IV

Элементарная математика. Часть 5. Тригонометрия

С.В. Лебедева
СГУ им. Н.Г. Чернышевского
Саратов, 2015

УДК 51(072.8)
ББК 22.1Р
Л 33

Рекомендовано к печати
кафедрой математики и методики её преподавания
Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского

Рецензент:
В.И. Игошин доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры геометрии Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского

Л 33 **Лебедева С. В. Элементарная математика**: Часть 5. Тригонометрия: учебно-методическое пособие / С.В. Лебедева – Саратов, 2015. – 80 с. – (Профессиональная подготовка учителя математики).

Серийное оформление *С.В.Лебедевой*

Курс «Элементарная математика» открывает направление предметной подготовки профессионального цикла дисциплин, изучаемых студентами, обучающимися по направлению 44.03.01 (050100) – «педагогическое образование (профиль – математическое образование)». Цель курса в плане общей подготовки студента – обобщение и систематизация имеющихся знаний в области элементарной математики в контексте информационного моделирования, в плане профессиональной подготовки – пропедевтика курса теории и методики обучения математики и информатики / методика обучения и воспитания (математика), а также смежных с этими курсами дисциплин профессионально-методической подготовки.

Пособие реализует историко-генетический подход в изложении материала и состоит из пяти взаимосвязанных разделов: 1. Измерение треугольников. 2. Тригонометрические функции числового аргумента. 3. Тригонометрические тождества и преобразование тригонометрических выражений. 4. Тригонометрические уравнения. 5. Тригонометрические неравенства.

Система задач представлена пятью группами: тестовые задания, математические алгоритмические, математические эвристические, практические и творческие задания.

Пособие ориентировано преимущественно на самостоятельное изучение курса «Элементарная математика», самоконтроль и самооценку результатов, для чего предусмотрена рейтинговая система оценки достижений студентов.

УДК 51(072.8)
ББК 22.1Р

ВВЕДЕНИЕ

Пособие содержит 500 задач обучающе-контролирующего характера, рассчитанных на самостоятельное решение студентами второго курса, как на аудиторных занятиях, так и в ходе внеаудиторной работы.

Система задач представлена пятью группами: тестовые задания (50 задач), задачи I уровня сложности – математические алгоритмические (250 задач), задачи II уровня сложности – математические эвристические (125 задач), задачи III уровня сложности – практические и олимпиадные[1] (50 задач) и творческие задания (25 задач).

Тестовые задания имеют четыре варианта ответа, среди которых находится, как правило, один верный. В ряде заданий предполагается запись в пустой строке своего варианта ответа. Тестовые задания выполняются непосредственно в Пособии. На зачёте/экзамене преподаватель может попросить обосновать выбор ответа любого тестового задания.

Задачи I уровня сложности можно считать тренировочными, так как их выполнение требует знания соответствующего теоретического материала и известных алгоритмов решения. Студенту не следует «увлекаться» выполнением тренировочных задач, как правило, достаточно решить три задачи этой группы (определённого вида), чтобы вспомнить или сформировать нужный алгоритм решения.

Задачи II уровня сложности требуют умелого сочетания ряда известных алгоритмов решения, а иногда и нестандартного подхода к задаче. Большая часть задач, решаемых студентом, должна быть из этой группы задач.

Задачи III уровня сложности требуют сформированности ряда компонентов информационной культуры, главным из которых можно считать умения, связанные с информационным (в том числе математическим) моделированием. Процесс оформления решения данного вида задач должен включать описание всех этапов информационного моделирования.

Задачи I-III уровней сложности выполняются в отдельной тетради и сдаются для проверки преподавателю в установленные преподавателем сроки (<u>до</u> проведения зачёта).

Выполненное творческое задание представляет собой мультимедийный гипертекстовый документ и сдаётся на CD-диске.

Каждая задача имеет свой «вес» – $\mathcal{V}$. Вес тестового задания – 0,05 балла, вес задачи I уровня – 0,1 балла, II уровня – 0,15 балла, III уровня – 0,2 балла, вес творческого задания – 1 балл.

Для получения зачёта по модулю «Тригонометрия» студенту достаточно пройти тестирование по каждой теме (с результатом, не менее 70% верных ответов) и набрать предусмотренное рабочей программой число баллов N, причём каждая тема должна быть «представлена» не менее, чем N/5 баллами.

За каждое правильно решённое задание студент получает максимальное количество баллов $\mathcal{V}$ только в том случае, если он <u>единственный из группы</u> включает это задание в свой отчёт о выполнении заданий по теме. В противном

[1] Задачи математических олимпиад для школьников

случае максимальное количество баллов $\mathcal{V}$ за правильно решённое задание, делится на количество решающих n, и каждый получает за это задание $\mathcal{V}/$ n баллов.

В качестве методической поддержки обучающихся в Пособии предусмотрен теоретический материал и образцы рассуждения и оформления некоторых типов задач, предваряющие систему заданий по каждой теме курса.

Отчёт о выполнении заданий по каждой теме представляется в форме таблицы, в которой фиксируются ответы на тестовые задания и номера решённых заданий I-III уровней сложности, например:

<table>
<tr><td colspan="13">Тема 1. Измерение треугольников, работа ______________________ (Ф.И.О.)</td></tr>
<tr><td colspan="13">Тестовые задания – 0,05 б.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>а</td><td>б</td><td>в</td><td>г</td><td>а</td><td>б</td><td>в</td><td>г</td><td>а</td><td>б</td></tr>
<tr><td colspan="13">Задания I уровня сложности – 0,1 б.</td></tr>
<tr><td>№№</td><td>11</td><td>12</td><td>21</td><td>24</td><td>31</td><td>32</td><td>41</td><td>42</td><td>46</td><td>54</td><td>55</td><td>58</td></tr>
<tr><td>баллы</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="13">Задания II уровня сложности – 0,15 б.</td></tr>
<tr><td>№№</td><td>62</td><td>66</td><td>75</td><td>82</td><td>85</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>баллы</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="13">Задания III уровня сложности – 0,2 б.</td></tr>
<tr><td>№№</td><td>87</td><td>88</td><td>90</td><td>93</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>баллы</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

В пособии размещены также варианты контрольной работы по тригонометрии и другие дидактические материалы.

I. Измерение треугольников

Тригонометрия – от греческих τρίγωνον «треугольник» и μέτρεο «меряю» – измерение треугольников.

Первоначально тригонометрические функции были связаны с соотношениями сторон в прямоугольном треугольнике, их единственным аргументом является угол – один из острых углов этого треугольника.

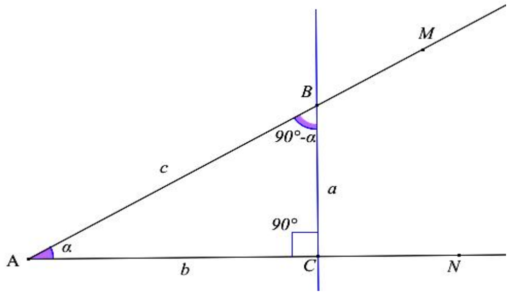


Рисунок 1. Обозначение сторон и углов в прямоугольном треугольнике

Пусть имеется какой-нибудь произвольный острый угол, например $\angle MAN = \alpha$ (рис. 1). На стороне AM возьмём произвольную точку B и опустим из неё перпендикуляр BC на сторону AN. Получим прямоугольный треугольник ABC. Согласно рисунку 1 введём обозначения.

В прямоугольном треугольнике ABC рассмотрим всевозможные отношения сторон:

$\frac{a}{c}$ – отношение противолежащего катета к гипотенузе – синус α.

$\frac{b}{c}$ – отношение прилежащего катета к гипотенузе – косинус α.

$\frac{a}{b}$ – отношение противолежащего катета к прилежащему – тангенс α.

$\frac{b}{a}$ – отношение прилежащего катета к противолежащему – котангенс α.

$\frac{c}{b}$ – отношение гипотенузы к прилежащему катету – секанс α.

$\frac{c}{a}$ – отношение гипотенузы к противолежащему катету – косеканс α.

Величины этих отношений не зависит от того, где на стороне AM мы возьмём точку B. Так, если вместо точки B мы возьмём на стороне AM какую-нибудь точку B', то в силу подобия треугольников $AB'C'$ и ABC, ни одно из отношений не изменится. Значит, взятому углу α соответствуют одни и те же определённые значения каждого из отношений. Справедливо и обратное утверждение: каждому значению отношения сторон соответствует определённый размер угла. На этом основании можно считать, что отношения сторон прямоугольного треугольника являются функциями его острого угла. Эти функции называются тригонометрическими функциями угла и обозначаются соответственно:

$sin\,\alpha = \frac{a}{c}$ – отношение противолежащего катета к гипотенузе – *синус* α.

$cos\,\alpha = \frac{b}{c}$ – отношение прилежащего катета к гипотенузе – косинус α.

$tg\alpha = \frac{a}{b}$ – отношение противолежащего катета к прилежащему – тангенс α.

$ctg\alpha = \frac{b}{a}$ – отношение прилежащего катета к противолежащему – котангенс α.

$sec\,\alpha = \frac{c}{b}$ – отношение гипотенузы к прилежащему катету – секанс α.

$cosec\,\alpha = \frac{c}{a}$ – отношение гипотенузы к противолежащему катету – косеканс α.

Очевидно, что $0 < sin\,\alpha < 1$, $0 < cos\,\alpha < 1$, $sec\,\alpha > 1$, $cosec\,\alpha > 1$ для любого острого угла α

Из определений тригонометрических функций следуют следующие равенства, выражающие зависимость между этими функциями:

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ (I), $sin\,\alpha \cdot cosec\alpha = 1$ (II), $cos\,\alpha \cdot sec\,\alpha = 1$ (III),

$sin\,\alpha \cdot sec\alpha = tg\alpha$ (IV), $cos\,\alpha \cdot cosec\alpha = ctg\alpha$ (V), $tg\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ (VI)

и т.д.

Обратимся ещё раз к рисунку 1: составим тригонометрические функции угла B и сопоставим с тригонометрическими функциями угла A:

$sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c} = cos\,\alpha$ или $sin(90° - \alpha) = cos\,\alpha$ (VII)

$cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c} = sin\,\alpha$ или $cos(90° - \alpha) = sin\,\alpha$ (VIII)

$tg(90° - \alpha) = \frac{b}{a} = ctg\alpha$ или $tg(90° - \alpha) = ctg\alpha$ (IX)

$ctg(90° - \alpha) = \frac{a}{b} = tg\alpha$ или $ctg(90° - \alpha) = tg\alpha$ (X)

$sec(90° - \alpha) = \frac{c}{a} = cosec\,\alpha$ или $sec(90° - \alpha) = cosec\,\alpha$ (XI)

$cosec(90° - \alpha) = \frac{c}{b} = sec\,\alpha$ или $cosec(90° - \alpha) = sec\,\alpha$ (XII)

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов; с учётом введённых обозначений:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Преобразуем это равенство к виду: $1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$, и воспользовавшись определениями синуса и косинуса, получим основное тригонометрическое тождество:

$$1 = sin^2\alpha + cos^2\alpha \qquad \text{(XIII)},$$

и следствия из него (два наиболее значимых):

$$\frac{1}{sin^2\alpha} = 1 + ctg^2\alpha \qquad \text{(XIV)},$$

$$\frac{1}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1 \qquad \text{(XV)}.$$

Используя теорему Пифагора и равенства I-XV можно «решать прямоугольные треугольники», то есть задачи следующих типов:

№	Формулировка	Дано	Найти
1	По двум известным катетам найти гипотенузу и величины острых углов	a, b	c, α, β
2	По известному катету и гипотенузе найти неизвестный катет и величины острых углов	a, c	b, α, β
3	По известному катету и противолежащему углу найти гипотенузу, неизвестный катет и неизвестный острый угол	a, α	c, b, β
4	По известному катету и прилежащему углу найти гипотенузу, неизвестный катет и неизвестный острый угол	a, β	c, b, α
5	По известному острому углу и гипотенузе найти катеты и неизвестный острый угол	α, c	a, b, β

Пусть $sin\,\alpha = x$, тогда угол α, синус которого равен x будем обозначать $arcsin\,x = \alpha$ (читается арксинус, от латинского arcus – дуга). Функции синус и арксинус – обратные: $sin(arcsin\,x) = x$ (XVI).

Аналогично для других тригонометрических функций острого угла:

$cos\,\alpha = x$ $\quad arccos\,x = \alpha$ $\quad cos(arccos\,x) = x$ (XVII);

$tg\alpha = x$ $\quad arctg\,x = \alpha$ $\quad tg(arctg\,x) = x$ (XVIII);

$ctg\alpha = x$ $\quad arcctg\,x = \alpha$ $\quad ctg(arcctg\,x) = x$ (XIX).

Преимущества тригонометрических функций требуют их распространения (обобщения) на прямой и тупой углы, что позволит решать не только прямоугольные треугольники, но и треугольники любого вида.

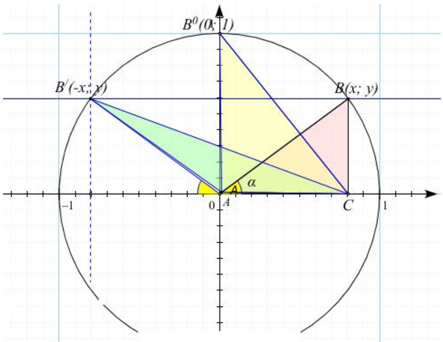


Рисунок 2

Поместим наш треугольник ABC в декартову систему координат так как показано на рисунке 2. Радиусом AB опишем окружность с центром в начале координат. Поскольку все окружности подобны, зададим значение радиуса равным 1, то есть $AB = 1$. Получившуюся окружность будем называть единичной.

Определим координаты вершин нашего треугольника: $A(0; 0)$, $B(x; y)$, $C(x; 0)$, длины сторон: $AC = x$, $BC = y$, и тригонометрические функции острого угла α: $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$, $tg\alpha = \frac{y}{x}$, $ctg\alpha = \frac{x}{y}$, $\sec\alpha = \frac{1}{x}$, $co\sec\alpha = \frac{1}{y}$.

Можно сказать также, что $B(\cos\alpha; \sin\alpha)$.

Будем двигать вершину B по окружности против часовой стрелки.

Когда точка B займёт положение $B^0(0; 1)$ мы получим прямоугольный треугольник с прямым углом α, для которого выполняются следующие утверждения:

$\sin 90° = 1$ (XX), $\cos 90° = 0$ (XXI),

$co\sec 90° = 1$ (XXII), $ctg\, 90° = 0$ (XXIII),

$tg\, 90°$ и $\sec 90°$ – не существуют.

Когда точка B займёт положение $B^{/}(-x; y)$ мы получим треугольник с тупым углом $180° - \alpha$, для которого выполняются следующие утверждения:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ (XXIV), $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ (XXV),

$tg(180° - \alpha) = -tg\alpha$ (XXVI), $ctg(180° - \alpha) = -ctg\alpha$ (XXVII),

$\sec(180° - \alpha) = -\sec\alpha$ (XXVIII), $co\sec(180° - \alpha) = co\sec\alpha$ (XXIX).

Итак, значения тригонометрических функций тупого угла можно находить вычисляя значения соответствующих тригонометрических функций острого угла по формулам (XXIV)-(XXIX).

Введём аркфункции для тригонометрических функций тупого угла $180° - \alpha$:

$180° - \alpha = \arcsin x$, где $x = \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$;

$180° - \alpha = \arccos(-x)$, где $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = -x$ и $\cos\alpha = x$; отсюда правило нахождения тупого угла (косинус которого отрицателен): чтобы найти величину тупого угла необходимо из $180°$ вычесть арккосинус абсолютного значения: $180° - \arccos|x|$;

$180° - \alpha = -arctg\, x$, где $tg\alpha = x$;

$180° - \alpha = arcctg(-x)$, где $ctg(180° - \alpha) = -ctg\alpha = -x$ и $ctg\alpha = x$; отсюда правило нахождения тупого угла (котангенс которого отрицателен): чтобы найти величину тупого угла необходимо из $180°$ вычесть арккотангенс абсолютного значения: $180° - arcctg|x|$.

Кроме того, используя формулы (VII)-(XII) можно поменять функцию на ко-функцию, например, $sin(180° - \alpha) = cos(90° - \alpha)$.

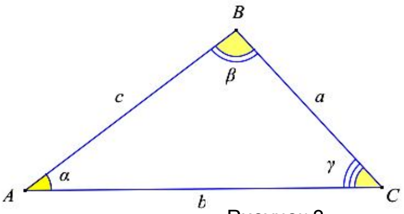


Рисунок 3

Теорема косинусов. Во всяком треугольнике квадрат стороны равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними; с учётом введённых обозначений (рис. 3):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot cos\gamma \qquad \text{(XXX).}$$

Теорема синусов. Во всяком треугольнике квадрат стороны пропорциональны синусам противолежащих углов; с учётом введённых обозначений (рис. 3):

$$\frac{a}{sin\,\alpha} = \frac{b}{sin\,\beta} = \frac{c}{sin\,\gamma} \qquad \text{(XXXI).}$$

Следует заметить, что для нахождения неизвестного угла в треугольнике надёжнее использовать теорему косинусов, а не синусов. Причина в том, что, согласно формуле (XXIV), значение синуса угла при вершине треугольника не определяет однозначно самого угла (например, $\frac{1}{2} = sin\,150° = sin\,30°$). Исключением является случай, когда заранее известно, что в данном треугольнике тупых углов быть не может – например, если треугольник прямоугольный. С косинусом такие проблемы не возникают, в интервале от $0°$ до $180°$ значение косинуса определяет угол однозначно.

Теорема тангенсов. Во всяком треугольнике разность двух сторон относится к их сумме так, как тангенс полуразности противолежащих этим сторонам углов к тангенсу полуссуммы этих углов; с учётом введённых обозначений (рис. 3):

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \text{(XXXII).}$$

Теперь можно перейти к решению главной тригонометрической задачи: по известным данным о треугольнике (стороны, углы и т.д.) найти остальные его характеристики, – получившей в истории математики название solutio triangulorum (лат.) – «решение треугольников».

Тестовые задания (по 0,05 баллов)

1. Гипотенуза прямоугольного треугольника $c = 82{,}0$ *см*, $\angle A = 42°$

а) $a = 82 \cdot \sin 42° \approx 54{,}9$ (*см*)
$b = 82 \cdot \cos 42° \approx 60{,}9$ (*см*)

б) $a = 82 \cdot \sin 48° \approx 60{,}9$ (*см*)
$b = 82 \cdot \cos 48° \approx 54{,}9$ (*см*)

в) $a = 82 \cdot \cos 42° \approx 54{,}9$ (*см*)
$b = 82 \cdot \sin 42° \approx 60{,}9$ (*см*)

г) $a = 82 \cdot \cos 42° \approx 60{,}9$ (*см*)
$b = 82 \cdot \cos 48° \approx 54{,}9$ (*см*)

2. Катет прямоугольного треугольника $a = 25$ *см*, $\angle A = 32°$

а) $b = \dfrac{25}{ctg 32°} \approx 40$ (*см*)
$c \approx \sqrt{25^2 + 40^2} \approx 47$ (*см*)

б) $b = \dfrac{25}{tg 32°} \approx 40$ (*см*)
$c = \dfrac{25}{\cos 32°} \approx 47$ (*см*)

в) $b = \dfrac{25}{tg 32°} \approx 40$ (*см*)
$c \approx \sqrt{25^2 + 40^2} \approx 47$ (*см*)

г) $b = \dfrac{25}{ctg 32°} \approx 40$ (*см*)
$c = \dfrac{25}{\sin 32°} \approx 47$ (*см*)

3. Катеты прямоугольного треугольника $a = 21$ *см*, $b = 18$ *см*

а) $\alpha = arctg\dfrac{18}{21} \approx 41°$, $\beta \approx 49°$

б) $\alpha = arctg\dfrac{21}{18} \approx 49°$, $\beta \approx 41°$

в) $\alpha = arcctg\dfrac{21}{18} \approx 49°$, $\beta \approx 41°$

г) $\alpha = arcctg\dfrac{18}{21} \approx 41°$, $\beta \approx 49°$

4. Решить треугольник, зная длины (приближенные) его сторон: $a \approx 22{,}4$; $b \approx 24{,}7$; $c \approx 31{,}3$.

а) $\alpha = \arccos 0{,}7038 \approx 45°20'$,
$\beta = \arccos 0{,}6215 \approx 51°30'$

б) $\alpha = \arccos 0{,}7038 \approx 45°20'$
$\gamma = \arccos 0{,}6215 \approx 51°30'$

в) $\alpha = \arccos 0{,}6215 \approx 51°30'$
$\beta = \arccos 0{,}7038 \approx 45°20'$

г) $\beta = \arccos 0{,}6215 \approx 51°30'$
$\gamma = \arccos 0{,}7038 \approx 45°20'$

5. Решить треугольник по следующим данным: $a \approx 49{,}4$; $b \approx 26{,}4$; $\gamma \approx 47°20'$.

