно найти в книге [8, с. 9].

Функции $M_k(\lambda)$ являются мероморфными по λ с полюсами $\{\lambda_{0s}\}_{s \geq 0}$. Величины

$$\mathcal{S} := \{\lambda_{0s}, \alpha_{ks}\}_{s \geq 0, k = \overline{1, n-1}},$$

где

$$\alpha_{ks} = \operatorname{Res}_{\lambda = \lambda_{0s}} M_k(\lambda),$$

называются *спектральными данными* краевой задачи L_0 .

Рассмотрим три обратные задачи восстановления потенциала $q = [q_j]_{j=1}^n$ на графе Γ по следующим спектральным характеристикам:

1. по вектору Вейля $M := [M_k]_{k=1}^{n-1}$;
2. по системе n спектров $\Sigma := \{\lambda_{ks}\}_{s \geq 0, k = \overline{0, n-1}}$;
3. по спектральным данным \mathcal{S} .

Отметим, что приведенные постановки задач представляют собой обобщения классических постановок для конечного интервала. Задача 1 является обобщением обратной задачи по функции Вейля, задача 2 — обратной задачи Борга по двум спектрам, задача 3 — обратной задачи Марченко (см. [8]). В случае конечного интервала эти три задачи эквивалентны. В случае графа нули функций $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_k(\lambda)$ могут совпадать, поэтому невозможно однозначно определить спектры по функциям Вейля. С другой стороны, зная спектры Σ или спектральные данные \mathcal{S} , можно построить вектор Вейля. В дальнейшем ограничимся рассмотрением обратной задачи по вектору Вейля, потому что к ней можно свести другие две задачи.

8.2. Асимптотики решений

Пусть $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Im} \rho \geq 0$. Известно (см. [11]), что при каждом фиксированном $j = \overline{1, n}$ на ребре e_j существует фундаментальная система решений уравнения (8.1)

$$\{e_{j1}(x_j, \rho), e_{j2}(x_j, \rho)\}, \quad x_j \in [0, \pi], \quad \operatorname{Im} \rho \geq 0, \quad |\rho| \geq \rho^*,$$

со свойствами:

1. функции $e_{js}^{(\nu)}(x_j, \rho)$, $\nu = 0, 1$, непрерывны по $x_j \in [0, \pi]$, и $\rho \in \{\rho: \text{Im } \rho \geq 0, |\rho| \geq \rho^*\}$;
2. для каждого $x_j \in [0, \pi]$ функции $e_{js}^{(\nu)}$, $\nu = 0, 1$, аналитичны по ρ в области $\{\rho: \text{Im } \rho > 0, |\rho| > \rho^*\}$;
3. равномерно по $x_j \in [0, \pi]$ верны следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} e_{j1}^{(\nu)}(x_j, \rho) &= (i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1], \\ e_{j2}^{(\nu)}(x_j, \rho) &= (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1], \\ \text{Im } \rho &\geq 0, \quad |\rho| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (8.9)$$

где

$$[1] = 1 + O(\rho^{-1}), \quad \nu = 0, 1.$$

Пусть

$$\rho \in \Lambda_\delta := \{\rho: \arg \rho \in [\delta, \pi - \delta]\}, \quad \delta > 0.$$

Лемма (асимптотика $S_j(x_j, \lambda)$). При $j = \overline{1, n}$, $\nu = 0, 1$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} S_j^{(\nu)}(x_j, \lambda) &= \frac{1}{2}(-i\rho)^{\nu-1} \exp(-i\rho x_j)[1], \\ \rho \in \Lambda_\delta, \quad |\rho| &\rightarrow \infty, \quad x_j \in [0, \pi). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Доказательство. Разложим решение S_j по фундаментальной системе решений $\{e_{j1}, e_{j2}\}$:

$$S_j(x_j, \lambda) = A_j(\rho)e_{j1}(x_j, \rho) + B_j(\rho)e_{j2}(x_j, \rho).$$

Найдем коэффициенты $A_j(\rho)$ и $B_j(\rho)$ из начальных условий и (8.9):

$$\begin{aligned} S_j(0, \lambda) &= 0 = A_j(\rho)[1] + B_j(\rho)[1], \\ S_j'(0, \lambda) &= 1 = i\rho A_j(\rho)[1] - i\rho B_j(\rho)[1], \end{aligned}$$

$$A_j(\rho) = \frac{1}{2i\rho}[1], \quad B_j = -\frac{1}{2i\rho}[1].$$

Следовательно,

$$S_j(x_j, \rho) = \frac{1}{2i\rho} \exp(i\rho x_j)[1] - \frac{1}{2i\rho} \exp(-i\rho x_j)[1].$$

