САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Методические указания для практических занятий
по курсу
"Алгебра и Геометрия"

Королева Ольга Артуровна

λ – МАТРИЦЫ

Саратов 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Пособие "Методические указания для практических занятий по курсу "Алгебра и Геометрия предназначено для студентов второго курса механико – математического факультета, обучающихся по направлению "Прикладная математика и информатика"и других факультетов, на которых линейная алгебра входит как составная часть курсов. Многие вопросы предлагаются студентам для самостоятельного изучения и пособие поможет им в этом. В каждом разделе сначала приводится теоретический материал, который подробно представлен в учебниках [1], [2], а затем разбираются несколько задач.

1 Приведение λ – матрицы к каноническому виду

Рассмотрим вопросы, связанные с приведением λ-матрицы к каноническому виду. Введем некоторые определения.

Определение. λ-матрицей называется квадратная матрица порядка n ($n \in N$) с элементами, являющимися многочленами с коэффициентами из основного поля k. Символом $d_k(\lambda)$ будем обозначать нормированный наибольший общий делитель (НОД) всех миноров k-ого порядка данной λ-матрицы. Совокупность $d_k(\lambda)$ $k = \overline{1,n}$ назовем системой делителей миноров (СДМ)

Определение. Элементарными преобразованиями λ-матрицы называются следующие преобразования:

1. Умножение любой строки (столбца)на отличное от нуля число из поля k.

2. Прибавление к любой строке (столбцу)другой строки (столбца), умноженной на многочлен.

Определение. Две λ-матрицы называются эквивалентными, если одна из этих матриц может быть получена из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований.

Определение Нормальной диагональной формой λ-матрицы $A(\lambda)$ называется диагональная матрица $D(\lambda)$, эквивалентная данной, на главной диагонали которой стоят нормированные многочлены $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$, причем каждый делит следующий. Очевидно, что если среди них есть единицы, то они на первых местах, а если есть нули, то они на последних местах. (Число нулей совпадает с числом $n-r$, где n - порядок матрицы, а r - ее ранг). Эти многочлены называются *инвариантными множителями*λ-матрицы, они не меняются в результате элементарных преобразований. Объединение их называется системой инвариантных множителей (СИМ). Связь СИМ и СДМ: $d_k(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \cdot \ldots \cdot f_k(\lambda)$, $k = \overline{1,n}$.

Определение. Степени неприводимых многочленов, входящих в разложение многочлена, называются *элементарными делителями* этого многочлена. Системой элементарных делителей (СЭД) λ-матрицы называется объединение (быть может, с повторениями)элементарных делителей ее инвариантных множителей $f_i(\lambda)$.

Разберем решение задач:

Задача 1. Данную матрицу привести к НДФ при помощи делителей миноров:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

(задача 985 в [3])

*Решение.*По определению
$d_1(\lambda) = (\lambda(\lambda-1), \lambda(\lambda-2), (\lambda-1)(\lambda-2)) = 1.$

$d_2(\lambda) = (\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2), \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)^2, \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$.
$d_3(\lambda) = det(A(\lambda)) = \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$.
Тогда
$f_1(\lambda) = d_1(\lambda) = 1$.
$f_2(\lambda) = d_2(\lambda)/d_1(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$.
$f_2(\lambda) = d_3(\lambda)/d_2(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$.
Таким образом, нормальная диагональная форма данной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

Данную задачу можно решить с помощью элементарных делителей. Система элементарных делителей клеточно-диагональной матрицы совпадает с объединением элементарных делителей ее клеток. значит можем выписать СЭД данной λ-матрицы: СЭД$=\lambda, \lambda, (\lambda-1), (\lambda-1), (\lambda-2), (\lambda-2)$. Так как порядок матрицы равен трем, то имеется три инвариантных множителя: $f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)$, а так как ранг равен трем, то все они отличны от нуля. Поскольку $f_3(\lambda)$ делится на все остальные, то $f_3(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$. Из оставшихся элементарных делителей в $f_2(\lambda)$ входят также λ, $\lambda-1$, $\lambda-2$. Значит $f_2(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$, а $f_1(\lambda) = 1$, так как элементарных делителей больше нет. Удобно пользоваться следующей таблицей:

$$\begin{matrix} \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda-1 & \lambda-1 & 1 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 1 \end{matrix}$$