а) $c \approx 56$,
$\alpha = \arccos 0{,}8513 \approx 31°40'$

б) $c \approx 56$
$\beta = \arccos 0{,}8513 \approx 31°40'$

в) $c \approx 37$
$\alpha = \arccos 0{,}8513 \approx 31°40'$

г) $c \approx 37$
$\beta = \arccos 0{,}8513 \approx 31°40'$

6. Решить треугольник по следующим данным: $b \approx 3{,}2$; $c \approx 4{,}3$; $\alpha = 102°$.

а) $a \approx 5{,}9$
$\gamma \approx \arcsin 0{,}53 \approx 32°$

б) $a \approx 5{,}4$
$\beta \approx \arcsin 0{,}72 \approx 46°$

в) $a \approx 5{,}9$
$\beta \approx \arcsin 0{,}53 \approx 32°$

г) $a \approx 5{,}4$
$\gamma \approx \arcsin 0{,}72 \approx 46°$.

7. Решить треугольник по следующим данным: $c = 23;\ \alpha = 48°,\ \beta = 73°:$

а) $a \approx 25{,}5, \quad b \approx 19{,}8$ в) $a \approx 17{,}7, \quad b \approx 29{,}8$

б) $a \approx 19{,}8, \quad b \approx 25{,}5$ г) $a \approx 29{,}8, \quad b \approx 17{,}7$

8. Решить треугольник по следующим данным: $a = 12;\ b = 21;\ \alpha = 30°:$

а) $c \approx 24{,}0, \quad \beta \approx 61°$ в) $c = 24, \quad \beta = 60°$

б) $c \approx 12{,}4, \quad \beta \approx 119°$ г) $c \approx 12{,}4, \quad \beta \approx 89°$

9. Решить треугольник по следующим данным: $a = 25;\ \alpha = 45°,\ \beta = 72°:$

а) $b \approx 26{,}7, \quad c \approx 31{,}3$ в) $b \approx 31{,}3, \quad c \approx 33{,}5$

б) $b \approx 26{,}7, \quad c \approx 33{,}5$ г) $b \approx 33{,}5, \quad c \approx 31{,}3$

10. Решить треугольник по следующим данным: $a = 20;\ b = 10;\ \alpha = 120°:$

а) $c \approx 30{,}2, \quad \gamma \approx 34°30'$ в) $c \approx 13{,}3, \quad \beta \approx 25°30'$

б) $c \approx 30{,}2, \quad \gamma \approx 25°30'$ г) $c \approx 13{,}3, \quad \beta \approx 34°30'$.

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Используя свойства клетчатой бумаги, постройте угол,

11. синус которого равен 1/3
12. косинус которого равен 2/7
13. тангенс которого равен 5
14. котангенс которого равен 1/5
15. секанс которого равен 4/3
16. косеканс которого равен 7/3

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Используя единичную окружность, поясните смысл равенств:

17. $sin(90° - \alpha) = -cos(180° - \alpha)$
18. $cos(90° - \alpha) = sin(180° - \alpha)$
19. $tg(90° - \alpha) = -ctg(180° - \alpha)$
20. $ctg(90° - \alpha) = -tg(180° - \alpha)$
21. $sec(90° - \alpha) = cosec(180° - \alpha)$
22. $cosec(90° - \alpha) = -sec(180° - \alpha)$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Используя единичную окружность, восстановите равенства:

23. $sin(90° + \alpha) =$
24. $cos(90° + \alpha) =$
25. $tg(90° + \alpha) =$
26. $ctg(90° + \alpha) =$
27. $sec(90° + \alpha) =$
28. $cosec(90° + \alpha) =$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Используя свойства клетчатой бумаги, постройте угол,

29. синус которого равен 1
30. косинус которого равен 0
31. тангенс которого равен (–5)
32. котангенс которого равен (–1/4)
33. секанс которого равен (–2/√3)
34. косеканс которого равен 2
35. синус которого равен √3/2
36. косинус которого равен (–3/4)
37. синус которого равен 1/√2
38. косинус которого равен (–1/√2)
39. тангенс которого равен (–1/6)
40. котангенс которого равен (–√3)

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Используя свойства клетчатой бумаги, выясните (продемонстрируйте), чему равны суммы:

41. $arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{1}{3}=$

42. $arctg\frac{1}{7}+arctg\frac{1}{3}=$

43. $arctg\frac{1}{4}+arctg\frac{1}{13}=$

44. $arctg\frac{1}{5}+arctg\frac{1}{8}=$

45. Используя свойства клетчатой бумаги, продемонстрируйте равенства:

а) $arccos\frac{3}{5}=90°-arccos\frac{4}{5}$ б) $arcctg(-2)+arctg\frac{2}{3}=180°+arctg\frac{1}{8}$

46. Какой знак имеют выражения:
а) $(cos\,45°-sin\,100°)\;(tg\,150°-ctg\,30°)$;
б) $(tg\,120°-sin\,60°)\;(cos\,155°-cos\,180°)$?

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Вычислите:

47. медианы треугольника, зная длины (приближенные) его сторон: $a\approx 22{,}4;\; b\approx 24{,}7;\; c\approx 31{,}3;$

48. высоты треугольника, зная, что $a\approx 49{,}4;\; b\approx 26{,}4;\; \gamma\approx 47°20';$

49. биссектрисы треугольника, зная, что $b\approx 3{,}2;\; c\approx 4{,}3;\; \alpha = 102°;$

50. биссектрису, высоту и медиану треугольника, проведённые из вершины C, зная, что $c = 23;\; \alpha = 48°,\; \beta = 73°;$

51. биссектрису, высоту и медиану треугольника, проведённые из вершины B, зная, что $a = 12;\; b = 21;\; \alpha = 30°;$

52. средние линии треугольника, зная, что $a = 25;\; \alpha = 45°,\; \beta = 72°$.

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Решите треугольник

53. ABM такой, что BM – медиана ΔABC, в котором $a = 28,\; c = 42,\; \beta = 124°;$

54. ABL такой, что BL – биссектриса ΔABC, в котором $a = 13,\; \alpha\approx 52°08',\; \beta\approx 67°23';$

55. ABH такой, что BH – высота ΔABC, в котором $a = 37,\; b = 13;\; c = 40;$

56. ABM такой, что BM – медиана ΔABC, в котором $a = 34,\; b = 93,\; \alpha\approx 14°15';$

57. NBM такой, что NM – средняя линия ΔABC, в котором $a = 4,\; \beta\approx 24°57';\; \gamma\approx 57°30';$

58. ABC, в котором $a = 7,\; \gamma = 75°,\; m_c = 8{,}2$ (медиана к стороне AB);

59. ABC, в котором $a = 12,\; \beta = 36°;\; l_\gamma = 7$ (биссектриса угла C);

60. ABC, в котором $\alpha\approx 37°30';\; \beta = 31°;\; h_b = 11$ (высота, проведённая из вершины B).

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Докажите следующие утверждения:

61. Сумма синусов острых углов прямоугольного треугольника больше 1, но меньше 2.

62. Теорема синусов.

63. Теорема косинусов.

64. Теорема тангенсов.

65. <u>Теорема котангенсов</u>. Котангенс половинного угла равен отношению разности полупериметра p и длины противолежащей к этому углу стороны к радиусу r вписанной окружности; с учётом введённых обозначений (рис. 3):

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{p-a}{r}.$$

66. <u>Формулы Мольвейде</u>, с учётом введённых обозначений (рис. 3):

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

67. Для любого треугольника справедливо соотношение (с учётом введённых обозначений (рис. 3)): $a = b\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\beta$.

68. Для любого треугольника справедливо соотношение: $a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$, где h_a, h_b, h_c – высоты, проведённые соответственно к сторонам a, b, c треугольника.

69. Докажите, что длина медианы m_a, проведенной к стороне a треугольника равна $m_a=\frac{\sqrt{b^2+c^2+2bc\cdot\cos\alpha}}{2}$.

70. В треугольнике биссектриса угла между сторонами длиной a и b имеет длину l_γ и делит противоположную сторону на отрезки длиной x и y, причём:

$$l_\gamma^{\,2} = ab - xy.$$

71. В треугольнике биссектриса угла между сторонами длиной b и c имеет длину $l_\alpha=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}\cdot bc}$.

72. Если вершины треугольника лежат в узлах сетки (узлом называют пересечение горизонтальной и вертикальной линий клетчатой бумаги), то тангенс любого непрямого угла этого треугольника является рациональным числом.

73. Геометрические место точек на плоскости, из которых данный отрезок a виден под данным углом α, состоит из дуг двух окружностей (исключая концы дуг), проходящих через концы данного отрезка, центры которых лежат по разные стороны от отрезка, а радиус одинаков и равен $r=\frac{a}{2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}$.

<u>*Задачи II уровня (по 30 баллов).*</u> Найдите (с учётом введённых обозначений (рис. 3)):

74. **в общем виде решение** задачи: дано $a,\ b,\ \gamma;$ требуется найти $c,\ \alpha,\ \beta;$ поверить решение, вычислив длины сторон и величины углов треугольника, если $a = 49{,}4,\ b = 26{,}4,\ \gamma = 47°27';$

75. **в общем виде решение** задачи: дано $a,\ \beta,\ \gamma;$ требуется найти $b,\ c,\ \alpha;$ поверить решение, вычислив длины сторон и величины углов треугольника, если $a = 17{,}4,\ \beta = 44°30',\ \gamma = 64°;$

76. **в общем виде решение** задачи: дано $a,\ b,\ c;$ требуется найти, $\alpha,\ \beta,\ \gamma;$ поверить решение, вычислив длины сторон и величины углов треугольника, если $a = 24,\ b = 13,\ c = 15;.$

77. **в общем виде решение** задачи: дано $a,\ b,\ \alpha;$ требуется найти $c,\ \beta,\ \gamma;$ поверить решение, вычислив длины сторон и величины углов треугольника, если $a = 12,\ b = 10,\ \gamma = 40°;$

78. **углы треугольника,** если его высоты равны 2, 3 и 4;.

79. **отрезок АМ** в треугольнике ABC со сторонами $AB = c,\ BC = a,\ AC = b,$ если точка M выбрана на стороне BC таким образом, что $BM : MC = 1:2$;

80. **существует** ли треугольник, в котором синус одного из углов больше суммы синусов двух других углов?

81. **способ построения на клетчатой бумаге окружности** по 12 узлам (узлом называют пересечение горизонтальной и вертикальной линий клетчатой бумаги);

82. **способ построения на клетчатой бумаге окружности** по 20 узлам (узлом называют пересечение горизонтальной и вертикальной линий клетчатой бумаги);

83. **площадь** ΔABC: $\gamma = 90°,\ b = 4,\ D \in BC,\ DC = 1;$ если окружность радиуса $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ проходит через точки C и D и касается описанной около ΔABC окружности в точке C.

84. **угол** BEF, образованный следующим образом: B – вершина ΔABC, у которого $AB > AC$, угол при вершине A равен $\alpha;$ $D \in AB,\ BD = AC;$ E – середина AD, F – середина BC.

85. **стороны** ΔABC по известным стороне a и углу α при условии, что a – среднее геометрическое радиусов вписанной и описанной окружностей этого треугольника.

Задачи III уровня (по 0,2 балла).

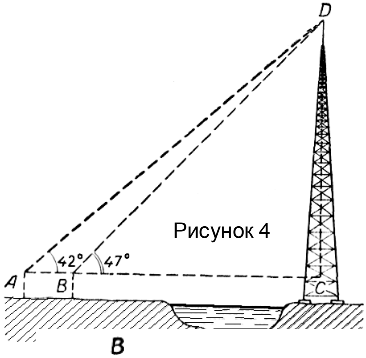


Рисунок 4

86. Определить высоту телевизионной антенны, которая отделена от исследователя рекой (рис. 4), если проведены следующие измерения: AB = 12 м, $\angle A = 42°$, $\angle B = 47°$ (углы измерены с помощью астролябии, высота которой 1,4 м).

87. Скорость течения реки 3 м/с. Её пересекает моторная лодка, имеющая скорость 12 км/ч. Под каким углом следует направить лодку, чтобы пересечь реку перпендикулярно берегу?

88. Длина подвесной канатной дороги составляет 1200 м, её наклон в среднем равен 8°. На какую высоту поднимается спортсмен по этой дороге?

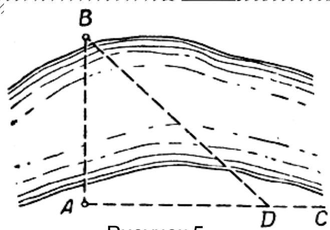


Рисунок 5

89. Как найти расстояние от пункта А до пункта В (рис. 5), находящегося за рекой, используя подручные средства или простейшие геодезические инструменты (например, мерную ленту и эккер или астролябию)?

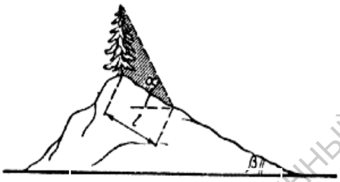


Рисунок 6

90. На горе, склон которой понижается к горизонту под углом β, стоит дерево. Тень дерева, падающая вниз по склону горы при высоте солнца α ($\alpha > \beta$) имеет длину l. Определить высоту дерева (рис. 6)

91. Сила, равная $P \approx 23{,}0$ кг, разложена на две составляющие, которые образуют с её направлением углы $\alpha \approx 46°30'$ и $\beta = 54°10'$. Вычислить величину каждой составляющей силы.

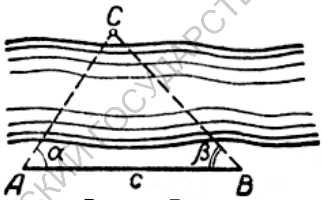


Рисунок 7

92. Чтобы определить ширину реки (рис. 7), непосредственно у воды по берегу реки провели базис AB длиной ≈ 400 м и наметили дерево C, стоящее на другом берегу у самой воды; затем измерили $\angle CAB \approx 45°$ и $\angle ABC = 30°$. Вычислить ширину реки против дерева C.

93. Пусть требуется обточить «на конус» конец цилиндрического вала диаметром $D \approx 154{,}2$ мм (рис. 8) так, чтобы угол уклона конуса $\alpha \approx 8°30'$, а длина обточки $H \approx 270{,}0$ мм. Чтобы установить вал на токарном станке для указанной обработки, надо знать, какой диаметр d будет иметь конец вала после его обточки. Найти этот диаметр.

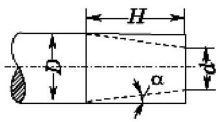
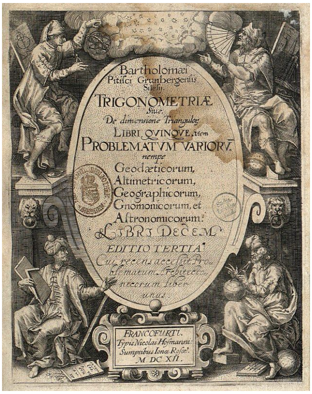


Рисунок 8

94. Найти расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте 30 м, до автомашины, которая видна наблюдателю по углом 20°.

95. Для укрепления радиомачты имеется стальной трос длиной 10 м. На какой высоте надо прикрепить трос к радиомачте и на каком расстоянии от мачты следует закрепить его в земле, чтобы угол наклона троса к земле был равен 60°?



96. <u>Творческое задание (1 балл)</u>.

Немецкий учёный Бартоломеус Питискус (или Бартоломео Питиск, нем. Bartholomäus Pitiscus, 1561-1613 гг.) глубоко занимался математикой, и в особенности тригонометрией, которая получила своё название благодаря его «Тригонометрия, или краткий и ясный трактат о решении треугольников» (лат. Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus). Этот фундаментальный труд в 11 книгах, изданный в Гейдельберге в 1595 году (расширенное переиздание в 1600 и в 1612 годах), излагал плоскую и сферическую тригонометрию, в неё были подробно описаны свойства всех шести тригонометрических функций, приведены тригонометрические таблицы.

Но история тригонометрии берёт своё начало не с монографии немецкого математика; эта наука зародилась в глубокой древности и использовалась для расчётов в астрономии, архитектуре и геодезии. Какие факты из истории тригонометрии Вам известны? Имена каких великих учёных связаны с открытиями важнейших законов тригонометрии?

97. <u>Творческое задание (1 балл)</u>:

Существует множество областей, в которых применяются тригонометрия. Например, метод триангуляции используется в астрономии для измерения расстояния до ближайших звезд, в географии для измерения расстояний между объектами, а также в спутниковых навигационных системах. В чём суть данного метода?

98. <u>Творческое задание (1 балл)</u>:

Геодезия – точная наука о фигуре, гравитационном поле, параметрах вращения Земли и их изменениях во времени. В технологическом аспекте геодезия обеспечивает координатными системами отсчета и координатными основами различные сферы человеческой деятельности. Метод геодезии опирается на широкий спектр достижений математики и физики, обеспечивающих изучение геометрических, кинематических и динамических свойств Земли в целом и отдельных ее участков.

Кроме того, геодезией называется отрасль производства, связанная с определением пространственных характеристик местности и искусственных объектов. Применяется для координатного обеспечения картографии, строительства, землеустройства, кадастра, горного дела, геологоразведки и других областей хозяйственной деятельности.

Как раньше (например, столетие назад, когда не было ни сложных оптических систем, дальномеров и тахеометров) можно было выполнять съемки значительных объемов, например, протяженных линейных объектов? Ответ Вы найдёте в учебнике 1914 г. «Курс Геодезии» Н. А. Богуславского, страницы из которого приведены ниже.

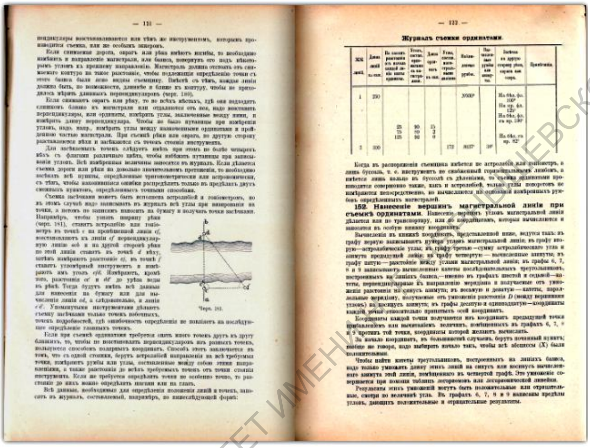
— 120 —

ГЛАВА XVII.

Съемка на планъ мѣстности астролябіей или гоніометромъ.

151. Производство съемки ординатами.

Черт. 180.



— 121 —

Черт. 181.

— 122 —

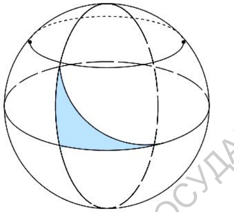
Журналъ съемки ординатами.

152. Нанесеніе вершинъ магистральной линіи при съемкѣ ординатами.

Какова роль тригонометрии отводилась съёмкам на местности?

99. <u>Творческое задание (1 балл)</u>:

Важным разделом тригонометрии, используемым в астрономии, геодезии, навигации и других отраслях, является сферическая тригонометрия, рассматривающая свойства углов между большими кругами на сфере и дуг этих больших кругов. Геометрия сферы существенно отличается от евклидовой планиметрии; так, сумма углов сферического треугольника отличается от 180°. В сферической тригонометрии длины сторон треугольника (дуги больших кругов сферы) выражаются посредством центральных углов, соответствующих этим дугам. Сформулируйте и обоснуйте основные положения сферической тригонометрии, продемонстрируйте их приложения.



100. <u>Творческое задание (1 балл)</u>:

Почти все измерения в практической астрономии сводятся к измерениям углов. Прежде всего это связано с тем, что объекты, которые изучает астрономия находятся на таком удаленном (по любым меркам) расстоянии, что само понятие «расстояние» превращается в нечто неопределенное. Поэтому в практической астрономии измеряются не реальные расстояния до звезд, а только угловые расстояния между ними; в большинстве случаев то же самое справедливо в отношении Солнца, Луны и планет. Каким образом углы в практической астрономии связаны с измерением времени?

II. Тригонометрические функции числового аргумента

Известны различные системы измерения углов (и соответствующих им дуг): практик-механик чаще всего измеряет углы, образующиеся при вращательном движении, через *число оборотов в минуту* (секунду); практик-геодезист измеряет углы в градусных единицах: *градус* – 1/90 прямого угла (в разделе 1 мы использовали именно такую единицу измерения углов); во Франции (1799 г.) прямой угол делили на 100 частей и использовали для измерения 1/100 прямого угла, называемую *град*; в практической астрономии, помимо прочих, измеряют углы, образованных при вращении Земли вокруг оси, в часовых единицах (часах, часовых минутах и часовых секундах)[1]. Но наиболее удобной системой измерения углов (связанных с вращательным движением) оказалась радианная мера (другое название – радиусная мера), которая впервые в неявном виде появилась в трудах Архимеда (287-212 гг. до н.э., г. Сиракузы в Сицилии), медленно развивалась математиками XV-XVI веков, оформилась в трудах Исаака Ньютона (1643-1727 гг.) и Готфрида Лейбница (1646-1716 гг.) и вошла в науку через труды Леонарда Эйлера (1707-1783 гг.)[2].

