Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

С. В. Тышкевич

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. ЧАСТЬ 1

Учебно-методическое пособие для студентов
физического факультета

Саратов
2015

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.1я73
Т33

Автор: *С. В. Тышкевич*

Т33 **Практикум по математическому анализу. Часть 1** : учеб.-метод. пособие для студентов физ. фак./ С. В. Тышкевич. – Саратов, 2015. – 56 с.

Учебно-методическое пособие содержит краткие теоретические сведения, основные методы решения задач, примеры и задачи для самостоятельного решения по таким разделам математического анализа, как числовые последовательности и ряды, предел и непрерывность функций, дифференцирование и интегрирование функций одной переменной.

Для студентов физического факультета.

Рекомендует к печати:

кафедра теории функций и приближений
механико-математического факультета
Саратовского государственного университета

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.1я73

Оглавление

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для студентов физического факультета и состоит из пяти глав. Первая содержит основные сведения из теории множеств. Глава 2 посвящена числовым последовательностям и рядам: вводится понятие предела последовательности, рассматриваются свойства сходящихся последовательностей, признаки сходимости числовых последовательностей и рядов. В следующей главе приводятся понятие предела функции в точке, свойства функций, имеющих предел, рассматриваются функции, непрерывные в точке и на множестве. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной изучаются в главах 4 и 5 соответственно.

Материал пособия изложен так, чтобы максимально помочь читателю овладеть основами математического анализа: каждая глава содержит необходимые теоретические сведения (раздел обозначен буквой A), определенное количество модельных примеров (раздел B), задачи для аудиторных занятий (раздел C) и задачи для самостоятельного решения (раздел D). Задачи, в нумерации которых имеется буква Д, взяты из сборника задач [6]; часть примеров и задач составлена автором.

При изучении курса математического анализа полезно воспользоваться учебниками [1–5].

Автор надеется, что настоящее пособие поможет читателю глубже усвоить теоретический материал курса математического анализа и приобрести навыки в решении задач.

Глава 1. Множества. Вещественные числа

1.1. Операции над множествами. Ограниченные множества. Метод математической индукции

А

Множеством называется совокупность объектов любой природы. Объекты, образующие в своей совокупности данное множество, называются его *элементами* или *точками*.

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$; если же элемент a не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$.

Два множества A и B называются *равными* ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов.

Если все элементы множества B принадлежат множеству A, то множество B называется *подмножеством* множества A, при этом пишут $B \subset A$ (или $A \supset B$).

Очевидно, что:

- $A \subset A$;
- если $B \subset A$ и $A \subset B$, то $A = B$;
- если $A \subset B$, $B \subset C$, то $A \subset C$.

Тот факт, что множество A совпадает с множеством тех элементов (из множества E), которые удовлетворяют условию α, записывается следующим образом:

$$A = \{a \in E |\ \alpha\}.$$

Если для некоторого свойства α во всем множестве E вообще нет элементов, ему удовлетворяющих, то запись $A = \{a \in E |\ \alpha\}$ в этом случае определяет *пустое множество*. Пустое множество не содержит ни одного элемента и обозначается символом $\varnothing$.

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из указанных множеств.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и A и B, т. е. из общих для этих множеств элементов.

Разностью $A \setminus B$ двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов A, не принадлежащих B.

Множество X действительных чисел называется *ограниченным*, если

$$\exists c > 0\ \forall x \in X\ |x| \le c.$$

Пусть X – ограниченное множество действительных чисел. *Точной нижней гранью* множества X называется такое число $m = \inf X$, что:

1) $\forall x \in X \ x \geq m$;
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x' \in X : x' < m + \varepsilon$.

Точной верхней гранью множества X называется число $M = \sup X$ такое, что:

1) $\forall x \in X \ x \leq M$;
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x' \in X : x' > M - \varepsilon$.

Метод математической индукции. Чтобы доказать, что некоторое утверждение справедливо для всякого натурального числа n, достаточно доказать:

1) что это утверждение справедливо для $n = 1$;
2) что если это утверждение справедливо для какого-нибудь натурального числа $n = k$, то оно справедливо также и для следующего натурального числа $k + 1$.

B

Пример 1. *Определить множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если* $A = \{x \in \mathbb{R} : \ 1 < |x - 3| \leq 2\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} : \ |x| < \frac{3}{2}\right\}$.

Решение.
Так как

$$1 < |x-3| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| > 1, \\ |x-3| \leq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - 3 < -1, \\ x - 3 > 1, \end{array} \right. \\ -2 \leq x - 3 \leq 2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 4, \end{array} \right. \\ 1 \leq x \leq 5, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leq x < 2, \\ 4 < x \leq 5, \end{array} \right.$$

$$|x| < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2},$$

то согласно определениям объединения, пересечения и разности множеств получим

$$A \cup B = \left(-\frac{3}{2}, \ 2\right) \cup (4, 5] \, , \ A \cap B = \left[1, \ \frac{3}{2}\right) \, ,$$

$$A \setminus B = \left[\frac{3}{2}, \ 2\right) \cup (4, \ 5] \, , \ B \setminus A = \left(-\frac{3}{2}, \ 1\right) .$$

Пример 2. *Найти* $\sup A$ *и* $\inf A$, *если* $A = \left\{ \frac{n-1}{3n+2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Решение.

Выполнив преобразования

$$\frac{n-1}{3n+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3n-3}{3n+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3n+2)-5}{3n+2} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{5}{3n+2}\right),$$

с учетом определений точных нижней и верхней граней множества видим, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\inf A = 0, \quad \sup A = \frac{1}{3}.$$

C

1) Отметить на плоскости с декартовой системой координат xOy множество точек, соответствующее следующему множеству A упорядоченных пар (x, y):

   а) $A = \{(x, y) :\ |x| + |y| = 2\}$;

   б) $A = \{(x, y) :\ \cos(x - y) = 1\}$.

2) Определить множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если:

   а) $A = \{x \in \mathbb{R} :\ 2 < |x - 2| \le 3\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} :\ |x| \le \frac{1}{2}\right\}$;

   б) $A = \{(x, y) :\ xy \le 0\}$, $B = \{(x, y) :\ y \ge x\}$;

   в) A – множество целых чисел, делящихся на 2,
   B – множество целых чисел, делящихся на 3.

3) Доказать, что $|a| = \max\{a, -a\}$.
4) Найти $\sup A$ и $\inf A$, если:

   а) $A = \left\{1 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

   б) $A = \left\{\frac{1}{n - \frac{51}{5}},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

   в) $A = \left\{\frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

5) Д19, Д7, Д8, Д5.

D

1) Отметить на плоскости с декартовой системой координат xOy множество точек, соответствующее следующему множеству A упорядоченных пар (x, y):

   а) $A = \left\{(x, y) :\ \frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}\right\}$;

   б) $A = \{(x, y) :\ \max\{|x|, |y|\} = 1\}$.

2) Определить множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если:

   а) $A = \left\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 - 4x - 5 < 0\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 - 2x > 0\right\}$;

б) $A = \{(x,\, y) :\ \sin(x - y) = 0\}$, $B = \{(x,\, y) :\ \cos(x + y) = 1\}$.

3) Найти:

а) $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$;

б) $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right]$.

4) Найти $\sup A$ и $\inf A$, если:

а) $A = \left\{\frac{n}{2n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

б) $A = \left\{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

в) $A = \left\{\frac{n-1}{n+1} \sin \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

5) Д2, Д3, Д6, Д10.

Глава 2. Числовые последовательности и ряды

2.1. Понятие предела последовательности. Арифметические операции и сходимость

А

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, \ldots$ поставлено в соответствие число x_n. Тогда говорят, что определена *последовательность* чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ или, короче, *последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ N = N(\varepsilon) \text{ такое, что } \forall n > N, n \in \mathbb{N}, \text{ выполняется } \big|x_n - a\big| < \varepsilon.$$

При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, или $x_n \to a$, и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится (стремится) к числу a.