Число столбцов совпадает с рангом, строки заполняются степенями одинаковых неприводимых многочленов. Произведение многочленов по столбикам, начиная с последнего, дают нам соответственно $f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)$. Таким образом, нормальная диагональная форма нашей матрицы равна:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

Задача 2. Привести элементарными преобразованиями матрицу

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{pmatrix}$$

к нормальной диагональной форме.(задача 979 в [3])

*Решение.*Введем обозначения: i-тую строку будем обозначать i°, i-тый столбец - $i^\vee$, $\sim$ - символ эквивалентности.

$$A(\lambda) \overset{1^\circ - 3^\circ}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & \lambda^2-\lambda \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{pmatrix} \overset{2^\circ - 3^\circ \cdot 3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & \lambda^2-\lambda \\ 2 & 2 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Если теперь от второй строки отнимем первую и поменяем строки местами, получим:

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{1^\circ/2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & (\lambda^2-\lambda)/2 \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{3^\vee \cdot 2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{2^\vee - 1^\vee}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-\lambda & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{3^\vee - 1^\vee \cdot (\lambda^2-\lambda)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda-1 & \lambda^2-\lambda & \lambda \cdot (2\lambda-\lambda^2+1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{2^\circ + 1^\circ \cdot (1-\lambda)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda \cdot (2\lambda-\lambda^2+1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{3^\vee - 2^\vee \cdot 2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda^3+3\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{3^\vee + 2^\vee \cdot \lambda}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda^2+3\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{3^\vee + 2^\vee}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{3^\vee \cdot 1/2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{2^\vee \leftrightarrow 3^\vee}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{3^\vee + 2^\vee \cdot (1-\lambda)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица и будет нормальной диагональной формой матрицы $A(\lambda)$.

Задача 3. Найти нормальную диагональную форму λ-матрицы, если известны ее элементарные делители, ранг r и порядок n:

$\lambda+1, \lambda+1, (\lambda+1)^2, \lambda-1, (\lambda-1)^2$; $r=4$, $n=5$.

(задача 1029 в [3])

Решение. Воспользуемся таблицей:

$$\begin{matrix} (\lambda+1)^2 & \lambda+1 & \lambda+1 & 1 \\ (\lambda-1)^2 & \lambda-1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Таким образом, нормальная диагональная форма нашей матрицы равна:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2\cdot(\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определение. Унимодулярной матрицей называется λ-матрица с определителем, равным элементу основного поля, отличному от нуля.

Определение. Специальными унимодулярными матрицами являются:

$$S_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$, где $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$, i - номер строки и столбца, в которых стоит α

$$T_{ij}(f(\lambda)) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & f(\lambda) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$, где $f(\lambda)$- произвольный многоч-лен с коэффициентами из основного поля k, стоящий в i-той строке и j-том столбце ($i \neq j$).

Любое элементарное преобразование λ - матрицы можно получить с помощью умножения слева или справа на унимодулярную матрицу специального вида:

1. $S_i(\alpha)\cdot A(\lambda)$ получается из $A(\lambda)$ умножением i-той строки на α.
2. $T_{ij}(f(\lambda))\cdot A(\lambda)$ получается из $A(\lambda)$ прибавлением к i-той строке j-той строки, умноженной на $f(\lambda)$.
3. $A(\lambda)\cdot S_i(\alpha)$ получается из $A(\lambda)$ умножением i-того столбца на α.
2. $A(\lambda)\cdot T_{ij}(f(\lambda))$ получается из $A(\lambda)$ прибавлением к j-тому столбцу i-того столбца, умноженного на $f(\lambda)$.