Заметим, что

$$\exp(i\rho x_j) = o(\exp(-i\rho x_j)), \quad \rho \in \Lambda_\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (8.11)$$

В результате получаем соотношение (8.10) при $\nu = 0$. Аналогично можно получить асимптотику производной. \square

Применим аналогичный подход для нахождения асимптотики функций Вейля. Фиксируем граничную вершину v_k , $k = \overline{1, n}$, и рассмотрим функцию Вейля ψ^k , которую мы для краткости будем обозначать просто ψ . На каждом ребре e_j справедливо следующее разложение по фундаментальной системе решений:

$$\psi_j(x_j, \lambda) = A_j(\rho)e_{j1}(x_j, \rho) + B_j(\rho)e_{j2}(x_j, \rho), \quad j = \overline{1, n}.$$

Подставляя это разложение в граничные условия, получаем

$$\psi_k(0, \lambda) = 1 = A_k(\rho)[1] + B_k(\rho)[1] \quad \Rightarrow \quad A_k(\rho) = (1 - B_k(\rho))[1],$$

$$\psi_j(0, \lambda) = 0 = A_j(\rho)[1] + B_j(\rho)[1] \quad \Rightarrow \quad A_j(\rho) = -B_j(\rho)[1], \\ j \neq k.$$

Таким образом,

$$\psi_k^{(\nu)}(x_k, \lambda) = (1 - B_k(\rho))(i\rho)^\nu \exp(i\rho x_k)[1] + \\ + B_k(\rho)(-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_k)[1],$$

$$\psi_j^{(\nu)}(x_j, \lambda) = -B_j(\rho)(i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1] + \\ + B_j(\rho)(-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1], \quad j \neq k.$$

Используя (8.11), получаем

$$\begin{aligned}\psi_k^{(\nu)}(x_k, \lambda) &= (i\rho)^\nu \exp(i\rho x_k)[1] + B_k(\rho)(-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_k)[1], \\ \psi_j^{(\nu)}(x_j, \lambda) &= B_j(\rho)(-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1].\end{aligned}\tag{8.12}$$

Подставим полученные соотношения в условия склейки (8.2) и (8.3):

$$\exp(i\rho\pi)[1] + B_k(\rho) \exp(-i\rho\pi)[1] = B_j(\rho) \exp(-i\rho\pi)[1],$$

$$j = \overline{1, n} \setminus k.$$

$$i\rho \exp(i\rho\pi)[1] - i\rho \sum_{j=1}^n B_j(\rho) \exp(-i\rho\pi)[1] = 0.$$

Мы получили систему из n уравнений относительно n неизвестных $B_j(\rho)$. Нетрудно проверить, что определитель этой системы отличен от нуля. Коэффициенты $B_j(\rho)$ можно получить по формулам Крамера как отношения двух определителей:

$$B_j(\rho) = \frac{\delta_j(\rho)}{\delta(\rho)},$$

где определитель $\delta_j(\rho)$ получается заменой в $\delta(\rho)$ столбца с $\exp(-i\rho\pi)$ на столбец свободных членов с $\exp(i\rho\pi)$. Следовательно,

$$B_j(\rho) = O(\exp(2i\rho\pi)), \quad j = \overline{1, n}, \quad \rho \in \Lambda_\delta.$$

Возвращаясь к асимптотической формуле (8.12), приходим к следующей лемме.

Лемма (асимптотика решений Вейля). *При $k = \overline{1, n}$, $\nu = 0, 1$, справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}\psi_k^{k(\nu)}(x_k, \lambda) &= (i\rho)^\nu \exp(i\rho x_k)[1], \quad M_k(\lambda) = i\rho[1], \\ \rho &\in \Lambda_\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad x_k \in [0, \pi).\end{aligned}$$

8.3. Локальная обратная задача

Зафиксируем $k = \overline{1, n}$ и рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу IP(k).

Задача IP(k). По заданной $M_k(\lambda)$ построить $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, \pi]$.

Отметим, что задача IP(k) не эквивалентна обратной задаче по функции Вейля на конечном интервале, так как функция $M_k(\lambda)$ несет информацию обо всем графе. Докажем единственность решения задачи IP(k). Для этого рассмотрим граф $\tilde{\Gamma}$ того же вида, что и Γ , но с другим потенциалом \tilde{q} . Везде в дальнейшем, если символ α обозначает объект, относящийся к Γ , то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{\Gamma}$.

