2015

А.А. Вдовиченко

ПРАКТИКУМ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ. ГЕОМЕТРИЯ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Механико-математический факультет

ПРАКТИКУМ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ. ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие

для студентов, обучающихся по направлению – 44.03.01 – Педагогическое образование (профиль – математическое образование)

Саратов 2015

Рекомендовано к печати
кафедрой математики и методики её преподавания
Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского

Вдовиченко А.А. Практикум по элементарной математике. Геометрия: Учебно-методическое пособие / А.А. Вдовиченко – Саратов, 2015. – 90 с.

Учебно-методическое пособие разработано для студентов очной формы обучения, обучающихся по направлению «Педагогическое образование (профиль – математическое образование)».

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Оценивание результатов освоения проводится по балльно-рейтинговой системе.

По каждому из 5 разделов студент может получить от 1 до 8 баллов:

– 1 балл за работу с теоретическим материалом темы: конспектирование математического текста (итого – 5 баллов);

– 1 балл при успешном выполнении тестовых заданий по теме (итого – 5 баллов);

– 4 балла при успешном решении тренировочных задач по теме (итого – 20 баллов);

– 2 балла при успешном решении задачи повышенной сложности по теме (итого – 10 баллов);

Студент может получить дополнительно 3 балла за выполнение творческого задания по одной из тем курса.

Таким образом, после освоения дисциплины студент может набрать 43 балла.

Первый раздел посвящен определениям в планиметрии и стереометрии. Система задач состоит: из теоретического материала и тестовых заданий; 40 заданий курса планиметрии и 20 заданий курса стереометрии, что соответствует степени сложности геометрического материала, которые опираются на знания школьного курса математики; 20 заданий повышенной сложности по изучаемым темам.

Во втором разделе «Изучение свойств и признаков понятий» система задач состоит из теоретического материала и тестовых заданий; 40 заданий курса планиметрии и 20 заданий курса стереометрии, в которых необходимо выявить признаки и свойства понятий, определенных в первом разделе; 20 заданий повышенной сложности по изучаемым темам.

Третий раздел пособия посвящен геометрическим доказательствам. Как и в предыдущих разделах, система задач состоит из теоретического материала и тестовых заданий; 60 заданий, в которых необходимо доказать все выявленные ранее признаки и свойства основных понятий курса планиметрии и стереометрии; 20 заданий повышенной сложности по изучаемым темам.

Четвертый раздел «Аксиоматические теории в геометрии» начинается с изучения теоретического материала и тестовых заданий по теории. В связи со сложностью изучаемого материала в данном разделе 4 общих (для всей группы) тренировочных задания и общее задание повышенной сложности.

Последний раздел пособия «Геометрические процедуры: задачи на доказательство, вычисление, построение» состоит из: теоретического материала и тестовых заданий; 3 больших разделов с тренировочными заданиями: «Задачи на доказательство», «Задачи на вычисление», «Задачи на построение»; заданий повышенной сложности и творческого задания. Каждому студенту предстоит написать конспект, сделать тестовые задания, решить 10 тренировочных заданий: 3 задачи из раздела «Задачи на доказательство», 4 задачи их раздела «Задачи на вычисление» и 3 задачи из раздела «Задачи на построение», а также 1 задание повышенной сложности. Тренировочные задания общие для всей группы студентов, остальные задания индивидуальные (по вариантам).

В конце каждого раздела дается творческое задание, выполняемое по желанию студента.

Конспектирование материала

Конспектирование – (от лат. cons-pectus – обзор, очерк), краткое письменное изложение содержания статьи, книги, лекции, включающее в себя основные положения и их обоснование фактами, примерами и т.д.

В процессе конспектирования студенты учатся выделять главное, последовательно излагать материал, устанавливать связи между отдельными положениями. Конспектирование развивает логическое мышление, совершенствует культуру речи, закрепляет в памяти прочитанное и услышанное. Овладение навыками конспектирования необходимо для занятий самообразованием.