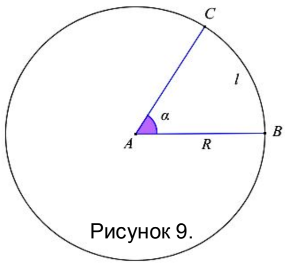


Рисунок 9.

Радианной мерой угла α называется отношение l длины дуги, на которую опирается центральный угол к длине R радиуса окружности (рис. 9): $\alpha = \dfrac{l}{R}$.

Единицей в радианной системе измерения служит угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу, то есть: $\alpha = 1 \Leftrightarrow l = R$.

Применяя формулу для нахождения длины дуги, соответствующей центральному углу, заданному в градусной мере (n градусов): $l = \dfrac{\pi R}{180} \cdot n$, получаем равенство, связывающее градусную и радианную систему измерений углов: $\alpha = \dfrac{\pi n}{180}$ (1).

Используя эту формулу вычислим градусную меру угла в 1 радиан:

$$1 = \frac{\pi n}{180} \Leftrightarrow n = \frac{180}{\pi} \approx \frac{180}{3{,}1415925...} \approx 57{,}2958° \approx 57°18'.$$

---

[1] За 24 часа Земля поворачивается на 360°, за 1 час – на 15°. Долгота Саратова – 46°00′30″ в часовых единицах равна $3^h4''2''$ (4 часовых минуты – 1°, 1 часовая секунда – 15′′)

[2] Андронов И.К., Окунев А.К. Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач. – М: Просвещение, 1967. – 648 с. – С.106-107.

Все формулы раздела 1, содержащие градусные меры можно переписать, используя радианные меры, например,

$sin\dfrac{\pi}{2} = 1$	(XX),	$cos\dfrac{\pi}{2} = 0$	(XXI),
$co\sec\dfrac{\pi}{2} = 1$	(XXII),	$ctg\dfrac{\pi}{2} = 0$	(XXIII),
$sin(\pi - \alpha) = sin\,\alpha$	(XXIV),	$cos(\pi - \alpha) = -cos\,\alpha$	(XXV),
$tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha$	(XXVI),	$ctg(\pi - \alpha) = -ctg\alpha$	(XXVII),
$sec(\pi - \alpha) = -sec\,\alpha$	(XXVIII),	$co\sec(\pi - \alpha) = cosec\alpha$	(XXIX).

Итак, перейдя от градусов к числам, можно изучать тригонометрические функции числового аргумента (выражающие законы кругового движения). Для этого установим соответствие между действительными числами (величины углов, выраженных в радианах) и точками окружности (окружность – геометрическая модель кругового движения).

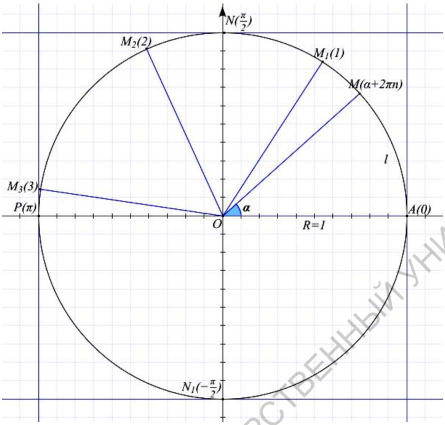


Рисунок 10

В декартовой системе координат построим окружность (будем называть её, по аналогии с числовой прямой, числовой окружностью) с центром в начале координат, выберем (рис. 10):

единицу масштаба – радиус окружности ($1 = R$),

положительное направление кругового движения – противоположное направлению движения часовой стрелки,

начальную точку $A(1,\ 0)$ (два числа, записанные через запятую означают линейные координаты точки).

Круговая координата точки записывается по аналогии с числовой прямой: $M(\alpha)$, где α – радианная мера угла AOM.

Таким образом, всякому действительному числу будет поставлена в соответствие определённая точка окружности и причём единственная. Однако, из-за особенностей кругового движения, каждой точке $M(\alpha)$ окружности соответствует множество чисел вида $\alpha + 2\pi n$, где $n \in N$.

Косинусом числа α называется абсцисса точки $M(x;\ y)$ на числовой окружности, соответствующей числу α: $cos\,\alpha = x$

Синусом числа α называется ордината точки $M(x;\ y)$ на числовой окружности, соответствующей числу α: $sin\,\alpha = y$

Тангенсом числа α называется отношение синуса этого числа к его косинусу: $tg\alpha = \dfrac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$.

Котангенс, секанс и косеканс определяются подобным образом.

Если α – радианная мера острого угла, то косинус этого угла в нашем прежнем смысле (см. раздел 1) равен косинусу числа α в новом смысле; синус этого угла в нашем прежнем смысле равен синусу числа α в новом смысле; тангенс этого угла в нашем прежнем смысле равен тангенсу числа α в новом смысле (так как для острых углов верна формула $tg\alpha = \dfrac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$); котангенс, секанс и косеканс этого угла в нашем прежнем смысле равен соответственно котангенсу, секансу и косекансу числа α в новом смысле.

Сопоставляя каждому числу α его косинус, синус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс,	получим шесть тригонометрических функций числового аргумента,	которые будем записывать в привычном для нас виде: $y = f(x)$
$\alpha \to cos\,\alpha$	$f(\alpha) = cos\,\alpha$	$y = cos\,x$
$\alpha \to sin\,\alpha$	$f(\alpha) = sin\,\alpha$	$y = sin\,x$
$\alpha \to tg\alpha$	$f(\alpha) = tg\alpha$	$y = tg\,x$
$\alpha \to ctg\alpha$	$f(\alpha) = ctg\alpha$	$y = ctg\,x$
$\alpha \to sec\,\alpha$	$f(\alpha) = sec\,\alpha$	$y = sec\,x$
$\alpha \to cosec\alpha$	$f(\alpha) = cosec\alpha$	$y = cosec\,x$

Таблица 1

Свойства тригонометрических функций синус и косинус

	$y = cos\,x$	$y = sin\,x$
Область определения	R	R
Область значений	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Период (основной)	2π	2π
Чётность / нечётность	$cos(-x) = cos\,x$	$sin(-x) = -sin\,x$
Точки пересечения с осью ОХ	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad y = 0$	$x = \pi k, \quad y = 0$
Точки пересечения с осью ОУ	$x = 0, \quad y = 1$	$x = 0, \quad y = 0$
Промежутки, на которых значения функции положительны	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$
Промежутки, на которых значения функции отрицательны	$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$
Промежутки возрастания	$x \in (-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$
Промежутки убывания	$x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$	$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$
Точки минимума	$x = \pi + 2\pi k, \quad y = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad y = -1$
Точки максимума	$x = 2\pi k, \quad y = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad y = 1$

Таблица 2

Свойства тригонометрических функций тангенс и котангенс

	$y = tg\,x$	$y = ctg\,x$
Область определения	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$	$x \in (\pi k;\ \pi + \pi k)$
Область значений	R	R
Период (основной)	π	π
Чётность/ нечётность	$tg(-x) = -tg\,x$	$ctg(-x) = -ctg\,x$
Точки пересечения с осью ОХ	$x = \pi k,\ \ y = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ y = 0$
Точки пересечения с осью ОУ	$x = 0,\ \ y = 0$	–
Промежутки, на которых значения функции положительны	$x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$	$x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$
Промежутки, на которых значения функции отрицательны	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k\right)$	$x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi + \pi k\right)$
Промежутки возрастания	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$	–
Промежутки убывания	–	$x \in (\pi k;\ \pi + \pi k)$
Точки минимума	–	–
Точки максимума	–	–

В таблицах 1 и 2, $k \in Z$.

Для каждой функции выберем некоторый промежуток монотонности и определим обратные к ним тригонометрические функции.

Таблица 3

Определение обратных тригонометрических функций

	$y = arccos\,x$	$y = arcsin\,x$	$y = arctg\,x$	$y = arcctg\,x$
Область определения	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$	R	R
Область значений	$[0;\ \pi]$	$\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$	$\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$	$(0;\ \pi)$
Монотонность	убывает	возрастает	возрастает	убывает

Аркфункции в нашем прежнем смысле (см. раздел 1) равны аркфункциям в новом смысле (с учётом радианной меры угла), и формулы (XVI)-(XXIX) верны.

Определим смысл выражений: $arccos(-x)$ и $arcctg(-x)$:

$$arccos(-x) = \pi - arccos\,x \tag{2}$$

$$arcctg(-x) = \pi - arcctg\,x \tag{3}$$

Исследовать свойства функций секанс и косеканс, а также обратных к ним функций и построить графики всех тригонометрических функций студенту предлагается самостоятельно.

Тестовые задания (по 0,05 баллов).

101. Если $\sin x = 0,6$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\cos x =$

а) $-0,8$ б) $-0,4$ в) $0,4$ г) $0,8$

102. Если $\sin x = 0,96$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, то $\cos x =$

а) $-0,28$ б) $-0,04$ в) $0,04$ г) $0,28$

103. Если $\sin x = -\frac{1}{3}$ и $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos x =$

а) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ б) $-\frac{2}{3}$ в) $\frac{2}{3}$ г) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

104. Если $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, то $\cos x =$

а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ б) $-\frac{1}{2}$ в) $\frac{1}{2}$ г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

105. Существует такое x, что $\cos x =$

а) $-\frac{12}{11}$ б) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ в) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$ г) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} - 1$

106. Существует такое x, что $\sin x =$

а) $-2,5$ б) $\frac{4}{\sqrt{15}}$ в) $\frac{\sqrt{29}}{6}$ г) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}}$

107. Если $x = \frac{11\pi}{8}$, то

а) $\sin x > 0, \cos x > 0$ в) $\sin x < 0, \cos x > 0$
б) $\sin x > 0, \cos x < 0$ г) $\sin x < 0, \cos x < 0$

108. Если $x = \frac{11}{8}$, то

а) $\sin x > 0, \cos x > 0$ в) $\sin x < 0, \cos x > 0$
б) $\sin x > 0, \cos x < 0$ г) $\sin x < 0, \cos x < 0$

109. $\sin 11 + \cos 11 \cdot tg\, 11 =$

а) $2 \cdot \sin 11$ б) $\cos 22$ в) $\sin 22$ г) $2 \cdot \cos 11$

110. $\frac{1}{1 + tg^2\, 17} + \frac{1}{1 + ctg^2\, 17} =$

а) $\sin 17$ б) $\cos 17$ в) 0 г) 1

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> <u>Числовая прямая и числовая окружность</u>.

111. Отметьте на числовой прямой и на числовой окружности точки, соответствующие числам: $-\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \ldots$ – образующим бесконечную арифметическую прогрессию. Сколько таких точек будет на числовой окружности и сколько на прямой?

112. Отметьте на числовой прямой и на числовой окружности точки, соответствующие числам: $\alpha_1 = \pi k$ и $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, где k – целые числа. Сколько таких точек будет на числовой окружности и сколько на прямой?

113. Как расположатся на числовой окружности точки, соответствующие числам: $\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{k}, \alpha + \frac{2 \cdot 2\pi}{k}, \alpha + \frac{3 \cdot 2\pi}{k}, \ldots, \alpha + \frac{(k-1) \cdot 2\pi}{k}$, где $k \in N$?

114. На числовой прямой и на числовой окружности отмечена точка $M(\alpha)$, отметьте другие точки, соответствующие числам: $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$, где $\beta = 1, 2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \pi, 2\pi$.

115. Число $\alpha = 0,73$ является круговой координатой точки M на числовой окружности. Запишите все круговые координаты точки M.

116. Зная, что $(-1,5)$ есть одна из круговых координат точки M на числовой окружности, найти все круговые координаты этой точки.

117. Найти геометрическое место точек на числовой прямой и на числовой окружности, соответствующих числам x, которые удовлетворяют неравенству: $-\alpha \le x \le \alpha$, где $\alpha = 0, 1, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.

118. Найти геометрическое место точек на числовой прямой и на числовой окружности, соответствующих числам x, которые удовлетворяют неравенству: $\pi - \alpha \le x \le \alpha$, где $\alpha = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

119. Какую дугу числовой окружности описывает точка $M(x)$, если её координата x изменяется непрерывно::

(а) от 0 до π; (б) от 0 до $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; (в) от 0 до (-40π);

(г) от $\frac{\pi}{2}$ до π; (д) от $\frac{\pi}{2}$ до 0 (е) от $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ до $\frac{\pi}{2}$?

120. Найти круговые координаты точек, в которых числовая окружность:
(а) пресекается с осями координат,
(б) пресекается биссектрисами координатных углов.

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> По данному значению одной из функций и интервалу найти значения остальных функций

121. $\sin x = \frac{3}{5},\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

122. $\cos x = -\frac{4}{5},\ \frac{\pi}{2} < x < \pi$

123. $tg\, x = \frac{12}{5},\ \pi < x < \frac{3\pi}{2}$

124. $ctg\, x = -\frac{9}{40},\ \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

125. $\sec x = \frac{5}{3},\ 2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$

126. $cosec\, x = \frac{5}{4},\ \frac{5\pi}{2} < x < 3\pi$

127. $\sin x = -0{,}8,\ 3\pi < x < \frac{7\pi}{2}$

128. $\cos x = \frac{5}{13},\ -\frac{\pi}{2} < x < 0$

129. $tg\, x = -2,\ -\frac{3\pi}{2} < x < -\pi$

130. $ctg\, x = 7,\ -\pi < x < -\frac{\pi}{2}$

131. $\sec x = -\frac{13}{12},\ \pi < x < \frac{3\pi}{2}$

132. $cosec\, x = -\frac{2}{\sqrt{2}},\ \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Определите чётность/нечётность функций.

133. $f(x) = \sin x + ctg\, x$

134. $f(x) = |\sin x|$

135. $f(x) = x^4 + tg^2\, x + 1$

136. $f(x) = x^3 + tg^2\, x$

137. $f(x) = \cos x - tg\, x$

138. $f(x) = \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$

139. $f(x) = \cos x - |x|$

140. $f(x) = \frac{1 - 2\cos 2x}{x^7}$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Пользуясь периодичностью, чётностью/нечётностью тригонометрических функций, запишите значения заданных функций так, чтобы аргумент был выражен наименьшим возможным положительным числом:

141. $\cos\frac{17\pi}{5}$

142. $ctg\left(-\frac{122\pi}{7}\right)$

143. $\sin\left(-\frac{35\pi}{9}\right)$

144. $tg\,\frac{2015\pi}{8}$

145. $\cos\left(-\frac{20\pi}{11}\right)$

146. $ctg\,\frac{121\pi}{3}$

147. $\sin\frac{315\pi}{4}$

148. $tg(20{,}15\pi)$

<u>Задачи I уровня (по 20 баллов).</u> Наименьшим положительным периодом функции $f(x)$ называется такое положительное число T, что T – период $f(x)$ и ни одно положительное число, меньшее T, периодом $f(x)$ уже не является.

Укажите наименьший период следующих функций

151. $f(x) = \sin 2x$

152. $f(x) = \cos\frac{x}{5}$

153. $f(x) = tg\, 3x$

154. $f(x) = ctg\,\frac{x}{4}$

155. $f(x) = \sin x + ctg\, x$

156. $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$

157. $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

158. $f(x) = tg(4x - 1)$

159. $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$

160. $f(x) = ctg\left(\frac{x}{3} + 1\right) - 4$

__Задачи II уровня (по 0,15 баллов).__ Докажите следующие утверждения:

161. Если $\sin^2 x + \cos^2 y > 1,$ то $\sin^2 y + \cos^2 x < 1.$

162. Для $x \in [-1; 1], \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

163. Для $x \in [-1; 1], \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

164. Для $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty),\ tg(arcctg x) = \frac{1}{x}$.

165. Для $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty),\ ctg(arctg x) = \frac{1}{x}$.

166. Для $x \in (-1; 1), tg(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

167. Для $x \in (-1; 1), ctg(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

168. Для $x \in [-1; 0) \cup (0; 1], tg(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

169. Для $x \in [-1; 0) \cup (0; 1], ctg(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

170. Для $x \in R,\ \cos(arctg\, x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

171. Для $x \in R, \sin(arctg\, x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

172. Для $x \in R, \cos(arcctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

173. Для $x \in R,\ \sin(arcctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Найдите:

174. $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$;

175. $(tg\, x + ctg\, x)^2 + (tg\, x - ctg\, x)^2$;

176. $\sin x(2 + ctg\, x)(2\, ctg\, x + 1) - 5 \cos x$;

177. $2\sin x \cdot \cos x$, если $\sin x + \cos x = a$;

178. **значение** выражения

$$2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arctg(-1) + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\arccos(-1).$$

179. **значение** выражения $arctg\left(-tg\frac{13\pi}{8}\right) + arcctg\left(ctg\left(-\frac{19\pi}{8}\right)\right)$.

180. **значение** выражения $\arcsin\left(\sin\frac{33\pi}{7}\right) + \arccos\left(\cos\frac{46\pi}{7}\right)$.

181. **сколько** различных чисел получится, если для каждого целого n найти число $\sin\frac{\pi n}{30}$,

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Нахождение области определения тригонометрической функции продемонстрируем на примере функции $y = \dfrac{\sin x + ctg\, x}{1 + tg\, x}$.

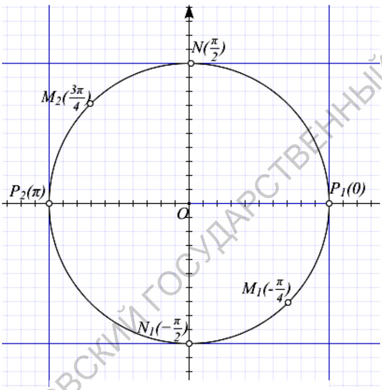


Рисунок 11.

Из области допустимых значений следует исключить те значения, – отметить «выколотыми» точками на числовой окружности (рис. 11), – при которых:

$tg\, x$ теряет смысл $\qquad \frac{\pi}{2} + \pi k_1$

$ctg\, x$ теряет смысл $\qquad \pi k_2$

$tg\, x \neq -1$ $\qquad -\frac{\pi}{4} + \pi k_3$

Круговые координаты выколотых точек выбираем из промежутка [0; 2π]:

$$N_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = N_1\left(\frac{3\pi}{2}\right), \quad M_1\left(-\frac{\pi}{4}\right) = M_1\left(\frac{7\pi}{4}\right),$$

$$P_1(0) = P_1(2\pi).$$

На промежутке [0; 2π], охватывающем полный период функции, $y = \dfrac{\sin x + ctg\, x}{1 + tg\, x}$ имеет смысл в следующих шести интервалах:

$$\left(0; \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right), \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right), \left(\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right).$$

Вторая тройка интервалов может быть получена из первой тройки поворотом на π радиан (период) соответственно. Итак, область определения функции является множество $\left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, где n – целые числа.

Найдите область определения функций:

182. $y = lg\, sin\, x$ *183.* $y = lg\, sin^2 x$

Найдите множество значений аргумента, на котором имеет место тождество:

184. $lg\, tg\, x = lg\, sin\, x - lg\, cos\, x$ *185.* $lg\, tg\, x = lg|sin\, x| - lg|cos\, x|$

<u>Задачи III уровня (по 0,2 балла).</u> Решите задачи.

186. Зависимость напряжения в сети переменного тока от времени задается формулой $U = U_0 sin\, \omega t$ (здесь t – время, U – напряжение, U_0 и ω – постоянные величины). Частота переменного тока – 50 Гц (это означает, что напряжение совершает 50 колебаний в секунду). а) Найдите ω, считая, что t измеряется в секундах; б) Найдите (наименьший положительный) период U как функции от t.

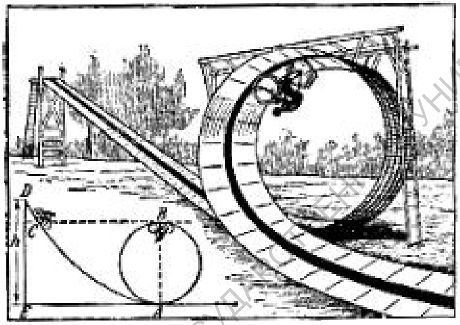


Рисунок 12. Чёртова петля

187. Чёртова петля. Вам знаком головокружительный трюк, иногда исполняемый в цирках: велосипедист едет в петле снизу вверх и описывает полный круг, несмотря на то, что по верхней части круга ему приходится ехать вниз головой. На арене устраивают деревянную дорожку в виде петли с одним или несколькими завитками, как изображено на рисунке 12. Артист спускается на велосипеде по наклонной части петли, затем быстро взлетает на своем стальном коне вверх, по круговой ее части, совершает полный оборот, буквально вниз головой, и благополучно съезжает на землю.

Этот головоломный велосипедный фокус кажется зрителям верхом акробатического искусства. Озадаченная публика в недоумении спрашивает себя: какая таинственная сила удерживает смельчака вниз головой? Недоверчиво настроенные готовы подозревать здесь ловкий обман, а между тем в трюке нет ничего сверхъестественного. Он всецело объясняется законами механики. Биллиардный шар, пущенный по этой дорожке, выполнил бы то же с не меньшим успехом. В школьных физических кабинетах имеются миниатюрные «чертовы петли». Знаменитый исполнитель и изобретатель этого трюка, артист «Мефисто», для испытания прочности «чертовой петли» имел тяжелый шар, вес которого равнялся весу артиста вместо с велосипедом. Шар этот пускали по дорожке петли, и если он благополучно пробегал ее, то артист решался проделать петлю сам. Однако трюк удается но всегда; необходимо в точности рассчитать высоту, с которой велосипедист должен начать свое движение: иначе трюк окончится катастрофой.

Решите такую задачу: с какой высоты h надо спустить по кривой DA шар веса P, чтобы он прошёл по круговой петле, не свалившись в точке B вниз (рис. 12)? Для простоты не учитывайте силу трения.

188. Докажите, что если углы α, β, γ треугольника удовлетворяют соотношению $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 1$, то один из этих углов равен $\frac{2\pi}{3}$.

189. В круглой башне, внутренний диаметр которой равен 2 м, находится винтовая лестница высотой 6 м. Высота каждой ступеньки составляет 0,15 м. На виде сверху соседние ступеньки образуют центральный угол величиной $\frac{\pi}{10}$. Внутренние края ступеней прикреплены к круглому столбу диаметром 0,64 м., ось которой совпадает с осью башни. Найти наибольшую длину прямолинейного стержня, который можно пронести снизу наверх по такой лестнице (толщиной стержня и ступеней пренебречь).

190. Учитель на уроке алгебры в 9 классе предложил ученикам для исследования пять чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 из промежутка $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$, которые образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Девочки выяснили, что $\cos x_1$, $\cos x_2$, $\cos x_3$ образуют арифметическую прогрессию. Мальчики выяснили, что $\sin x_3$, $\sin x_4$ *и* $\sin x_5$ тоже образуют арифметическую прогрессию. Какие числа предложил учитель ученикам для исследования?

191. Известно число $\sin x$. Какое наибольшее число значений может принимать $\sin\frac{x}{2}$, $\sin\frac{x}{3}$?

192. Вписав правильный пятиугольник в окружность радиуса 1 ученик 9 класса доказал равенство $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$. Воспроизведите это доказательство.

193. Всем классом ученики выясняют, сколько корней имеет уравнение $\sin x = \frac{x}{100}$, используя графический метод решения (строят графики двух функций на промежутке [–100; 100]). Можно ли рационализировать решение?

194. Ученик доказывает теорему: если α и β – острые углы и $\alpha < \beta$, то $\frac{tg\alpha}{\alpha} < \frac{tg\beta}{\beta}$. Отметил на числовой окружности точки с круговым координатами A(α) и B(β) согласно условию $\alpha < \beta$ и сформулировал первые выводы: $\cos\alpha > \cos\beta$ и $\sin\alpha < \sin\beta$. На этом остановился: не знает, что делать дальше. Какие указания должен дать учитель, чтобы ученик завершил доказательство?

195. Как доказать, что сумма $\cos 32x + a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x + ... + a_1\cos x$

принимает как положительные, так и отрицательные значения при любых значениях x?

Учитель предложил метод от противного: предположить, что сумма принимает только положительные значения:

$$\cos 32x + a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x + \ldots + a_1\cos x > 0.$$

Один из учеников предложил, раз x – любое, заменить его на $x + \pi$ и посмотреть, что получится. Как Вы думаете, что получится? Докажите данное утверждение.

196. Творческое задание (1 балл). Периодические функции естественно возникают при описании колебательных процессов, например,

1) Пусть φ = φ(t) – угол отклонения качающегося маятника часов от вертикали в момент t, тогда φ – периодическая функция от t.

2) Напряжение («разность потенциалов», как сказал бы физик) между двумя гнездами розетки в сети переменного тока, если его рассматривать как функцию от времени, является периодической функцией.

3) Пусть мы слышим музыкальный звук. Тогда давление воздуха в данной точке – периодическая функция от времени.

Запишите эти функции аналитически. Приведите другие примеры периодических функций.

197. Творческое задание (1 балл). Раньше для определения значений тригонометрических функций широко использовались «Четырехзначные математические таблицы» В.М. Брадиса. С их помощью можно определить, чему равно значение той или иной тригонометрической функции острого угла. Чтобы воспользоваться теми же таблицами для определения значений тригонометрических функций любого угла, приходилось преобразовывать угол к острому, используя тригонометрические тождества.

	A	B	C	D	E
1	Градусы	Минуты	=B2/60	=A2+C2	=tan(Pi()/180*D2)
2	-1927	30	0,5	-1927,5	1,3032
3					=-tan(Pi ()/180*D4)
4				1927,5	1,3032
5					=-tan(Pi ()/180*D6)
6				127,5	1,3032
7					=1/tan(Pi ()/180*D8)
8				37,5	1,3032

Сегодня значения тригонометрических функций можно очень просто получить, воспользовавшись возможностями среды электронных таблиц. Решите задачу нахождения значений тригонометрических функций в среде Excel.

__198. Творческое задание (1 балл) – определение тригонометрических функций при помощи дифференциальных уравнений.__ Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка: $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (или $y'' + y = 0$, или $y'' = -y$) (*) и будем искать[1] два его решения y_1 и y_2, удовлетворяющие начальным условиям:

при $x = 0,\ y_1 = 0,\ \frac{dy_1}{dx} = 1$ (или $y_1' = 1$),

$y_2 = 1,\ \frac{dy_2}{dx} = 0$ (или $y_2' = 0$).

Если считать, что тригонометрические функции нам не известны (мы как раз сейчас занимаемся вопросом об их определении), то уравнение (*) решить нельзя. Это значит, что его решение не может быть выражена как комбинация (в конечном числе) известных нам функций (алгебраических, показательной, логарифмической), но это отнюдь не значит, что решения не существует. Согласно теореме Коши о существовании решения дифференциального уравнения, решения уравнения (*), удовлетворяющие указанным начальным условиям, существуют. Поскольку мы не можем выразить их при помощи известных ранее функций, будем рассматривать их как новые функции и введём для них следующие обозначения:

Функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ и начальным условиям $x = 0,\ y_1 = 0,\ \frac{dy_1}{dx} = 1$ называется синусом и обозначается $\sin x$.

Функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ и начальным условиям $x = 0,\ \ y_2 = 1, \frac{dy_2}{dx} = 0$, называется косинусом и обозначается $\cos x$.

Исходя из этого определения синуса и косинуса, можно вывести все их свойства. Как это сделать – показано, например, в статье Ф.В. Доброхотова «Очерк аналитической теории тригонометрических функций» («Математическое просвещение», вып. 9, – М.-Л., 1936). Проделайте это самостоятельно.

[1] Бескин Н.М. Вопросы тригонометрии и ее преподавания. – М: Учпедгиз, 1950. – 140 с. – С.5-8.

__199. Творческое задание (1 балл) – определение тригонометрических функций при помощи степенных рядов.__ Ряды, выражающие синус и косинус, могут быть выведены из уравнения (*), но могут быть взяты в качестве исходного пункта. Будем искать общее решение уравнения (*) в виде степенного ряда:

$$y = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\ldots \qquad (**)$$

Дифференцируя этот ряд два раза, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+4\cdot 5a_5x^3+\ldots$$

Подставляем эти ряды в уравнение (*):

$$1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+4\cdot 5a_5x^3+\ldots + a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\ldots = 0$$

$$a_0+1\cdot 2a_2+a_1x+2\cdot 3a_3x+a_2x^2+3\cdot 4a_4x^2+a_3x^3+4\cdot 5a_5x^3+a_4x^4+5\cdot 6a_6x^4+a_5x^5+6\cdot 7a_7x^5+\ldots= 0$$

$$(a_0+1\cdot 2a_2)+(a_1+2\cdot 3a_3)x+(a_2+3\cdot 4a_4)x^2+(a_3+4\cdot 5a_5)x^3+(a_4+5\cdot 6a_6)x^4+(a_5+6\cdot 7a_7)x^5+\ldots= 0$$

Так как левая часть равна нулю, то коэффициенты при всех степенях x должны быть нулями. Это приводит к бесконечной системе уравнений:

$$a_0+1\cdot 2a_2 = 0$$
$$a_1+2\cdot 3a_3 = 0$$
$$a_2+3\cdot 4a_4 = 0$$
$$a_3+4\cdot 5a_5 = 0$$
$$a_4+5\cdot 6a_6 = 0$$
$$a_5+6\cdot 7a_7 = 0$$
$$\ldots$$

где одни уравнения содержат неизвестные с нечётными индексами, а другие – с чётными индексами. Уравнения этих двух групп не связаны между собой (они содержат разные неизвестные). Решая последовательно уравнения, содержащие неизвестные с чётными индексами, мы видим, что a_0 придётся считать произвольным, а остальные коэффициенты выразить через a_0. Аналогично, рассматривая уравнения с нечётными индексами, выражаем все входящие в них коэффициенты через a_1, которое остаётся произвольным:

$$a_2 = -\frac{1}{2!}a_0 \qquad\qquad a_3 = -\frac{1}{3!}a_1$$

$$a_4 = -\frac{1}{3\cdot 4}a_2 = \frac{1}{4!}a_0 \qquad\qquad a_5 = -\frac{1}{4\cdot 5}a_3 = \frac{1}{5!}a_1$$

$$a_6 = -\frac{1}{5\cdot 6}a_4 = -\frac{1}{6!}a_0 \qquad\qquad a_7 = -\frac{1}{6\cdot 7}a_5 = -\frac{1}{7!}a_1$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд (**), получим формальное общее решение уравнения (*)

$$y = a_0\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)+a_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right). \qquad (***)$$

Это решение содержит две произвольные постоянные a_0 и a_1.

Для получения синуса используем <u>начальные</u> условия:

$\underline{x = 0} \Rightarrow y_1 = a_0$

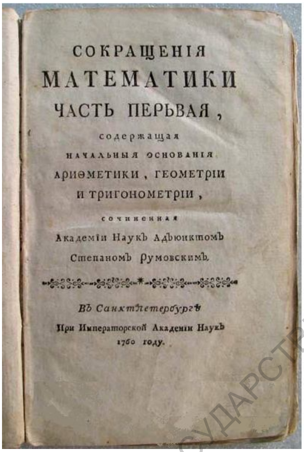
$\underline{y_1 = 0} \Rightarrow a_0 = 0$

$$\underline{\frac{dy_1}{dx} = 1} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = a_0\left(-\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+..\right)+a_1\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...\right)=1 \Rightarrow a_1=1$$

Подставляя найденные значения: $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ в формулу (***), найдём синус: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$.

Рассуждая по аналогии определите косинус через степенной ряд.

Все свойства функций синус и косинус могут быть выведены из рядов, задающих эти функции. Эти ряды, таким образом, могут служить исходным пунктом для развития всей тригонометрии, которая будет независима от геометрических построений: все формулы будут выводится аналитически. Докажите основные формулы тригонометрии аналитически с опорой на степенные ряды.


СОКРАЩЕНІЯ
МАТЕМАТИКИ
ЧАСТЬ ПЕРЬВАЯ,
содержащая
НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ
АРИѲМЕТИКИ, ГЕОМЕТРІИ
И ТРИГОНОМЕТРІИ,
сочиненная
Академіи Наукъ Адъюнктомъ
Степаномъ Румовскимъ.
Въ Санктпетербургѣ
При Императорской Академіи Наукъ
1760 году.

<u>200. Творческое задание (1 балл).</u> Что Вам известно о становлении тригонометрии как учебной дисциплины в России, об учебниках, содержащих элементы тригонометрии и учебниках тригонометрии, о исторических подходах к определению тригонометрических функций? В чём, в контексте определения тригонометрических функций, заслуга Леонарда Эйлера перед отечественным математическим образованием? Какую роль сыграл в становлении тригонометрии как учебной дисциплины учебник «Сокращения математики. Часть первая, содержащая начальные основания арифметики, геометрии и тригонометрии, сочинённая Академии Наук Адъюнктом Степаном Разумовским. В Санкт-Петербурге, при Императорской Академии Наук, 1760 года»?

III. Тригонометрические тождества и преобразование тригонометрических выражений

Тригонометрическим тождеством называется равенство вида:

$$F(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – тригонометрические функции от x, удовлетворяющее двум условиям:

(1) равенство выполняется для всех x из некоторого множества (множество допустимых значений $F(x) = 0$);

(2) при замене $f_1 = f_1(x), f_2 = f_2(x), \ldots, f_n = f_n(x)$, получившееся равенство не является алгебраическим тождеством.

Например,

$sin^2 x + cos^2 x = 1$ – тригонометрическое тождество (называемое основным),

$(sin\, x + cos\, x)^2 = sin^2 x + cos^2 x + 2\, sin\, x \cdot cos\, x$ – алгебраическое тождество $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ относительно тригонометрических функций синус и косинус: $a = sin\, x,\ b = cos\, x$,

$(sin\, x + cos\, x)^2 = 1 + sin\, 2x$ – тригонометрическое тождество.

Тригонометрические тождества, связывающие тригонометрические функции одного аргумента, были доказаны в разделах 1 и 2. В этом разделе нам предстоит доказать и использовать для решения разнообразных математических задач тождества, связывающие тригонометрические функции двух различных аргументов, например, x и y; x и $\frac{x}{2}$; x и $2x$ и т.д.

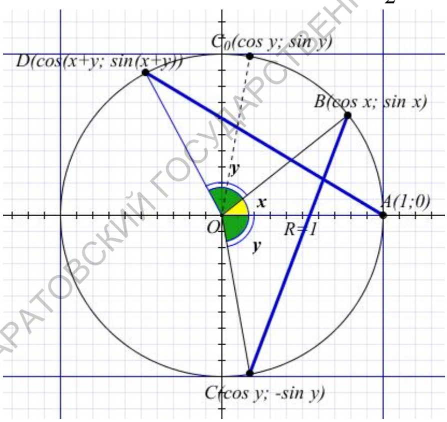


Рисунок 13.

Выведем формулу, позволяющую выразить $cos(x + y)$ через косинусы и синусы x и y.

На числовой окружности отметим точки:

$A(1; 0)$,

$B(cos\, x; sin\, x)$,

$C_0(cos\, y; sin\, y)$, $C(cos\, y; -sin\, y)$,

$D(cos\,(x+y); sin\,(x+y))$.

Поскольку отрезки AD и BC опираются на равные дуги (величина дуг $(x+y)$), их длины, и следовательно, квадраты их длин равны, то есть $AD^2 = BC^2$.

Выразим квадраты расстояний через координаты соответствующих точек, получим:

$$(1 - cos\,(x+y))^2 + (0 - sin\,(x+y))^2 = (cos\, x - cos\, y)^2 + (sin\, x + sin\, y)^2$$

$$1 - 2\cos(x+y) + \cos^2(x+y) + \sin^2(x+y) =$$
$$= \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x \cdot \cos y + \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \cdot \sin y.$$

Применяя основное тригонометрическое тождество, упрощаем получившееся равенство:

$$1 - \cos(x+y) + 1 = 1 + 1 - 2\cos x \cdot \cos y + 2\sin x \cdot \sin y.$$

Проводим дальнейшие преобразования:

$$-\cos(x+y) = -\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y,$$

Получаем формулу: $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ (4)

и, с учётом формул (I)-(XXIX), следствия из неё:

$$\cos(x+(-y)) = \cos x \cdot \cos(-y) - \sin x \cdot \sin(-y) \Leftrightarrow$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \qquad (5)$$

$$\sin(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin y = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \qquad (6)$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y \qquad (7)$$

Далее в формулах $k \in Z, n \in Z$.

$$tg(x+y) = \frac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x \cdot tg\,y} \text{ на множестве } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right) \qquad (8)$$

$$tg(x-y) = \frac{tg\,x - tg\,y}{1 + tg\,x \cdot tg\,y} \text{ на множестве } \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right) \qquad (9)$$

$$ctg(x+y) = \frac{ctg\,x \cdot ctg\,y - 1}{ctg\,x + ctg\,y} \text{ на множестве } (\pi k; \pi + \pi k) \qquad (10)$$

$$ctg(x-y) = \frac{ctg\,x \cdot ctg\,y + 1}{ctg\,x - ctg\,y} \text{ на множестве } (\pi k; \pi + \pi k) \qquad (11)$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x \qquad (12)$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad (13)$$
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \qquad (14)$$
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \qquad (15)$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad (16)$$
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad (17)$$

$$tg\,2x = \frac{2tg\,x}{1 - tg^2 x} \text{ для } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n \qquad (18)$$

$$ctg\,2x = \frac{ctg^2 x - 1}{2ctg\,x} \text{ для } x \neq \frac{\pi k}{2} \qquad (19)$$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2} \qquad (20)$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2} \qquad (21)$$

$$tg\,x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}} \text{ для } x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x\neq\pi+2\pi n \qquad (22)$$

$$ctg\,x=\frac{ctg^2\frac{x}{2}-1}{2ctg\frac{x}{2}} \text{ для } x\neq\pi k \qquad (23)$$

$$tg^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \text{ для } x\neq\pi+2\pi k \qquad (24)$$

$$ctg^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x} \text{ для } x\neq 2\pi k \qquad (26)$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x} \text{ для } x\neq\pi+2\pi k \qquad (27)$$

$$ctg\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{\sin x} \text{ для } x\neq 2\pi k \qquad (28)$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x} \text{ для } x\neq\pi+2\pi k \qquad (29)$$

$$ctg\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1-\cos x} \text{ для } x\neq 2\pi k \qquad (30)$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \qquad (31)$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2} \qquad (32)$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \qquad (33)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2} \qquad (34)$$

$$tg\,x\pm tg\,y=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cdot\cos y},\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k \qquad (35)$$

$$ctg\,x\pm ctg\,y=\frac{\sin(y\pm x)}{\sin x\cdot\sin y},\quad x\neq\pi n,\ y\neq\pi k \qquad (36)$$

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2} \quad (37)$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2} \quad (38)$$

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2} \quad (39)$$

Тестовые задания (по 0,05 балла).

201. $\sin\frac{5\pi}{12} =$

а) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ б) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ в) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ г) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

202. $\cos\frac{13\pi}{12} =$

а) $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ б) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ в) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ г) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

203. Если $tgx = 7$, то $tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right) =$

а) -7 б) $-\frac{4}{3}$ в) $-\frac{3}{4}$ г) $\frac{3}{4}$

204. $\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12} =$

а) $\frac{1}{4}$ б) $\frac{1}{2}$ в) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

205. $\frac{ctg^2\frac{\pi}{12}-1}{2ctg\frac{\pi}{12}} =$

а) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ г) $\sqrt{3}$

206. $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) =$

а) $1+\cos x$ б) $1+\sin x$ в) $1-\cos x$ г) $1-\sin x$

207. $\cos\frac{7\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$

а) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ б) 0 в) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ г) 1

208. $\sqrt{2}+2\sin x=$

а) $4\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)$ б) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)$

в) $4\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)$ г) $-4\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)$

209. $tg\,x+tg(\pi-x)+ctg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=$

а) $ctg(\pi-x)$ б) $ctg\,x$ в) $tg\,x$ г) $tg(2\pi-x)$

210. $2tg\,x-tg(x-\pi)-ctg\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=$

а) 0 б) $tg\,x$ в) $2tg\,x$ г) $4tg\,x$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Для вывода нового тождества из уже имеющихся целесообразно использовать формальную табличную запись хода рассуждения. Например, для вывода тождества (30): $ctg\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ для $x\neq 2\pi k$, рассуждения могут быть такими:

№	Утверждение	Обоснование
1	$ctg\frac{x}{2}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},\ x\neq 2\pi k$	Определение котангенса
2	$\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}},$ $x\neq 2\pi k$	Основное свойство дроби
3	$ctg\frac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}},\ x\neq 2\pi k$	Из 1.-2. по свойству транзитивности равенства
4	$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$	Тождество (12)
5	$2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x$	Следствие из тождества (21): $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$
6	$ctg\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1-\cos x},\ x\neq 2\pi k$	Из 3.-5. по свойству тождественных преобразований

Выведите следующие тождества:

211. формулы сложения аргументов (6)-(11),

212. формулы двойного аргумента (12)-(19),

213. формулы половинного аргумента (20)-(29),

214. формулы суммы и разности тригонометрических функций (31)-(36),

215. формулы произведения тригонометрических функций (37)-(39),

216. $\sin x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ для $x \neq \pi + 2\pi n$,

217. $ctg\, x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}$ для $x \neq \pi k$,

218. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x;$

219. $tg\, 3x = \dfrac{3tgx - tg^3 x}{1-3tg^2 x}$, $\quad x \neq \dfrac{\pi}{6}(2n+1), n \in Z;$

$ctg\, 3x = \dfrac{3ctgx - ctg^3 x}{1-3ctg^2 x}$, $\quad \alpha \neq \dfrac{\pi k}{3},\ n \in Z$.

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла).*</u> Вычислите:

220. $\cos(x+y)$, если $\sin x = \dfrac{4}{5},\ \dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ и $\cos y = -\dfrac{3}{5},\ \dfrac{\pi}{2} < x < \pi$;

221. $\cos(x+y)$, если $\sin x = \sin x = \dfrac{5}{13},\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} < y < \pi$;

222. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$, если $tg\, x = 2,\ \pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$;

223. $\sin(x-y)$, если $\sin x = -\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ и $\cos y = -\dfrac{1}{4},\ \pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$;

224. $tg(2x+y)$ и $tg(x-2y)$, если $tg\, x = 1{,}2,\ tg\, y = 0{,}7$;

225. $\sin 2x,\ \cos 2x,\ tg\, 2x,\ ctg\, 2x$, если $\sin x = 0{,}6,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

226. $\sin\dfrac{x}{2},\ \cos\dfrac{x}{2},\ tg\dfrac{x}{2},\ ctg\dfrac{x}{2}$, если $\cos y = -\dfrac{12}{13},\ \pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$;

227. $\sin\dfrac{x}{4},\ \cos\dfrac{x}{4},\ tg\dfrac{x}{4},\ ctg\dfrac{x}{4}$, если $\cos y = \dfrac{4}{5},\ \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$;

228. $tg^2 x + ctg^2 x$, если $tg\, x + ctg\, x$;

229. $\sin x$, $\cos 2x$, $tg\,3x$, $ctg\,4x$, если $tg\dfrac{x}{2}=3$;

230. $\sin x+\cos x$, $\sqrt{3}+2\cos x$, $3-tg^2 x$, если $tg\dfrac{x}{2}=-2$;

231. $\sin 4x$, $\cos 4x$, $tg\,4x+ctg\,4x$, если $tg\,2x=8$.

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Докажите (выведите) тождества, при необходимости укажите множество, на котором оно выполняется:

232. $\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)=\cos^2 y-\cos^2 x$

233. $\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)=\cos^2 y-\sin^2 x$

234. $\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)+\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)=\cos 2y$

235. $\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}=tg\,x+tg\,y$

236. $\dfrac{\cos(x+y)}{\sin x\cdot\sin y}+1=ctg\,x\cdot ctg\,y$

237. $tg\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1+tg\,x}{1-tg\,y}$

238. $1-4\cos^2 x\cdot\cos^2 x=\cos^2 2x$

239. $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=tg\,2x$

240. $\dfrac{\sin x+2\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+2\cos 2x+\cos 3x}=tg\,2x$

241. $tg\,y=\dfrac{tg(x+y)-tg\,x-tg\,y}{tg\,x\cdot tg(x+y)}$

242. $tg\,2x-tg\,x=\dfrac{tg\,x}{\cos 2x}$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Упростите тригонометрические выражения.

243. $\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}\cdot tg^2\dfrac{x}{2}-\cos^2 x$

244. $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot ctg\dfrac{x}{2}-\sin^2 x$

245. $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}-tg^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$

246. $1+tg^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$

247. $\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)-\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$

248. $\dfrac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}$

249. $\sin 47+\sin 61-\sin 11-\sin 25$

250. $\dfrac{tg\,5-tg\,3-tg\,2}{tg\,5\cdot tg\,2}$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Докажите

251. $arctg x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

252. $\arccos\left(\cos\left(2arctg\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

253. $arctg\dfrac{1}{3}+arctg\dfrac{1}{5}+arctg\dfrac{1}{7}+arctg\dfrac{1}{8}=\dfrac{\pi}{4}$

254. $arcsin|x| = \dfrac{arccos(1-2x^2)}{2}$

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла).*</u> Найдите

255. $sin\left(2arctg\dfrac{1}{2}\right) + tg\dfrac{arcsin\dfrac{15}{17}}{2}$

256. $cos\left(2arctg\dfrac{1}{4} + arccos\dfrac{3}{5}\right)$

257. $cos\left(3\,arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$

258. $tg\left(2\,arccos\dfrac{5}{\sqrt{26}} - arcsin\dfrac{12}{13}\right)$

259. $tg\left(5arctg\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{4}arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

260. $ctg\left(2\,arccos\left(-\dfrac{4}{7}\right)\right)$

<u>*Задачи II уровня (по 0,15 балла).*</u> Докажите следующие утверждения:

261. $\dfrac{sin(x-y)}{cos\,x \cdot cos\,y} + \dfrac{sin(y-z)}{cos\,y \cdot cos\,z} + \dfrac{sin(z-x)}{cos\,z \cdot cos\,x} = 0$.

262. Для $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ справедливо неравенство $sin\,2x < 2\,sin\,x$.

263. Для $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ справедливо неравенство $x - \dfrac{x^3}{4} < sin\,x < x$.

264. Если $arcctg\dfrac{1}{a} + arcctg\dfrac{1}{b} + arcctg\dfrac{1}{c} = \pi$, то $a+b+c = abc$.

265. $sin\,1 < log_3\sqrt{7}$.

266. Для того, чтобы $sin\,x$ и $cos\,x$ были одновременно рациональными, необходимо и достаточно, чтобы $tg\dfrac{x}{2}$ был рационален.

267. Если $sin\,y = \dfrac{1}{5}sin(2x+y)$, то $tg(x+y) = \dfrac{3}{2}tg\,x$.

268. Пусть $0 < x < \dfrac{\pi}{2}, 0 < y < \dfrac{\pi}{2}$, $3sin^2x + 2sin^2y = 1$, $3sin^2x - 2sin^2y = 0$, тогда $x + 2y = \dfrac{\pi}{2}$.

269. Если $x + y + z = \pi$, то $sin\,x + sin\,y + sin\,z = 4cos\dfrac{x}{2} \cdot cos\dfrac{y}{2} \cdot cos\dfrac{z}{2}$.

270. Пусть x_1 и x_2 – различные корни уравнения $a \cdot cos\,x + b \cdot sin\,x = c$, тогда $cos^2\dfrac{x_1 - x_2}{2} = \dfrac{c^2}{a^2 + b^2}$.

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Выведите формулы для:

271. синуса суммы трёх аргументов
272. косинуса суммы трёх аргументов
273. тангенса суммы трёх аргументов
274. котангенса суммы трёх аргументов

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Найдите:

275. $tg\left(x+y\right)$, если $tg\,x+tg\,y=a$ и $ctg\,x+ctg\,y=b$;

276. **соотношение** между $arcsin(cos(arcsin\,x))$ и $arccos(sin(arccos\,x));$

277. **геометрическое место точек**, координаты которых $(x,\ y)$ удовлетворяют соотношению $sin(x+y) = 0;$

278. **все действительные решения** уравнения $x^2 + 2x\,sin(xy) + 1 = 0;$

279. **существует** ли плоский четырехугольник, у которого тангенсы всех внутренних углов равны;

280. $log_2\left(ctg\frac{x}{2}\right)+log_2\left(1-cos\,x\right)-2log_2\left(sin\,x\right)$, если $x=\frac{\pi}{4}$;

281. $log_{\frac{9}{5}}\left|sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+log_{\frac{9}{5}}\left|cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$, если $sin\,x-cos\,x=\sqrt{\frac{2}{3}}$;

282. наименьшее положительное **число** x, для которого синус x градусов равен синусу x радиан;

283. **число** x из промежутка $[0;\ 2\pi]$, при котором выполняется равенство

$$cos\left(x+\frac{\pi}{9}\right)-cos\left(x+\frac{4\pi}{9}\right)-sin\left(x+\frac{4\pi}{9}\right)+sin\frac{\pi}{12}=0\ ;$$

284. **какому** алгебраическому соотношению должны удовлетворять числа $x,\ y,\ z$ для того, чтобы выполнялось равенство: $tg\,x+tg\,y+tg\,z=tg\,x\cdot tg\,y\cdot tg\,z$;

285. **способ** выяснить, рационально ли число

$$sin\frac{\pi}{18}\cdot sin\frac{3\pi}{18}\cdot sin\frac{5\pi}{18}\cdot sin\frac{7\pi}{18}\cdot sin\frac{9\pi}{18}\,.$$

<u>Задачи III уровня (по 0,2 балла).</u> Решите задачи различных олимпиад по математике.

286. На доске после занятия осталась запись:

Вычислить
t(0) − t(π/5) + t(2π/5) − t(3π/5) + ... + t(8π/5) − t(9π/5),
*где t(x) = cos5x + * cos4x + * cos3x + * cos2x + * cosx + * ".*

Увидев её, студент мехмата сказал товарищу, что он может вычислить эту сумму, даже не зная значений стёртых с доски коэффициентов (вместо них в нашей записи *). Не ошибается ли он?

287. Докажите, что если сумма косинусов углов четырёхугольника равна нулю, то он – параллелограмм, трапеция или вписанный четырёхугольник.

288. Докажите, что если ни один из углов $A,\ B,\ C,\ D$ выпуклого четырёхугольника не является прямым, то

$$\frac{tg\,A + tg\,B + tg\,C + tg\,D}{tg\,A \cdot tg\,B \cdot tg\,C \cdot tg\,D} = ctg\,A + ctg\,B + ctg\,C + ctg\,D.$$

289. На листе бумаги нарисован график функции $y = sin\,x$. Лист свернут в цилиндрическую трубочку так, что все точки, абсциссы которых отличаются на 2п, совмещены. Докажите, что все точки графика синусоиды при этом лежат в одной плоскости.

290. Даны различные натуральные числа a, b. На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = sin\,ax$, $y = sin\,bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a, b и такое, что график функции $y = sin\,cx$ проходит через все отмеченные точки.

291. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = sin^6 x + cos^6 x$.

292. Докажите для $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ справедливость неравенства:

$$cos(sin\,x) > sin(cos\,x).$$

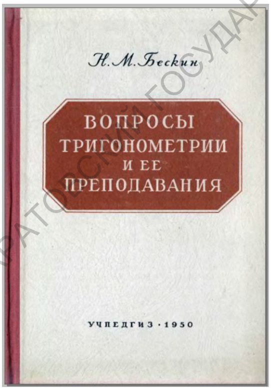
293. Докажите формулы Рамануджана:

$$\sqrt[3]{cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}}$$

$$\sqrt[3]{cos\frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{cos\frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{cos\frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9} - 6}{2}}$$

294. Укажите все выпуклые четырехугольники, у которых суммы синусов противолежащих углов равны..

295. Дан выпуклый семиугольник. Выбираются четыре произвольных его угла и вычисляются их синусы, от остальных трёх углов вычисляются косинусы. Оказалось, что сумма таких семи чисел не зависит от изначального выбора четырёх углов. Докажите, что у этого семиугольника найдутся четыре равных угла.



__296. Творческое задание (1 балл).__ Н.М. Бескин в работе «Вопросы тригонометрии и ее преподавания» (М: Учпедгиз, 1950. – 140 с. – С.92-93) раскрывает роль самостоятельного составления учащимися тригонометрических таблиц в воспитании школьников: «Ребёнку окружающий мир кажется непонятным. Он не знает законов, управляющих явлениями природы, и устройства произведений техники. Паровоз, радиоприемник, электрическая лампочка кажутся чудесами, и ребёнок привыкает мирится с их непонятностью, привыкает считать это недоступным для своего ума.

Одна из важнейших задач средней школы – разрушение этой таинственности. Десятиклассник должен прочно привыкнуть к сознанию, что ничего чудесного нет, и всё он может постигнуть, хотя бы в принципе. Он не может (пока) сам спроектировать паровоз во всех деталях, но должен знать принцип его устройства.

Составление математических таблиц – один из участков этой борьбы с таинственностью, и поэтому воспитательное значение составления таблиц далеко выходит за рамки скромного параграфа из курса тригонометрии. Мы не можем (и вовсе не ставим это целью) дать ученику наиболее совершенные методы, употребляемые современными вычислителями. Мы будем вполне удовлетворены, если, познакомившись с некоторыми кустарными способами вычисления тригонометрических функций, ученики скажут: «В составлении тригонометрических таблиц нет ничего таинственного. Мы можем делать это сами!».

Вычисление таблиц даёт ученикам большое удовлетворение и служит поводом для более прочного усвоения многих тригонометрических положений, к которым приходится обращаться в ходе этого вычисления.

Однако было бы крайним преувеличением думать, что надо знакомить учеников с практическими способами, которые действительно используются для оставления таблиц. Это совершенно излишне, так как никому из учеников не придётся составлять тригонометрические таблицы ни для каких других целей, кроме упражнения. Важно только показать, что это можно сделать.

Исходя из этих соображений, мы считаем целесообразным традиционный способ вычисления таблиц, основанный на теореме: $x-\frac{x^3}{4}<\sin x<x$, где x – радианная мера острого угла. Эта теорема доказывается специально для составления таблиц. Она недостаточно точна, так как в левой части можно было бы взять $x-\frac{x^3}{6}$ вместо $x-\frac{x^3}{4}$, только это трудно доказать элементарными средствами. Они излишни, потому что и без неё в школьном курсе тригонометрии есть множество способов для вычисления таблиц.

К этим средствам относятся формулы половинного угла, суммы и разности. Полезной оказывается также формула $\sin\frac{180°}{n}=\frac{a_n}{2R}$, где a_n – сторона правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса R».

Разработайте алгоритм применения каждого из указанных методов; проведите сравнительный анализ этих методов по ряду оснований; вычислите каждым методом, с точностью до десятитысячных, значения всех тригонометрических функций следующих аргументов:

Функция	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1, 5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
Синус											
Косинус											
Тангенс											
Котангенс											
Секанс											
Косеканс											

297. Творческое задание (100 баллов). Формулами приведения называются формулы, дающие выражение тригонометрических функций от аргументов $\frac{\pi}{2} \pm x$, $\pi \pm x$, $\frac{3\pi}{2} \pm x$, $2\pi \pm x$ через функции от аргумента x.

Выведите формулы приведения для функций синус, косинус, тангенс и котангенс; постройте графические и геометрические модели формул приведения.

298. Творческое задание (100 баллов). Тождества сложения (6)-(7) могут быть интерпретированы при помощи теоремы Птолемея, утверждающей, что произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон. Рассмотрите рисунок 14 и выведите формулы синуса суммы и синуса разности.

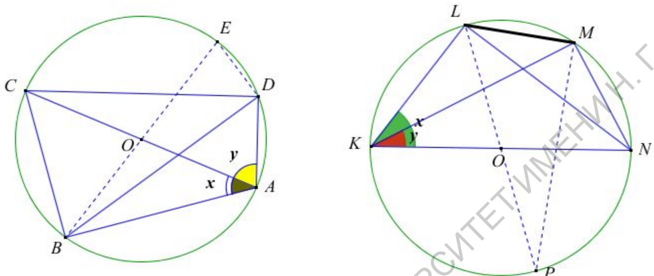


Рисунок 14. Геометрическая интерпретация тригонометрических тождеств $sin(x \pm y) = sin\,x \cdot cos\,y \pm cos\,x \cdot sin\,y$

299. Творческое задание (100 баллов). Как известная из теории комплексных чисел формула Муавра позволяет получить формулы тригонометрических функций от кратных (двойных, тройных и т.д.) аргументов?

300. Творческое задание (100 баллов). Что Вам известно о многочленах Чебышёва; какое отношение к тригонометрическим функциям имеют эти многочлены? Подберите и приведите решение задач курса тригонометрии, в которых используются многочлены Чебышёва.

IV. Тригонометрические уравнения

Тригонометрическими называют уравнения, содержащие тригонометрические функции. Различают алгебраические уравнения относительно тригонометрических функций и собственно тригонометрические уравнения.

Алгебраическое уравнение относительно тригонометрических функций решают методом замены переменных и решением соответствующего алгебраического уравнения, затем обратной заменой получают систему (совокупность) элементарных тригонометрических уравнений.

Собственно тригонометрические уравнения путём тождественных тригонометрических преобразований сводят или к алгебраическому уравнению относительно тригонометрических функций, или к элементарному тригонометрическому уравнению.

В любом случае необходимо уметь решать элементарные тригонометрический уравнения.

Уравнение $\sin x = a$

при $a > 1$ и $a < -1$ решений не имеет;

при $a = 1$ принимает вид $\sin x = 1$ и имеет решения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$;

при $a = 0$ принимает вид $\sin x = 0$ и имеет решения $x = \pi k,\ k \in Z$;

при $a = -1$ принимает вид $\sin x = -1$ и имеет решения $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$;

при $-1 < a < 1$ уравнение имеет решения $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$.

Вообще, для того, чтобы найти все решения уравнения при $-1 < a < 1$ достаточно найти все решения этого уравнения на любом отрезке длины 2π и к каждому решению прибавить кратный период $2\pi k,\ \ k \in Z$.

Уравнение $\cos x = a$

при $a > 1$ и $a < -1$ решений не имеет;

при $a = 1$ принимает вид $\sin x = 1$ и имеет решения $x = 2\pi k,\ k \in Z$;

при $a = 0$ принимает вид $\sin x = 0$ и имеет решения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;

при $a = -1$ принимает вид $\sin x = -1$ и имеет решения $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$;

при $-1 < a < 1$ уравнение имеет решения $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$.

Для того, чтобы найти все решения уравнения при $-1 < a < 1$ достаточно найти все решения этого уравнения на любом отрезке длины 2π и к каждому решению прибавить кратный период $2\pi k,\ \ k \in Z$.

Уравнения $tg\, x = a$ и $ctg\, x = a$.

Для того, чтобы найти все решения этих уравнений достаточно найти все решения на любом отрезке длины π и к каждому решению прибавить кратный период $\pi k,\ \ k \in Z$: $\quad x = arctg\, a + \pi k,\ k \in Z$,

$$x = arcctg\, a + \pi k, k \in Z.$$

Тестовые задания (по 0,05 балла).

301. Корни уравнения $sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=-0,5$

а) $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$

б) $x=(-1)^k\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$

в) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$

г) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$

302. Корни уравнения $cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=0,7$

а) $x=\pm arccos0,7-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

б) $x=\frac{\pm arccos0,7}{4}-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$

в) $x=\frac{\pm arccos0,7}{4}-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$

г) $x=\frac{\pm arccos0,7}{4}-\frac{\pi}{12}+2\pi k,\ k\in Z$

303. Корни уравнения $tg\left(\frac{x+\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

а) $x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$

б) $x=3\pi k,\ k\in Z$

в) $x=\pi+3\pi k,\ k\in Z$

г) $x=3arctg\sqrt{3}-\pi+\pi k,\ \ k\in Z$

304. Корни уравнения $ctg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=1$

а) $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

б) $x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$

в) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

г) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$

305. Корни уравнения $arcsin\left(x^2-4x+4\right)=\frac{\pi}{2}$

а) $\varnothing$ б) 1 в) 1; 3 г) 3

306. Корни уравнения $arccos^2x-arccos\,x-2=0$

а) $cos(-1)$

б) $cos\,2$

в) $cos(-1),\ cos\,2$

г) $cos\,1,\ cos\,2$

307. Корни уравнения $12arctg^2x-\pi arctg\,x=\pi^2$

а) $-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}$ б) $\frac{\pi}{3}$ в) $\sqrt{3}$ г) $-1;\sqrt{3}$

308. Корни уравнения $2\cos^2 x + \cos x = 0$ на $[0;\ 2\pi]$

а) $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}$

в) $\pm\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

б) $\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$

г) $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$

309. Корни уравнения $\sin 2x = 3\sin x$

а) $\varnothing$

в) $x = \pi k, k \in Z$

б) $x = \pm\arccos\frac{2}{3} + 2\pi k, k \in Z$

г) $x = \pi k, k \in Z$ и $x = \pm\arccos\frac{3}{2} + 2\pi n, n \in Z$

310. Корни уравнения $4\cos^2 x - 1 = 0$

а) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

в) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

б) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

г) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

__Задачи I уровня (по 0,1 балла).__ Решите уравнения

311. $\sin 2x = 2\cos^2 x$

312. $\sin 2x + \sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$

313. $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

314. $6\sin^2 x - \cos x - 4 = 0$

315. $\cos 2x + 10\sin x - 9 = 0$

316. $3\cos^2 x - 8\cos x + 5 = 0$

317. $\cos 2x + 10\cos^2 x + 5\sin x = 9$

318. $3\cos 4x + 2\cos^2 x + 1 = 0$

319. $\frac{2\sin x + 5\cos x}{3\sin x - 2\cos x} = 4$

320. $\sin^2 x - 3\sin x\cdot\cos x - 4\cos^2 x = 0$

321. $\sin^2 x - 4\sin x\cdot\cos x + 11\cos^2 x = 4$

322. $tg^2 x + tg\, x = 12$

323. $3\sin 2x + 4\cos 2x = 5$

324. $\cos x - \sin x = 1$

325. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$

326. $tg\, x + ctg\, x = 2,5$

__Задачи I уровня (по 0,1 балла).__ Метод вспомогательного аргумента основан на применении __теоремы__: уравнение $a\cdot\cos x + b\cdot\sin x = c$ с ненулевыми коэффициентами a, b, c такими, что $a^2 + b^2 \neq 1,$ равносильно уравнению $\cos(x - y) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, где $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos y,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin y$.

Решим методом вспомогательного аргумента уравнение $3\cos x - 4\sin x = 2$.

$$\frac{3\cos x}{\sqrt{3^2 + 4^2}} - \frac{4\sin x}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \quad \text{или} \quad \frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x = \frac{2}{5}.$$

Найдём острый угол, для которого $\frac{3}{5} = \cos y,\ \frac{4}{5} = \sin y$:

$$\arccos\frac{3}{5} = y = \arcsin\frac{4}{5}.$$

Теперь $cos\left(arccos\frac{3}{5}\right)\cdot cos\,x-sin\left(arcsin\frac{4}{5}\right)\cdot sin\,x=\frac{2}{5}$ или

$$cos\left(arccos\frac{3}{5}\right)\cdot cos\,x-sin\left(arccos\frac{3}{5}\right)\cdot sin\,x=\frac{2}{5}$$, что равносильно

$$cos\left(arccos\frac{3}{5}+x\right)=\frac{2}{5}.$$

Используем формальную запись решения тригонометрического уравнения: $arccos\frac{3}{5}+x=\pm arccos\left(\frac{2}{5}\right)+2\pi k,\,k\in Z.$

Ответ. $x=\pm arccos\left(\frac{2}{5}\right)-arccos\frac{3}{5}+2\pi k,\,k\in Z.$

Решите уравнения:

327. $2\cos x+\sin x=1$

328. $\cos x+2\sin x=1$

329. $5\cos 2x+12\sin 2x=4$

330. $12\cos x-5\sin x=3$

331. $8\cos x-15\sin x=6$

332. $15\cos x+8\sin x=7$

333. $24\sin x-7\cos x=5$

334. $7\sin 3x+24\cos 3x=-15$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Уравнение $a\cdot cos\ x + b\cdot sin\ x = c$ можно привести к однородному уравнению с понижением аргумента вдвое. Например, $3\cos x-4\sin x=2 \Leftrightarrow$

$$3\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)-4\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=2 \Leftrightarrow$$

$$3\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)-8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\cos^2\frac{x}{2}-8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-5\sin^2\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow \ldots$$

это однородное уравнение
относительно тригонометрических функций синус и косинус половинного аргумента

$$1-\frac{8\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}-\frac{5\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=0 \Leftrightarrow$$

$$1-8tg\frac{x}{2}-5tg^2\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow 5tg^2\frac{x}{2}+8tg\frac{x}{2}-1=0 \Leftrightarrow \ldots$$

это квадратное уравнение (с чётным вторым коэффициентом)
относительно тригонометрических функций тангенс половинного аргумента

$$tg\frac{x}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{21}}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=arctg\frac{-4\pm\sqrt{21}}{5}+\pi k,\,k\in Z$$

Ответ. $x=2arctg\frac{-4\pm\sqrt{21}}{5}+2\pi k,\,k\in Z$

Решите уравнения приведением к однородному уравнению с понижением аргумента вдвое:

335. $\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{3}=3$

336. $3\cos x+4\sin x=5$

337. $2\cos x+3\sin x=4$

338. $9\cos 3x-40\sin 3x=-6$

339. $12\cos x-35\sin x=2$

340. $6\cos x+7\sin x=8$

341. $21\sin x-20\cos x=1$

342. $5\sin(x+1)+6\cos(x+1)=7$

__Задачи I уровня (по 0,1 балла).__ Решите уравнения:

343. $\cos 5x+\sqrt{3}\sin 2x=\cos 9x$

344. $\sin x=\cos 3x$

345. $3+2\sin 3x\cdot\sin x=3\cos 2x$

346. $\sin 5x\cdot\cos 2x=\cos 6x\cdot\sin x$

347. $\sin^2 x+\sin^2 2x=\cos^2 3x+\cos^2 4x$

348. $\cos 2x=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$

349. $2\left(\sin 2x+\cos^2 x+\sin x-1\right)=3\cos x$

350. $\sec x=\operatorname{cosec}3x$

__Задачи I уровня (по 0,1 балла).__ Для тригонометрических уравнений часто используется замена:

$$y=\sin x\pm\cos x\ \Rightarrow\ y^2=1\pm 2\sin x\cdot\cos x\ \Leftrightarrow\ y^2-1=\pm\sin 2x\ .$$

Например, требуется решить уравнение:

$$3(\cos x+\sin x-1)=2\sin 2x$$

Вводим новую переменную $y=\sin x+\cos x\ \Rightarrow\ y^2-1=\sin 2x$, подставляем в исходное уравнение и получаем $3(y-1)=2\left(y^2-1\right)$ или $2y^2-3y+1=0$. Это алгебраическое уравнение имеет корни $y=1,\ \ y=\frac{1}{2}$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух тригонометрических уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=1\\ \sin x+\cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\end{array}\right.\ \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x=\frac{\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.\ \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z\\ x-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2\pi n,\ n\in Z\end{array}\right..$$

__Ответ__. $x_1=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2\pi n,\ \ x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ x_3=2\pi m;\ \ k,m,n\in Z,$

Ещё один способ приведения тригонометрического уравнения к алгебраическому относительно тангенса половинного аргумента даёт универсальная подстановка.

Решите уравнения:

351. $\cos x - \sin x = \cos x \cdot \sin x$

352. $\cos x + 2\sin x + tg\dfrac{x}{2} = 3$

353. $\sin 3x + 2\sin x = 1$

354. $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos x \cdot \sin x = 0$

355. $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{7}{16}$

356. $5 + cosec^2 3x = 7 ctg\, 3x$

357. $3\cos x + 4\sin x = 5\sin 5x.$

358. $\cos 3x \cdot \cos^3 x + \sin 3x \cdot \sin^3 x = \dfrac{1}{2}\cos 6x.$

359. $\sin^5 x - \cos^5 x = \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\sin x}$

360. $\sin 2x - \sin 4x = (\cos 2x + 1)\cos 3x.$

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Решите уравнения:

361. $\sqrt{3}(1 + \cos x) + \sin 2x = 0$

362. $\sqrt{3\sin x} + \sqrt{2}\cos x = 0$

363. $\cos x = |\sin x|$

364. $\sqrt{3\sin 2x} = \sqrt{-5\cos x \cdot ctg\, x}$

365. $\cos 3x + |\cos x| = \sin 2x$

366. $2\sin^2 x - |5\sin x| + 2 = 0$

367. $\sin 6x + \sin x = 2$

368. $\cos x \cdot \cos 4x = -1$

369. $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} = 1 + \cos x$

370. $\sin 5x - 2\cos 2x = 3.$

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Решение уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, принципиально ничем не отличается от решения алгебраических и трансцендентных уравнений: цепочка равносильных преобразований приводит к нужному значению аргумента (если таковое имеется).

Например, требуется решить уравнение $\arcsin 5x = arcctg\, 6x$ **.**

Арксинус определён на $[-1;\, 1]$, арккотангенс определен для любого значения аргумента.

Арксинус принимает значения на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, арккотангенс принимает значения на $(0\,;\pi)$, значит в силу равенства, задающего исходное уравнение, оно равносильно системе: $\begin{cases} 5x = \sin(arcctg\, 6x) \\ -\dfrac{\pi}{2} \le arcctg\, 6x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < arcctg\, 6x < \pi \\ -1 \le 5x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \sin(arcctg\, 6x) \\ 0 < arcctg\, 6x \le \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{1}{5} \le x \le \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$

задача 173 $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \dfrac{1}{\sqrt{1+36x^2}} \\ 0 \le x \le \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 \cdot \left(1+36x^2\right) = 1 \\ 0 \le x \le \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 \cdot 36x^4 + 25x^2 - 1 = 0 \\ 0 \le x \le \dfrac{1}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{5 \cdot 9} \\ 0 \le x \le \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5\sqrt{3}}$.

Ответ. $x = \dfrac{1}{5\sqrt{3}}$.

Решите уравнения:

371. $arccos\, x = arctg\, x$

372. $arcsin\, x = 2 arctg\, x$

373. $2\, arccos\, x + arcsin \dfrac{x}{2} = \pi$

374. $arcsin\, 2x + arcsin\, x = \dfrac{\pi}{3}$

375. $2\, arcsin\, x = arccos\, 3x$

376. $arctg(x-1) = 3\, arccos(x+1)$

377. $arccos\, x - arcsin\, x = \dfrac{\pi}{6}$

378. $arcsin \dfrac{x}{2} + arccos\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

379. $arcsin\, x \cdot arccos\, x = -1$.

380. $2\, arcsin\, x + arccos\, 2x = \dfrac{6\pi}{7}$

381. $sin(3\, arccos\, x) = \dfrac{1}{2}$

382. $arccos^2 x + arcsin^2 x = \dfrac{5\pi^2}{36}$

383. $arctg \dfrac{1}{x-1} - arctg \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{\pi}{12}$.

384. $arccos\left(\dfrac{2\, arccos\, x}{\pi}\right) = arcsin\left(\dfrac{2\, arcsin\, x}{\pi}\right)$

385. $2\, arccos\, x \cdot arcsin\, x = 3\, arccos \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot arcsin \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Задачи III уровня (по 0,2 балла). Решите уравнения:

386. $\dfrac{cos\, 3x}{cos\, x} \cdot \left(2 cos^2 x - sin^2 x \cdot cos\, 2x - 1\right) = 1$

387. $\dfrac{sin\, 3x - cos\, x}{cos\, 3x - sin\, 5x} = 1$

388. $cos^2 x + cos^2 2x = ctg\, 3x + 1$

389. $arcsin(cos\, x) = cos(2\, arccos\, x)$

390. $arcsin(sin\, x) = x^2 - 10x$

391. $\sqrt{2}(\sin x-\cos x)\cos y=3-\cos 2y$

392. $\left|\arcsin(\cos 4)-\dfrac{\pi x}{2}\right|=4$ на множестве Z

393.а. $\begin{cases}\sin x+\sin y=1\\ x+y=\pi\end{cases}$

393.б. $\begin{cases}\cos^2 x+\cos^2 y=0{,}5\\ 3x=2\pi+3y\end{cases}$

394 а. $\begin{cases}\sin x+\cos y=1\\ \sin^2 x-\cos^2 y=1\end{cases}$

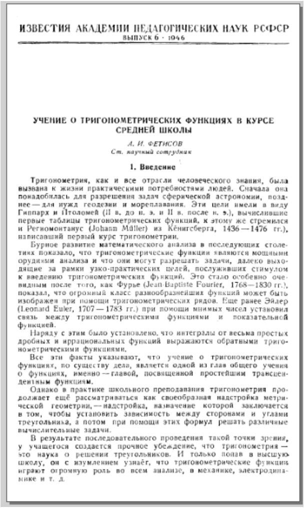
394.б. $\begin{cases}\cos 2x+2\cos 2y=2\\ \sin x+2\sin y=1\end{cases}$

395.а. $\begin{cases}\cos x+\cos y=1\\ \sin x\cdot\sin y=\dfrac{3}{4}\end{cases}$

395.б. $\begin{cases}\sin x\cdot\cos y=\dfrac{3}{4}\\ \cos x\cdot\sin y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

396. Творческое задание (1 балл). Проблемы преподавания тригонометрии в общеобразовательной школе неоднократно были предметом обсуждения педагогического сообщества России. Так, в Известиях Академии педагогических наук РСФСР (1946 г.) была опубликована статья старшего научного сотрудника А.И. Фетисова «Учение о тригонометрических функциях в курсе средней школы». Автор подходит к учению о тригонометрических функциях как к одной из глав общего учения о функциях, именно – главе, посвящённой простейшим трансцендентным функциям. «Однако в практике школьного преподавания, – отмечает автор, – тригонометрия продолжает ещё рассматриваться как своеобразная надстройка метрической геометрии, – надстройка, назначение которой заключается в том, чтобы установить зависимость между сторонами и углами треугольника, а потом при помощи этих формул решать различные вычислительные задачи.

В результате последовательного проведения такой точки зрения, у учащегося создаётся прочное убеждение, что тригонометрия – это наука о решении треугольников. И только попав в высшую школу, он с изумлением узнаёт, что тригонометрические функции играют огромную роль во всём анализе, в механике, электродинамике и т.д.». После детального логико-дидактического анализа содержания школьного курса тригонометрии, автор формулирует основную цель изучения тригонометрии в курсе средней школы, намечает содержание раздела «Тригонометрия» и предлагает конспективный курс тригонометрии в том виде, в котором он излагался автором статьи в течение ряда лет в средней школе:



ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ВЫПУСК 6 · 1946

УЧЕНИЕ О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ В КУРСЕ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

А. И. ФЕТИСОВ
Ст. научный сотрудник

1. Введение

Тригонометрия, как и все отрасли человеческого знания, была вызвана к жизни практическими потребностями людей. Сначала она понадобилась для разрешения задач сферической астрономии, позднее — для нужд геодезии и мореплавания. Эти цели имели в виду Гиппарх и Птоломей (II в. до н. э. и II в. после н. э.), вычислившие первые таблицы тригонометрических функций, к этому же стремился и Региомонтанус (Johann Müller) из Кёнигсберга, 1436 — 1476 гг.), написавший первый курс тригонометрии.

Бурное развитие математического анализа в последующих столетиях показало, что тригонометрические функции являются мощными орудиями анализа и что они могут разрешать задачи, далеко выходящие за рамки узко-практических целей, послуживших стимулом к введению тригонометрических функций. Это стало особенно очевидным после того, как Фурье (Jean-Baptiste Fourier, 1768—1830 гг.), показал, что огромный класс разнообразнейших функций может быть изображен при помощи тригонометрических рядов. Еще ранее Эйлер (Leonard Euler, 1707 — 1783 гг.) при помощи мнимых чисел установил связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией.

Наряду с этим было установлено, что интегралы от весьма простых дробных и иррациональных функций выражаются обратными тригонометрическими функциями.

Все эти факты указывают, что учение о тригонометрических функциях, по существу дела, является одной из глав общего учения о функциях, именно — главой, посвященной простейшим трансцендентным функциям.

Однако в практике школьного преподавания тригонометрия продолжает ещё рассматриваться как своеобразная надстройка метрической геометрии, — надстройка, назначение которой заключается в том, чтобы установить зависимость между сторонами и углами треугольника, а потом при помощи этих формул решать различные вычислительные задачи.

В результате последовательного проведения такой точки зрения, у учащегося создается прочное убеждение, что тригонометрия — это наука о решении треугольников. И только попав в высшую школу, он с изумлением узнаёт, что тригонометрические функции играют огромную роль во всем анализе, в механике, электродинамике и т. д.

«Как и всякий другой предмет, изучаемый в средней школе, тригонометрия должна разрешать как теоретические, так и практические задачи. В области теоретической учащиеся должны получить, во-первых, все необходимые сведения для прохождения курса высшей школы, а, во-вторых, всё то, что нужно для понимания других предметов и для построения правильного научного мировоззрения. В области же практических приложений науки он должен получить те сведения, которые могут ему быть полезны при разрешении задач, с которыми он может встретиться в жизни.

Исходя из этих положений, можно утверждать, что в преподавании тригонометрии нашими целями должно быть:

1) В теоретической тригонометрии: возможно строгое и полное изучение тригонометрических функций в их взаимной связи со смежными разделами математики, при условии чёткого усвоения учащимися всех основных формул и операций.

2) В области практической: научить учащихся применять свойства тригонометрических функций к разрешению задач геометрии (решение треугольников), геодезии, механики, физики (колебательные движения), астрономии и т.д.

<…>

Конечно, предлагаемый курс ни в какой мере не претендует на единственно правильное решение поставленной проблемы и надо определённо думать, что возможны другие, более совершенные варианты. Но, во всяком случае, по сравнению с обычным изложение, он обладает следующими неоспоримыми преимуществами:

1. С первых же шагов устанавливается непосредственная связь тригонометрических функций с комплексными числами.

2. Все формулы получаются сразу для углов любой величины: так что никаких дальнейших обобщений, связанных с изменением величины угла, не требуется.

3. Изучение таких понятий, как «вектор», «оператор», поможет учащемуся в дальнейшем легче войти в круг идей современной математики, так как эти понятия играют большую роль в различных разделах алгебры и анализа.

4. Большая общность идей позволяет в сильной степени облегчить доказательство многих формул (формулы функций от суммы, функций от кратного и дробного аргумента и т.д.), что освобождает время для изучения других важных свойств тригонометрических функций, обычно не излагаемых в школе».

Разработайте на основе конспективного курса тригонометрии Фетисова А.И. содержание одноимённого элективного курса для учащихся профильных физико-математических классов.

397. Творческое задание (1 балл). Обобщите решение любого уравнения из №№ 361-395.

398. Творческое задание (1 балл). Разработайте алгоритмическое предписание по решению тригонометрических уравнений графическим методом. Приведите примеры применения алгоритмического предписания к решению тригонометрических уравнений из заданий № 311-392. Опишите сферу применимости графического метода к решению тригонометрических уравнений.

399. Творческое задание (1 балл). Разработайте алгоритмическое предписание по решению тригонометрических уравнений с использованием модели «Числовая окружность». Приведите примеры применения алгоритмического предписания к решению тригонометрических уравнений из заданий № 311-392. Опишите сферу применимости модели «Числовая окружность» к решению тригонометрических уравнений.

400. Творческое задание (1 балл). Разработайте в среде электронных таблиц компьютерные модели ряда задач №№ 311-360 данной темы, а также генераторы этих задач.

V. Тригонометрические неравенства

Тригонометрическими называют неравенства, содержащие тригонометрические функции. Различают алгебраические неравенства относительно тригонометрических функций и собственно тригонометрические неравенства.

Алгебраическое неравенства относительно тригонометрических функций решают методом замены переменных и решением соответствующего алгебраического неравенства, затем обратной заменой получают систему (совокупность) элементарных тригонометрических неравенств.

Собственно тригонометрические неравенства путём тождественных тригонометрических преобразований сводят или к алгебраическому неравенству относительно тригонометрических функций, или к элементарному тригонометрическому неравенству.

В любом случае необходимо уметь решать элементарные тригонометрический неравенства.

Неравенство $\sin x < a$

при $a \le -1$ решений не имеет;

при $a > 1$ решением является любое действительное число;

при $a = 1$ принимает вид $\sin x < 1$ и имеет решениями все $x \ne \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$;

при $a = 0$ принимает вид $\sin x < 0$ и имеет решения

$$x \in (\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k),\ k \in Z;$$

при $-1 < a < 1$ неравенство имеет решения

$$x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi k;\ \arcsin a + 2\pi k),\ k \in Z.$$

Вообще, для того, чтобы найти все решения неравенства при $-1 < a < 1$ достаточно найти все решения этого неравенства на любом отрезке длины 2π и к каждому решению прибавить кратный период $2\pi k,\ \ k \in Z$.

Неравенство $\sin x > a$

при $a \ge 1$ решений не имеет;

при $a < -1$ решением является любое действительное число;

при $a = -1$ принимает вид $\sin x > -1$ и имеет решениями все

$$x \ne -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;$$

при $a = 0$ принимает вид $\sin x > 0$ и имеет решения

$$x \in (2\pi k;\ \pi + 2\pi k),\ k \in Z;$$

при $-1 < a < 1$ неравенство имеет решения

$$x \in (\arcsin a + 2\pi k;\ \pi - \arcsin a + 2\pi k),\ k \in Z.$$

Вообще, для того, чтобы найти все решения неравенства при $-1 < a < 1$ достаточно найти все решения этого неравенства на любом отрезке длины 2π и к каждому решению прибавить кратный период $2\pi k,\ \ k \in Z$.

Неравенство $\cos x < a$

при $a \le -1$ решений не имеет;

при $a > 1$ решением является любое действительное число;

при $a = 1$ принимает вид $\cos x < 1$ и имеет решениями все $x \ne 2\pi k,\ k \in Z$;

при $a = 0$ принимает вид $\cos x < 0$ и имеет решения

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z;$$

при $-1 < a < 1$ неравенство имеет решения

$$x \in (\arccos a + 2\pi k;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi k),\ k \in Z.$$

Вообще, для того, чтобы найти все решения неравенства при $-1 < a < 1$ достаточно найти все решения этого неравенства на любом отрезке длины 2π и к каждому решению прибавить кратный период $2\pi k,\ \ k \in Z$.

Неравенство $\cos x > a$

при $a \ge 1$ решений не имеет;

при $a < -1$ решением является любое действительное число;

при $a = 1$ принимает вид $\cos x > -1$ и имеет решениями все

$$x \ne \pi + 2\pi k,\ k \in Z;$$

при $a = 0$ принимает вид $\cos x > 0$ и имеет решения

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z;$$

при $-1 < a < 1$ неравенство имеет решения

$$x \in (-\arccos a + 2\pi k;\ \arccos a + 2\pi k),\ k \in Z.$$

Вообще, для того, чтобы найти все решения неравенства при $-1 < a < 1$ достаточно найти все решения этого неравенства на любом отрезке длины 2π и к каждому решению прибавить кратный период $2\pi k,\ \ k \in Z$.

Неравенства $tg\, x < a$, $tg\, x > a$ и $ctg\, x < a$, $ctg\, x > a$.

Для того, чтобы найти все решения этих неравенств достаточно найти все решения на любом отрезке длины π и к каждому решению прибавить кратный период $\pi k,\ \ k \in Z$:

$tg\, x < a$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ arctg\, a + \pi k\right),\ k \in Z$
$tg\, x > a$	$x \in \left(arctg\, a + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$
$ctg\, x < a$	$x \in (arcctg\, a + \pi k;\ \pi + \pi k),\ k \in Z$
$ctg\, x > a$	$x \in (\pi k;\ arcctg\, a + \pi k),\ k \in Z$

Поскольку аркфункции являются монотонными, то можно определить ход решения неравенств, левая и правая части которых представлены одноимёнными аркфункциями с различными аргументами, воспользовавшись следующими теоремами:

$$arcsin\, f(x) < arcsin\, g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) \geq -1 \\ g(x) \leq 1 \end{cases}$$

$$arccos\, f(x) < arccos\, g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) \leq 1 \\ g(x) \geq -1 \end{cases}$$

$$arctg\, f(x) < arctg\, g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < g(x)$$

$$arcctg\, f(x) < arcctg\, g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > g(x)$$

Например, решение неравенства $3\,arcsin\, 2x < 1$ представляет собой цепочку следующих равносильных неравенств:

$$arcsin\, 2x < \frac{1}{3}$$

$$arcsin\, 2x < arcsin\left(sin\frac{1}{3}\right)$$

$$-1 \leq 2x < sin\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{sin\frac{1}{3}}{2}$$

Ответ. $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} sin\frac{1}{3}\right)$

Тестовые задания (по 0,05 балла).

401. Решение неравенства $cos\, 3x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

а) $x \in \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right),\ k \in Z$

в) $x \in \left(-\frac{5\pi}{18} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{18} + 2\pi k\right),\ k \in Z$

б) $x \in \left(-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k;\ \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k\right),\ k \in Z$

г) $x \in \left(-\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k;\ \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k\right),\ k \in Z$

402. Решение неравенства $2\,sin^2 x < 0{,}5$

а) $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi k;\ \frac{\pi}{6} + \pi k\right),\ k \in Z$

в) $x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + \pi k;\ -\frac{\pi}{6} + \pi k\right),\ k \in Z$

б) $x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right),\ k \in Z$

г) $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right),\ k \in Z$

403. Решение неравенства $sin\,3x \cdot cos\,x + sin\,x \cdot cos\,3x > 0{,}3$

а) $x \in \left(arcsin0{,}3 + 2\pi k;\ \pi - arcsin0{,}3 + 2\pi k\right),\ k \in Z$

б) $x \in \left(-arcsin0{,}3 + 2\pi k;\ arcsin0{,}3 + 2\pi k\right),\ k \in Z$

в) $x \in \left(\dfrac{arcsin0{,}3}{4} + \dfrac{\pi}{2}k;\ \dfrac{\pi - arcsin0{,}3}{4} + \dfrac{\pi}{2}k\right),\ k \in Z$

г) $x \in \left(-\dfrac{arcsin0{,}3}{4} + \dfrac{\pi}{2}k;\ \dfrac{arcsin0{,}3}{4} + \dfrac{\pi}{2}k\right),\ k \in Z$

404. Решение неравенства $sin\,x + cos\,x > 0$

а) $x \in \left(2\pi k;\ \pi + 2\pi k\right),\ k \in Z$

в) $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\right),\ k \in Z$

б) $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k\right),\ k \in Z$

г) $x \in \left(-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k\right),\ k \in Z$

405. Решение неравенства $tg\left(2x - \dfrac{\pi}{5}\right) > 2$

а) $x \in \left(\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{arctg\,2}{2} + \dfrac{\pi}{2}k;\ \dfrac{7\pi}{20} + \dfrac{\pi}{2}k\right),\ k \in Z$

б) $x \in \left(\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{arctg\,2}{2} + \dfrac{\pi}{2}k;\ \dfrac{7\pi}{20} + \dfrac{\pi}{2}k\right),\ k \in Z$

в) $x \in \left(\dfrac{\pi}{5} + arctg\,2 + \pi k;\ \dfrac{7\pi}{10} + \pi k\right),\ k \in Z$

г) $x \in \left(arctg\,2 + \pi k;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$

406. Решение неравенства $arcctg\left(8x^2 - 6x - 1\right) \le arcctg\left(4x^2 - x + 8\right)$

а) $x \in \left(-\infty; -1\right]$

в) $x \in \left(-\infty; -1\right] \cup \left[\dfrac{9}{4}; +\infty\right)$

б) $x \in \left(-\infty; \dfrac{9}{4}\right]$

г) $x \in \left[-1; \dfrac{9}{4}\right]$

407. Решение неравенства $arccos\left(x^2 - 3\right) \le arccos\left(x + 3\right)$

а) $\varnothing$

б) $x \in \{-2\}$

в) $x \in [-2; 2]$

г) $x \in [-2; 3]$

408. Решение неравенства $arcsin\,x > arccos\,x$

а) $x \in \left[-1; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

б) $x \in [-1; 0)$

в) $x \in (0; 1]$

г) $x \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$

409. Решение неравенства $-2 \le tg\, x < 1$

а) $x \in \left[-arctg\,2 + \pi k;\ \frac{\pi}{4} + \pi k\right),\ k \in Z$ в) $x \in \left[-arctg\,2 + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$

б) $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k;\ arctg\,2 + \pi k\right],\ k \in Z$ г) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ arctg\,2 + \pi k\right],\ k \in Z$

410. Решение неравенства $cos\frac{x}{2} \cdot sin\frac{x}{2} > -\frac{1}{4}$

а) $x \in \left(-\frac{5\pi}{12} + \pi k;\ -\frac{\pi}{12} + \pi k\right),\ k \in Z$ в) $x \in \left(-\frac{\pi}{12} + \pi k;\ \frac{5\pi}{12} + \pi k\right),\ k \in Z$

б) $x \in \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right),\ k \in Z$ г) $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right),\ k \in Z$

__Задачи I уровня (по 0,1 балла).__ Решите неравенства

411. $\left|tg\frac{x+\pi}{3}\right| \ge 1$

412. $cos\,2x - \left(2 + \sqrt{2}\right)sin\,x \le 1 + \sqrt{2}$

413. $2\,sin^3\,2x + 3\,sin\,2x \le tg\,x + ctg\,x$

414. $\frac{1 - cos\,4x}{1 + cos\,4x} \ge 7 - 6\sqrt{\frac{1}{cos^2\,2x} - 1}$

415. $|sin\,x| + |cos\,x| \le \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

416. $\frac{15}{1 + sin\,x} < 11 - 2\,sin\,x$

417. $2\,sin^2\,x - sin\,x + sin\,3x < 1$

418. $sin\,4x + cos\,4x \cdot ctg\,2x > 1$

419. $2\,sin^2\,3x + sin^2\,6x < 2$

420. $sin\,2x - \sqrt{3}\,cos\,2x > \sqrt{2}$

421. $\frac{cos^2\,2x}{cos^2\,x} \ge 3tg\,x$

422. $sin\,x \cdot ctg\frac{x}{2} \ge 2\pi$

423. $sin\,x + \sqrt{1 - cos^2\,x} \le \frac{\pi}{2}$

424. $sin^2\left(\sqrt{tg\,x}\right) + cos^2\left(\sqrt{tg\,x}\right) > 2 - x$

425. $sin^4\,x + cos^4\,x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$

426. $sin^3\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot cos^2\,3x < 0$

__Задачи I уровня (по 0,1 балла).__ Кратность нуля $x = x_0$ тригонометрической функции $f(x)$, равна числу множителей, обращающихся в нуль в точке x_0.

При решении тригонометрических неравенств вида $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$, где $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$ – 2π-периодическая функция, методом интервалов приходится иметь дело с бесконечной системой интервалов знакопостоянства функции $f(x)$. Чтобы избежать эту трудность, мы будем пользоваться изображением этих интервалов на окружности. При этом условимся изображать интервалы дугами вне окружности, если функция положительна, внутри окружности, если функция отрицательна. Если точка $x = x_0$ является нулём кратности k 2π-периодической функции $f(x)$, то изображение этой точки на окружности будем обозначать через $M^k(x_0)$, в отличие от $M(x_0)$ – если точка не является кратным нулём.

Теорема. При прохождении аргумента x функции $f(x)$ через некратный нуль или нуль нечетной кратности функция меняет знак, а четной – нет.

Например, решим неравенство $cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\cdot cos\,2x\cdot sin\,4x\geq 0$.

1 шаг. Выясним, является ли функция $f(x)=cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\cdot cos\,2x\cdot sin\,4x$ 2π-периодической.

$f_1(x)=cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$ имеет период 2π;

$f_2(x)=cos\,2x$ имеет период π;

$f_3(x)=sin\,4x$ имеет период $\pi/2$;

Следовательно функция $f(x)$ имеет период 2π, достаточно найти все решения этого неравенства на любом отрезке длины 2π и к каждому решению прибавить кратный период $2\pi k,\quad k\in Z$; для поиска решения можно использовать числовую окружность.

2 шаг. Найдём нули функции $f(x)=cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\cdot cos\,2x\cdot sin\,4x$ на интервале [0; 2π] и определим из кратность:

$f_1(x)=cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$	$f_2(x)=cos\,2x$	$f_3(x)=sin\,4x$
$x=\frac{\pi}{2}+\pi m$	$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$	$4x=\pi n$ $x=\frac{\pi n}{4}$

				$n=0$	$x=0$
$m=0$	$x=\frac{\pi}{4}$	$k=0$	$x=\frac{\pi}{4}$	$n=1$	$x=\frac{\pi}{4}$
				$n=2$	$x=\frac{\pi}{2}$
		$k=1$	$x=\frac{3\pi}{4}$	$n=3$	$x=\frac{3\pi}{4}$
				$n=4$	$x=\pi$
$m=1$	$x=\frac{5\pi}{4}$	$k=2$	$x=\frac{5\pi}{4}$	$n=5$	$x=\frac{5\pi}{4}$
				$n=6$	$x=\frac{3\pi}{2}$
		$k=3$	$x=\frac{7\pi}{4}$	$n=7$	$x=\frac{7\pi}{4}$
				$n=8$	$x=2\pi$

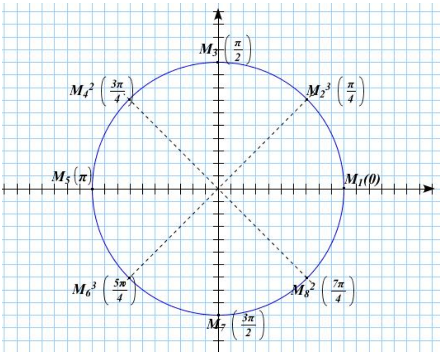


Рисунок 15. Нули функции на числовой окружности

3 шаг. Построим модель «Числовая окружность» и отметим на ней нули функции.

4 шаг. Определим знак функции $f(x)$ в интервале [0; π/4] методом пробной точки: выберем достаточно малый угол, например, π/100.

Тогда угол $\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$ расположен в третьей четверти

$$\left(\begin{array}{l}\frac{\pi}{100}-\frac{3\pi\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{-74\pi}{100}=-\frac{37\pi}{50}\\ -\frac{50\pi}{50}=-\pi<-\frac{37\pi}{50}<-\frac{\pi}{2}=-\frac{25\pi}{50}\end{array}\right),$$

а углы $2x$ и $4x$ – в первой четверти.

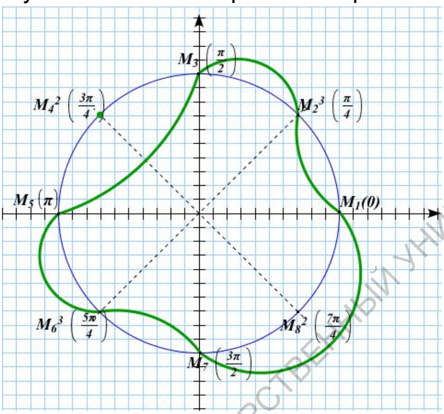


Рисунок 16. Модель решения неравенства $cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\cdot cos\,2x\cdot sin\,4x\geq 0$ на промежутке [0; 2π]

Следовательно,

$$f_1(x)=cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)<0,$$

$$f_2(x)=cos\,2x>0,$$

$$f_3(x)=sin\,4x>0,$$

и $f(x)$ при π/100 и на всём отрезке [0; π/4] отрицательна.

5 шаг. Определим знаки на других интервалах, пользуясь теоремой (отметим дугами).

В результате получим указанное на рис. 16 распределение знаков.

Выберем те интервалы, на которых данное неравенство выполняется:

[π/4; π/2]$\cup${3π/4}$\cup$[π; 5π/4]$\cup$[3π/2; 2π].

6 шаг. К каждому решению прибавляем кратный период $2\pi k$, $k\in Z$ и записываем ответ.

Ответ.

$$x\in\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]\cup\left\{\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right\}\cup\left[\pi+2\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi k\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2}+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k\right],\ k\in Z$$

Решите неравенства

427. $cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\cdot cos\,2x\cdot sin\,4x\leq 0$

428. $cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\cdot cos\,4x\cdot sin\,2x\leq 0$

429. $cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\,3x\cdot sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leq 0$

430. $cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leq 0$

431. $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)>0$

432. $\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin x>0$

433. $\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin^2 x\le 0$

434. $\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin x<0$

435. $\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin x\le 0$

436. $\cos^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin x>0$

437. $\cos 2x\cdot\sin 3x>0$

438. $\cos^3 2x\cdot\sin 3x<0$

439. $\sin 2x-\sin 3x>0$

440. $tg\frac{x}{2}-tg\frac{x}{3}>0$

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла).*</u> Сравните с нулём:

441. $x^3+x+1-\sin x$

442. $\sin^4 x-\sin^2 3x+\sin x-3$

443. $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\sin 4x-2$

444. $2\cos(\sin x)-1$

445. $\log_\pi\left(\cos^2 x\right)-\frac{x^4+1}{\pi}$

446. $4x^2-4\sin\pi x-4x+5$

447. $\sin x\cdot\cos 4x-1$

448. $\cos x+\frac{x^2}{2}-1$

449. $\left|x^3-\sin x\right|-\left|2x^3+\sin x\right|$

450. $\sqrt{\sin x}-\sqrt{\sin x+|x|}$

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла).*</u> Решите неравенства:

451. $\arcsin\frac{x+2}{5}\le\arccos\frac{3x+1}{5}$

452. $\arccos^2 x-3\arccos x+2\ge 0$

453. $\arccos x+\arccos x\sqrt{2}+\arccos x\sqrt{3}\le\frac{3\pi}{4}$

454. (а) $2\arcsin^2 x<3\arcsin x$ (б) $\arccos^2 x>2\arccos x$

455. (а) $64\arcsin^3 x>\arcsin x$ (б) $27\arccos^3 x<\arccos x$

456. $arctg^2 x+4\,arctg\,x\ge 5$

457. $tg^2(\arcsin x)>1$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Решите неравенства:

458. (а) $[\sin x] < [\cos x]$ *(б)* $[\sin x] \ge [\cos x]$

459. (а) $[\cos x] \ge [x^2+1]$ *(б)* $[\cos x] < [x^2+1]$

460. (а) $[\sin x]\cdot\{\sin x\} \ge \sin x$ *(б)* $[\sin x]\cdot\{\sin x\} < \sin x$

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Докажите следующие утверждения:

461. Для любых $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$, $0 < z < \frac{\pi}{2}$ справедливо неравенство: $\sin(x+y+z) < \sin x + \sin y + \sin z$.

462. Для любого $0 < x < \pi$, справедливо неравенство: $ctg\frac{x}{2} \ge 1 + ctg\, x$.

463. Если $tg\, x = n \cdot tg\, y$, то $tg^2(x-y) \le \frac{(n-1)^2}{4n}$.

464. Если $\frac{1}{\cos x \cdot \cos y} + tg\, x \cdot tg\, y = tg\, z$, то $\cos 2z \le 0$.

465. Если $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$, то $tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \ge 2$.

466. Если $x + y + z = \pi,$ то $\sin^2 z \ge \sin 2x \cdot \sin 2y$.

467. Для любых положительных x и y: $x + y = \frac{\pi}{3}$, справедливо неравенство: $tg\, x \cdot tg\, y < \sqrt{3}$.

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Докажите следующие утверждения:

468. $\sin(x+y)\cdot\sin(x-y) \le \sin^2 x$

469. $(\sin^2 x + 1)(\cos^2 x + 1) \ge 9\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

470. $\sin^4 x + \cos^4 x \le 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$

471. $\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos z + \sin z \cdot \cos x \le \frac{3}{2}$

472. $\cos x + \cos y + 2\cos(x+y) \ge -\frac{9}{4}$

473. $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \ge 4$, $\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} \ge 8$, $\frac{1}{\sin^6 x} + \frac{1}{\cos^6 x} \ge 16$

474. $tg^2 x + ctg^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \ge 6$

475. $\dfrac{\cos^2 x+\cos^2 y}{\sin^2 x+\sin^2 y} \le \dfrac{1}{2}\left(ctg^2 x+ctg^2 y\right)$

476. $4\sin 3x+5 \ge 4\cos 2x+5\sin x$

Задачи II уровня (по 0,15 балла). Найдите:

477. **решение** неравенства с параметром:

$$\arccos(3ax+1) \le \arccos(2x+3a-1);$$

478. **что больше:** $ctg\dfrac{x}{2}$ или $1+ctg\,x$ $(0 < x < \pi/2)$;

479. **что больше:** $tg\,2x$ или $2tg\,x$ $(0 < x < \pi/2,\ x \ne \pi/4)$;

480. **множество значений функции** $f(x)=\sin x-\cos x$;

481. **множество значений функции** $f(x)=\sin x+\cos x$ на промежутках $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, $\left[\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$; результат обобщите.

482. **в каком отношении** находятся значения $\sin 2x,\ \sin 2y,\ \sin 2z$, если $x < y < z$ и $x+y+z=\pi,\ 0 < x < \pi/2,\ 0 < y < \pi/2,\ 0 < z < \pi/2$;

483. **что больше:** $\sin x+\sin y+\sin z$ или $\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$ $(x+y+z=\pi,\ 0 < x < \pi/2,\ 0 < y < \pi/2,\ 0 < z < \pi/2)$;

484. **в каком отношении** находятся значения x и y $(0 < x < \pi/2,\ 0 < y < \pi/2)$, если $\sin(x+y)=2\sin x$;

485. **что больше:** $[\sin x+\cos x]$ или 1.

Задачи III уровня (по 0,2 балла). Решите задачи.

486. При каком значении x, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, произведение $\sin x\cdot\cos x$ достигает наибольшего значения?

487. При каких значениях x, y, z произведение $tg\,x\cdot tg\,y\cdot tg\,z$ достигает наибольшего значения, если $x, y, z,$ из промежутка $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ и $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$?

488. Обобщите результаты задания *473*.

489. Существует ли треугольник, в котором синус одного из углов больше суммы синусов двух других углов?

490. Доказать, что неравенство $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{tg\,3x}{tg\,x} \le 3$ не выполняется ни при каком значении x.

491. Решите неравенство $\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x > 0$.

492. Доказать, что из равенства $\sin(x+y)-\cos(x-y)+2=0$ следует $\sin(x+y)+\cos(x-y)=0$.

493. Исследуйте свойства функции $|y| = \sin x$ и постройте её график.

494. Исследуйте свойства функции $y = \dfrac{\sin x + |x| \cdot \sin x}{2}$ и постройте её график.

495. Исследуйте свойства функции $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ и постройте её график.

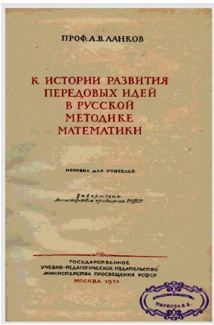
__496. Творческое задание (1 балл).__ Некоторые тригонометрические неравенства, например, неравенство $\dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{\sin y}{y}$ для любого $0 < x < y < \pi/2$, доказываются с помощью производной. Опишите этот метод доказательства; приведите не менее 10 примеров.

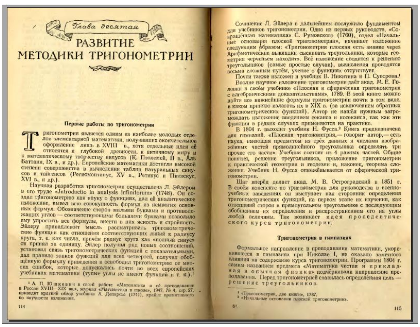
__497. Творческое задание (1 балл).__ Опишите графический метод решения тригонометрических неравенств; приведите не менее 10 примеров. Разработайте в среде электронных таблиц компьютерные модели ряда задач №№ 411-460 данной темы, а также генераторы этих задач.

__498. Творческое задание (1 балл).__ Задачи на доказательство условных неравенств чаще всего связаны с углами треугольника. Найдите и решите не менее 10 таких задач.

__499. Творческое задание (1 балл).__ Необходимость в классификации тригонометрических уравнений, неравенств и систем вызывается невозможностью найти общий метод решения тригонометрических уравнений, неравенств и систем. Проведите классификацию систем тригонометрических неравенств с двумя неизвестными. Опишите аналитический метод решения системы тригонометрических неравенств с двумя неизвестными. Приведите не менее 10 примеров решения различных типов систем тригонометрических неравенств с двумя неизвестными.

__500. Творческое задание (1 балл).__ Охарактеризуйте становление и развитие в России тригонометрии как учебной дисциплины. С именами каких учёных связан этот процесс? Проведите сравнительный анализ школьных учебников, посвящённых тригонометрии. Какие методические проблемы преподавания тригонометрии поднимали педагоги-математики на различных этапах развития школьного математического образования?





ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Контрольная работа

Вариант 1

1. Постройте график функции: $y = \left| 3\sin(\pi + \frac{x}{3}) \right| - 1.$
2. Вычислите:

а) $\sin x, tgx, ctgx$, если $\cos x = -0{,}6$ и $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$;

б) $arctg\left(-tg\frac{13\pi}{8}\right) + arcctg\left(ctg\left(-\frac{19\pi}{8}\right)\right)$.

3. Упростите:

а) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}$; б) $\sin(\arccos x + \arcsin y)$.

4. Решите уравнения:

а) $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 5$; б) $\sin x + 7\cos x = 5$;

в) $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$.

5. Решите неравенство: $\sin 4x + \cos 4x ctg 2x > 1$.

Вариант 2

1. Постройте график функции: $y = \dfrac{\cos\left|\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right|}{3} + 2$.
2. Вычислить:

а) $\cos x, tgx, ctgx$, если $\sin x = -\frac{12}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$;

б) $\arcsin\left(\sin\frac{33\pi}{7}\right) + \arccos\left(\cos\frac{46\pi}{7}\right)$.

3. Упростите: а) $\dfrac{\sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha - 4}$; б) $tg(arctgx + arctgy)$.
4. Решите уравнение:

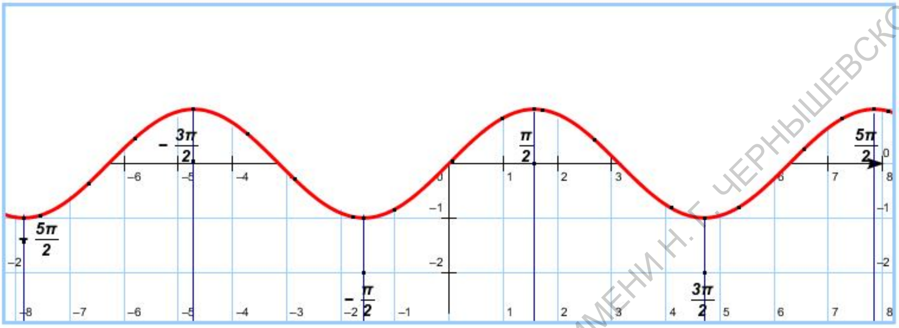
а) $5\sin x - 12\cos x = -13\sin 3x$; б) $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$;

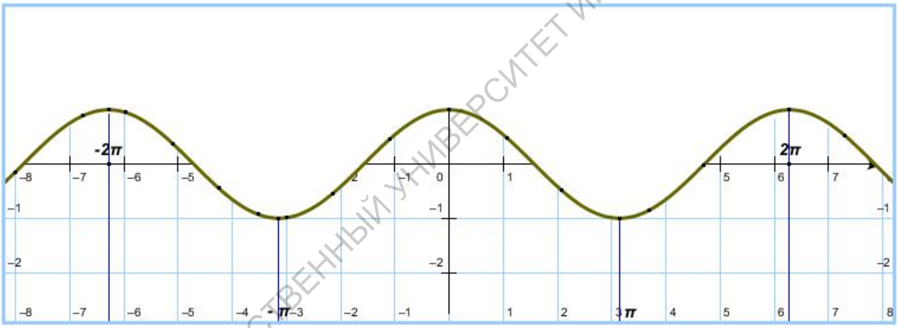
в) $5\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 2$.

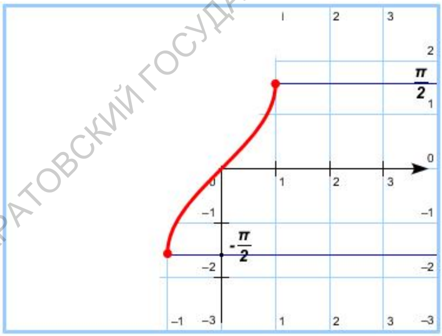
5. Решите неравенство: $\dfrac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geq 3tgx$.

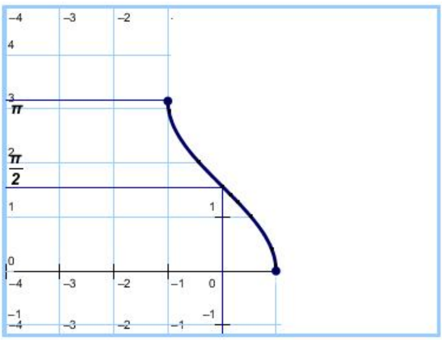
Приложение 2

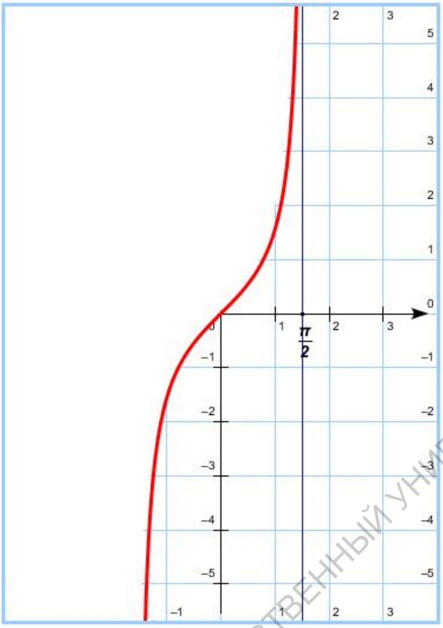
Шаблоны для вычерчивания графиков тригонометрических функций

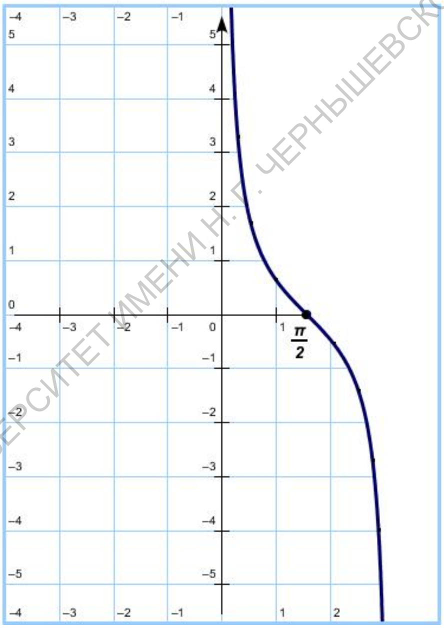




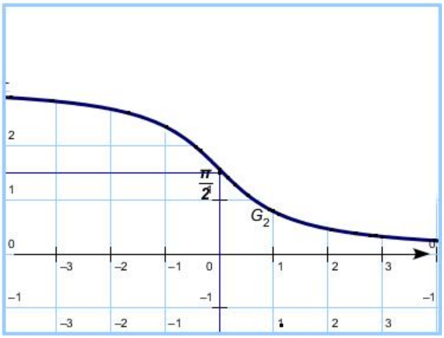





$\frac{\pi}{2}$


$\frac{\pi}{2}$


$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$


$\frac{\pi}{2}$
G_2

Приложение 3

Некоторые значения тригонометрических функций

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	0	1	0	–
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	0
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	–

Приложение 4

Таблица тригонометрических функций острых углов

(заготовка для выполнения лабораторно-практической работы)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,29	36°				
2°	0,0349	0,9994	0,0349		37°				
3°	0,0523	0,9986			38°				
4°	0,0698				39°				
5°					40°				
6°					41°				
7°					42°				
8°					43°				
9°					44°				
10°					45°				
11°					46°				
12°					47°				
13°					48°				
14°					49°				
15°					50°				
16°					51°				
17°					52°				
18°					53°				
19°					54°				
20°					55°				
21°					56°				
22°					57°				
23°					58°				
24°					59°				
25°					60°				
26°					61°				
27°					62°				
28°					63°				
29°					64°				
30°					65°				
31°					66°				
32°					67°				
33°					68°				
34°					69°				
35°					70°				

Приложение 5

Проверочная работа по теме «Решение тригонометрических неравенств»

(раздаточный материал)

Вариант 1

1. $\sin 2x \cdot \sin 3x - \cos 2x \cdot \cos 3x > \sin 10x$
2. $3\sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x < \frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \geq \frac{|ctg\, x - 1| + 1}{tg\, x}$
4. $3\sin x + \cos 2x \leq 2$
5. $\sin x + 2\cos x \geq 2$
6. Найти все решения уравнения $4\sin^4 x + 2\sin^2 2x = 2ctg^2 x$, удовлетворяющие неравенству $\sin x \geq 2\cos x$.
7. $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 \geq 0$

Вариант 2

1. $0{,}5^{\sqrt{3}} < 0{,}5^{\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}} < 0{,}5$
2. $2 + tg\, 2x + ctg\, 2x < 0$
3. $2\cos x \cdot \left(\cos x - \sqrt{8} \cdot tg\, x\right) < 5$
4. $\begin{cases} 0{,}2^{\cos x} \leq 1 \\ \frac{x-1}{2-x} + \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$
5. $\left(3\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x - 2 - \sqrt{3}\right)\left(2\sin 2x - 1\right) \geq 0$
6. $7\cos x + 12\sin^2 x - 13 < 0$.
7. $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x < 1$

Вариант 3

1. $1-\cos x<\operatorname{tg}x-\sin x$

2. $\sqrt{3+2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x}>\frac{3\operatorname{tg}x+1}{2}$

3. $\begin{cases}\sin 5x+\sin x>0\\ 0<x<2\pi\end{cases}$

4. $\frac{\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin 2x}>0$

5. $\sin 2x-\cos 2x>0$

6. $\sqrt{\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(\operatorname{tg}x)}>1$

7. $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x-2\operatorname{tg}2x-4\operatorname{tg}4x>8\sqrt{3}$

Вариант 4

1. $|\sin 2x+\cos 2x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $\log_{\sin x}(\operatorname{tg}x)<2\log_{\operatorname{tg}x}(\sin x)+1$

3. $\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}>-\frac{1}{4}$

4. Докажите неравенство: $\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$, если $0<x<\frac{\pi}{2}$

5. $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

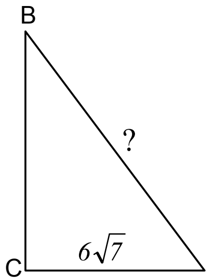
6. $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}\geq 3\operatorname{tg}x$.

7. $\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x\leq\frac{1}{2}$

3. $\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\leq\frac{1}{2}$

Образцы оформления некоторых типов задач

1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $sin\,A = \frac{3}{4}$, $AC = 6\sqrt{7}$. Найдите AB.



$sin\,A = \frac{3}{4}$

По теореме Пифагора, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

$BC^2 = AB^2 - 36 \cdot 7$ (1).

По определению синуса острого угла прямоугольного треугольника,

$\frac{3}{4} = sin\,A = \frac{BC}{AB}$. Отсюда $3AB = 4BC$

или $9AB^2 = 16BC^2$ (2).

Из (1) и (2), $9AB^2 = 16(AB^2 - 36 \cdot 7)$.

$16 \cdot 36 \cdot 7 = 7AB^2$.

$4 \cdot 6 = AB$.

$\boldsymbol{AB = 24}$.

2. Найдите $tg\alpha$ если $sin\,\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение	Аргументация
$tg\alpha > 0$	$\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
$tg\alpha = \dfrac{\frac{5\sqrt{26}}{26}}{cos\,\alpha}$	$tg\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$
$tg\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26\,cos\,\alpha}$	Свойство дроби
$tg\alpha = \dfrac{5\sqrt{26}}{26 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}}}$	$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$ $\Rightarrow cos\,\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}$, если $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
$tg\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{\sqrt{26}} = 5$	Основное свойство дроби

3. Найдите значение выражения $2-5tg^2 x\cdot cos^2 x,$ если $sin\, x=0{,}6.$

Решение	Аргументация
$2-5tg^2 x\cdot cos^2 x,$	дано
$2-5\left(\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}\right)^2\cdot cos^2 x,$	По определению, $tg\, x=\frac{sin\, x}{cos\, x}$
$2-5\,sin^2 x,$	По основному свойству дроби
$2-5\cdot 0{,}36=0{,}2$	$sin\, x=0{,}6 \Rightarrow sin^2 x=0{,}36$

4. Найдите $cos(\beta+\alpha),$ если $cos\,\alpha=\frac{1}{5}$, $cos\,\beta=\frac{1}{3}$ и углы α и β лежат в первой четверти.

Решение	Аргументация
$cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}-sin\,\alpha\cdot sin\,\beta$	$cos(\alpha+\beta)=cos\,\alpha\cdot cos\,\beta-sin\,\alpha\cdot sin\,\beta$ $cos\,\alpha=\frac{1}{5}$, $cos\,\beta=\frac{1}{3}$
$cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{24}}{5}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3}=$	$sin^2\alpha+cos^2\alpha=1 \Rightarrow sin\,\alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}$, если $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$
$=\frac{1}{15}-\frac{\sqrt{3\cdot 8}\cdot\sqrt{8}}{15}=\frac{1-8\sqrt{3}}{15}$	По свойствам рациональных (дроби) и иррациональных чисел

5. Доказать тождество: $\frac{cos\,\alpha}{1-sin\,\alpha}=\frac{1+sin\,\alpha}{cos\,\alpha}.$

Решение	Аргументация
$sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$	Основное тригонометрическое тождество
$cos^2\alpha=1-sin^2\alpha$	Формула сокращённого умножения (справа)
$cos^2\alpha=(1+sin\,\alpha)(1-sin\,\alpha)$	Свойство пропорции
$\frac{cos\,\alpha}{1-sin\,\alpha}=\frac{1+sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$	Доказано

6. Вычислить $tg\left(arccos\frac{3}{5}\right)$.

Решение	Аргументация
$tg\left(arccos\frac{3}{5}\right)=$	дано
$=\frac{\sqrt{1-\frac{9}{25}}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$	$tg(arccos\,x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, если $[-1;0)\cup(0;1]$

7. Упростите выражение: $sin^3\alpha(1+ctg\alpha)+cos^3\alpha(1+tg\alpha)$.

Решение	Аргументация
$sin^3\alpha(1+ctg\alpha)+cos^3\alpha(1+tg\alpha)=$	дано
$=sin^3\alpha\left(1+\frac{cos\,x}{sin\,x}\right)+cos^3\alpha\left(1+\frac{sin\,x}{cos\,x}\right)=$	по определению, $tg\,x=\frac{sin\,x}{cos\,x}$, $ctg\,x=\frac{cos\,x}{sin\,x}$
$=sin^3\alpha+\frac{sin^3\alpha\cdot cos\,x}{sin\,x}+cos^3\alpha+\frac{cos^3\alpha\cdot sin\,x}{cos\,x}=$	По свойству умножения многочленов
$=sin^3\alpha+sin^2\alpha\cdot cos\,x+cos^3\alpha+cos^2\alpha\cdot sin\,x=$	Основное свойство дроби
$=\left(sin^3\alpha+cos^3\alpha\right)+\left(sin^2\alpha\cdot cos\,x+cos^2\alpha\cdot sin\,x\right)=$	Группировка
$=(sin\alpha+cos\alpha)\left(sin^2\alpha+cos^2\alpha-sin\alpha\cdot cos\alpha\right)+$ $+sin\alpha\cdot cos\,x(sin\alpha+cos\,x)=$	По формуле суммы кубов: ***$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)$*** – первая скобка, вынесение общего множителя – вторая скобка
$=(sin\alpha+cos\alpha)\left(sin^2\alpha+cos^2\alpha\right)=$	вынесение общего множителя
$=sin\alpha+cos\alpha$	Основное тригонометрическое тождество: $sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$

8. Найдите $arcsin\,x$, если $arctgx = \frac{\pi}{4}$.

Решение	Аргументация
$arctgx = \frac{\pi}{4}$.	дано
$tg(arctg\,x) = tg\frac{\pi}{4}$.	$\alpha = \beta \Rightarrow tg\alpha = tg\beta$.
$x = 1$.	$tg(arctgx) = x$.
$arcsin\,x = arcsin\,1 = \frac{\pi}{2}$	$sin\frac{\pi}{2} = 1$

9. Вычислить $sin\left(arcsin\left(sin\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Решение	Аргументация
$sin\left(arcsin\left(sin\frac{\pi}{6}\right)\right) =$	дано
$= sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$sin(arcsin\,A) = A$ на $[-1;\,1]$

10. Решите уравнение $sin\,2x = cos^4\frac{x}{2} - sin^4\frac{x}{2}$.

Решение	Аргументация
$sin\,2x = cos^4\frac{x}{2} - sin^4\frac{x}{2}$	дано
$sin\,2x = \left(cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}\right)\left(cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}\right)$	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$sin\,2x = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}$	$cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2} = 1$
$sin\,2x = cos\,x$	$cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$
$2\,sin\,x \cdot cos\,x - cos\,x = 0$	$sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha;$
$cos\,x(2\,sin\,x - 1) = 0$	вынесение общего множителя
$\left[\begin{array}{l} cos\,x = 0 \\ sin\,x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$	свойства нуля
$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \\ x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z \end{array}\right.$	$cos\,x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k\ ,\ \ k \in Z$ $sin\,x = a,\ \lvert a \rvert \le 1 \Leftrightarrow$ $x = (-1)^k\,arcsin\,a + \pi k\ ,\ \ k \in Z$

11. Найдите на промежутке (1; 3) наименьший корень уравнения
$sin(3\pi x)+tg(\pi x)cos(3\pi x)=sin(4\pi x)$.

Решение	**Аргументация**
$sin(3\pi x)+tg(\pi x)cos(3\pi x)=sin(4\pi x)$	дано
$cos\,3\pi x\cdot\left(\dfrac{sin\,3\pi x}{cos\,3\pi x}+tg\,\pi x\right)=sin\,4\pi x$	свойства дроби
$cos\,3\pi x\cdot(tg\,3\pi x+tg\,\pi x)=sin\,4\pi x$	по определению тангенса
$\dfrac{cos\,3\pi x\cdot sin\,4\pi x}{cos\,3\pi x\cdot cos\,\pi x}-sin\,4\pi x=0$ $3\pi x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \pi x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$	$tg\alpha+tg\beta=\dfrac{sin(\alpha+\beta)}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}$, $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k;$
$\dfrac{sin\,4\pi x}{cos\,\pi x}-sin\,4\pi x=0$	$cos\,3\pi x\neq0$ основное свойство дроби
$sin\,4\pi x\left(\dfrac{1}{cos\,\pi x}-1\right)=0$	вынесение общего множителя
$\left[\begin{array}{l}sin\,4\pi x=0\\ cos\,\pi x=1\end{array}\right.$	свойство нуля (для произведения), свойство единицы (для выражения в скобках)
$\left[\begin{array}{l}4\pi x=\pi k,k\in Z\\ \pi x=2\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.$	$sin\,x=0\Leftrightarrow x=\pi k\ ,\ k\in Z$ $cos\,x=1\Leftrightarrow x=2\pi k\ ,\ k\in Z$
$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k}{4},k\in Z\\ x=2n,\ n\in Z\end{array}\right.$	свойства равенства
$x=\dfrac{k}{4},k\in Z$	общее решение
$x\in\left\{\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{4},2,\dfrac{9}{4},\dfrac{5}{2},\dfrac{11}{4}\right\}$	на промежутке (1; 3).
$x=\dfrac{5}{4}$	наименьшее на промежутке (1; 3).

12. Доказать равенство: $arctg\frac{1}{7}+2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\pi}{4}$.

Решение	Аргументация
$arctg\frac{1}{7}+2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\pi}{4}$	дано
$\sin\left(arctg\frac{1}{7}+2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$	$\alpha=\beta\Rightarrow \sin\alpha=\sin\beta.$
$\sin\left(arctg\frac{1}{7}+2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(arctg\frac{1}{7}\right)\cdot\cos\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+$ $+\cos\left(arctg\frac{1}{7}\right)\cdot\sin\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(\alpha+\beta)=$ $=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\frac{\frac{1}{7}}{\sqrt{1+\frac{1}{49}}}\cdot\cos\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+$ $+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{49}}}\cdot\sin\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(arctgx)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos(arctgx)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\frac{1}{\sqrt{50}}\cdot\cos\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+$ $+\frac{7}{\sqrt{50}}\cdot\sin\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	свойства рациональных и иррациональных чисел
$\frac{1}{\sqrt{50}}\cdot\left(1-2\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right)+$ $+\frac{7}{\sqrt{50}}\cdot\left(2\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right)=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$ $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha;$

$\frac{1}{\sqrt{50}}\cdot\left(1-2\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2\right)+$ $+\frac{7}{\sqrt{50}}\cdot\left(2\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$sin(arcsin\ x)=x$ $cos(arcsin\, x)=\sqrt{1-x^2}$
$\frac{4}{5\sqrt{50}}+\frac{14\cdot 3}{\sqrt{5000}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	свойства рациональных и иррациональных чисел
$\frac{8+14\cdot 3}{10\sqrt{50}}=\frac{5\sqrt{100}}{10\sqrt{50}}$	
$\frac{50}{10\sqrt{50}}=\frac{50}{10\sqrt{50}}$	

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Светлана Владимировна Лебедева

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА
ЧАСТЬ 5. ТРИГОНОМЕТРИЯ

На обложке – репродукция картины «Не решила!» художника Цветкова Виктора Александровича (Россия, 1970-е).

Работа издана в авторской редакции

Верстка	С.В. Лебедева
Оформление обложки	С.В. Лебедева
Усл. печ. л.	5,0