Теорема (единственности решения задачи IP(k)). Если $M_k(\lambda) = \tilde{M}_k(\lambda)$, то $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0, \pi]$. Таким образом, задание функции Вейля однозначно определяет потенциал q_k на ребре e_k .

Доказательство. Определим матрицу

$$P^k(x_k, \lambda) = [P_{js}^k(x_k, \lambda)]_{j,s=1,2}$$

по формуле

$$P^k(x_k, \lambda) \begin{pmatrix} \tilde{S}_k(x_k, \lambda) & \tilde{\psi}_k^k(x_k, \lambda) \\ \tilde{S}'_k(x_k, \lambda) & \tilde{\psi}'_k(x_k, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_k(x_k, \lambda) & \psi_k^k(x_k, \lambda) \\ S'_k(x_k, \lambda) & \psi'_k(x_k, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$S_k(x_k, \lambda) = P_{11}^k(x_k, \lambda)\tilde{S}_k(x_k, \lambda) + P_{12}^k(x_k, \lambda)\tilde{S}'_k(x_k, \lambda). \quad (8.13)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \tilde{S}_k(x_k, \lambda)\tilde{\psi}'_k(x_k, \lambda) - \tilde{S}'_k(x_k, \lambda)\tilde{\psi}_k(x_k, \lambda) = \\ \tilde{S}_k(0, \lambda)\tilde{\psi}'_k(0, \lambda) - \tilde{S}'_k(0, \lambda)\tilde{\psi}_k(0, \lambda) = -1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_k(x_k, \lambda) & \tilde{\psi}_k^k(x_k, \lambda) \\ \tilde{S}'_k(x_k, \lambda) & \tilde{\psi}_k^{k'}(x_k, \lambda) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\psi_k^{k'}(x_k, \lambda) & \tilde{\psi}_k^k(x_k, \lambda) \\ \tilde{S}'_k(x_k, \lambda) & -\tilde{S}_k(x_k, \lambda) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} P_{11}^k(x_k, \lambda) &= -S_k(x_k, \lambda)\tilde{\psi}_k^{k'}(x_k, \lambda) + \psi_k^k(x_k, \lambda)\tilde{S}'_k(x_k, \lambda), \\ P_{12}^k(x_k, \lambda) &= S_k(x_k, \lambda)\tilde{\psi}_k^k(x_k, \lambda) - \psi_k^k(x_k, \lambda)\tilde{S}_k(x_k, \lambda). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Используя полученные ранее асимптотики решений $S_k(x_k, \lambda)$ и решений Вейля, вычисляем

$$\begin{aligned} P_{11}^k(x_k, \lambda) &= 1 + O(\rho^{-1}), \quad P_{12}^k(x_k, \lambda) = O(\rho^{-1}), \quad (8.15) \\ \rho &\in \Lambda_\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad x_k \in [0, \pi). \end{aligned}$$

С другой стороны, подставляя соотношения

$$\psi_k^k(x_k, \lambda) = C(x_k, \lambda) + M_k(\lambda)S_k(x_k, \lambda)$$

в (8.14), получаем

$$\begin{aligned} P_{11}^k(x_k, \lambda) &= -S_k(x_k, \lambda)\tilde{C}'_k(x_k, \lambda) + S'_k(x_k, \lambda)\tilde{C}_k(x_k, \lambda) - \\ &\quad - S_k(x_k, \lambda)(\tilde{M}_k(\lambda) - M_k(\lambda))\tilde{S}'_k(x_k, \lambda), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{12}^k(x_k, \lambda) &= S_k(x_k, \lambda)\tilde{C}_k(x_k, \lambda) - C_k(x_k, \lambda)\tilde{S}_k(x_k, \lambda) + \\ &\quad + S_k(x_k, \lambda)(\tilde{M}_k(\lambda) - M_k(\lambda))\tilde{S}_k(x_k, \lambda). \end{aligned}$$

Согласно условию теоремы, $M_k(\lambda) = \tilde{M}_k(\lambda)$, поэтому функции $P_{11}^k(x_k, \lambda)$ и $P_{12}^k(x_k, \lambda)$ целые по λ порядка $1/2$. В силу теоремы Фрагмена-Линделёфа [10] и оценок (8.15), $P_{11}^k(x_k, \lambda) \equiv 1$, $P_{12}^k(x_k, \lambda) \equiv 0$. Подставляя эти соотношения в (8.13), получаем $S_k(x_k, \lambda) \equiv \tilde{S}_k(x_k, \lambda)$. Следовательно, $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0, \pi]$.