Замечание. Перестановку i-той и j-той строк (столбцов)можно осуществить с помощью умножения слева (справа) исходной матрицы на матрицу:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$ которая получается из единичной матрицы перестановкой $i-$той и $j-$той строки ($i-$того и $j-$того столбца)

Задача 4. Матрицу из задачи 2 привести к НДФ путем умножения на унимодулярные матрицы специального вида.

Решение. С помощью обозначений, которые мы ввели 2, это легко сделать. Обозначим НДФ этой матрицы через $D(\lambda)$. Тогда

$$D(\lambda) = T_{21}(1-\lambda)\cdot S_1(1/2)\cdot \tau_{23}\cdot T_{21}(-1)\cdot T_{23}(-3)\cdot T_{13}(-1)\cdot A(\lambda)\cdot S_3(2)\cdot T_{12}(-1)\times$$
$$\times T_{13}(\lambda-\lambda^2)\cdot T_{23}(-2)\cdot T_{23}(\lambda)\cdot T_{23}(1)\cdot S_3(1/2)\cdot \tau_{23}\cdot T_{23}(1-\lambda).$$

После перемножения получается:

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Подобие матриц. Нормальная жорданова форма квадратных матриц

Определение. Скалярной матрицей будем называть матрицу с элементами из основного поля.

Определение. Две скалярные матрицы A и B называются подобными над полем k, если существует невырожденная матрица Q с элементами из k, такая, что $A = Q^{-1} \cdot B \cdot Q$. Будем обозначать: $A \approx B$

Определение. Характеристической матрицей для матрицы A называется матрица $\lambda E - A$. Определитель характеристической матрицы $det(\lambda E - A)$ называется характеристическим многочленом матрицы A и обозначается $\chi_A(\lambda)$.

Определение. СИМ, СДМ, СЭД скалярной матрицы называеются СИМ, СДМ, СЭД ее характеристической матрицы.

Теорема. Матрицы n-ого порядка подобны тогда и только тогда, когда их характеристические матрицы эквивалентны.

Рассмотрим приведение матрицы к нормальной жордановой форме.

Определение.. Жордановой клеткой называется квадратная матрица следующего вида:

$$J_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

где n - порядок клетки, α - параметр клетки. Ее единственный элементарный делитель $(\lambda - \alpha)^n$.

Рассмотрим жорданову матрицу, т.е. клеточно-диагональную матрицу, клетками которой служат клетки Жордана. Обозначим ее $[J_{n_1}(\alpha_1), J_{n_2}(\alpha_2), \dots, J_{n_s}(\alpha_s)]$. Ее СЭД$=$ $\{(\lambda - \alpha_1)^{n_1}, \dots (\lambda - \alpha_s)^{n_s}\}$.

Определение. Нормальной жордановой формой скалярной матрицы A называется жорданова матрица J, такая что $J \approx A$.

Матрица, подобная жордановой матрице над полем k, называется матрицей, приводимой к нормальной жордановой форме (НЖФ)

Теорема. Скалярная матрица A приводится к НЖФ тогда и только тогда, когда ее характеристический многочлен разлагается на линейные множители над k.

Задача 5. Привести к НЖФ матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(задача 1090 в [3])

Решение. Составим характеристическую матрицу для A и элементарными преобразованиями приведем ее к НДФ:

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ \lambda - 4 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 4 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & \lambda - 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 2 - \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2)^2 \end{pmatrix}$$

Значит,СЭД $=((\lambda - 2), (\lambda - 2)^2)$. НЖФ исходной матрицы равна:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Для данных матриц A и B найти невырожденную матрицу Q, такую, что $B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 24 & -11 & -22 \\ 20 & -8 & -20 \\ 12 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

(задача 1069 в [3])

Решение. Для матрицы A составим характеристеческую и приведем ее к НДФ. Аналогично для матрицы B. Их НДФ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2)^2 \end{pmatrix},$$

а значит жорданова форма:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сначала найдем матрицу T, такую что $J = T^{-1} \cdot A \cdot T \Rightarrow T \cdot J = A \cdot T$. Пусть

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix},\ T_j = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ t_{3i} \end{pmatrix}, \text{где } j = 1, 2, 3.$$

Тогда последнее равенство запишется:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix},$$

а по столбикам:

$$2T_1 = A \cdot T_1,\ 2T_2 = A \cdot T_2,\ T_2 + 2T_3 = A \cdot T_3.$$

После преобразования получим:

$$(2E - A) \cdot T_1 = 0,\ (2E - A) \cdot T_2 = 0,\ (2E - A) \cdot T_3 = -T_2.$$

T_1 и T_2 являются решениями одного и того же однородного линейного уравнения.Они должны быть линейно независимы, т.е. образующими фундаментальную систему решений. Это всегда можно сделать, так как число жордановых клеток в J равно размерности пространства собственных векторов матрицы . T_2 надо подбирать таким образом, чтобы третье уравнение, которое эквивалентно системе линейных уравнений, имело решение, то есть чтобы ранг матрицы равнялся рангу расширенной матрицы. Матрица T находится неоднозначно.

После решения получаем:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично для матрицы B найдем невырожденную матрицу R, такую, что $J = R^{-1} \cdot B \cdot R:$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 2 & 10 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зная R и T, найдем Q:
$T^{-1} \cdot A \cdot T = R^{-1} \cdot B \cdot R,$

$B = (TR^{-1})^{-1} \cdot A \cdot (TR^{-1})$, значит, $Q = TR^{-1}$. После подсчета получаем:

$$Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 30 & -18 & -24 \\ 8 & -4 & -6 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение. Минимальным многочленом матрицы называется ненулевой нормированный анулирующий многочлен матрицы наименьшей степени.

Доказывается, что минимальный многочлен матрицы равняется последнему инвариантному множителю матрицы. А характеристический многочлен равняется произведению всех инвариантных множителей. Значит, корни у минимального и характеристического многочленов одинаковые, только кратности могут быть разными.

Пусть

$$A(\lambda) = A_0\lambda^l + A_1\lambda^{l-1} + \ldots + A_{l-1}\lambda + A_0,$$

где A_i, $i = 1, \ldots, n$- скалярные матрицы.

Определение. $\lambda-$матрица $A(\lambda)$ называется регулярной, если $detA_0 \neq 0$

Предположим, что $B(\lambda)$ - регулярная $\lambda-$матрица степени m и что существуют такие $\lambda-$матрицы $Q(\lambda)$, $R(\lambda)$, причем степень $R(\lambda)$ меньше m, что

$$A(\lambda) = Q(\lambda)B(\lambda) + R(\lambda).$$

В этом случае мы будем говорить, что разделили матрицу $A(\lambda)$ на $B(\lambda)$ справа и называть $Q(\lambda)$ левым частным, а $R(\lambda)$ левым остатком. Аналогично определяется правое частное и правый остаток при левом делении.

Теорема. Пусть $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ - λ-матрицы степени l, m соответственно и $B(\lambda)$ регулярная. Тогда существуют правое частное и правый остаток $A(\lambda)$ при делении на $B(\lambda)$ и подобно этому существуют левое частное и левый остаток.

Заметим, что членом наивысшей степени λ-матрицы $B(\lambda)B_0^{-1}A_0\lambda^{l-m}$ будет как раз $A_0\lambda^l$.

Задача 7. Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -2\lambda^2 + 5\lambda + 3 & -\lambda^2 + 3\lambda + 2 & -\lambda + 6 \\ -3\lambda^2 + 7\lambda + 11 & -3\lambda^2 + 9\lambda + 1 & -2\lambda + 8 \\ -\lambda^2 + 2\lambda + 8 & -2\lambda^2 + 5\lambda + 3 & -\lambda + 4 \end{pmatrix}.$$

разделить слева на $B - \lambda E$, где $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. (задача 1058 в [3])

Решение. В нашем случае $l = 2$, $m = 1$. $A_0 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,

$B_0^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Значит,

$$B(\lambda)B_0^{-1}A_0\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda & 0 \\ 3\lambda & 3\lambda & 0 \\ \lambda & 2\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda^2+6\lambda & -\lambda^2+3\lambda & 0 \\ -3\lambda^2+9\lambda & -3\lambda^2+9\lambda & 0 \\ -\lambda^2+4\lambda & -2\lambda^2+5\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A(\lambda) = B(\lambda)B_0^{-1}A_0\lambda + A^{(1)}(\lambda),$$

где $A^{(1)}(\lambda)$- матрица, степень которой l_1 не превосходит $l - 1 = 1$. За $A_0^{(1)}$ обозначим ее старший коэффициент.

$$A^{(1)}(\lambda) = A(\lambda) - B(\lambda)B_0^{-1}A_0\lambda = \begin{pmatrix} -2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda^2+3\lambda+2 & -\lambda+6 \\ -3\lambda^2+7\lambda+11 & -3\lambda^2+9\lambda+1 & -2\lambda+8 \\ -\lambda^2+2\lambda+8 & -2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda+4 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} -2\lambda^2+6\lambda & -\lambda^2+3\lambda & 0 \\ -3\lambda^2+9\lambda & -3\lambda^2+9\lambda & 0 \\ -\lambda^2+4\lambda & -2\lambda^2+5\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda+3 & 2 & -\lambda+6 \\ -2\lambda+11 & 1 & -2\lambda+8 \\ -2\lambda+8 & 3 & -\lambda+4 \end{pmatrix}$$

Повторяем процесс для $A^{(1)}(\lambda)$.

$$B(\lambda)B_0^{-1}A_0^{(1)}\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda+2 & 0 & -\lambda+3 \\ -2\lambda+8 & 0 & -2\lambda+6 \\ -2\lambda+6 & 0 & -\lambda+3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^{(1)}(\lambda) = B(\lambda)B_0^{-1}A_0^1 + A^{(2)}(\lambda),$$

Степень остатка $A^{(2)}(\lambda)$ не выше 0. Найдем ее.

$$A^{(2)}(\lambda) = A^{(1)}(\lambda) - B(\lambda)B_0^{-1}A_0^{(1)} = \begin{pmatrix} -\lambda+3 & 2 & -\lambda+6 \\ -2\lambda+11 & 1 & -2\lambda+8 \\ -2\lambda+8 & 3 & -\lambda+4 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} -\lambda+2 & 0 & -\lambda+3 \\ -2\lambda+8 & 0 & -2\lambda+6 \\ -2\lambda+6 & 0 & -\lambda+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем цепочку равенств:

$$A(\lambda) = B(\lambda)B_0^{-1}A_0\lambda + B(\lambda)B_0^{-1}A_0^1 + A^{(2)}(\lambda) = B(\lambda)(B_0^{-1}A_0\lambda + B_0^{-1}A_0^1) + A^{(2)}(\lambda).$$

Значит

$$A(\lambda) = B(\lambda) \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & \lambda & 1 \\ 3\lambda+2 & 3\lambda & 2 \\ \lambda+2 & 2\lambda & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Описанный в задаче метод является общим. В случае, когда делитель является λ – матрицей степени 1, деление можно провести, используя некоммутативную схему Горнера. Чтобы правильно ее применить, будем делить $-A(\lambda)$ на $\lambda E - B$

	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -7 & -9 & 2 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ -11 & -1 & -8 \\ -8 & -3 & -4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Значит

$$-A(\lambda) = -B(\lambda) \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & \lambda & 1 \\ 3\lambda+2 & 3\lambda & 2 \\ \lambda+2 & 2\lambda & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножая это равенство на -1, получаем тот же результат, что и выше.

Теорема. Если характеристические матрицы $A - \lambda E$ и $B - \lambda E$ двух матриц эквивалентны, то сами эти матрицы подобны. При этом, если $B - \lambda E = P(A - \lambda E)Q$, где P, и Q - унимодулярные λ-матрицы и P_0, и Q_0 - остатки при делении P слева, а Q справа на $B - \lambda E$, то $B = P_0AQ_0$ и $P_0Q_0 = E$, т.е. матрицы P_0, и Q_0 осуществляют подобное преобразование матрицы A в матрицу B.

Задача 8. Пользуясь методом, указанным в предыдущей теореме, для данных матриц A и B найти невырожденную матрицу T, такую, что $B = T^{-1}AT$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}$$

(задача 1067 в [3]).

Решение. Также, как и в задаче 4, найдем сначала унимодулярные матрицы, с помощью умножения на которые матрицы $A - \lambda E$ и $B - \lambda E$ переходят в свою НДФ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix} = S_2(-1)T_{21}(-\lambda-1)(A-\lambda E)\tau_{12}T_{12}(5-\lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda+1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda-5 & 1 \\ -9 & \lambda+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda+5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix} = S_2(-1)T_{21}(-\lambda+38)S_1(-\frac{1}{16})\tau_{12}(B-\lambda E)S_2(-16)T_{12}(-\lambda-34) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{16} \\ -1 & -\frac{1}{16}\lambda + \frac{19}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda-38 & 81 \\ -16 & \lambda+34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\lambda-34 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая правые части равенств, получим:

$$\begin{pmatrix} \lambda-38 & 81 \\ -16 & \lambda+34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 & 1 \\ -16 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda-5 & 1 \\ -9 & \lambda+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{16} \\ 1 & -\frac{39}{16} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda-5 & 1 \\ -9 & \lambda+1 \end{pmatrix} Q$$

Теперь надо разделить P слева, а Q справа на $B - \lambda E$, но так как степени P и Q равны 0, то остатки $P_0 = P$, $Q_0 = Q$. Проверим:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{16} \\ 1 & -\frac{39}{16} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -39 & 1 \\ -16 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 & 1 \\ -16 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{16} \\ 1 & -\frac{39}{16} \end{pmatrix}.$$

Значит

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{16} \\ 1 & -\frac{39}{16} \end{pmatrix}.$$

3 Функции от матриц

Предположим, что минимальный многочлен матрицы A имеет своими корнями $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_s$ с кратностями $m_1, m_2, \dots m_s$, т.е. минимальный многочлен для A имеет вид:

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}, (\lambda_i \neq \lambda_j i \neq j)\,.$$

Определение. Спектром матрицы A назовем таблицу:

$$SpecA = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_s \\ m_1 & \dots & m_s \end{bmatrix}.$$

$$f(\lambda_k),\ f'(\lambda_k),\ \dots f^{(m_k-1)}(\lambda_k),\ k = 1, 2, \dots, s,$$

называются значениями функции f на спектре матрицы A. Про любую функцию f, для которой эти числа существуют, мы будем говорить, что она определена на спектре матрицы A.

Определение. Если функция f определена на спектре, то положим $f(A) = g(A)$ где g - произвольный многочлен, принимающий те же значения, что и f, на спектре A.

Такой многочлен всегда существует, например, интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра (см.[2]).

Если A имеет простой спектр (корни минимального многочлена кратности 1), то в качестве g можно взять интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L(\lambda) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k) l_k(\lambda),\ k = 1, 2, \dots, s$$

где

$$l_k(\lambda) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{s} (\lambda - \lambda_j) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{s} (\lambda_k - \lambda_j).$$

Задача 9. Вычислить значение функции от матрицы:

$$A^{100},\ \text{где}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(задача 1162 в [3])

Решение. Составим характеристический многочлен и найдем его корни:

$$\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 3 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Корнями будут $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ с кратностями 1, они же будут и корнями минимального с такой же кратностью. Тогда $f(\lambda_1) = 2^{100}$, $f(\lambda_2) = 3^{100}$, а $l_1(\lambda) = \frac{(\lambda-3)}{2-3} = -(\lambda-3)$, $l_2(\lambda) = \frac{(\lambda-2)}{3-2} = (\lambda-2)$. Теперь можно записать интерполяционный многочлен:

$$L(\lambda) = -2^{100}(\lambda-3) + 3^{100}(\lambda-2).$$

Тогда

$$f(A) = L(A) = -2^{100}(A-3E) + 3^{100}(A-2E).$$

$$f(A) = -2^{100}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + 3^{100}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2^{100} & -2^{101} \\ 3\cdot 2^{100} & -2^{101} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\cdot 3^{100} & 2\cdot 3^{100} \\ -3^{101} & 3^{101} \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 3\cdot 2^{100} - 2\cdot 3^{100} & 2(3^{100} - 2^{100}) \\ -3(3^{100} - 2^{100}) & 3^{101} - 2^{101} \end{pmatrix}.$$

Если спектр матрицы одноточечный, то интерполяционный многочлен Лагранжа не подойдет. Нам понадобится интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра, который в этом случае имеет вид:

$$L(\lambda) = f(\lambda_1) + \frac{(\lambda-\lambda_1)}{1!}f'(\lambda_1) + \frac{(\lambda-\lambda_1)^2}{2!}f''(\lambda_1) + \ldots + \frac{(\lambda-\lambda_1)^{m_1-1}}{(m_1-1)!}f^{(m_1-1)}(\lambda_1)$$

Замечание. Клетка Жордана имеет одноточечный спектр. Поэтому

$$f(J_n(\alpha)) = \begin{pmatrix} f_0 & \frac{1}{1!}f_0^{(1)} & \frac{1}{2!}f_0^{(2)} & \ldots & \frac{1}{(n-1)!}f_0^{(n-1)} \\ 0 & f_0 & \frac{1}{1!}f_0^{(1)} & \ldots & \frac{1}{(n-2)!}f_0^{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{1!}f_0^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f_0 \end{pmatrix},$$

где $f_0^{(i)} = f^{(i)}(\alpha)$.

Задача 10. Вычислить значение функции от матрицы:

$$\sqrt{A}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(задача 1164 в [3]) *Решение.* Составим характеристический многочлен и найдем его корни:

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 1 & \lambda-5 \end{pmatrix} = (\lambda-4)^2.$$

Корень $\lambda_1 = 4$ с кратностью 2, он же будет и корнем минимального с такой же кратностью, так как, очевидно, первый инвариантный множитель равен 1. Тогда $f(\lambda_1) = \pm 2$, а

$$L(\lambda) = \pm 2 + \frac{(\lambda - 4)}{1!} \frac{1}{2(\pm 2)} = \pm \frac{1}{4}(8 + (\lambda - 4)).$$

$$f(A) = L(A) = \pm \frac{1}{4}(8E + (A - 4E)) = \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Теорема. Если A - клеточно-диагональная матрица:

$$A = [A_1, A_2, \dots, A_p]$$

и f определена на спектре, то значение функции от матрицы равно клеточно-диагональной матрице, клетками которой являются значения функции от клеток матрицы:

$$f(A) = [f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_p)]$$

Теорема. Если A и B - подобные матрицы с преобразующей матрицей Q: $A = Q^{-1}BQ$, и f определена на спектре, то $f(A) = Q^{-1}f(B)Q$.

Используя эти теоремы и значение функции от клетки Жордана, можно найти значение функции от любой матрицы, если только функция определена на спектре этой матриц

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. А.Г. Курош: *Курс высшей алгебры*, Москва. изд. Наука (1971)

2. П. Ланкастер: *Теория матриц*, Москва. изд. Наука (1978)

3. И.В. Проскуряков: *Сборник задач по линейной алгебре*, Москва. изд. Наука (1978)