Теорема 1 (арифметические действия с пределами)**.** *Если существуют пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то существуют также пределы их суммы $\{x_n + y_n\}$, разности $\{x_n - y_n\}$, произведения $\{x_n y_n\}$ и частного $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ($y_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$), и выполняются равенства:*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \ \textit{если} \ \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0. \tag{2.3}$$

Последовательность $\{\alpha_n\}$, предел которой равен нулю, называется *бесконечно малой.*

Последовательность $\{\beta_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

$$\forall M > 0 \ \exists\ N \text{ такое, что } |\beta_n| > M \ (n > N),$$

при этом пишут:

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty \text{ или } \beta_n \to \infty \text{ (при } n \to \infty). \tag{2.4}$$

Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а $\{y_n\}$ – бесконечно малая, то $x_n y_n \to 0$.

Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а $\{y_n\}$ – бесконечно большая, то $\frac{x_n}{y_n} \to 0$.

B

Пример 3. *Пользуясь определением предела последовательности, доказать:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{1-n} = -3$.

Решение.

1) Зададим $\varepsilon > 0$ и составим неравенство

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Оно верно для всех $n > \frac{1}{\varepsilon}$ или для всех элементов последовательности x_n с номерами $n > N$, где $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что $|x_n| < \varepsilon$ для всех $n > N$.

2) Зададим $\varepsilon > 0$ и составим неравенство

$$\big|x_n - (-3)\big| = \left|\frac{3n+1+3-3n}{1-n}\right| = \frac{4}{n-1} < \varepsilon.$$

Оно верно для всех $n > \frac{4}{\varepsilon} + 1$ или для всех элементов последовательности x_n с номерами $n > N$, где $N = \left[\frac{4}{\varepsilon} + 1\right] + 1$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что $\big|x_n - (-3)\big| < \varepsilon$ для всех $n > N$.

C

1) Д42(а, в), Д43(в), Д44;
2) Исследовать на сходимость последовательность $x_n = (-1)^n$;
3) Д46, Д49, Д53, Д55, Д56, Д48.

D

1) Д41, Д42(б), Д43(б);
2) Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^4 - 2n^2 + n + 1}{4n^4 + 3n^3 + 2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 \cos 2n}{n^4 - 2n + 1}$;

3) Д47, Д51, Д54, Д57.

2.2. Признаки сходимости последовательностей

A

Теорема 2 (о предельном переходе в неравенствах)**.** *Если* $x_n \to a$, $z_n \to a$ *и* $x_n \le y_n \le z_n$ *для всех* $n = 1, 2, \ldots,$ *то* $y_n \to a$.

Теорема 3 (о сходимости монотонной и ограниченной последовательности)**.** *Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.*

Теорема 4 (критерий Коши[1] сходимости последовательности)**.** *Для того чтобы последовательность* $\{x_n\}$ *имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши, т. е.*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \text{ такое, что } \forall\ n, m > N \text{ выполняется } |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

B

Пример 4. *Доказать, что при* $a > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0.$$

Решение.

Так как $a > 1$, то можем записать $a = 1 + \lambda$, где $\lambda > 0$. Тогда по формуле бинома Ньютона

$$a^n = (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \ldots + \lambda^n >$$

$$> \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 = \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2.$$

При $n > 2$ справедливо

$$n - 1 > \frac{n}{2},$$

значит

$$a^n > \frac{(a-1)^2}{4} n^2, \tag{2.5}$$

или

$$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{4}{(a-1)^2 n}.$$

Однако $\dfrac{4}{(a-1)^2 n} \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0.$$

[1] Augustin Louis Caushy (1789, Париж – 1857, Со, Франция) — великий французский математик.

C

1) Д61, Д65 (указание: использовать неравенство (2.5) при $a = \sqrt[n]{n}$);
2) Д77, Д78, Д83, Д82, Д88;
3) Д127, Д128.

D

1) Д58, Д59;
2) Д79 – Д81, Д84, Д85;
3) Д129, Д130.

2.3. Числовой ряд. Признаки сходимости рядов с положительными членами

A

Выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \qquad (2.6)$$

где a_k – числа ($k = 1, 2, 3, \ldots$), называется *числовым рядом.*

Числа

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

называются n-ми *частичными суммами* ряда (2.6).

Ряд (2.6) *сходится*, если существует предел последовательности его частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

при этом пишут

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = S$$

и называют число S *суммой ряда.*

Если же последовательность частичных сумм ряда не имеет предела, то ряд (2.6) называется *расходящимся.*

Теорема 5 (Критерий Коши сходимости числовых рядов)**.** *Для того чтобы ряд* (2.6) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлось такое* N, *что для всех натуральных* $n > N$ *и любого натурального* p *выполнялось неравенство*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Теорема 6 (необходимое условие сходимости числового ряда)**.** *Если ряд* (2.6) *сходится, то*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0. \qquad (2.7)$$

Теорема 7 (первый признак сравнения). *Пусть даны два ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \ и \ \ \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

с неотрицательными элементами.

Если $a_k \le b_k \ \ (k = 1, 2, 3, \ldots)$, *то из сходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, *а из расходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Теорема 8 (второй признак сравнения). *Пусть даны два ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \ и \ \ \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

с неотрицательными элементами.

Если

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = A > 0, \tag{2.8}$$

то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *одновременно сходятся или расходятся.*

Теорема 9 (предельный признак Д'Аламбера[2]). *Пусть дан ряд* (2.6) *с положительными элементами. Если*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q, \tag{2.9}$$

то ряд (2.6) *сходится при* $q < 1$ *и расходится при* $q > 1$.

Теорема 10 (предельный признак Коши). *Пусть дан ряд* (2.6) *с положительными элементами. Если*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q, \tag{2.10}$$

то ряд (2.6) *сходится при* $q < 1$ *и расходится при* $q > 1$.

В

Пример 5 (Д2549). *Доказать непосредственно сходимость ряда*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

и найти его сумму.

---

[2] Jean Le Rond d'Alembert (1717, Париж – 1783, Париж, Франция) – французский математик, механик, философ.

Решение.

Запишем частичную сумму ряда:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1},$$

поэтому сумма ряда равна

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Так как существует конечный предел последовательности частичных сумм ряда, то этот ряд сходится, и его сумма $S = 1$.

Пример 6 (Д2576)**.** *Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость ряда*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Решение.

Запишем n-ю частичную сумму данного ряда:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда при любом n и $p = n$ имеет место неравенство

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

т.е. критерий Коши сходимости числового ряда не выполняется, поэтому данный ряд расходится.

Пример 7 (Д2578)**.** *Исследовать сходимость ряда*

$$\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \ldots + \frac{1000^k}{k!} + \ldots$$

Решение.

Воспользуемся предельным признаком Д'Аламбера сходимости числовых рядов. Так как

$$a_k = \frac{1000^k}{k!}, \quad a_{k+1} = \frac{1000^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1000^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{1000^k} = \frac{1000}{k+1},$$

то

$$q = \lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1000}{k+1} = 0 < 1,$$

и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1000^k}{k!}$ сходится по признаку Д'Аламбера.

C

1) Д2547, Д2550, Д2552;
2) Д2557, Д2558, Д2563;
3) Д2575(б), Д2577(а), Д2581(а), Д2589(в), Д2590.

D

1) Д2546, Д2548;
2) Д2561, Д2559, Д2562;
3) Д2573, Д2574, Д2580, Д2581(б), Д2587, Д2589(б).

2.4. Сходимость знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимость

A

Пусть даны числа $a_k > 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k, \qquad (2.11)$$

называется *знакочередующимся.*

Теорема 11 (признак Лейбница[3]). *Если последовательность $\{a_k\}$, монотонно убывая, стремится к нулю ($a_k \geq a_{k+1}$, $a_k \to 0$ при $k \to \infty$), то ряд* (2.11) *сходится.*

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится.

Теорема 12. *Если ряд абсолютно сходится, то он и просто сходится.*

Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка слагаемых.

Если ряд сходится, но не абсолютно, то такой ряд называется *условно сходящимся* рядом.

Теорема 13 (Римана[4] об условно сходящихся рядах). *Если ряд сходится, но не абсолютно, то, каково бы ни было число A, можно так переставить элементы этого ряды, что сумма получившегося ряда будет равной A.*

Теорема 14 (признак Абеля[5]). *Пусть*

---

[3] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646, Лейпциг – 1716, Ганновер, Германия) – немецкий философ, математик, дипломат.