□

Задача IP(k) может быть решена конструктивно при помощи метода спектральных отображений [8].

8.4. Решение обратной задачи на графе

Пусть задан вектор Вейля $M = [M_k]_{k=1}^{n-1}$. Отметим, что для восстановления потенциала на графе-звезде с n ребрами нам достаточно $n - 1$ функции Вейля (или n спектров). Действительно, рассмотрим задачи IP(k) и найдем потенциалы q_k на ребрах e_k , $k = \overline{1, n-1}$. Зная q_k , найдем решения $S_k(x_k, \lambda)$ и $C_k(x_k, \lambda)$, $k = \overline{1, n-1}$. Рассмотрим представление (8.8) для $M_1(\lambda)$:

$$M_1(\lambda) = -\frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{K_1(\lambda)S_n(\pi, \lambda) + K_2(\lambda)S'_n(\pi, \lambda)}{K_3(\lambda)S_n(\pi, \lambda) + K_4(\lambda)S'_n(\pi, \lambda)},$$

где $K_j(\lambda)$, $j = \overline{1, 4}$, — известные коэффициенты, зависящие от $S_k(x_k, \lambda)$ и $C_k(x_k, \lambda)$ на ребрах e_k , $k = \overline{1, n-1}$. Обозначим $M_0(\lambda) = \frac{S'_n(\pi, \lambda)}{S_n(\pi, \lambda)}$. Тогда

$$M_1(\lambda) = \frac{K_1(\lambda) + K_2(\lambda)M_0(\lambda)}{K_3(\lambda) + K_4(\lambda)M_0(\lambda)}.$$

Найдем функцию $M_0(\lambda)$ из этого равенства. Функция $M_0(\lambda)$ является функцией Вейля краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном интервале, соответствующем ребру e_n . Решая классическую обратную задачу по функции Вейля (см. [8]), находим потенциал q_n на ребре e_n . Таким образом, мы восстановили потенциал q на всем графе Γ .

Упражнения

1. Аналогично рассмотренному примеру, получите соотношение вида (8.8) для функции Вейля $M_2(\lambda)$ относительно вершины v_2 .

2. Выпишите характеристические функции задач L_0 и L_1 для графа-звезды с тремя ребрами. Убедитесь, что они совпадают с $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_1(\lambda)$ в равенстве (8.7).

3. Выпишите систему, полученную в п. 8.2 относительно $B_j(\rho)$ для графа-звезды с тремя ребрами, $k = 1$. Убедитесь в том, что ее определитель отличен от нуля. Вычислите асимптотики коэффициентов $B_j(\rho)$.

4. Постройте функции Вейля относительно граничных вершин для графов на рис. 3. Попробуйте обобщить описанный алгоритм решения обратной задачи на эти виды графов. Каких данных достаточно для восстановления потенциала?

Список литературы

- [1] Ruedenberg K., Scherr W.S. Free-electron network model for conjugated systems. I. Theory. J. Chem. Physics. 1953. Vol. 21, no.9, pp. 1565–1581.
- [2] Kuchment P. Graph models for waves in thin structures. Waves in Random Media. 2002. Vol. 12, no. 4, pp. R1–R24.
- [3] Kuchment P. Quantum Graphs I. Some basic structures. Waves in Random Media. 2004. Vol. 14, pp. 107–128.
- [4] Analysis of Graphs and Its Applications. Edited by Exner P. et al. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. 2007. Vol. 77. 721 p.
- [5] Kostykin V., Schrader R. Kirchhoff's rule for quantum wires. J. Phys. A. 1999. Vol. 32, pp. 595–630.
- [6] Kostykin V., Schrader R. Kirchhoff's rule for quantum wires. II: The inverse problem with possible applications to quantum computers. ArXiv:quant-ph/9910053.
- [7] Юрко В.А. О восстановлении операторов Штурма–Лиувилля на графах. Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 619–630.
- [8] Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
- [9] Юрко В.А. Обратная задача для операторов Штурма–Лиувилля на произвольных компактных пространственных сетях. ДАН. 2010. Т. 432, № 3. С. 318–321.
- [10] Buterin S.A, Freiling G., Yurko V.A. Lectures on the theory of entire functions. Schriftenreihe der Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen. 2014. SM-UDE-779.

- [11] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы.
М.: Наука, 1969.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО