И.Г.Брагина, Н.В.Сергеева, Л.В.Бессонов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Издательство «НАУЧНАЯ КНИГА»

Саратов

2014

УДК 519.21 (072.8)
ББК 22.171я73
Б87

Брагина И.Г., Сергеева Н.В., Бессонов Л.В.

Б87 Основы теории вероятностей: Учеб. пособие -

Саратов: Изд-во «Научная книга», 2014.- 53с.

ISBN 978-5-9758-1525-5

Рассматриваются основные теоретические вопросы, примеры решения задач различных типов, а также приводятся задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов различных специальностей и направлений подготовки бакалавров, изучающих математику.

Библиогр.: 6 назв.

Рекомендуют к печати:

Кафедра математики и методики ее преподавания Саратовского университета имени Н.Г.Чернышевского (зав. кафедрой – к.п.н., доц. И.К.Кондаурова)

УДК 519.21(072.8)

ББК 22.171я73

ISBN 978-5-9758-1525-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Одним из основных понятий теории вероятностей является случайное событие (просто событие). В реальном мире, случайное событие – это исход какого-либо испытания (наблюдения, эксперимента), которое может произойти (наступить, осуществиться) или не произойти (не наступить, не осуществиться).

Пример.

При бросании игральной кости может выпасть число очков, равное какому-либо числу из множества чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Событиями в этом случае будут, например,

A={выпадет четное число очков},

B={выпадет число очков, не больше трех}.

Исходя из реального смысла понятия «события», определим следующие частные случаи понятия «события» и следующие операции над событиями.

Замечание. В тех случаях, когда будем одновременно рассматривать несколько событий, всегда будем предполагать, что эти события могут произойти или не произойти при одном и том же испытании (то есть при осуществлении одних и тех же условий).

Достоверным событием будем называть событие, которое всегда происходит, и будем обозначать его Ω.

Невозможным событием называется событие, которое никогда не происходит ($\varnothing$).

Событие $\overline{A}$ называется событием, *противоположным* A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит A.

Суммой или *объединением* событий A и B называется событие, обозначаемое A+B или $A \cup B$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит или A, или B (или оба вместе).

Произведением или *пересечением* событий А и В называется событие, обозначаемое АВ или $A \bigcap B$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит и А и В вместе.

Разностью $A \setminus B$ событий А и В называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит А и не происходит В.

Событие А и В называются *несовместными,* если АВ=$\varnothing$.

Будем говорить, что *событие А влечет за собой событие В* ($A \subseteq B$), если из наступления события А следует наступление события В.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то будем говорить, что события А и В *равносильны* и писать А=В.

В примере 1 с бросанием игральной кости имеем следующие события:

$A \bigcup B$ = {выпадает число оков, отличное от пяти},

$A \bigcap B$ = {выпадает «два»},

$A \setminus B$ = {выпадает число оков, равное 4 или 6},

$\overline{A}$ = {выпадает нечетное число очков}.

В теории вероятностей наиболее распространенным является подход, в котором событие определяется через неопределяемое понятие элементарного события.

В примере с игральным кубиком (модель игрального кубика) элементарными событиями является выпадение «1», «2», «3», «4», «5», «6».

Еще одной простой теоретико-вероятностной моделью является урновая модель. Пусть имеется урна с N одинаковыми шарами. Испытания состоит в том, что мы случайно выбираем из урны один шар. Обозначим $\Omega = \{\omega_1,...,\omega_N\}$ множество шаров в урне. Если из урны при испытании вынимается шар $\omega_i \in A$, где А – некоторое подмножество множества шаров Ω, то будем говорить, что произошло событие А; если же $\omega_i \notin A$, то будем говорить, что событие А не произошло.

В общем случае в каждой теоретико-вероятностной модели будем рассматривать некоторое основное множество $\Omega = \{\omega_i\}$. Будем называть его элементы ω_i *элементарными событиями*, само множество Ω - *пространством элементарных событий,* а некоторое его подмножество $A \subseteq \Omega$ - *событиями.* Операции над событиями – это операции над подмножествами.

Операции суммы и произведения событий могут распространить на любое конечное или бесконечное множество событий $\bigcup_i A_i$, $\bigcap_i A_i$. Придерживаются следующего соглашения: если $A_1, A_2,..., A_n$ попарно несовместны, то вместо $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ пишут $\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + ... + A_n$.

В общем случае бесконечного пространства Ω рассматривают не все подмножества Ω, а лишь некоторые классы этих подмножеств, называемые алгебрами и σ - алгебрами.

Определение. Класс S подмножеств пространства Ω называется алгеброй множеств, если

1) $\varnothing \in S, \quad \Omega \in S$;
2) $A \in S \Rightarrow \overline{A} \in S$;
3) $A_1 \in S, \quad A_2 \in S \Rightarrow A_1 \bigcup A_2 \in S, \quad A_1 \bigcup A_2 \in S$.

Определение. Класс S называется σ - алгеброй множеств, если

1) S есть алгебра множеств;
2) $\{A_k\} \subset S \Rightarrow \bigcup A_k \in S, \quad \bigcap A_k \in S$.

1.1. Вероятностное пространство

Определение. Числовая функция P, определенная на алгебре S называется вероятностью, если она:

1) неотрицательна, т.е. $P(A) \ge 0, \forall A \in S$;
2) нормированная, т.е. $P(\Omega) = 1$;
3) σ- аддитивна, т.е. если $\{A_k\} \subset S$ и множества $\{A_k\}$ попарно не пересекаются, то $P(\sum A_k) = \sum P(A_k)$.

Определение. Тройку $\{\Omega, S, P\}$, где Ω - пространство элементарных событий; S - σ - алгебра подмножества множества Ω; P – числовая функция, определенная на S и называемая вероятностью, будем называть вероятностным пространством.

Перечислим основные свойства вероятности.

Свойство 1. Если $A \subseteq B$, то P(B\A)=P(B) – P(A).

Действительно, т.к. B=A+(B\A) и $A \bigcup (B \setminus A) = \varnothing$, то по свойству σ-аддитивности вероятности, имеем A(B)=P(A)+P(B\A). Откуда P(B\A)=P(B) – P(A). ■

Свойство 2. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.

Доказательство.

Известно, что $B \subset \Omega, B \bigcap \Omega = B, A \bigcup \overline{A} = \Omega$.

Тогда верна цепочка равенств

$$B = B \bigcap \Omega = B \bigcap (A \bigcup \overline{A}) = (B \bigcup A) \bigcap (B \bigcup \overline{A}) = (BA) \bigcup (B\overline{A}) = A \bigcup (B\overline{A})$$

$B\overline{A} \bigcap A = \varnothing$. Тогда $P(B) = P(A) + P(B\overline{A})$.

В этой сумме оба слагаемые справа – неотрицательные. Так как сумма не может быть меньше, чем одно из неотрицательных слагаемых, то $P(B) \geq P(A)$. ■

Свойство 3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Действительно, $A + \overline{A} = \Omega$, $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$.

Тогда по свойству аддитивности вероятности, получаем $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$, откуда $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. ■

Свойтсво 4. $P(\varnothing) = 0$.

Действительно, если в свойстве 3 положить $A = \varnothing$, то $\overline{A} = \Omega$. Тогда $1 = P(\Omega) = 1 - P(\varnothing)$. Откуда следует, что $P(\varnothing) = 0$. ■

Свойство 5. Для любого $A \in S \quad 0 \leq P(A) \leq 1$.

Действительно, для любого события A верно $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$.

Так как $\varnothing \subseteq A$, то $P(\varnothing) \leq P(A)$,

то есть $0 \leq P(A)$. С другой стороны, так как $A \subseteq \Omega$, то $P(A) \leq P(\Omega)$, то есть $P(A) \leq 1$. Таким образом, верно неравенство $0 \leq P(A) \leq 1$. ■

Свойство 6. Для любых событий A и B

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Доказательство.

$A \bigcup B = A \bigcup (B \setminus AB)$.

По свойству σ-аддитивности вероятности имеем $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus AB)$. А так как $AB \subseteq B$, то по свойству 1 $P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB)$. Тогда окончательно получаем

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \blacksquare$$

1.2. Классическое определение вероятности

Рассмотрим случай конечного вероятностного пространства. В этом случае $\Omega = \{\omega_i\}$ - конечное пространство, $i = \overline{1,n}$. S – алгебра всех подмножеств множества Ω (ввиду конечности S эта алгебра автоматически представляет собой σ - алгебру).

Вероятность P(A) для любого $A \in S$ в этом случае можно задать следующим образом.

Каждому ω_i поставим в соответствие вероятность элементарного события p_i, то есть $\forall \omega_i \ P(\omega_i) = p_i$ так, что $p_i \geq 0$ и $\sum\limits_{\omega_i \in \Omega} p_i = 1$.

Под вероятностью события A будем понимать

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i \qquad (1)$$

Частным случаем определения вероятности (1) будет так называемое классическое определение вероятности, когда все p_i равны друг другу, $\forall i, p_i = p$ (все элементарные события равновозможны).

Обозначим $|A|$ число элементов в множестве A (мощность множества A).