[4] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826, Ганновер, Германия – 1866, Селаска, Италия) – немецкий математик.

[5] Niels Henrik Abel (1802, Фингё – 1829, Фроланд, Норвегия) – норвежский математик.

1) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ *сходится,*

2) последовательность $\{a_k\}$ *монотонна и ограничена,*

тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots$ *сходится.*

Теорема 15 (признак Дирихле[6]). *Пусть*

1) последовательность $\{a_k\}$*, монотонно убывая, стремится к нулю,*

2) последовательность частичных сумм B_n *ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *ограничена,*

тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots$ *сходится.*

B

Пример 8 (Д2661). *Используя формулу*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

где C *– постоянная Эйлера[7] и* $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$*, доказать сходимость ряда*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

и найти его сумму.

Решение.

Запишем $2n$-ю частичную сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$:

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \ldots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= (C + \ln 2n + \varepsilon_{2n}) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= (C + \ln 2n + \varepsilon_{2n}) - (C + \ln n + \varepsilon_n) = \ln 2 + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n).$$

Откуда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} (\ln 2 + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n)) = \ln 2,$$

т.е. ряд $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \ldots$ сходится к $\ln 2$.

[6] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805, Дюрен – 1859, Гёттинген, Германия) – немецкий математик.

[7] Leonhard Euler (1707, Базель, Швейцария – 1783, Санкт-Петербург, Россия) – выдающийся швейцарский, немецкий и российский математик.

Пример 9. *Исследовать сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$.

Решение. Имеет место неравенство

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится, поэтому по первому признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$ сходится абсолютно.

Пример 10 (Д2663)**.** *Члены сходящегося ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ *переставить так, чтобы он стал расходящимся.*

Решение.

Исходный ряд сходится по признаку Лейбница.

Выполним перестановку его элементов следующим образом: за тремя положительными элементами следует один отрицательный, т.е. рассмотрим ряд

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) +$$

$$+ \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Покажем, что этот ряд расходится. В силу неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{2}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > 0$$

имеем

$$a_n > \frac{1}{\sqrt{6n-5}}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{6n-5}}$ расходится ($\frac{1}{\sqrt{6n-5}} > \frac{1}{n}$ при $n > 5$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится), то по первому признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

C

1) Д2662, Д2669;
2) исследовать ряд на сходимость:

а) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k!)}{k^3+1}$; б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin\frac{\pi}{k+1}$;

в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi k}{4}}{k}$ (указание: воспользоваться равенством

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin j\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\Bigg).$$

D

1) Д2660, Д2666, Д2665;
2) исследовать ряд на сходимость:

а) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k^2}{2^k}$; б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \sin\frac{1}{k}$;

3) Д2686.

Глава 3. Предел и непрерывность функций

3.1. Функция. Предел функции и его свойства

А

Определение предела функции по Коши. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a, если она определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ такое, что } \forall x, \ 0 < |x - a| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \underset{x \to a}{\to} A$.

Определение предела функции по Гейне[1]. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a, если она определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ такой, что x_n принадлежат указанной окрестности точки a и $x_n \neq a$ для всех n, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A.

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x_n \to a \\ x_n \neq a}} f(x_n) = A$.

Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне эквивалентны.

Теорема 16 (критерий Коши существования предела функции)**.** *Для того чтобы существовал конечный предел* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *была определена в окрестности* a, *за исключением, быть может, самой точки* a, *и*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \textit{такое, что} \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

как только $0 < |x' - a| < \delta$ *и* $0 < |x'' - a| < \delta$, *где* x', x'' *– любые точки из указанной окрестности.*

Число A называется *правым (левым) пределом функции* $f(x)$ в точке a, если она определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ такое, что}$$

[1] Heinrich Eduard Heine (1821, Берлин – 1861, Галле, Германия) – немецкий математик.

неравенство
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$
выполняется $\forall x,\ 0 < x - a < \delta$ $(-\delta < x - a < 0)$.

Обозначение:
$$f(a+0) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) \text{ – правый предел функции,}$$
$$f(a-0) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) \text{ – левый предел функции.}$$

Для того, чтобы $f(x)$ имела предел в конечной точке a, необходимо и достаточно, чтобы существовали правый и левый пределы функции $f(x)$ в этой точке, равные между собой:
$$f(a+0) = f(a-0) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Теорема 17 (арифметические действия с пределами функций)**.** *Пусть*
$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B,$$
где A, B *– конечные числа. Тогда*
$$\lim_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = A \pm B,$$
$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = A\cdot B,$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \qquad (B \neq 0).$$

C

1) Д405(е, з), Д406(е, з), Д407(а – в);
2) Д411, Д409, Д414, Д420, Д424.

D

1) Д405(б – г), Д406(б – д), Д407(г – и);
2) Д412, Д413, Д416, Д418, Д419, Д425.

3.2. Пределы элементарных функций. Первый замечательный предел

A

Первым замечательным пределом называется
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

B

Пример 11 (Д474(а)). *Найти предел*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2\,(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2\,(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right\}=1\cdot\frac{1}{(1+1)}=\frac{1}{2}.$$

C

1) Д437, Д438, Д447, Д435, Д457;
2) Д471, Д472, Д475, Д480, Д483, Д495.

D

1) Д441, Д443, Д444, Д451, Д458;
2) Д474(в), Д477, Д479, Д484, Д498.

3.3. Второй замечательный предел

A

Вторым замечательным пределом называется

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

B

Пример 12. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$.

Решение.

При $x\to 1$ основание степени $\frac{2x-1}{x}$ стремится к 1, показатель – к ∞, поэтому вычислим данный предел с помощью второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}}\right)^{\frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}-1}}=e^2.$$

C

Д529, Д519(а), Д507, Д511, Д521, Д531, Д533, Д541.

D

Д519(б), Д506, Д512, Д520, Д525, Д536, Д538, Д549.

3.4. Символы Ландау[2]. Непрерывность и характер разрывов функции

А

Символы Ландау.

Говорят, что функция $f(x)$ есть O большое от $g(x)$ на E и пишут при этом

$$f(x) = \underline{O}(g(x)) \text{ на } E,$$

если

$$|f(x)| \le C\,|g(x)| \text{ на } E,$$

где C – не зависящая от x положительная константа.

Говорят, что функция $f(x)$ есть O большое от $g(x)$ при $x \to a$ и пишут при этом

$$f(x) = \underline{O}(g(x)) \text{ при } x \to a,$$

если существует окрестность $U(a)$ точки a (конечной или бесконечной) такая, что

$$f(x) = \underline{O}(g(x)) \ (x \in U(a),\ x \ne a).$$

Говорят, что функция $f(x)$ есть o маленькое от $g(x)$ при $x \to a$ и пишут при этом

$$f(x) = \overline{o}(g(x)) \quad \text{при } x \to a,$$

если

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны (равны асимптотически) при $x \to a$, если обе они определены и не равны нулю в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и если

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Обозначение: $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$.

Непрерывность функции в точке.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если она определена в некоторой окрестности точки a и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Теорема 18 (о непрерывности в точке сложной функции). *Если функция $y = g(x)$ непрерывна в точке a, функция $f(y)$ непрерывна в точке $b = g(a)$, то сложная функция $F(x) = f\left(g(x)\right)$ непрерывна в точке a.*

Если функция $f(x)$, заданная в окрестности точки a, не является непрерывной в точке a, то говорят, что она *разрывна* в точке a.

Различают следующие типы точек разрыва:

[2] Edmund Georg Hermann Landau (1877, Берлин – 1938, Берлин, Германия) – немецкий математик.

1) *устранимый разрыв* – предел функции в точке не равен значению функции в этой точке;
2) *разрыв первого рода* – в конечной точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы $f(a-0)$, $f(a+0)$, неравные между собой;
3) *разрыв второго рода* – функция $f(x)$ определена в окрестности точки a, исключая быть может a, и имеет разрыв в точке a, не являющийся разрывом первого рода; в частности, если функция $f(x)$ непрерывна для всех x в достаточно малой окрестности точки a, за исключением $x = a$, и неограничена в этой окрестности, то говорят, что $f(x)$ имеет *бесконечный разрыв* в точке $x = a$ (сама точка a называется *точкой бесконечного разрыва* функции $f(x)$).

B

Пример 13. *Верны ли равенства при $x \to 0$:*

а) $1 - \cos = \overline{o}(x)$; *б)* $\sin x = x + \overline{o}(x)$.

Решение.

а) Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot x}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{4x} = 0,$$

то

$$1 - \cos x = \overline{o}(x) \ \ (\text{при } x \to 0)\,.$$

б) Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = 1 - 1 = 0,$$

то

$$\sin x - x = \overline{o}(x) \ \ (\text{при } x \to 0)\,,$$

или

$$\sin x = x + \overline{o}(x) \ \ (\text{при } x \to 0)\,.$$

C

1) Д649, Д650(д, е), Д651(в);
2) Д678, Д681, Д682, Д702, Д713, Д740(б), Д731(б).

D

1) Д650(б, ж), Д651(г, ж);
2) Д676, Д680, Д685, Д695, Д696, Д740(в), Д731(в).

3.5. Функции, непрерывные на множествах. Равномерная непрерывность

A

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Теорема 19 (первая теорема Вейерштрасса[3]). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Теорема 20 (вторая теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она достигает в некоторых точках этого отрезка своих точных верхней и нижней граней.*

Функция $f(x)$, заданная на множестве X, называется *равномерно непрерывной на* X, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\forall\, x_1, x_2 \in X :\ |x_1 - x_2| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 21 (Кантора[4] – Гейне). *Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нём.*

B

Пример 14. *Показать, что функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной в интервале* $(0,\ 1)$.

Решение.

Пусть $x_n = \dfrac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}}$, $(n = 1,\ 2, \ldots)$. Тогда

$$f\left(x_{2n}\right) = 1, \quad f\left(x_{2n+1}\right) = -1.$$

Так как при $n \to \infty$

$$x_{2n+1} - x_{2n} \to 0, \quad \Big|f\left(x_{2n+1}\right) - f\left(x_{2n}\right)\Big| = 2,$$

то при $\varepsilon < 2$ не найдется ни одного значения δ, не зависящего от x, такого, что при любых x и x', удовлетворяющих условию $|x - x'| < \delta$, выполняется неравенство $\Big|f\left(x\right) - f\left(x'\right)\Big| < \varepsilon$. Поэтому функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной в интервале $(0,\ 1)$.

C

Д788 – Д790, Д799 – Д801.

D

Д796 – Д798, Д792.

[3] Karl Weierstraß (1815, Остенфельде – 1897, Берлин, Германия) – выдающийся немецкий математик.

[4] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845, Санкт-Петербург, Россия – 1918, Галле (Зале), Германия) – немецкий математик.

Глава 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

4.1. Производная. Дифференцируемость функции в точке

А

Производной от функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения её приращения $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ в этой точке к соответствующему приращению $\Delta x = x - x_0$ аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если её приращение Δy в этой точке можно записать в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \overline{o}(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)\,,$$

где A – некоторая константа, не зависящая от Δx.

Для того, чтобы функция $f(x)$ имела производную в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируемой в этой точке.

Теорема 22 (дифференцирование суммы, разности, произведения, частного)**.** *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x, то их сумма, разность, произведение и частное (при условии, что $v(x) \neq 0$) имеют производные и справедливы равенства*

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \tag{4.1}$$

$$(uv)' = u'v + uv', \tag{4.2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0). \tag{4.3}$$

Теорема 23 (дифференцирование сложной функции)**.** *Пусть задана сложная функция $z = F(x) = f(g(x))$, где $y = g(x)$, $z = f(y)$, при этом функция $g(x)$ имеет производную в точке x, а функция $f(y)$ имеет производную в точке y. Тогда существует производная функции $F(x)$ в точке x, равная*

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{4.4}$$

Теорема 24 (производная обратной функции)**.** *Если $y = f(x)$ есть строго монотонная непрерывная функция и $x = \varphi(y)$ – обратная к ней функция, имеющая в точке y производную $\varphi'(y) \neq 0$, то функция $f(x)$ имеет в соответствующей точке x производную, определяемую формулой*

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}. \tag{4.5}$$

Таблица производных простейших элементарных функций.

$(C)' = 0$ $(C = \mathrm{const})$;	$(\cos x)' = -\sin x$;
$(x^n)' = nx^{n-1}$;	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
$(a^x)' = a^x \ln a$;	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
$(e^x)' = e^x$;	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(x > 0,\ a > 0)$;	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$;	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
$(\sin x)' = \cos x$;	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

B

Пример 15. *Используя определение, найти производные функций:*

а) $y = \sin x$*;* *б)* $y = a^x$*.*

Решение.

а) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

б) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} =$$

$$= a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Пример 16 (Д877)**.** *Используя таблицу и правила дифференцирования, найти производную функции* $y = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$.

Решение.

По правилу дифференцирования сложной функции

$$y' = \left(2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}\right)' = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \ln 2}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}.$$

Пример 17 (Д1040). *Найти производную* $\dfrac{dy}{dx}$ *функции* $y = y(x)$, *заданной параметрически, если*

$$x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t.$$

Решение.

По правилу дифференцирования функции, заданной параметрически

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(\cos^2 t\right)'_t}{\left(\sin^2 t\right)'_t} = \frac{2\cos t \cdot (-\sin t)}{2 \sin t \cos t} = -1.$$

C

1) Д848, Д860, Д866, Д867, Д875, Д890, Д977(а);
2) Д921, Д923, Д1043, Д1045.

D

1) Д977(б), Д861, Д864, Д872, Д876, Д895, Д902, Д912;
2) Д922, Д930, Д1044, Д1046.

4.2. Дифференциал функции и геометрический смысл производной. Производные и дифференциалы высших порядков

A

Геометрический смысл производной.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Уравнение

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

называется *уравнением касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0,\ f(x_0))$. Здесь производная $f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной, т. е. равна тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox.

Прямая, проходящая через точку касания $(x_0,\ f(x_0))$ перпендикулярно к касательной, называется *нормалью к кривой* $y = f(x)$. *Уравнение нормали* к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0,\ f(x_0))$ имеет вид

$$x - x_0 + f'(x_0)\,(y - f(x_0)) = 0.$$

Дифференциал функции.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Главную, линейную относительно приращения аргумента $\Delta x = x - x_0$, часть приращения функции называют *дифференциалом функции* $f(x)$ в точке x_0:

$$df(x_0) = A\Delta x = f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

Приращение Δx независимой переменной называют дифференциалом этой переменной и обозначают $\Delta x = dx$. Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x запишется в виде:

$$dy = df(x) = f'(x)dx.$$

Геометрически: в то время как Δy является приращением ординаты кривой, dy является соответственным приращением ординаты касательной.

Форма записи первого дифференциала инвариантна относительно любой (независимой и зависимой) переменной.

Для подсчёта малых приращений дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ можно пользоваться формулой

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{4.6}$$

относительная погрешность которой сколь угодно мала при достаточно малом $|\Delta x| = |x - x_0|$, если $f'(x_0) \neq 0$.

Производные и дифференциалы высших порядков.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, функция $f'(x)$ имеет в точке x_0 производную, то функция $f(x)$ называется *дважды дифференцируемой* в точке x_0, а производная от производной $(f')'(x_0)$ — *производной второго порядка* и обозначается $f''(x_0)$.

Аналогично определяются третья, четвертая и все последующие производные: $f^{(3)}(x) = (f''(x))'$, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Теорема 25 (формула Лейбница)**.** *Пусть функции u и v имеют производные n-го порядка. Тогда справедлива формула*

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)},$$

где C_n^k – число сочетаний из n элементов по k.

Дифференциалы высших порядков от функции $y = f(x)$ последовательно определяются формулами

$$d^n y = d\left(d^{n-1}y\right) \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

где $d^1 y = dy$.

Если x – независимая переменная, то полагают

$$d^2x = d^3x = \ldots = d^n x = 0.$$

В этом случае справедливы формулы

$$d^n y = y^{(n)}dx^n \quad \text{и} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

B

Пример 18. *Написать уравнение касательной и нормали к кривой* $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ *в точке* $(-2,\ 5)$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$. Тогда

$$f'(x) = 3x^2+4x-4, \quad f'(-2) = 3\cdot 4-8-4 = 0, \quad f(-2) = -8+8+8-3 = 5.$$

Таким образом, $y = 5$ – уравнение касательной, $x = -2$ – уравнение нормали.

Пример 19 (Д1099)**.** *Заменяя приращение функции дифференциалом, приближённо вычислить* $\sqrt[3]{1,02}$.

Решение.

Воспользуемся формулой (4.6). Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 1.$$

Тогда

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = \frac{1}{3}.$$

При $x = 1,02$ будем иметь

$$x - x_0 = 0,02, \text{ и}$$

$$\sqrt[3]{1,02} = f(1,02) \approx f(1) + f'(1)\cdot 0,02 = 1 + \frac{1}{3}\cdot 0,02 = \frac{151}{150}.$$

Пример 20 (Д1130)**.** *Найти* d^2y *для функции* $y = e^x$*, если:*

а) x *– независимая переменная;*

б) x *– зависимая переменная.*

Решение.

а) $dy = e^x dx$, поэтому

$$d^2y = d(dy) = d\left(e^x dx\right) = e^x dx^2.$$

б) $dy = e^x dx$, поэтому

$$d^2y = d(dy) = d\left(e^x dx\right) = de^x \cdot dx + e^x d(dx) = e^x dx^2 + e^x d^2x.$$

C

1) Д1072, Д1078(а);
2) Д1090(а, г), Д1100;
3) Д1116, Д1124, Д1165, Д1143, Д1174.

D

1) Д1071, Д1077;
2) Д1090(б, е), Д1101;
3) Д1112 – Д1115, Д1123, Д1161, Д1142, Д1173.

4.3. Теоремы Ролля[1], Лагранжа[2], Коши, Тейлора[3]

А

Теорема 26 (Ролля). *Пусть функция $f(x)$:*

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$,
2) дифференцируема на интервале (a, b),
3) $f(a) = f(b)$.

Тогда на интервале (a, b) существует точка c такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема 27 (Лагранжа, формула конечных приращений). *Пусть функция $f(x)$:*

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$,
2) дифференцируема на интервале (a, b).

Тогда на интервале (a, b) существует точка c такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Теорема 28 (Коши, о среднем). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:*

1) непрерывны на отрезке $[a, b]$;
2) дифференцируемы на интервале (a, b);
3) $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Пусть $g(b) \neq g(a)$. Тогда на интервале (a, b) существует точка c такая, что

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема 29 (формула Тейлора с остаточным членом в общей форме). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно и имеет производную порядка n на интервале (a, b). Тогда для каждого $x \in (a, b)$ и любого натурального p найдется число θ, $0 < \theta < 1$,что*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x),$$

$$\text{где } R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!p}(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}\left(a + \theta(x-a)\right).$$

---

[1] Michel Rolle (1652, Амбер – 1719, Париж, Франция) – французский математик.

[2] Joseph Louis Lagrange (1736, Турин, Италия – 1813, Париж, Франция) – французский математик.

[3] Brook Taylor (1685, Эдмонтон, гр. Мидлсекс – 1731, Лондон, Англия) – английский математик.

Остаточный член в форме Лагранжа ($p = n$) имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!}(x-a)^n.$$

Остаточный член в форме Коши ($p = 1$) имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{(n-1)!}(x-a)^n(1-\theta)^{n-1}.$$

Теорема 30 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано[4]). *Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, имеет в этой окрестности производные $f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ до $(n-1)$ порядка, а в точке x_0 – производную $f^{(n)}(x_0)$ порядка n, то она разлагается по формуле Тейлора по степеням $(x-x_0)$ с остаточным членом в форме Пеано:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \overline{o}\left((x-x_0)^n\right) \qquad (x \to x_0).$$

Основные разложения ($x_0 = 0$):

1) $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \overline{o}(x^n)$;
2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \overline{o}\left(x^{2n}\right)$;
3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \overline{o}\left(x^{2n+1}\right)$;
4) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \overline{o}(x^n)$;
5) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \overline{o}(x^n)$.

B

Пример 21. *Почему теорема Коши:*
а) неверна для функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$;
б) верна для функций $f(x) = x^2 + x$ и $g(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$; найти точку c.

Решение.

а) Нарушено условие 3) теоремы Коши: в точке $x = 0$ имеем

$$\left(f'(0)\right)^2 + \left(g'(0)\right)^2 = 0.$$

[4] Giuseppe Peano (1852, Кунео – 1932, Турин, Италия) – итальянский математик.

б) Все условия теоремы выполнены:

$$g(-1) \neq g(1), \quad (f'(0))^2 + (g'(0))^2 \neq 0 \quad \textit{при всех} \quad x \in [-1,\, 1].$$

Здесь $c = -\dfrac{1}{3}$.

Пример 22. *Найти разложение функции $f(x) = \ln x$ по степеням $x - 2$.*

Решение.
Так как

$$\ln x = \ln\left(2 + (x-2)\right) = \ln\left(2\left(1 + \frac{x-2}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right),$$

то на основании пятого основного разложения имеем

$$\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n + \overline{o}\left((x-2)^n\right).$$

C

1) Д1236;
2) Д1377, Д1384, Д1388;
3) Д1399, Д1400, Д1406.

D

1) Д1235, Д1248, Д1245;
2) Д1381, Д1382, Д1389;
3) Д1398, Д1401, Д1405.

4.4. Раскрытие неопределённостей

A

Теорема 31 (правило Лопиталя[5] раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$). *Пусть:*

1) *$f(x)$ и $g(x)$ определены на некотором интервале $(a - \delta,\, a + \delta)$ и дифференцируемы на нём, за исключением, быть может, точки $x = a$;*
2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty\right)$;
3) $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ *при* $x \in (a - \delta,\, a + \delta)$;
4) *существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

[5] Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital (1661, Париж – 1704, Париж, Франция) – французский математик.

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и имеет место равенство*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Раскрытие неопределённостей видов $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^0 и т.п. путем алгебраических преобразований и логарифмирования приводится к раскрытию двух основных типов.

B

Пример 23. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

Решение.

Исходную функцию запишем в виде

$$(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}=e^{\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x)}.$$

Найдем предел

$$\lim_{x\to 1}\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}}=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln(1-x))'}{\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2\frac{\pi x}{2}}{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}\cdot\ \lim_{x\to 1}\frac{\cos^2\frac{\pi x}{2}}{1-x}=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\left(\cos^2\frac{\pi x}{2}\right)'}{(1-x)'}=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{-2\cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{1}{2}}{-1}=0.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x)}=e^0=1.$$

C

Д1320, Д1324, Д1333, Д1342, Д1351, Д1365, Д1354.

D

Д1323, Д1326, Д1330, Д1345, Д1352, Д1356, Д1361.

4.5. Приложение дифференциального исчисления к исследованию функций

А

Монотонность функции.

Функция $f(x)$, определённая на интервале $(a,\, b)$, называется:

1) *возрастающей (убывающей)*, если для любых точек x_1, x_2 из интервала $(a,\, b)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2));$$

2) *неубывающей (невозрастающей)*, если для любых точек x_1, x_2 из интервала $(a,\, b)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется

$$f(x_1) \le f(x_2) \quad (f(x_1) \ge (x_2)).$$

Такие функции называются *монотонными* (в первом случае — *строго монотонными*).

Теорема 32 (достаточное условие монотонности)**.** *Если при любом x из интервала $(a,\, b)$*

1) $f'(x) > 0$ (< 0), то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a,\, b)$;
2) $f'(x) \ge 0$ (≤ 0), то функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на $(a,\, b)$.

Локальный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения.

Точка x_0 называется *точкой локального экстремума (максимума или минимума)* функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется соответственно неравенство

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))\,.$$

Теорема 33 (Ферма[6], необходимое условие локального экстремума)**.** *Пусть функция $f(x)$ достигает в точке x_0 локального экстремума (максимума или минимума) и в ней существует производная $f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.*

Точки, в которых производная функции обращается в нуль или не существует, называются *критическими*.

Теорема 34 (первое достаточное условие экстремума)**.** *Если функция $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 и имеет в этой окрестности производную, удовлетворяющую условиям:*

$$f'(x_0) \le 0 \text{ при } x < x_0 \quad и \quad f'(x_0) \ge 0 \text{ при } x > x_0,$$

то x_0 есть точка локального минимума;

если же

$$f'(x_0) \ge 0 \text{ при } x < x_0 \quad и \quad f'(x_0) \le 0 \text{ при } x > x_0,$$

то x_0 есть точка локального максимума.

[6] Pierre de Fermat (1601, Бомон-де-Ломань – 1665, Кастр, Франция) – французский математик.

Теорема 35 (второе достаточное условие экстремума)**.** *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то x_0 есть точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$.*

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то наибольшее и наименьшее значения функцией достигаются или в критических точках или на концах отрезка.

Выпуклость функции.

Кривая $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *выпуклость вверх (вниз)*, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех её точек x касательная к кривой в точке с абсциссой x_0 расположена выше (ниже) самой кривой.

Теорема 36 (достаточное условие выпуклости)**.** *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 вторую непрерывную производную и*

$$f''(x_0) > 0 \quad (f''(x_0) < 0),$$

то кривая $y = f(x)$ имеет в точке x_0 выпуклость вниз (вверх).

Точки, в которых меняется характер выпуклости, называют *точками перегиба.*

Теорема 37. *Пусть функция $f(x)$ обладает следующими свойствами:*

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(k)}(x_0) = 0,$$

$f^{(k+1)}(x)$ непрерывна в x_0 и $f^{(k+1)}(x_0) \neq 0$.

Тогда, если k – нечётное число, то кривая $y = f(x)$ имеет в точке x_0 при $f^{(k+1)}(x_0) < 0$ выпуклость вверх, при $f^{(k+1)}(x_0) > 0$ выпуклость вниз; если k – чётное число, то x_0 – точка перегиба кривой.

В

Пример 24 (Д1275)**.** *Определить промежутки возрастания или убывания функции $y = \dfrac{x^2}{2^x}$.*

Решение.

Найдем производную данной функции:

$$y' = \frac{2x \cdot 2^x - x^2 \cdot 2^x \ln 2}{2^{2x}} = x \cdot 2^{-x} \left(2 - x \ln 2\right).$$

Так как $y' > 0$ при $x \in \left(0, \dfrac{2}{\ln 2}\right)$, то функция $y = \dfrac{x^2}{2^x}$ возрастает на этом интервале. В интервалах $(-\infty, 0)$ и $\left(\dfrac{2}{\ln 2}, +\infty\right)$ производная y' отрицательна, поэтому функция y убывает на каждом из этих интервалов.

Пример 25 (Д1301)**.** *Найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции $y = x + x^{\frac{5}{3}}$.*

Решение.

Дважды продифференцировав функцию $y = x + x^{\frac{5}{3}}$, получим

$$y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}.$$

При $x > 0$ вторая производная y'' положительна, при $x < 0$ – отрицательна, поэтому график функции имеет при $x < 0$ выпуклость вверх, при $x > 0$ – выпуклость вниз. Точка $O(0,\, 0)$ является точкой перегиба.

C

1) Д1269, Д1272;
2) Д1302, Д1305;
3) Д1430, Д1437, Д1443, Д1586.

D

1) Д1270, Д1274, Д1277;
2) Д1303, Д1304, Д1307;
3) Д1433, Д1436, Д1440, Д1581, Д1582.

4.6. Построение графиков функций

A

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty \text{ (или } -\infty) \quad \text{либо} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty \text{ (или } -\infty).$$

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой графика функции* $f(x)$ при $x \to +\infty$, если

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0,$$

где $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$.

Аналогично определяется наклонная асимптота при $x \to -\infty$.

Общая схема построения графика функции $f(x)$.

1. Найти область определения функции $f(x)$.
2. Учесть особенности функции (чётность, периодичность, знакопеременность). Найти точки пересечения графика с осями координат.
3. Отметить значения функции на границе области определения и в точках разрыва. Найти вертикальные асимптоты.
4. Найти наклонные асимптоты.

5. Определить участки монотонности и локальные экстремумы.
6. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба.
7. Отобразить перечисленные особенности функции при построении её графика.

В

Пример 26 (Д1491). *Построить график функции* $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

Решение.

Область определения функции: $(-\infty,\,-1) \cup (-1,\,1) \cup (1,\,+\infty)$.

Поскольку

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2-1}} = -\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = -f(x),$$

то функция нечётная, и её график симметричен относительно точки $(0,\,0)$.

Так как

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = -\infty, \quad \lim_{x\to -1+0} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = +\infty,$$

то прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой графика.

Аналогично, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

Так как

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \infty,$$

то наклонных асимптот нет.

В области определения функция непрерывна и дифференцируема:

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-1} - x\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2} = \frac{3\left(x^2-1\right)-2x^2}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}} = \frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}.$$

Найдем критические точки функции, решив уравнение

$$\frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Так как $f'(x) < 0$ при $x \in \left(-\sqrt{3},\,-1\right) \cup (-1,\,1) \cup \left(1,\,\sqrt{3}\right)$, то на этих промежутках функция убывает. На промежутках $\left(-\infty,\,-\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3},\,+\infty\right)$ $f'(x) > 0$, и функция возрастает. Точка $x = -\sqrt{3}$ – точка локального максимума, $y_{\max} = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$; $x = \sqrt{3}$ – точка локального минимума, $y_{\min} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$.

Вторая производная

$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x\left(x^2-1\right)^{\frac{4}{3}} - \left(x^2-3\right)\frac{4}{3}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}2x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{8}{3}}} = \frac{2x\left(9-x^2\right)}{9\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^7}}$$

обращается в нуль при $x = \pm 3$, $x = 0$.

На промежутках $(-\infty,\ -3) \cup (-1,\ 0) \cup (1,\ 3)$ $f''(x) > 0$, и функция выпукла вниз; при $x \in (-3, 1) \cup (0,\ 1) \cup (3,\ +\infty)$ $f''(x) < 0$, и функция выпукла вверх. Точки $\left(-3,\ -\frac{3}{2}\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$ – точки перегиба.

C

Д1477, Д1484, Д1504, Д1532, Д1547.

D

Д1481, Д1489, Д1506, Д1525, Д1537, Д1546.

Глава 5. Интегральное исчисление функций одной переменной

5.1. Первообразная и неопределённый интеграл. Замена переменной. Интегрирование по частям

А

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале $(a,\, b)$, если в каждой его точке x (за исключением, быть может, конечного их числа) выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Если на некотором промежутке функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то функция $F(x) + C$, где C – произвольная константа, также будет первообразной.

Неопределённым интегралом от непрерывной на некотором промежутке функции $f(x)$ называется произвольная её первообразная, т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – константа.

Свойства неопределённого интеграла.

а) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
б) $\int dF(x) = F(x) + C$;
в) $\int \left(af(x) + bg(x)\right) dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx + C$.

Таблица неопределённых интегралов.

1) $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n+1 \neq 0)$;

2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$;

3) $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + C$;

4) $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0)$;

5) $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

6) $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C;$

8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{ctg} x + C;$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C; \end{cases}$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$

11) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C;$

12) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$

Основные методы интегрирования.

1) *Замена переменной.*
Пусть функции $g(t)$, $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны. Если

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

то

$$\int g\left(\varphi(x)\right) \varphi'(x)\, dx = G\left(\varphi(x)\right) + C.$$

2) *Интегрирование по частям.*
Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные $u' = u'(x)$ и $v' = v'(x)$ соответственно. Имеет место формула

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

B

Пример 27 (Д1696). *Найти интеграл* $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\, dx.$

Решение.
Вычислим данный интеграл, обозначая $\cos x = t$.

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\, dx = -\int (\cos x)^{-\frac{3}{2}}\, d\cos x = -\int t^{-\frac{3}{2}} dt =$$

$$-\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{t}} + C = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$$

Пример 28. *Используя метод интегрирования по частям, найти*

$$\int x \sin x\, dx.$$

Решение.

Пусть $u = x$, $dv = \sin x\,dx$, тогда $du = dx$, $v = -\cos x$, и

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Пример 29. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Решение.

Рассмотрим интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$.

С одной стороны,

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c.$$

С другой стороны, вычислим этот интеграл методом интегрирования по частям: пусть

$$u = \frac{1}{1+x^2}, \quad dv = dx, \quad \text{тогда}$$

$$du = -\frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2}, \quad v = x, \quad \text{и}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{(x^2+1)-1}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{x}{1+x^2} + 2\left(\int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x - 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{arctg} x + c = \frac{x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x - 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2},$$

откуда находим

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x\right) + C.$$

C

1) Д1635, Д1649, Д1662, Д1678, Д1682, Д1770, Д1781;
2) Д1792, Д1796, Д1826.

D

1) Д1636, Д1638, Д1650, Д1664, Д1680, Д1775, Д1777, Д1727, Д1778;
2) Д1798, Д1802, Д1797, Д1830.

5.2. Интегрирование рациональных функций

А

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь. Если

$$Q(x)=(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_r)^{k_r}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{m_s},$$

где a_1,..., a_r – попарно различные вещественные корни многочлена $Q(x)$ кратности k_1,..., k_r, а квадратные трёхчлены $x^2+p_jx+q_j$ кратности m_j $(j=\overline{1,\,s})$ имеют отрицательный дискриминант, то существуют числа $A_{1,1}$, $A_{1,2}$,..., A_{1,k_1},..., $A_{r,1}$, $A_{r,2}$,..., A_{r,k_r}, $M_{1,1}$,..., M_{1,m_1},...,$M_{s,1}$,...,M_{s,m_s},$N_{1,1}$,..., N_{1,m_1},...,$N_{s,1}$,...,N_{s,m_s} такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{1,1}}{x-a_1}+\frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{1,k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}+\ldots+$$

$$+\frac{A_{r,1}}{x-a_r}+\frac{A_{r,2}}{(x-a_r)^2}+\ldots+\frac{A_{r,k_r}}{(x-a_r)^{k_r}}+\ldots+$$

$$+\frac{M_{1,1}x+N_{1,1}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_{1,2}x+N_{1,2}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{M_{1,m_1}x+N_{1,m_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}}+\ldots+$$

$$+\frac{M_{s,1}x+N_{s,1}}{x^2+p_sx+q_s}+\frac{M_{s,2}x+N_{s,2}}{(x^2+p_sx+q_s)^2}+\ldots+\frac{M_{s,m_s}x+N_{s,m_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}}. \qquad (5.1)$$

Для нахождения всех коэффициентов вида A_{r,k_r}, M_{s,m_s}, N_{s,m_s} правую часть равенства (5.1) приводят к общему знаменателю $Q(x)$ и приравнивают коэффициенты полученного в числителе многочлена соответствующим коэффициентам многочлена $P(x)$.

Неопределённый интеграл от любой рациональной дроби на всяком промежутке, где знаменатель дроби не обращается в нуль, существует и выражается через элементарные функции, а именно является алгебраической суммой рациональных дробей, натуральных логарифмов и арктангенсов.

B

Пример 30 (Д1877). *Применяя метод неопределённых коэффициентов, найти интеграл*

$$\int\frac{dx}{(x+1)\,(x^2+1)}.$$

Решение.

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(x+1)\,(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1},$$

где A, B, C – некоторые числа. Приведя правую часть равенства к общему знаменателю, будем иметь

$$\frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx + Bx + C}{(x+1)\,(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C)}{(x+1)\,(x^2+1)}.$$

Приравниваем коэффициенты полученного в числителе многочлена соответствующим коэффициентам многочлена, стоящего в числителе подынтегральной функции:

$$\begin{cases} A + B = 0; \\ B + C = 0; \\ A + C = 1. \end{cases}$$

Откуда $A = C = \dfrac{1}{2}$, $B = -\dfrac{1}{2}$.

Таким образом,

$$\frac{1}{(x+1)\,(x^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+1}\right).$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{(x+1)\,(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x+1)}{x+1} - \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C.$$

C

1) Д1872, Д1879, Д1885;
2) Д1904, Д1913.

D

1) Д1866, Д1873, Д1876, Д1881, Д1884;
2) Д1906, Д1914.

5.3. Интегрирование некоторых иррациональностей

А

Интеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\lambda}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\mu}\right) dx,$$

где $\lambda, \ldots, \mu$ — рациональные числа, имеющие общий знаменатель m, подстановкой $(ad - bc \neq 0)$

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$$

сводится к рациональной функции.

Интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

рационализируется при помощи подстановок Эйлера:

1) если $a > 0$, то полагают

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x;$$

2) если $c > 0$, то полагают

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c};$$

3) если $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — различные действительные числа, то полагают

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1).$$

Теорема 38 (Чебышёва[1]). *Интеграл от дифференциального бинома*

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx,$$

где m, n, p — рациональные числа, может быть сведен к интегрированию рациональной функции лишь в трех случаях.

1) Пусть p — целое. Полагают $x = t^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n.

2) Пусть $\frac{m+1}{n}$ — целое. Полагают $a+bx^n = t^N$, где N — знаменатель дроби p.

[1] Пафнутий Львович Чебышёв (1821, Окатово, Калужская губ. – 1894, Санкт-Петербург, Россия) – выдающийся русский математик и механик.

3) Пусть $\frac{m+1}{n}+p$ — целое. Полагают $ax^{-n}+b=t^N$, где N — знаменатель дроби p.

B

Пример 31 (Д2129). *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Решение.

Выполнив замену переменной $x=t^6$, будем иметь:

$$\sqrt{x}=t^3, \quad \sqrt[3]{x}=t^2, \quad dx=6t^5\,dt, \quad \text{и}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dx=6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt=6\int \frac{\left(t^3+1\right)-1}{t+1}\,dt=$$
$$=6\int \left(t^2-t+1\right)dt-6\int \frac{dt}{t+1}=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C=$$
$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

Пример 32. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение.

Запишем данный интеграл в виде интеграла от дифференциального бинома:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx.$$

По теореме 38 Чебышёва имеем второй случай:

$$m=-\frac{1}{2}, \quad n=\frac{1}{4}, \quad p=\frac{1}{3}, \quad \frac{m+1}{n}=2.$$

Полагая $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3$, получим

$$x=\left(t^3-1\right)^4, \quad dx=12t^2\left(t^3-1\right)^3dt, \quad \text{и}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=12\int \left(t^6-t^3\right)dt=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C,$$

где $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$.

C

1) Д1927, Д1931;
2) Д1967;
3) Д1982, Д1985.

D

1) Д1929, Д1930;
2) Д1966, Д1968;
3) Д1983, Д1987.

5.4. Интегрирование тригонометрических функций

A

Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

где m и n — целые числа, вычисляются с помощью искусственных преобразований или применением формул понижения степени.

Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \, \cos x) \, dx,$$

где $R(u, \, v)$ — рациональная функция, в общем случае сводятся к интегрированию рациональных функций с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, при этом

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

В ряде случаев возможны другие способы рационализации:

а) если выполнено равенство

$$R(-\sin x, \, \cos x) \equiv -R(\sin x, \, \cos x)$$

или

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \, \cos x),$$

то выгодно применять подстановку $\cos x = t$ или $\sin x = t$ соответственно.

б) если выполнено равенство

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \, \cos x),$$

то полезно применять подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

B

Пример 33. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} \, dx.$

Решение.

Применяя подстановку $t = \cos x$, получим

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} \, dx = -\int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^4} \, dt = -\int \left(1 - 2t^{-2} + t^{-4}\right) dt =$$

$$= -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C = -\cos x - \frac{2}{\cos} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

C

1) Д1994, Д1997, Д2002;
2) Д2027, Д2038;
3) Д2020.

D

1) Д1991, Д1993, Д2003;
2) Д2026, Д2032, Д2033, Д2037;
3) Д2019, Д2022.

5.5. Разные задачи на интегрирование

C

Д1858, Д1857, Д1961, Д2008, Д2106, Д2111.

D

Д1859, Д1860, Д1963, Д2104, Д2043, Д2107, Д2114.

5.6. Понятие определённого интеграла. Формула Ньютона[2]—Лейбница

A

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,\, b]$, и

$$\mathcal{R} = \{x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}\,.$$

Интегральной суммой Римана функции $f(x)$, соответствующей данному разбиению $\mathcal{R}$ и данному выбору точек ξ_i, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ называется

$$S_R = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$.

Если при $\lambda \to 0$ существует конечный предел интегральной суммы S_R, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a,\, b]$, ни от выбора точек ξ_i, то этот предел называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a,\, b]$ и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

[2] Isaac Newton (1642, Вулсторп – 1727, Кенсингтон, Лондон, Англия) – английский физик , математик и астроном.

Теорема 39 (необходимое и достаточное условия интегрируемости). *Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\,\Delta x_i = 0,$$

где $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},\,x_i]} f(x), \quad M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},\,x_i]} f(x).$

Теорема 40 (Ньютона—Лейбница). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – любая ее первообразная на этом отрезке, то*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Теорема 41 (замена переменной в определённом интеграле). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если*

1) функция $x = g(t)$ определена и дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, множеством ее значений является отрезок $[a, b]$,
2) $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$,
3) производная $g'(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$,

то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left(g(t)\right) g'(t)dt.$$

Теорема 42 (интегрирование по частям). *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx.$$

В

Пример 34. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$

Решение.
Выполним замену переменной $x = \sin t$, тогда

$$\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

C

1) Д2181, Д2211, Д2216;
2) Д2242, Д2243, Д2279, Д2269, Д2247, Д2249, Д2251.

D

1) Д2182(а, б), Д2217;
2) Д2241, Д2244 – Д2246, Д2248, Д2252, Д2270, Д2272.

5.7. Несобственные интегралы

A

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$, где $a < b < +\infty$.

Если существует предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

то он называется *несобственным интегралом первого рода* от функции $f(x)$ на $[a, +\infty)$ и обозначается

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (5.2)$$

В этом случае говорят, что интеграл (5.2) сходится. В противном случае говорят, что несобственный интеграл не существует или расходится.

Аналогично интегралу (5.2) определяется несобственный интеграл вида

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами определяют равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где c – любое число (при условии существования обоих интегралов в правой части равенства).

Пусть функция $f(x)$ определена на конечном полуинтервале $[a,\, b)$, интегрируема на любом отрезке $[a,\, b-\varepsilon]$ (где $\varepsilon > 0$) и неограничена в окрестности точки b. Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx,$$

то его называют *несобственным интегралом второго рода* и обозначают

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx. \tag{5.3}$$

В этом случае говорят, что интеграл (5.3) сходится. В противном случае этот интеграл не существует или расходится.

Аналогично, если $x = a$ – особая точка, то несобственный интеграл в этом случае определяется следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx.$$

Если $f(x)$ не ограничена в окрестности какой-нибудь внутренней точки $c \in [a,\, b]$, то по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx$$

при условии существования обоих интегралов в правой части равенства.

Наконец, если a и b – особые точки, то в этом случае несобственный интеграл определяется как сумма

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx,$$

где c – любая точка из интервала $(a,\, b)$ при условии существования обоих интегралов в правой части равенства.

Теорема 43 (критерий Коши сходимости несобственных интегралов)**.** *Для сходимости интеграла* (5.2) *необходимо и достаточно, чтобы*

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\, b = b(\varepsilon)$ *такое, что* $\forall b' > b,\ b'' > b$ *выполнялось* $\left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$

Аналогично формулируется критерий Коши сходимости интегралов (5.3).

Теорема 44 (признак мажорации)**.** *Если* $0 \le f(x) \le g(x)$ *при* $x > a$, *и* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *сходится, то* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.*

Теорема 45 (признак сравнения)**.** *Если* $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$ *при* $x \ge a$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$ $(0 < k < +\infty)$, *то* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Аналогичные признаки справедливы для несобственных интегралов второго рода.

Теорема 46 (признак Абеля сходимости несобственных интегралов)**.** *Пусть*

1) интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится,*

2) функция $g(x)$ *монотонна и ограничена на* $[a, +\infty)$,

тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Теорема 47 (признак Дирихле сходимости несобственных интегралов)**.** *Пусть*

1) функция $f(x)$ *имеет ограниченную первообразную* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$,

2) функция $g(x)$ *монотонно стремится к нулю при* $x \to +\infty$,

тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Главное значение в смысле Коши. Если функция $f(x)$ такова, что при любом $\varepsilon > 0$ существуют интегралы

$$\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad (a < c < b),$$

то под *главным значением в смысле Коши* (v.p.) понимается число

$$\text{v.p.}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

Аналогично

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{+a} f(x)dx.$$

B

Пример 35. *Определить значения параметра α, при которых сходится несобственный интеграл*

а) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$; *б)* $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение.

а) Так как

$$\int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^b & \text{при} \quad \alpha \neq 1, \\ \ln x\Big|_1^b & \text{при} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

то предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

существует только при $\alpha > 1$; при других значениях α интеграл расходится.

б) Так как при $a \in (0,\, 1]$

$$\int\limits_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_a^1 & \text{при} \quad \alpha \neq 1, \\ \ln x\Big|_a^1 & \text{при} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

то предел

$$\lim_{a\to0}\int\limits_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

существует только при $\alpha < 1$; при других значениях α интеграл расходится.

C

1) Д2335, Д2340, Д2342;
2) Д2359, Д2360, Д2366, Д2381;
3) Д2394.

D

1) Д2338, Д2341, Д2346;
2) Д2358, Д2361, Д2364, Д2367;
3) Д2393, Д2395.

5.8. Вычисление площадей

A

Площадь в прямоугольных координатах. Площадь S плоской фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ $(f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, равна

$$S = \int\limits_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде. Если $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(0 \leq t \leq T)$—параметрические уравнения кусочно гладкой простой замкнутой кривой, пробегаемой против хода часовой стрелки и ограничивающей слева от себя фигуру площадью S, то

$$S = \int\limits_0^T x(t)y'(t)dt = -\int\limits_0^T y(t)x'(t)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)dt.$$

Площадь в полярных координатах. Площадь S сектора, ограниченного непрерывной кривой $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, равна

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$$

C

Д2400(а, в), Д2414, Д2420, Д2428.

D

Д2398, Д2399, Д2413, Д2418, Д2422(в), Д2427.

5.9. Приближённое вычисление интегралов

A

Формула прямоугольников. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема достаточное число раз на конечном сегменте $[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $f_i = f(x_i)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = h\left(f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1}\right) + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{h(b-a)}{2} f'(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

Формула трапеций. При тех же обозначениях имеем

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{f_0 + f_n}{2} + f_1 + \ldots + f_{n-1}\right) + R_n,$$

где

$$R_n = -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

Формула парабол (Симпсона[3]). Полагая $n = 2k$, получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left((f_0 + f_{2k}) + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2k-1}) + \right.$$

$$\left. +2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2k-2})\right) + R_n,$$

где

$$R_n = -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\theta) \quad (a \leq \theta \leq b).$$

C

Д2533, Д2536, Д2540, Д2541.

D

Д2531, Д2532, Д2535, Д2538, Д2542, Д2543.

[3] Thomas Simpson (1710, Маркет-Босворт, Лестершир – 1761, Лондон, Англия) – английский математик.

Список литературы

1. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа / С. М. Никольский. — М.: Наука, 1990. — Т. 1.

2. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа / С. М. Никольский. — М.: Наука, 1990. — Т. 2.

3. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Дрофа, 2003. — Т. 1.

4. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Дрофа, 2004. — Т. 2.

5. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Дрофа, 2006. — Т. 3.

6. *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М.: АСТ: Астрель, 2003.

Тышкевич Сергей Викторович

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. ЧАСТЬ 1

Учебно-методическое пособие для студентов физического факультета