Так как $1 = \sum\limits_{\omega_i \in \Omega} p_i = \sum\limits_{\omega_i \in \Omega} p = p|\Omega| = np \Rightarrow p = \dfrac{1}{n}$, где $|\Omega| = n$.

Тогда $$\mathbf{P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n} = \frac{m}{n}}, \text{ где } \mathbf{m = |A|} \qquad (2)$$

Определение. Если пространство элементарных событий равновозможно и конечно, то вероятность случайного события A равна отношению числа элементарных событий, соответствующих событию A, к общему числу равновозможных элементарных событий.

В примере 1 каждому ω_i соответствует вероятность p_i = 1/6 $\forall i = \overline{1,6}$, где $|\Omega| = 6$. Событие A (выпадение четного числа очков) составляют 3 элементарных события: выпадение «2» или «4» или «6». Тогда $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Событие B (выпадение числа очко, не больше трех) составляют 3 элементарных события: выпадение «1» или «2», или «3». Тогда $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Модель вероятностного пространства, приводящая к классическому определению вероятности, используется в тех случаях, когда элементарные события обладают свойством «симметрии» в том смысле, что все элементарные события находятся в одинаковом отношении к тем условиям, которые определяют характер испытания. Например, бросание игральной кости или монеты обладает свойством «симметрии» по отношению к выпадению того или иного числа очков на кости или той или иной стороны монеты. Таким же свойством симметрии обладают правильно организованная жеребьевка и тираж лотереи.

При нахождении вероятностей в схеме классического определения широко используется комбинаторика. Будем использовать комбинаторные понятия *размещения, перестановки* и *сочетания*. Будем исходить из конечного множества $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, .., \mathbf{x}_N\}$, состоящего из N элементов $\mathbf{x}_i$. Пусть $1 \le \mathbf{n} \le \mathbf{N}$.

Размещением из N элементов множества X по n элементам (размещением N по n) назовем любой упорядоченный набор $\{x_{i_1}, ..., x_{i_n}\}$ элементов множества X.

Число всех различных размещений из N элементов по n обозначается A_N^n или $N^{[n]}$ и равно

$$A_N^n = N^{[n]} = N(N-1)...(N-n+1) \tag{3}$$

Далее будем полагать $A_N^0 = N^{[0]} = 1$ при любом целом $N \ge 1$.

Частный случай размещения при $N = n$ называется *перестановкой* из N элементов. Число всех перестановок из N элементов равно

$$A_N^N = N^{[N]} = N(N-1)...2 \cdot 1 = N! \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует также формула

$$A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!} \tag{5}$$

Сочетанием из N элементов множества X по n называется любое подмножество $\{x_{i_1},..., x_{i_n}\}$ мощности n множества X. Общее число всех сочетаний из N по n обозначается C_N^n или $\binom{N}{n}$ и равно

$$C_N^n = \frac{A_N^n}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \tag{6}$$

Из (6) имеем соотношение $C_N^n = C_N^{N-n}$. Далее будем полагать 0!=1; $C_N^k = 0$, если k – целое и $k<0$ или $k>N$.

Дадим описание двух часто встречающихся схем, в которых детализируется общее классическое определение.

Пример 2. *Выборка без возвращения.*

Пусть имеется урна с N шарами, которые занумерованы числами 1, 2, …, N. Предположим, что шары с номерами 1, 2, …, M белого цвета, остальные – черные. Выборка без возвращения состоит в том, что из урны наугад последовательно вынимаются n шаров, и не возвращаются обратно. В этом случае за пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$ естественно принять множество всех упорядоченных наборов

$$\omega = \{i_1, i_2, ..., i_n\} \tag{7}$$

чисел i_j, $1 \le i_j \le N$, не равных друг другу. Таким образом, схемой случайного выбора без возвращения называют вероятностную схему, в которой $\Omega = \{\omega = (i_1, i_2, ..., i_n) : 1 \le i_j \le N;\ j = \overline{1,n};$ среди $i_1,..., i_n$ нет одинаковых$\}$ и элементарные события ω равновероятны.

Мощность множества Ω равна в этом случае числу размещений N элементов по n

$$|\Omega| = N(N-1)...(N-n+1) = N^{[n]} \tag{8}$$

Вычислим вероятность события A_m, состоящего в том, что среди выбранных n шаров имеются ровно m белых. Для этого подсчитаем $|A_m|$:

$$|A_m| = C_n^m M^{[m]} (N-M)^{[n-m]} \tag{9}$$

Действительно, число элементарных событий (7), у которых равно в m случаях $1 \le i_j \le M$, определяются как произведение: C_n^m - числа способов выбора m координат из общего количества их n, на которые мы помещаем $1 \le i_j \le M$; $M^{[m]}$ - числа различных наборов i_j, $1 \le i_j \le M$, попадающих на отмеченные m мест; $(N-M)^{[n-m]}$ - числа различных наборов $M+1 \le i_j \le N$, попадающих на остальные места.

Из (8) и (9) получаем

$$P(A_m) = \frac{C_n^m M^{[m]} (N-M)^{[n-m]}}{N^{[n]}}.$$

Пользуясь (6) можно выразить вероятность $P(A_m)$ в следующих эквивалентных видах:

$$P(A_m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{N^{[n]}} = \frac{C_n^m C_{N-n}^{M-m}}{N^{[n]}} \qquad (10)$$

<u>Пример 3.</u> *Выборка с возвращением.*

Пусть имеется та же урна, но выборка n шаров из нее происходит последовательно по одному шару, и при этом каждый раз фиксируется номер шара, а сам шар возвращается обратно в урну. В этом случае пространство элементарных событий состоит из всевозможных векторов (7), у которых координаты не имеют никаких дополнительных ограничений, кроме $1 \le i_j \le N$.

Таким образом, схемой случайного выбора с возвращением называют вероятностную схему, в которой $\Omega = \{\omega = (i_1, i_2, ..., i_n) : 1 \le i_j \le N;\ j = \overline{1, n}\}$ и все элементарные события равновероятны. В этом случае $|\Omega| = N^n$, а вероятность события A_m, вычисляемая аналогичным способом, равна

$$P(A_m) = C_n^m \frac{M^m (N-M)^{n-m}}{N^n}$$

или (11)

$$P(A_m) = C_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(1 - \frac{M}{M}\right)^{n-m}.$$

1.3. Условная вероятность

В построении математической модели последовательности испытаний важную роль играют понятия условной вероятности и независимости событий.

Определение. Пусть P(B)>0. Условной вероятностью $P_B(A)$ события A при условии, что произошло событие B (или просто: при условии B), называется отношение

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1}$$

Переписывая (1) в форме

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A) \tag{2}$$

получим равенство, которое называется *теоремой умножения.* Если исходить из определения (1), то содержательность теоремы умножения (2) представляется весьма невысокой. Однако в применениях часто условную вероятность $P_B(A)$ вычисляют не из формулы (1), а из каких-либо других соображений. В этом случае формула (2) уже определяет P(AB) с помощью P(B) и $P_B(A)$, а не наоборот. Таким образом, (2) используется для подсчета вероятности одновременного осуществления событий P(AB).

<u>Пример 1.</u>

В урне находится M белых и N-M черных шаров. По схеме выборки без возвращения последовательно выбираются 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

<u>Решение.</u>

Эту вероятность можно найти с помощью теоремы умножения. Обозначим

событие A={первый вынутый шар – белый},

событие B={второй вынутый шар – белый }.

Тогда $P(A) = \frac{M}{N}$, а $P_A(B) = \frac{M-1}{N-1}$.

Окончательно имеем $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}$.

С помощью (2) по индукции доказывается более общая теорема.

Теорема 1 (теорема умножения). Пусть события $A_1,\dots,A_n$ таковы, что $P(A_1 \dots A_{n-1}) > 0$. Тогда

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \dots A_{n-1}}(A_n) \qquad (3)$$

Доказательство.

Из условия теоремы вытекает, что существуют все условные вероятности в (3). Для доказательства (3) по индукции обозначим $B = A_1 \dots A_{n-1}; A = A_n$, применим (2) и индукционное предположение о справедливости (3), когда n заменяется на n-1. Справедливость (3) при n=2 следует из (2). ■

1.4. Формула полной вероятности

Определение. Систему событий $A_1,\dots,A_n$ будем называть *конечным разбиением* (далее – просто *разбиением),* если они попарно несовместимы и

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega \qquad (4)$$

Теорема 2 (формула полной вероятности). Если $A_1,\dots,A_n$ - разбиение и все $P(A_k) > 0$, то для любого события B имеет место формула

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B), \qquad (5)$$

называемая *формулой полной вероятности.*

Доказательство.

Из (4) следует разложение B на сумму $B = B\Omega = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n$ попарно несовместных событий, поэтому $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(BA_k)$. Применяя к слагаемым $P(BA_k)$ теорему умножения, получим (5). ■

Пример 2.

Вычислим в урновой схеме примера 1 вероятность события $B = \{$второй вынутый шар - белый $\}$. Из классического определения вероятности имеем $P(A) = \frac{M}{N}$; $P(\overline{A}) = \frac{N-M}{N}$;

$$P_A(B) = \frac{M-1}{N-1}; \quad P_{\overline{A}}(B) = \frac{M}{N-1}.$$

По формуле полной вероятности имеем

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) = \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} + \frac{N-M}{N} \cdot \frac{M}{N-1} = \frac{M}{N},$$

то есть P(A)=P(B). Аналогично можно установить, что вынимая последовательно без возвращения шары, получаем одну и ту же вероятность вынуть белый шар на любом месте. Таким образом, при правильно организованной жеребьевке шансы всех участников одинаковы, независимо от того, в какой очередности они тянут жребий. Эту задачу можно интерпретировать как вычисление вероятности вытащить белый шар из урны, из которой был случайно утерян один или несколько шаров.

1.5. Формулы Байеса

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 2 и $P(B) > 0$, то имеют место формулы

$$P_B(A_k) = \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}, \quad k = \overline{1,n}, \qquad (6)$$

называемые формулами Байеса.

Доказательство.

По теореме умножения имеем $P(A_k B) = P(A_k)P_{A_k}(B) = P(B)P_B(A_k)$,

откуда $P_B(A_k) = \dfrac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{P(B)}$.

Применяя к знаменателю P(B) формулу полной вероятности (5), получаем (6). ■

Формулы Байеса можно интерпретировать следующим образом. Назовем события A_k гипотезами. Пусть событие B – результат некоторого эксперимента. Вероятности $P(A_k)$ - это априорные вероятности гипотез, вычисляемые до проведения опыта, а условные вероятности $P_B(A_k)$ - это апостериорные вероятности гипотез, вычисляемые после того, как стал известен исход эксперимента B. Формулы Байеса позволяют по априорным вероятностям гипотез и по условным вероятностям события B при гипотезах

A_k (то есть по вероятностям $P_{A_k}(B)$) вычислить апостериорные вероятности $P_B(A_k)$.

Пример 3.

Пусть имеются 2 урны, в каждой из которых по N шаров, причем в первой урне M_1 белых, а во второй - M_2 белых шаров. Проводимый эксперимент состоит в том, что сначала с вероятностью ½ выбираются первая или вторая урна, а затем из выбранной урны случайно вынимаются (с возвращением) n шаров. Найти вероятность того, что все вынутые шары – белые.

Решение:

Пусть событие $B=\{$все вынутые шары - белый $\}$. В этом случае имеем 2 гипотезы: $A_1=\{$выбор первой урны$\}$, $A_2=\{$выбор второй урны$\}$.

По условиям задачи априорные вероятности равны $P(A_1)=P(A_2)=1/2$. Далее, легко вычисляются условные вероятности $P_{A_k}(B)=\left(\frac{M_k}{N}\right)^n$; $k=1,2$.

Формулы Байеса дают апостериорные вероятности:

$$P_B(A_k)=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{M_k}{N}\right)^n}{\frac{1}{2}\left(\frac{M_1}{N}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{M_2}{N}\right)^n}=\frac{M_k^n}{M_1^n+M_2^n};\ k=1,2.$$

1.6. Независимость событий

Понятие независимости относится к одному из основных в теории вероятностей. Если события A и B таковы, что $P(B)>0$, то существует условная вероятность $P_B(A)$. В случае, когда $P_B(A)=P(A)$, говорят, что событие A не зависит от события B. Если и $P(A)>0$, то в этом случае

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P_B(A)}{P(A)}=P(B),$$

и из независимости A от B следует независимость B от A, то есть понятие независимости A и B симметрично. Из теоремы умножения вероятностей (2) следует, что для независимых событий A и B имеет место равенство P(AB)=P(A)P(B). Это приводит к следующему определению независимости.

Определение. События A и B называются *независимыми,* если

$$P(AB)=P(A)P(B) \qquad (7)$$

Если равенство (7) не выполняется, то события будем называть *зависимыми.*

Обычно независимость A и B, которую иногда называют теоретико-вероятностной или статистической независимостью, не устанавливается с помощью равенства (7), а постулируется на основе каких-либо внешних соображений. С помощью же равенства (7) вычисляется вероятность P(AB), если известны вероятности P(A) и P(B) двух независимых событий.

<u>Пример 4.</u>

Из колоды в 52 карты (состоящей из 13 карт каждой из четырех мастей) случайно вынимается карта. Рассмотрим события

A = {вынут туз} и B = {вынута карта бубновой масти}. Тогда событие AB = {вынут туз бубновой масти}. Так как в этом случае P(A)=4/52=1/13, P(B)=13/52=1/4, P(AB)=1/52=P(A)P(B), то события A и B независимы.

Если же колода содержит еще и джокер, то события A и B станут зависимыми, так как P(A)=4/53, P(B)=13/53, P(AB)=1/53 $\neq$ P(A)P(B).

Понятия независимости двух событий распространяется на случай нескольких событий.

Определение. События $A_1,..., A_n$ называются независимыми, если для любых $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_m \le n, \quad 2 \le m \le n$, выполняются равенства

$$P(A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_m}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) ... P(A_{i_m}), \qquad (8)$$

в противном случае события называются зависимыми.

Независимость нескольких событий называют иногда *независимостью событий в совокупности.*

Из последнего определения сразу следует, что события любого подмножества $A_{j_1}, A_{j_2},..., A_{j_r}$ независимых событий $A_1, A_2,..., A_n$ также независимы.

Следующий пример показывает, что независимость событий $A_1, A_2,..., A_n$ в совокупности – более сильное свойство, чем попарная их независимость.

Пример 5.

Пусть из чисел 2, 3, 5 и 30 выбирается одно число, причем каждое из чисел может быть выбрано с вероятностью ¼. Обозначим

$A_k = \{$выбранное число делится на $k\}$.

Легко видеть, что события $A_2,\ A_3, A_5$ попарно независимы, но зависимы в совокупности, так как

$$P(A_2) = P(A_3) = P(A_5) = 1/2,$$
$$P(A_2A_3) = P(A_2A_5) = P(A_3A_5) = 1/4,$$
$$P(A_2A_3A_5) = 1/4 \neq P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_5) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8.$$

1.7. Последовательность независимых испытаний

Под испытанием будем понимать некоторый эксперимент, исходами которых служат те или иные случайные события. Предположим, что возможно осуществление одного из событий $A_1,\ldots, A_k$ полной группы событий, то есть $\bigcup_{j=1}^{k} A_j = \Omega$ и $A_i \cdot A_j = \varnothing, \quad i \neq j$.

Обозначим A_i^j - i-ый исход j-ого испытания, $1 \le i \le k$ - возможный исход испытания, $1 \le j \le n$ - номер испытания. Тогда $P\left\{A_i^j\right\}$ - вероятность i-ого исхода в j-ом испытании.

Определение. Последовательность испытаний называется последовательностью независимых испытаний, если вероятность исходов не зависит ни от номера испытания, ни от результатов предшествующих испытаний, то есть $P(A_i^j) = P_i$ - является функцией только исхода.

1.7.1. Схема Бернулли

Рассмотрим последовательность независимых испытаний с двумя исходами: А, который назовем успехом, и $\overline{A}$ (неуспех). Обозначим Р(А)=Р, $P(\overline{A}) = 1 - q = q, \quad p + q = 1$. Данная схема носит название *схемы Бернулли.*

Пусть m – число появлений события А в схеме Бернулли, $0 \le m \le n$, в последовательности из n независимых испытаний. Тогда вероятность того, что в последовательности из n испытаний, событие A произойдет ровно m раз вычисляется по формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (9)$$

Формула (9) называется формулой Бернулли, а вероятности, вычисляемые по этой формуле, называется *биноминальными вероятностями* или *распределением Бернулли.*

Примерами, в которых появляется биноминальное распределение, служат: выборка с возвращением, выпадение какой-либо грани при n бросаниях играной кости, рождение m мальчиков при регистрации n рождений и др.

1.7.2. Полиномиальная схема

Более сложная схема n независимых испытаний получается, когда при каждом испытании возможно появление одного из r попарно несовместных исходов.

Вычислим вероятность события

$B_{n_1 \dots n_r}$ = {в n независимых испытаниях прошло равно по n_k k-х исходов},

$n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$. Так как для любого $\omega \in B_k$ $p(\omega) = \prod_{k=1}^{r} p_k^{n_k}$, а количество

точек в $B_{n_1 \dots n_r}$ ровно полиномиальному коэффициенту $\frac{n!}{n_1! \dots n_r!}$, то

$$P(B_{n_1 \dots n_r}) = \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} P_1^{n_1} \dots . P_r^{n_r}, n_1 + \dots + n_r = n \qquad (10)$$

Распределение (10) называется *полиномиальным*; описанная схема независимых испытаний с r исходами также называется полиномиальной. При r=2 эта схема превращается в биномиальную схему Бернулли.

1.8. Примеры решения задач

Классическое определение вероятности

Пример 1: В урне *a* белых и *b* черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.

Решение: Общее число случаев $a+b$. Число благоприятных случаев a. Вероятность того, что шар белый $P=\frac{a}{a+b}$.

Пример 2: Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные пачки по 26 листов. Найти вероятность того, что а) в каждой пачке окажется по два туза; б) в одной из пачек не будет ни одного туза, а в другой – все четыре; в) в одной из пачек будет один туз, а в другой – три.

Решение: Общее число случаев $n=C_{52}^{26}$. а) число благоприятных случаев $m=C_4^2C_{48}^{24}$, тогда вероятность того, что в каждой пачке окажется по два туза $P=\frac{C_4^2C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}}$; б) $P=\frac{2C_4^4C_{48}^{22}}{C_{52}^{26}}$; в) $P=\frac{2C_4^3C_{48}^{23}}{C_{52}^{26}}$.

Пример 3: В барабане револьвера семь гнезд, из них в пяти заложены патроны, а две оставлены пустыми. Барабан приводится во вращение, в результате чего против ствола случайным образом оказывается одно из гнезд. После этого нажимается спусковой крючок; если ячейка была пустая, выстрела не происходит. Найти вероятность того, что, повторив такой опыт два раза подряд, мы оба раза не выстрелим.

Решение: Так как любое гнездо при первом выстреле может сочетаться с любым при втором, общее число случаев $n=7\cdot 7=49$. Число благоприятных случаев равно числу комбинаций пустых гнезд $m=2\cdot 2=4$, тогда вероятность того, что мы оба раза не выстрелим $P=\frac{m}{n}=\frac{4}{49}$.

<u>Теоремы сложения, умножения. Условная вероятность.</u>

Пример 1: Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей игранные от неигранных не отличают. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неигранных мячей?

Решение: Событие А может произойти единственным способом: первый раз, второй и третий из коробки будут вынуты неигранные мячи. Первый раз это обеспечено; поэтому $P(A)=1\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{5}{1764}$.

Пример 2: Бросаются две монеты. Рассматриваются события: A – выпадение герба на первой монете; B – выпадение герба на второй монете. Найти вероятность события $C=A+B$.

Решение: $P(C) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ или, через противоположное событие, $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Пример 3: Два шарика разбрасываются случайно и независимо друг от друга по четырем ячейкам, расположенным одна за другой по прямой линии. Каждый шарик с одинаковой вероятностью $1/4$ попадает в каждую ячейку. Найти вероятность того, что шарики попадут в соседние ячейки.

Решение: Событие A - шарики попали в соседние ячейки – разобьем на столько вариантов, сколько можно образовать пар соседних ячеек; получим $A = A_1 + A_2 + A_3$,

где A_1 - шарики попали в первую и вторую ячейки;

A_2 - шарики попали во вторую и третью ячейки;

A_3 - шарики попали в третью и четвертую ячейки.

Вероятность каждого из вариантов одна и та же и равна $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{8}$; $P(A) = \frac{3}{8}$.

<u>Формула полной вероятности. Формула Байеса</u>

Пример 1: Имеются три одинаковые с виду урны. В первой a белых шаров и b черных; во второй c белых и d черных; в третьей только белые. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение: Пусть событие A - появление белого шара. Формулируем гипотезы: H_1 - выбор первой урны; H_2 - выбор второй урны; H_3 - выбор третьей урны.

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3};$$

$$P(A|H_1) = \frac{a}{a+b}; \quad P(A|H_2) = \frac{c}{c+d}; \quad P(A|H_3) = 1.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{3}\frac{a}{a+b} + \frac{1}{3}\frac{c}{c+d} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1\right).$$

Пример 2: Группа студентов состоит из a отличников, b хорошо успевающих и c занимающихся слабо. Отличники могут получить на предстоящем экзамене только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена вызываются наугад три студента. Найти вероятность того, что они получат отметки: отлично, хорошо и удовлетворительно (в любом порядке).

Решение: Событие A - получение отличной, хорошей и удовлетворительной отметки – возможно только при одной из следующих гипотез:

H_1 - вызваны один слабый студент, один хороший и один отличник;

H_2 -вызваны один слабый студент и два хороших;

H_3 - вызваны два слабых студента и один хороший;

H_4 -вызваны два слабых студента и один отличник.

$P(H_1)=6\frac{a}{N}\frac{b}{N-1}\frac{c}{N-2}$; $P(H_2)=3\frac{b}{N}\frac{b-1}{N-1}\frac{c}{N-2}$;

$P(H_3)=3\frac{b}{N}\frac{c}{N-1}\frac{c-1}{N-2}$; $P(H_4)=3\frac{a}{N}\frac{c}{N-1}\frac{c-1}{N-2}$;

где $N=a+b+c$.

$$P(A)=P(H_1)\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+P(H_2)\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+P(H_3)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}+P(H_4)\cdot 1\cdot\frac{2}{9}.$$

Пример 3: Завод изготовляет изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе изделие с равной вероятностью осматривается одним из двух контролеров. Первый контролер обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1, второй – с вероятностью p_2. Если в цехе изделие не забраковано, оно поступает в ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается в вероятностью p_0. Известно, что изделие забраковано. Найти вероятность того, что оно забраковано: 1) первым контролером; 2) вторым контролером; 3) ОТК завода.

Решение: До опыта возможны четыре гипотезы:

H_0 - изделие не забраковано;

H_1 - изделие забраковано первым контролером;

H_2 - изделие забраковано вторым контролером;

H_3 - изделие забраковано ОТК завода.

Событие A - изделие забраковано. Гипотеза H_0 нам не нужна, так как $P(A|H_0)=0$;

$$P(H_1)=\frac{pp_1}{2};\ P(H_2)=\frac{pp_2}{2};\ P(H_3)=p\left(1-\frac{p_1+p_2}{2}\right)p_0.$$

Вероятности гипотез после опыта:

1) $P(H_1\,|\,A)=\dfrac{P(H_1)}{P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)}=\dfrac{p_1}{2p_0+(p_1+p_2)(1-p_0)}$;

2) $P(H_2\,|\,A)=\dfrac{p_2}{2p_0+(p_1+p_2)(1-p_0)}$;

3) $P(H_3\,|\,A)=\dfrac{p_0(2-(p_1+p_2))}{2p_0+(p_1+p_2)(1-p_0)}$.

Схема Бернулли

Пример 1: Производится стрельба по цели тремя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель равна 0.4. Если в цель попал один снаряд, он поражает цель (выводит ее из строя) с вероятностью 0.3; если два снаряда – с вероятностью 0.7; если три снаряда – с вероятностью 0.9. Найти полную вероятность поражения цели.

Решение: Гипотезы H_i - в цель попало i снарядов ($i=1,2,3$);

$P(H_1)=3\cdot 0.4\cdot 0.6^2=0.432$; $P(H_2)=3\cdot 0.4^2\cdot 0.6=0.288$; $P(H_3)=0.4^3=0.064$.

Событие A - поражение цели, $P(A)=0.432\cdot 0.3+0.288\cdot 0.7+0.064\cdot 0.9\approx 0.389$.

Пример 2: В урне имеется k шаров; каждый из них с вероятностью $1/2$ (независимо от других) может оказаться белым или черным. Из урны вынимается n раз по одному шару, причем вынутый шар каждый раз возвращается обратно, и шары перемешиваются. Среди вынутых n шаров m оказались белыми ($0<m<n$). Определить вероятность того, что среди k шаров урны ровно l белых.

Решение: Решаем задачу по формуле Байеса. Гипотезы H_l - в урне l белых шаров и $k-l$ черных ($l=1,2,\dots,k-1$).

До опыта $P(H_l)=C_k^l(1/2)^k$.

Событие A - среди n вынутых шаров оказалось ровно m белых. $P(A\,|\,H_l)=C_n^m(l/k)^m(1-l/k)^{n-m}$.

После опыта вероятность гипотезы H_l:

$$P(H_l\,|\,A)=\frac{C_k^l(l/k)^m(1-l/k)^{n-m}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}C_k^i(i/k)^m(1-i/k)^{n-m}}=\frac{C_k^l l^m(k-l)^{n-m}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}C_k^i i^m(k-i)^{n-m}}.$$

Пример 3: Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одна от другой n торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью p. Каждая попавшая в корабль торпеда с одинаковой вероятностью попадает в любой из k отсеков, на которые разделена подводная часть корабля. Торпеда, попавшая в отсек, приводит к его заполнению водой. Корабль идет ко дну, если водой заполнено не менее двух отсеков. Найти вероятность того, что корабль будет пущен ко дну.

Решение: Эту задачу удобно решать по формуле полной вероятности с гипотезами H_m - в корабль попало m торпед $(m=1,2,\ldots,n)$. $P(H_m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$.

Найдем $P(A|H_m)$. По условию $P(A|H_1)=0$. При $m \geq 2$ попавших торпедах корабль не затопляется, только если все торпеды попали в один отсек; следовательно, $P(A|H_m)=1-k(1/k)^m=1-\frac{1}{k^{m-1}}$ $m \geq 2$.

Полная вероятность потопления корабля $P(A)=\sum_{m=2}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}\left[1-\frac{1}{k^{m-1}}\right]$.

1.9. Задачи для самостоятельного решения

Классическое определение вероятности

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

2. В урне 7 черных и 3 белых шара. Какова вероятность того, что извлеченный наугад шар окажется белым?

3. Задумано двузначное число, цифры которого различны. Найти вероятность того, что окажется равным задуманному числу: а) случайно названное двузначное число; б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.

4. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна семи.

5. Монета брошена 2 раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится герб.

6. В кошельке лежат три монеты достоинством по 20 коп. и семь монет по 3 коп. Наудачу берется одна монета, а затем извлекается вторая монета, оказавшаяся монетой в 20 копеек. Определить вероятность того, что первая извлеченная монета имеет достоинство в 20 коп.

7. Из десяти билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что с помощью взятых наудачу пяти билетов а) один выигрышный; б) оба выигрышных; в) хотя бы один выигрышный.

8. 10 книг на одной полке расставляются наугад. Определить вероятность того, что при этом 3 определенные книги окажутся поставленными вместе.

9. Из 4-х одинаковых карточек, на которых написаны соответственно буквы А, Б, В и Г, наугад взяты две. Определить вероятность того, что буквы на этих карточках будут соседними по алфавиту.

10. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Определить вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

11. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Определить вероятность того, что среди наудачу взятых пяти кинескопов окажутся 3 кинескопа Львовского завода.

12. Имеется пять отрезков, длины которых равны соответственно 1, 3, 5, 7, 9. Определить вероятность того, что с помощью взятых наудачу трех отрезков из данных пяти можно построить треугольник.

13. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Определить вероятность того, что набраны нужные цифры.

14. Из колоды (36) наудачу вынимаются три карты. Определить вероятность того, что среди них окажется точно один туз.

15. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Определить вероятность того, что а) все пассажиры выйдут на 4 этаже; б) все пассажиры выйдут на разных этажах.

16. Из карточек разрезанной азбуки составлено слово «статистика». Затем из этих 10 карточек по схеме без возвращения отобрано 5 карточек.

Определить вероятность того, что из отобранных карточек можно составить слово «такси».

17. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд. Среди участников соревнований имеется 5 команд экстракласса. Определить вероятность того, что все команды экстракласса попадут в одну и ту же группу.

18. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд. Среди участников соревнований имеется 5 команд экстракласса. Определить вероятность того, что две команды экстракласса попадут в одну из групп, а три в другую.

19. В ящике содержится 20 деталей среди которых 3 бракованных. Наудачу извлечены 5 деталей. Определить вероятность того, что среди извлеченных деталей а) нет бракованных; б) одна бракованная.

20. Из ящика, содержащего три билета с номерами 1, 2, 3, вынимают по одному все билеты. Предполагается, что все последовательности номеров билетов имеют одинаковые вероятности. Определить вероятность того, что хотя бы у одного билет совпадет порядковый номер с собственным.

Теоремы сложения, умножения. Условная вероятность

1. Игра между А и В ведется на следующих условиях: в результате первого хода, который всегда делает А, он может выиграть с вероятностью 0,3; если первым ходом А не выигрывает, то ход делает В и может выиграть с вероятностью 0,5; если в результате этого хода В не выигрывает, то А делает второй ход, который может привести к его выигрышу с вероятностью 0,4. Определить вероятности выигрыша для А и для В.

2. Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат с одной попытки равна p. Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.

3. Игрок А поочередно играет по две партии с игроками В и С. вероятности выигрыша первой партии для В и С равны 0,1 и 0,2 соответственно; вероятность выиграть во второй партии для В равна 0,3, для

С равна 0,4. Определить вероятность того, что: а) первым выиграет В; б) первым выиграет С.

4. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятности для каждого из игроков.

5. Вероятность наступления события в каждом опыте одинакова и равна 0.2. Опыты производятся последовательно до наступления события. Определить вероятность того, что придется производить четвертый опыт.

6. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0.7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0.8. На первом станке изготовлены две детали, на втором три. Определить вероятность того, что все детали первосортные.

7. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди взяли по одному билету. Найти вероятности следующих событий: а) первый студент взял «хороший» билет; б) оба студента взяли «хорошие» билеты; в) второй взял «хороший» билет.

8. Вероятность того, что в электрической цепи напряжение превысит номинальное значение, равна p_1. При повышенном напряжении вероятность аварии прибора – потребителя электрического тока равна p_2. Определить вероятность аварии прибора вследствие повышения напряжения.

9. На участке АВ для мотоциклиста-гонщика имеются 12 препятствий, вероятность остановки на каждом из которых равна 0,1. Вероятность того, что от пункта В до конечного пункта С мотоциклист проедет без остановки, равна 0.7. Определить вероятность того, что на участке АС не будет ни одной остановки.

10. Для некоторой местности среднее число пасмурных дней в июле равно шести. Определить вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.

11. В цехе работают 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 3 человека. Определить вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся мужчинами.

12. В ящике имеется 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Определить вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

13. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0.95 для первого сигнализатора и 0.9 для второго. Определить вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

14. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0.7, а для второго – 0.8. Определить вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

15. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0.9. Определить вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

16. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0.4. Произведены три независимых измерения. Определить вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

17. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0.6; 0.7; 0.8. Определить вероятность того, что за время t безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

18. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0.8. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью, меньшей 0.4, можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?

19. В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Определить вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

20. Из урны, содержащей 4 белых, 4 черных и 2 красных шара, два игрока поочередно извлекают по одному шару без возвращения. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Определить вероятность того, что выиграет второй игрок.

Формула полной вероятности. Формула Байеса

1. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму равна: для лыжника – 0.9, для велосипедиста – 0.8, для бегуна – 0.75.Найти вероятность того, что спортсмен, вызванный наугад, выполнит норму.

2. Производится стрельба по цели 3-мя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель равна 0.4. Если в цель попал один снаряд, он поражает цель с вероятностью 0.3; если 2 снаряда – с вероятностью 0.7, если три снаряда – с вероятностью 0.9. Найти полную вероятность поражения цели.

3. Имеется две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

4. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества, вообще около 40% приборов собираются из высококачественных деталей. Если прибор собран из высококачественных деталей, его надежность за время t равна 0.95,если из деталей обычного качества – 0.7. Прибор испытывался в течение времени t и работал безотказно. Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

5. В первой урне находится 1 белый и 9 черных шаров, а во второй – 1 черный и 2 белых. Из каждой урны по схеме случайного выбора без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из 3-й урны, окажется белым.

6. Бросается монета и если она упадет так, что сверху оказывается герб, вынимается шар из урны I; в противном случае – из урны II. Урна I содержит 3 красных и 1 белый шар. Урна II содержит 1 красный и 3 белых шара. а) Какова вероятность, что вынутый шар красный? б) Какова вероятность того, что шар вынимался из урны I, если он оказался красным?

7. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором – 30 деталей, из них 24 стандартных, в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что случайным образом извлеченная деталь из наугад взятого ящика будет стандартна.

8. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

9. В вычислительной лаборатории имеются шесть клавишных автоматов и четыре полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0.95; для полуавтомата эта вероятность равна 0.8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

10. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0.7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

11. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей - на заводе №2 и 18 деталей - на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0.9; для деталей, изготовленных на заводах №2 и №3, эти вероятности соответственно равны 0.6 и 0.9, Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

12. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

13. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

14. Вероятности того, что во время работы цифровой электронной машины произойдет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0.8; 0.9; 0.9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет в оперативной памяти.

15. Числа грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0.1; для легковой машины эта вероятность равна 0.2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

16. Две перфораторщицы набили на разных перфораторах по одинаковому комплекту перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0.05; для второй перфораторщицы эта вероятность равна 0.1. При сверке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая перфораторщица. (Предполагается, что оба перфоратора были исправны.)

17. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием *K*, 30% - с заболеванием *L*, 20% - с заболеванием *M*. Вероятность полного излечения болезни *K* равна 0.7; для болезней *L* и *M* эти вероятности соответственно равны 0.8 и 0.9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием *K*.

18. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0.55, а ко второму – 0.45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом равна 0.9, а вторым – 0.98. Стандартное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед.

19. Завод изготовляет изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе изделие с равной вероятностью осматривается одним из двух контролеров. Первый контролер обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1, второй – с вероятностью p_2. Если в цехе изделие не забраковано, оно поступает в ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается в вероятностью p_0. Определить вероятности следующих событий: а) изделие будет забраковано в цехе; б) изделие будет забраковано в ОТК завода; в) изделие будет забраковано.

20. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0.8; 7 - с вероятностью 0.7; 4 - с вероятностью 0.6 и 2 - с вероятностью 0.5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

Схема Бернулли

1. Имеется 5 станций, с которыми поддерживается связь. Время от времени связь прерывается из-за атмосферных помех. Вследствие удаленности станции перерыв друг от друга связи с каждой из них происходит независимо от остальных с вероятностью 0.2. Найти вероятность того, что в данный момент времени будет имеется связь не более чем с двумя станциями.

2. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что "герб" выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

3. Вероятность попадания стрелка в десятку равна 0.7, в девятку – 0.3. Определить вероятность того, что данный стрелок при трех выстрелах наберет не менее 29 очков.

4. Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятностью 0.2 оказывается брюнетом, с вероятностью 0.3 – шатеном, с вероятностью 0.4 – блондином и с вероятностью 0.1 – рыжим. Выбирается наугад группа из 6-ти человек. Найти вероятности событий: а) в составе группы не меньше 4-х блондинов; б) в составе группы хотя бы один рыжий.

5. Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 6 колец и бросает кольца до одного попадания. Найти вероятность того, что хотя бы одно кольцо останется неизрасходованным, если вероятность попадания при каждом броске 0.1.

6. Сколько требуется сделать забросов, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.8 поймать хотя бы одну рыбу при $p(A) = 0.1$?

7. Вероятность брака детали равна p_1. После изготовления деталь проверяется контролером, который может пропустить деталь в готовую продукцию с вероятностью p_2. Изготовлено n деталей. Найти вероятность того, что в партии готовой продукции не более одной бракованной детали.

8. Событие B появится в случае, если событие A наступит не менее 4-х раз. Найти вероятность наступления B если будет произведено 5 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0.8.

9. Прибор состоит из 8 элементов, но может работать при наличии в исправном состоянии не менее 6 из них. Каждый из элементов за время работы t выходит из строя независимо от других с вероятностью 0.2. Найти вероятность того, что прибор откажет за время t.

10. Вероятность попадания в цель при одном выстреле 0.3. По цели произведено 4 выстрела. Найти вероятность трех попаданий.

11. Каждая выпущенная торпеда попадает в корабль в данной ситуации с вероятностью 0.6. Вероятность потопления корабля при одном попадании торпеды равна 0.5, при двух - 0.8, при трех и более - 1. По кораблю выпущены 4 торпеды. Найти вероятность его потопления.

12. В семье 10 детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки равными 0.5, определить вероятность того, что в данной семье: а) пять мальчиков; б)мальчиков не менее трех, но и не более восьми.

13. В библиотеке имеются книги только по технике и математике. Вероятности того, что любой читатель возьмет книгу по технике и по математике, равны, соответственно 0.7 и 0.3.Определить вероятность того, что пять читателей подряд книги ил только по технике, или только по математике, если каждый из них берет только одну книгу.

14. В систему массового обслуживания независимо друг от друга обращаются клиенты двух типов: обычные и с приоритетом в обслуживании. Вероятность поступления клиента с приоритетом равна 0.2. Найти вероятность того, что из 10 клиентов, поступивших в систему, клиентов с приоритетом будет не более двух.

15. Событие B наступает в том случае, если событие A появится не менее трех раз. Определить вероятность появления события B, если вероятность появления события А при одном опыте равна 0.3 и произведено: а) пять независимых опытов; б) семь независимых опытов.

16. За период в 131 год с 1865 по 1995 гг. в Санкт-Петербурге 10-го января среднесуточная температура от $-10^{\circ}C$ до $-5^{\circ}C$ наблюдалась 35 раз (событие A). Найти вероятность того, что в 5 ближайших лет событие A будет наблюдаться не менее трех раз.

17. Трое рабочих на своих станках производят изделия только отличного и хорошего качества, причем первый и второй из них производят изделия отличного качества с вероятностью0.9, а третий – с вероятностью 0.8.Один из этих рабочих изготовил 8 изделий, среди которых 2 хороших. Какова вероятность, что среди следующих 8 изделий, изготовленных тем же рабочим, будут 2 хороших и 6 отличных?

18. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80%. Найти вероятность того, что из 6 посеянных семян взойдут а) три; б) не менее трех.

19. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0.7. Найти вероятность успешной сдачи: а) трех экзаменов; б) двух экзаменов; в) не менее двух экзаменов.

20. Вероятность работы каждого из семи моторов в данный момент равна 0.8. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) хотя бы один мотор; б) два мотора; в) три мотора.

ГЛАВА 2
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим конечное вероятностное пространство (Ω, S, P).

Определение. Числовую функцию от элементарного события $\xi = \xi(\omega), \omega \in \Omega$ назовем *случайной величиной.*

2.1. Дискретные случайные величины и их законы распределения

Определение. Дискретной случайной величиной называется случайная величина с конечным или счетным множеством возможных значений.

Закон распределения (или просто распределение) дискретной случайной величины ξ определяется значениями $x_1, x_2, ..., x_k$, которые принимает дискретная случайная величина ξ, и вероятностями $P\{\xi = x_i\}$ этих значений. Обозначим $P\{\xi = x_i\} = p_i$. Тогда закон распределения дискретной случайной величины ξ можно определить с помощью таблицы, верхняя строка которой состоит из возможных значений x_i, а вторая строка – из вероятностей этих значений.

x_i	x_1	x_2	…	x_k
p_i	p_2	p_3	…	p_k

Числа второй строки удовлетворяют условиям $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Приведем примеры дискретных законов распределений.

1. Равномерное дискретное распределение на $\{1,2,...,N\}$:

$$P\{\xi = m\} = \frac{1}{N}, m = 1, 2, ..., N.$$

2. Геометрическое распределение с параметром p (0<p<1)

$$p\{\xi = k\} = p(1-p)^k, k = 0,1,2,...$$

3. Распределение Бернулли (биноминальное распределение) для числа успехов ξ при n независимых испытаниях в схеме Бернулли

$$P\{\xi = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, ..., n.$$

4. Распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

2.2. Непрерывные случайные величины, функции распределения непрерывных случайных величин

Определение. Непрерывной случайной величиной называется случайная величина с нечетным множеством возможных значений.

Определение. Функцией распределения непрерывной случайной величины $\xi(\omega)$, которую обозначают $F_\xi(x)$ называют вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $(-\infty, x)$

$$F_\xi(x) = P\{\xi \in (-\infty, x)\} = P\{\xi < x\}$$

Свойства функции распределения $F_\xi(x)$:

1) $0 \le F_\xi(x) \le 1$ - неотрицательная ограниченная функция;
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$;
3) $F_\xi(x)$ - неубывающая функция своего аргумента, то есть

$$\forall x_1, x_2 : x_2 \ge x_1 \Rightarrow F_\xi(x_2) \ge F_\xi(x_1).$$

Определение. Плотностью вероятности на прямой (или в R_1) называется функция f такая, что $f(x) \ge 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Каждой плотности f поставим в соответствие функцию распределения $F_\xi(x)$, определенную равенством

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)dy.$$

Это монотонная непрерывная функция, возрастающая от 0 до 1.

Приведем примеры непрерывных распределений.

1) Равномерное распределение на [a,b]:

$$f(x) = \begin{cases} c > 0, x \in [a,b] \\ 0, x \notin [a,b] \end{cases}$$

$$\int\limits_{R_1} f(x)dx = c\int\limits_a^b dx = c(b-a) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$$

2) Нормальное (или гауссовское) распределение с параметрами a, σ^2 $(a \in R_1, \sigma \in R_1^+)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Нормальное распределение с параметрами a, σ^2 обозначают $N(a, \sigma)$.

Закон с параметрами $a=0, \sigma=1$ называют нормированным (или стандартным) гауссовским законом (N(0,1)). Для закона N(0,1) плотность распределения имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

4) Показательное (или экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda>0$:

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0.$$

2.3. Числовые характеристики случайных величин

2.3.1. Математическое ожидание

Определение. Математическим ожиданием случайной величины ξ называется величина

$$M\xi=\int_{\Omega}\xi(\omega)dP=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k P_k\\ \int\limits_{R_1}xf(x)dx\end{cases}$$

Математическое ожидание ξ называют средним значением случайной величины ξ.

Перечислим основные свойства математического ожидания.

1) Математическое ожидание константы равно самой константе. Константа может быть вынесена за знак математического ожидания.

$$Mc=c,\ c=const.$$

$$M(c\xi)=cM\xi$$

Действительно, $Mc=\int\limits_{\Omega}\xi(\omega)dP=c\int\limits_{\Omega}dP=c$.

2) Свойтсво аддитивности математического ожидания.

Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$$M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta.$$

Действительно, $M(\xi+\eta)=\int\limits_{\Omega}(\xi+\eta)dP=\int\limits_{\Omega}\xi(\omega)dP+\int\limits_{\Omega}\eta(\omega)dP=M\xi+M\eta$.

Из этого свойства по индукции можно вывести свойство конечной аддитивности математического ожидания

$$M(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = M\xi_1 + \ldots + M\xi_n.$$

3) Линейность математического ожидания

$$M(a\xi(\omega) + b) = aM\xi(\omega) + b$$

4) Если $\xi(\omega) \geq 0$ и $M\xi(\omega) = 0$, то $P\{\xi(\omega) = 0\} = 1$.

Замечание.

Если событие A имеет вероятность, равную 1, то говорят, что событие A осуществляется почти наверное (п.н.). Таким образом, в свойстве 4 $\xi(\omega) = 0$ почти наверное.

5) $|M\xi| \leq M|\xi|$.

Приведем примеры вычисления математического ожидания для дискретных распределений.

1) Равномерное дискретное распределение на $\{1, 2, \ldots, N\}$.

В этом случае $p_k = \dfrac{1}{N}$.

$$M\xi = \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot \frac{1}{N} = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k}{N}.$$

2) Геометрическое распределение с параметром p (o<p<1).

В этом случае $p_k = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k = p(1-p)\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{p(1-p)}{p^2} = \frac{1-p}{p}.$$

3) Распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$.

В этом случае $p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

Примеры вычисления математических ожиданий для непрерывных распределений.

1. Равномерное распределение на [a,b]

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, x\in[a,b]\\ 0, x\notin[a,b]\end{cases}$$

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{1}{2(b-a)}(b^2-a^2)=\frac{a+b}{2}$$

2. Нормальное распределение $N(a,\sigma), a\in R_1, \sigma\in R_1^+$.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma+a)e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}a\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}d\left(-\frac{t^2}{2}\right)+a=\frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+a=a$$

3. Показательное распределение с параметром $\lambda>0$

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0$$

$$M\xi=\int_0^{\infty}\lambda xe^{-\lambda x}dx=\lambda\left[-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx\right]=\int_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}\cdot$$

Определение. М.о. случайной величины ξ^n называется *n*-ым моментом (или моментом *n* порядка) случайной величины ξ (обозначается $M\xi^n$).

Абсолютным n-ым моментом называется $M|\xi|^n$.

Центральным моментом порядка n называется $M(\xi-M\xi)^n$,а *абсолютным центральным моментом порядка n* - $M|\xi-M\xi|^n$.

2.3.2. Дисперсия

Определение. Центральный момент второго порядка называется дисперсией случайной величины ξ (обозначается $D\xi$).

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$

$$D\xi = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k - M\xi)^2 p_k \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f(x)dx \end{cases}$$

Свойства дисперсии:

1. $D\xi \geq 0$
   $D\xi = 0 \to \xi = const$

Доказательство:

$(\xi - M\xi)^2 \geq 0$

$M(\xi - M\xi)^2 \geq 0 \xrightarrow{\text{свойство4}} \xi - M\xi = 0$ п.н.

Это означает, что $\xi = M\xi$ п.н., т.е. $\xi = const$ п.н.

2. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$

Доказательство:

$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\left[\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2\right] = M\xi^2 - 2(M\xi)^2 + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2$

3. $D(c\xi) = c^2 D\xi$

Доказательство:

$D(c\xi) = M(c\xi - Mc\xi)^2 = Mc^2(\xi - Mc\xi)^2 = c^2 M(\xi - Mc\xi)^2 = c^2 D\xi$

Следствие: $D\xi = D(-\xi)$

2.3.3. Независимость случайных величин

Определение. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ называются независимыми, если для любых значений этих величин $x_{1j_1}, ..., x_{1jn}$ справедливо равенство

$$P\{\xi_1 = x_{1j_1}, \xi_1 = x_{1j_2}, ..., \xi_1 = x_{nj_n}\} = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i = x_{iji}\}.$$

Мультипликативное свойство математических ожиданий.

Теорема.

Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимы, то

$$M(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = \prod_{i=1}^{n} M\xi_i .$$

Из мультипликативного свойства математического ожидания следует аддитивное свойство дисперсии.

Теорема.

Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимы, то

$$D(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = D\xi_1 + ... + D\xi_n.$$

Получим выражение для $D(\xi + \eta)$ в общем случае

$$D(\xi+\eta) = M(\xi+\eta-M(\xi+\eta))^2 = M[(\xi-M\xi)+(\eta-M\eta)]^2 =$$
$$M\left[\!\left[(\xi-M\xi)+(\eta-M\eta)^2 - 2(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)\right]\!\right] = D\xi + D\eta + 2M[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)]$$

Математическое ожидание $M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$ называется *ковариацией* случайных величин ξ и η и обозначается $\text{cov}(\xi,\eta) = M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)]$. Таким образом, $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi,\eta)$. Если случайные величины независимы, то $\text{cov}(\xi,\eta) = 0$.

Определение. Случайные величины ξ и η называются *некоррелированными*, если $\text{cov}(\xi,\eta) \neq 0$. Обратное утверждение не верно.

Определение. *Средним квадратическим* или *стандартным отклонением* σ_ξ случайной величины ξ называется положительный квадратный корень из ее дисперсии: $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$.

За характеристику зависимости между двумя случайными величинами ξ и η принимается отношение их ковариацией и произведений их средних квадратических отклонений. Эта безразмерная величина называется *коэффициентом корреляции* случайных величин ξ и η:

$$\zeta_{\xi\eta} = \frac{\text{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi, \sigma_\eta}.$$

Очевидно, что ковариация случайной величины ξ с самой собой равна ее дисперсии, $\text{cov}(\xi,\xi) = D\xi$, а ее коэффициент корреляции с самой собой равен 1, т.е. $\zeta_{\xi\xi} = 1$.

Зависимость между случайными величинами, характеризуемая коэффициентом корреляции, называется *корреляцией. Случайные величины* называются *коррелированными,* если их коэффициент корреляции отличен от нуля. Случайные величины называются *некоррелированными*, если их коэффициент корреляции равен нулю. Область значений функции $\zeta_{\xi\eta}$ - отрезок [-1;1].

2.4. Примеры решения задач

Пример 1. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение: Случайная величина X - число стандартных деталей среди отобранных деталей – имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2$. Найдем вероятности возможных значений X по формуле

$$P(X = k) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m},$$

где N - число деталей в партии, n - число стандартных деталей в партии, m - число отобранных деталей, k - число стандартных деталей среди отобранных. Найдем

$$P(X = 0) = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45};$$

$$P(X = 1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45};$$

$$P(X = 2) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}.$$

Составим искомый закон распределения:

X	0	1	2
P	$1/45$	$16/45$	$28/45$

Пример 2. проекция X радиуса-вектора случайной точки окружности радиуса a на диаметр имеет функцию распределения (закон арксинуса)

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \ge a; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a} & \text{при} \quad -a < x < a; \\ 0 & \text{при} \quad x \le a. \end{cases}$$

Определить: а) вероятность того, что X окажется в пределах промежутка $(-\frac{a}{2};\frac{a}{2})$; б) плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X.

Решение: а) Вероятность того, что X окажется в пределах $(-\frac{a}{2};\frac{a}{2})$, равна

$$P(-\frac{a}{2} < X < \frac{a}{2}) = F(\frac{a}{2}) - F(-\frac{a}{2}) = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

б) Плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X равна:

1) для всех x, принадлежащих промежутку $(-a,a)$,

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Пример 3. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X, заданной законом распределения

X	-4	6	10
P	0.2	0.3	0.5

Решение: Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений X на их вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

$$M(X) = -4\cdot 0.2 + 6\cdot 0.3 + 10\cdot 0.5 = 6.$$

Дисперсия дискретной случайной величины равна математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от ее математического отклонения:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

$$D(X) = -16\cdot 0.2 + 36\cdot 0.3 + 100\cdot 0.5 - 36 = 21.6.$$

Пример 4. Случайная величина на интервале $(-c,c)$ задана плотностью распределения $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X.

Решение: Используем формулу $M(X) = \int_a^b xf(x)dx$. Подставив

$a = -c, b = c$, $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}$, получим

$$M(X) = \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}} dx.$$

Учитывая, что подынтегральная функция нечетная и пределы интегрирования симметричны относительно начала координат, заключаем, что интеграл равен нулю. Следовательно $M(X) = 0$.

Этот результат можно получить сразу, если принять во внимание, что кривая распределения симметрична относительно прямой $x = 0$.

2.5.Задачи для самостоятельного решения

1. Построить ряд распределения и функцию распределения случайного числа попаданий мячом в корзину при одном броске, если вероятность попадания мячом в корзину при одном броске p=0.3. Построить функцию распределения такой случайной величины. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

2. Опыт состоит из трёх независимых бросаний монеты, при каждом из которых герб выпадает с вероятностью p=0.5. Для случайного появления герба построить: а) ряд распределения ; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

3. Два баскетболиста поочерёдно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадёт. Построить ряд распределений случайного числа бросков , если вероятность попадания для первого баскетболиста равна 0.4, для второго - 0.6. Построить функцию распределения такой случайной величины. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

4. Мишень состоит из круга № 1 и двух колец с номерами 2 и 3. Попадание в круг №1 даёт 10 очков, в кольцо №2 даёт 5 очков, в кольцо №3 даёт –1 очко. Вероятность попадания в круг №1 и кольца №2 и 3 соответственно равны 0.5; 0.3; 0.2. . Построить ряд распределений для случайной суммы выбитых очков в результате трёх попаданий. Построить функцию распределения такой случайной величины. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

5. Опыт производится с помощью серии одинаковых приборов, которые включаются один за другим через 5 сек. Время срабатывания прибора 16 сек. Опыт прекращается сразу же после того, как сработает хотя бы один прибор. Найти ряд распределения для случайного числа включенных приборов, если вероятность сработать для каждого прибора равна ½. Построить функцию распределения такой случайной величины. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

6. По статистическим данным хотя бы один пожар, требующий выезда пожарной команды, может возникнуть в трех обслуживаемых районах города с номерами 1, 2, 3 в течение времени T соответственно с вероятностями $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$. Построить ряд распределения числа районов из числа трех обслуживаемых, в которых за время T случился хотя бы один пожар. Предполагается, что пожары возникают независимо. Построить функцию распределения такой случайной величины. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

7. Выборка из партии изделий для контроля производится случайным образом до обнаружения первого бракованного изделия, но не более 5 штук изделий. Вероятность того, что изделие бракованное равна 0.1. Построить ряд распределений числа выбранных изделий. Построить функцию распределения такой случайной величины. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

8. Испытываются на надежность 3 прибора. Вероятность безотказно пройти испытание для каждого соответственно равны 0.7, 0.8, 0.9. Построить ряд распределения числа приборов, прошедших испытание безотказно. Построить функцию распределения такой случайной величины. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

9. Два прибора независимо испытываются до тех пор, пока хотя бы один из них не откажет. Отказ каждого прибора при каждом испытании происходит с вероятностью 0.2. Построить ряд распределения числа испытаний. Построить функцию распределения такой случайной величины. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

10. При измерении окружности груди у 25 спортсменов установлено, что у троих этот объем равен 88 см, у четверых – 92 см, у пятерых – 96 см, у шестерых – 98 см и у семи – 100 см. Пусть случайная величина ξ - окружность груди спортсмена. Построить закон распределения и функцию распределения такой случайной величины. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

11. Функция распределения равномерно распределенной случайной величины ξ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ x & при \quad 0\le x\le 1,\\ 1 & при \quad x>1.\end{cases}$$

Найти плотность вероятности случайной величины ξ.

12. Дана функция распределения случайной величины ξ

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

(закон нормального распределения). Найти плотность вероятности случайной величины ξ.

13. Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид

$$F(t)=1-e^{-\frac{t}{T}} \qquad (t\ge 0).$$

Найти: а) вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T; б) плотность вероятности $f(x)$.

14. Случайная величина эксцентриситета детали характеризуется функцией распределения Рэлея

$$F(x)=1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad (x\ge 0).$$

Найти: а) моду распределения; б) медиану распределения; в) плотность вероятности $f(x)$.

15. Дана функция распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины ξ, содержащей один или два неизвестных параметров (a и b):

1) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \ln x^2, & 1\le x\le a,\\ 1, & x\ge a.\end{cases}$

$\alpha=0$, $\beta=1.1$.

2) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x^2-2x-3), & -1\le x\le 1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$

$\alpha=0$, $\beta=2$.

4) $F(x)=a+b\cdot arctg(x)$.

$\alpha=0$, $\beta=1$.

4) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin x, & 0\le x\le a,\\ 1, & x\ge a.\end{cases}$

$\alpha=0$, $\beta=\dfrac{1}{4}$.

Найти а) параметры a и b; б) плотность распределения вероятностей; в) вероятность того, что при трех независимых наблюдениях случайная величина примет значения в промежутке $[\alpha,\beta]$ ровно один раз; не менее одного раза; г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$; д) найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану (если они существуют).

16. Дана плотность распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины ξ, содержащая постоянную a:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x\in(a,\dfrac{1}{4}],\\ 0, & x\notin(a,\dfrac{1}{4}].\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1, \\ 0, & |x|\ge 1. \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} 2\cos x, & |x|\le a, \\ 0, & |x|>a. \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} a, & x\in[1,5], \\ 0, & x\notin[1,5]. \end{cases}$

Найти а) параметр a; б) функцию распределения вероятностей; в) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

17. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2, \\ 1/2+(1/\pi)\arcsin(x/2), & -2<x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина ξ примет значение, заключенное в интервале (-1,1).

18. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\ge 2, \\ 0.25x, & 2<x\le 4, \\ 1, & x>4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение: а) меньше 0.2 ;б) меньше трёх; в) не меньше трёх; г) не меньше пяти.

19. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{1}{16}x^2, & 0<x\le 4, \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина ξ ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу (2; 3).

20. Случайная величина ξ задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}, & x\in(-c,c), \\ 0, & x\notin(-c,c). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины ξ.

21. Случайная величина ξ задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} c(x^2 + 2x), & x \in (0,1), \\ 0, & x \notin (0,1). \end{cases}$$

Найти: а) параметр c; б) математическое ожидание величины ξ.

22. Случайная величина ξ задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (0, \pi/2), \\ 0, & x \notin (0, \pi/2). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание функции $\eta = \xi^2$ (не находя предварительно плотности распределения η).

Ответы

Классическое определение вероятности

1. 5/36 **2.** 0.3 **3.** а) 1/90 б) 1/81 **4.**1/6 **5.** ¾ **6.** 0.3 **7.** а)1/9 б)2/9 в)1/3 **8.** 1/15 **9.** ½ **10.** ½ **11.** 0.4 **12.** 0.3 **13.** 1/81 **14.** 0.278 **15.** а)0.0046 б) 0.0926 **16.** 2/21 **17.** 0.029 **18.** 0.706 **19.** а) 0.399 б) 0.461 **20.** 2/3

Теоремы сложения, умножения. Условная вероятность

1. 0.44; 0.35 **2.** $1-(1-p)^2$ **3.** а) 0.374 б)0.3816 **4.** 2/3; 1/3 **5.** 0.512 **6.** 0.251 **7.** а) 1/5; б) 1/30; в) 1/5 **8.** $p_1 p_2$ **9.** 0.198 **10.** 0.645 **11.** 0.29 **12.** 0.071 **13.** 0.14 **14.** 0.38 **15.** 0.18 **16.** 0.432 **17.** а) 0.188 б) 0.444 в) 0.336 **18.** 5 **19.** 0.2 **20.** 0.73

Формула полной вероятности. Формула Байеса

1. 0.86 **2.** 0.389 **3.** 13/132 **4.** 0.475 **5.** 0.2333 **6.** а) 0.5; б) 0.75 **7.** 0.783 **8.** 2/3 **9.** 0.89 **10.** 0.85 **11.** 0.78 **12.** 0.5 **13.** 0.4 **14.** 0.21 **15.** 3/7 **16.** 1/3 **17.** 0.46 **18.** 0.53 **19.** а) $0.5p(p_1+p_2)$; б) $p(1-0.5(p_1+p_2))p_0$ **20.** 0.17; 0.365; 0.28; 0.17

Формула Бернулли

1. 0.05712 **2.** а) 0.1875; б) 0.8125 **3.** 0.532 **4.** а) 0.511; б) 0.4686 **5.** 0.4686 **6.** 16 **7.** $p_1((1-p_2)^n + np_2(1-p_2)^{n-1})$ **8.** 0.7373 **9.** 0.2031 **10.** 0.0756 **11.** 0.8285 **12.** а) 0.2461; б) 0.9346 **13.** 0.1705 **14.** 0.6778 **15.** а) 0.1631; б) 0.3529 **16.** 0.13 **17.** 0.1704 **18.** а) 0.0819; б) 0.9830 **19.** а) 0.3087; б) 0.1323; в) 0.9692 **20.** а) 1; б) 0.0043; в) 0.0287

Случайные величины

1.

ξ	0	1
p	0.7	0.3

2.

ξ	0	1	2	3
p	1/8	3/8	3/8	1/8

3.

ξ	0	1	2	3	4	5	...
p	0.4	0.36	0.096	0.0864	0.0230	0.0207	...

4.

ξ	3	7	11	12	15	16	20	21	25	30
p	0.008	0.036	0.054	0.006	0.027	0.18	0.135	0.15	0.225	0.125

5.

ξ	3	4	5	...	n	...
p	0.5	0.25	0.125	...	0.5^{n-2}	...

6.

ξ	0	1	2	3
p	0.504	0.398	0.092	0.006

7.

ξ	1	2	3	4	5
p	0.1	0.09	0.081	0.0729	0.6561

8.

ξ	0	1	2	3
p	0.006	0.092	0.398	0.504

9.

ξ	1	2	3	...	n	...
p	0.36	0.2304	0.1475		$0.36\cdot 0.8^{2n-2}$	

10.

ξ	88	92	96	98	100
p	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28

11. $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$ **12.** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

13. а) 0.6337; б) $f(x)=\dfrac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}},\quad t\ge 0$.

14. а) σ; б) $\sigma\sqrt{\ln 4}$; в) $f(x)=\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad x\ge 0$.

15. а) $\sqrt{e}$; б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x\in[1,\sqrt{e}],\\ 0, & x\notin[1,\sqrt{e}].\end{cases}$; в) $3(\ln(1.21))(1-\ln(1.21))^2$; $1-(1-\ln(1.21))^3$

16. а) 0; б) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2\sqrt{x}, & 0<x\le 1/4,\\ 1, & x>1/4.\end{cases}$ **17.** 2/3 **18.** а) 0; б) 0.75; в) 0.25

19. 0.0839 **20.** 0 **21.** а) 0.75; б) 0.6875.

ЛИТЕРАТУРА

1. Венцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С.Венцель. М.: Наука, 1964
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В.Гнеденко. М.: Физматгиз, 1961
3. Гмурман В.Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику/ В.Е.Гмурман. – 9-е изд., стер.- М.: Высш.школа, 2003. 478с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для втузов / В.Е.Гмурман.- М.: Высшее образование, 2009. 403с.
5. Сборник задач по теории вероятностей: учеб. пособие для вузов / Зубков А.М. [и др]. М.: Наука, 1989. 320с.
6. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистики и теории случайных функций / под ред.: А.А.Свешникова. М.: Наука, 1965. 632с.

Учебное издание

Ирина Геннадиевна Брагина

Надежда Викторовна Сергеева

Леонид Валентинович Бессонов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

для студентов ВУЗов

Оригинал-макет авторов

Подписано в печать 12.03.2014. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Печать RISO. Объём 3,25 печ. л.
Тираж 50 экз. Заказ №

ООО Издательство «Научная книга»
410031, г. Саратов, ул. Московская, 35

Отпечатано с готового оригинал-макета
Центр полиграфических и копировальных услуг
Предприниматель Серман Ю.Б. Свидетельство № 3117
410600, г.Саратов, ул.Московская, д.152, офис 19, тел. 26-18-19, 51-16-28