Конспектирование – процесс творческий, каждый конспект отражает индивидуальные особенности, направленность мыслей, интересы конспектирующего. Поэтому запись лекций, докладов только условно можно назвать конспектированием. Характер этой работы отличается от конспектирования печатных текстов тем, что, конспектируя лекцию, студенты ограничиваются материалом лектора, не могут вернуться к ранее сказанному, сопоставить факты и т.д. Однако в тех случаях, когда эти записи после лекции обрабатываются и дополняются, они приобретают черты собственно конспекта [Педагогический словарь].

Не следует путать конспектирование и составление тезисов. Тезисы кратко формулируют основные положения письменного или устного текста, но в отличие от конспекта не содержат фактического материала.

Тезисы, дополненные фактическим материалом (цифры, схемы, таблицы и т.д.), примерами, аналогиями и т.п., представляют собственно конспект.

Приступая к конспектированию следует:

(1) уяснить смысл всего текста в целом,

(2) разделить его на основные части (составить план),

(3) сформулировать в каждой части главные мысли (тезисы), последовательно их изложите, подкрепив фактическим материалом, примерами и т.д.

Одной из разновидностей конспекта является опорная схема. Опорная схема в отличие от конспекта предполагает выделение более узкого по объему содержания теоретического материала, может служить своеобразным инструментом-помощником в решении теоретических задач.

Пример опорной схемы-конспекта дан в приложении 1.

Обозначения

$\forall$	–	квантор общности	A, B, C	–	точки
$\exists$	–	квантор существования	(AB), (AC)	–	прямые
$\wedge$	–	конъюнкция (и)	a, b, c	–	прямые
$\vee$	–	дизъюнкция (или)	[AB)	–	луч с началом в точке A
$\neg$	–	отрицание			
$\rightarrow$	–	следование	[AB], [BC]	–	отрезки
$\Leftrightarrow$	–	равносильность	(ABC), (MNP)	–	плоскости
!	–	единственность	α, β, γ	–	плоскости

Контрольная работа «Логический анализ школьного учебника математики»

Варианты контрольной работы:

1) Смежные и вертикальные углы [14, §2];
2) Признаки равенства треугольников [14, §3];
3) Сумма углов треугольника [14, §4];
4) Геометрические построения [14, §5];
5) Четырехугольники [14, §6];
6) Теорема Пифагора [14, §7];
7) Движение [14, §9];
8) Векторы [14, §10];
9) Подобие фигур [14, §11];

10) Многоугольники [14, §13];
11) Площади фигур [14, §14];
12) Перпендикулярность прямых и плоскостей [14, §17];
13) Многогранники [14, §19];
14) Тела вращения [14, §20];
15) Равнобедренный треугольник [4, §5];
16) Прямоугольные треугольники [4, §7];
17) Отрезки и углы, связанные с окружностью [4, §9];
18) Треугольник и окружность. Начальные сведения [17, п.3];
19) Параллельные прямые и углы [17, п.5];
20) Подобие [17, п.6].

Образец выполнения контрольной работы.

Тема контрольной работы: «Определение угла».

Пункт 8.1 «Определение угла. Углы между направлениями» учебного пособия [6].

Тема 8

УГЛЫ, ИХ ИЗМЕРЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ

Совокупность прямых, проведенных из глаза художника к различным точкам изображаемого предмета ... образует проекцию этого предмета и называется евклидовым конусом. Рисунок предмета — это сечение конуса, изображаемого на холсте... Прямые, которые в предмете были параллельными, на рисунке стремятся к точке, в которой прямая, выходящая из глаза художника параллельно этим прямым, пересекает плоскость холста.

С. Г. Гулд

8.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА. УГЛЫ МЕЖДУ НАПРАВЛЕНИЯМИ

В теме 7 мы познакомились с различными случаями взаимного расположения лучей. Рассмотрим отдельно важный случай расположения лучей, который показан на рис. 8.1а. Здесь два луча *OA* и *OB* имеют общее начало.

Мы уже отмечали, что два луча с общим началом всегда лежат в одной плоскости.

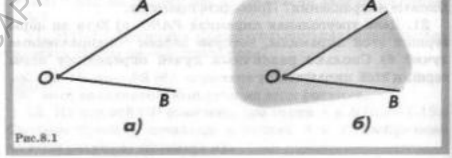


Рис.8.1

При таком расположении лучи разбивают плоскость, которую они образуют, на две части (рис. 8.1б). Эти части плоскости вместе с образовавшими их лучами в геометрии называют *углами*.

Дадим определение понятия «угол».

Рис.8.2

Определение 19

Углом называется фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости.

На рис. 8.1б лучи *OA* и *OB* имеют общее начало — точку *O* и разбивают плоскость на две части. Исходя из определения угла, мы получили два различных угла.

Точка, из которой выходят ограничивающие угол лучи, называется *вершиной угла*, а сами лучи — *сторонами угла* (рис. 8.2). Лучи *OA* и *OC* на этом рисунке определяют два угла.

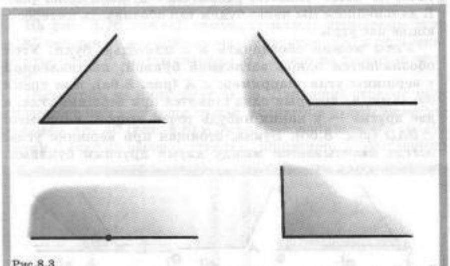


Рис.8.3

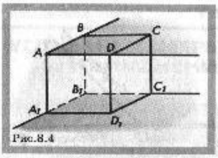


Рис.8.4

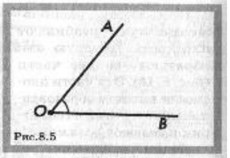


Рис.8.5

На рис. 8.3 изображены различные углы. Весь угол изобразить на рисунке нельзя, как нельзя на рисунке изобразить весь луч. Каждый угол в действительности продолжается бесконечно. На рис. 8.3 выделены цветом только части изображенных углов.

Понятие угла широко применяется при изучении свойств фигур в пространстве. Представьте себе, что у куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ продлены ребра AB, AD, B_1A_1 и B_1C_1 (рис. 8.4).

Мы получили различные углы с началом в точке A и в точке B_1. На рис. 8.4 показаны два угла BAD и $A_1B_1C_1$.

Слово «угол» иногда заменяют знаком «$\angle$». Часто при изображении угла чертят только выходящие из вершины начальные участки его сторон, а ту часть плоскости, которую хотят указать, обозначают дужкой (рис. 8.5). В дальнейшем мы часто будем так обозначать интересующие нас углы.

Углы можно обозначать и с помощью букв. Угол обозначается одной заглавной буквой, поставленной у вершины угла, например: $\angle A$ (рис. 8.6а), или тремя буквами, из которых одна ставится при вершине угла, а две другие — у каких-нибудь точек сторон, например: $\angle BAD$ (рис. 8.6б). Буква, стоящая при вершине угла, всегда записывается между двумя другими буквами.

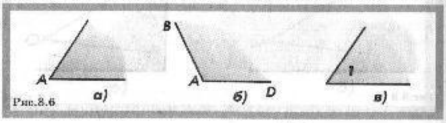


Рис.8.6

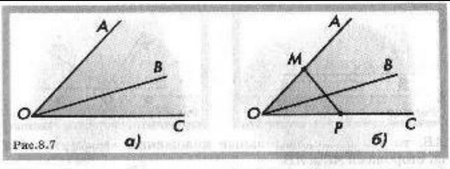


Рис.8.7

Иногда угол обозначают цифрой, поставленной внутри угла (рис. 8.6в).

Для изучения свойств углов часто используется понятие *луча, проходящего между сторонами угла.* Представьте себе, что на плоскости расположено три луча OA, OB и OC с общим началом — точкой O (рис. 8.7а).

О луче OB говорят, что он *проходит между сторонами угла AOC.* Можно дать строгое определение этому понятию.

Определение 20

Луч проходит между сторонами данного угла, если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла.

На рис. 8.7б луч OB проходит между сторонами угла AOC, так как он исходит из вершины угла AOC и пересекает отрезок MP. Концы отрезка MP лежат на сторонах угла AOC.

Посмотрим на циферблат часов. Движение стрелок подсказывает нам еще один *способ получения углов.* Если мы возьмем луч AC (рис. 8.8) и будем поворачивать его вокруг точки A против часовой стрелки, например, до положения

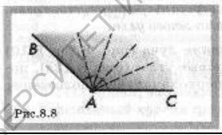


Рис.8.8

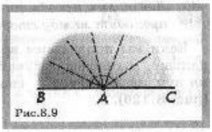


Рис.8.9

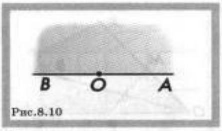


Рис.8.10

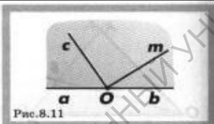


Рис.8.11

AB, то его последовательные положения «заметут» угол со сторонами AC и AB.

Продолжая вращать луч в том же направлении, мы будем получать все новые и новые углы. В определенный момент оба луча составят прямую линию (рис. 8.9). Такой угол называется *развернутым углом.*

Мы видим, что развернутый угол представляет собой часть плоскости, ограниченную прямой, то есть полуплоскость (рис. 8.10). Сторонами развернутого угла являются две дополнительные полупрямые.

Наши наблюдения приводят к следующему определению развернутого угла.

Определение 21

Развернутым углом называется угол, сторонами которого являются дополнительные лучи одной прямой.

Выше мы ввели понятие луча, проходящего между сторонами угла.

? Как можно сформулировать свойство таких лучей для развернутого угла?

Посмотрите на рис. 8.11. Вы видите, что лучи c и m лежат между сторонами развернутого угла. Можно сформулировать такое свойство развернутого угла:

! *Любой луч, исходящий из вершины развернутого угла, проходит между сторонами этого угла.*

Если мы продолжим вращение луча (рис. 8.9 и 8.10) дальше, мы будем получать новые углы (рис. 8.12а), пока луч не вернется в свое первоначальное положение (рис. 8.12б).

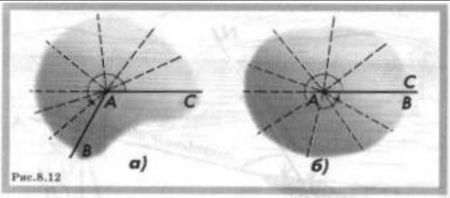


Рис.8.12

Будем считать, что луч в ходе своего вращения «замел» самый большой возможный угол, называемый *полным углом.* Полный угол есть вся плоскость (рис. 8.12б).

В предыдущей теме мы говорили о понятии направления, которое определяется с помощью понятия луча. На практике важно рассматривать *углы между направлениями* и измерять их. Но прежде чем их измерять, объясним, что означает понятие *«угол между направлениями».*

Пусть одно направление задано лучом AB, а другое — лучом CD (рис. 8.13а). От произвольной точки X отложим лучи, сонаправленные лучам AB и CD. Получим угол B_1XD_1 (рис. 8.13б), который является углом между направлениями.

Угол между направлениями имеет большое значение в нашей повседневной жизни.

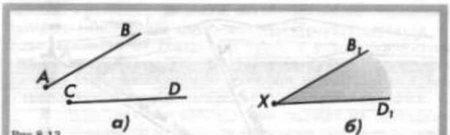


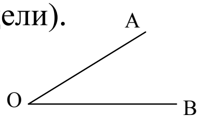
Рис.8.13

Предположим, что направление движения судна в море задано лучом CA, а направление на север задано лучом CN (рис. 8.14). Моряк, находящийся в точке C, измеряет угол NCA, называемый *курсом судна.*

Методические указания 1. Далее характеризуется каждое понятие темы, изображается дерево понятий.

Определение 1 (по геометрической модели).

Два луча с общим началом.



Определение остенсивное, реальное.

Логическая структура определения:

$\angle AOB = [OA) \cup [OB)$.

Определение 1'. Лучи разбивают плоскость, которую они образуют на две части. Эти части плоскости вместе с образованными лучами называются углами.

Определение номинальное.

Логическая структура определения:

$$(\angle AOB \cup \pi \cup \pi' = \Pi) \wedge (\angle AOB \cap \pi \cap \pi' = \varnothing) \wedge (\alpha = \angle AOB \cup \pi) \wedge$$
$$\wedge (\alpha' = \angle AOB \cup \pi') \to \alpha - \textit{угол} \wedge \alpha' - \textit{угол},$$

где Π – плоскость.

Определение 1'' (19). Углом называется фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости.

Точка, из которой выходят ограничивающие угол лучи, называется вершиной, а сами лучи – сторонами угла.

Замечание: в определении используется понятие, не определенное ранее. Это понятие «ограниченное».

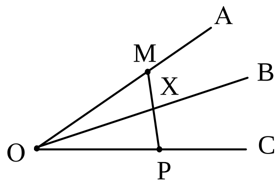
Определение реальное, классическое (через род «фигура» и видовое отличие – угол).

Логическая структура определения:

$(\angle AOB \equiv \Phi) : [OA) \cap [OB) \cap (AOB) \cap \pi$, где O – вершина, OA, OB – стороны.

Обозначения угла: $(\angle AOB = \angle O)$.

Определение 2 (20). Луч проходит между сторонами данного угла, если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла.



Замечание: неправильная конструкция в определении. Дано $A \to (B \wedge C)$, необходимо: $A \Leftrightarrow (B \wedge C)$.

Таким образом, определение примет вид: луч проходит между сторонами данного угла тогда и только тогда, когда он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла.

Определение реальное.

Логическая структура определения:

$$(\forall \angle AOC)[((M \in [OA)) \wedge (M \neq O)) \wedge ((N \in [OC)) \wedge (N \neq O))]$$

$$([OB) - \text{луч, проходит между сторонами угла } \angle AOC) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists X)(\{X\} = [OB) \cap [MN]).$$

Определение 3 (21). Развернутым углом называется угол, сторонами которого являются дополнительные лучи одной прямой.

Определение номинальное, классическое (через род «угол» и видовое отличие «развернутый»).

Логическая структура определения:

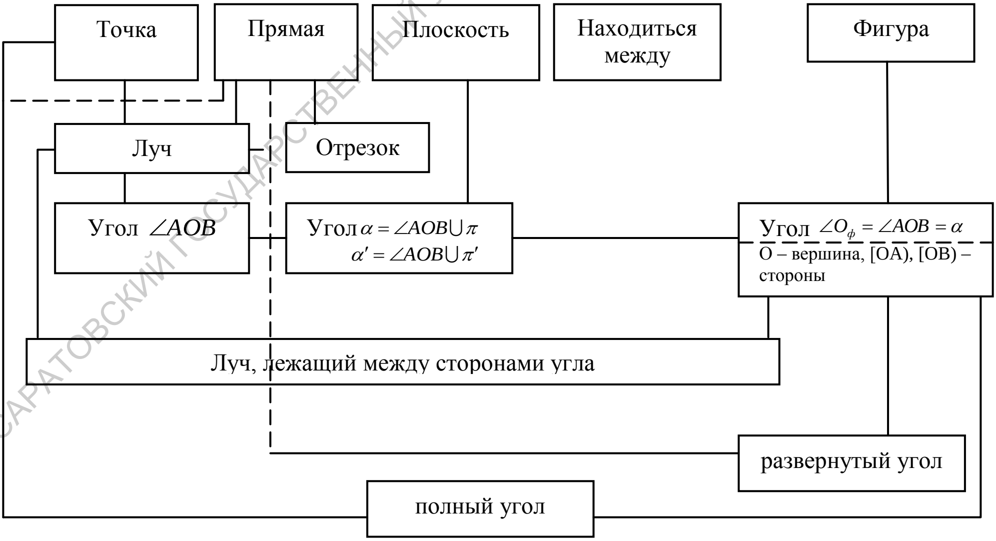
$$(\angle RAK = \alpha) \Leftrightarrow (R, A, Z \in a) \wedge (R \neq A \neq Z) \wedge (A \in [RZ]).$$

Определение 4. Полный угол есть вся плоскость.

Определение реальное.

$$(\Pi_O - \text{полный угол}) \Leftrightarrow (O \in \Pi).$$

Дерево понятий.



<u>Методические указания 2</u>. Перечисляются признаки математических объектов (характеристические свойства, зафиксированные в определениях – не рассматриваются); указываются теоремы, в которых формулируются признаки объекта в виде: *название – формулировка.*

Перечисляются свойства математических объектов; указываются теоремы, в которых формулируются свойства объекта в виде: *название – формулировка.*

Даётся характеристика каждой теоремы (в какой форме сформулирована: в условной или категоричной; приводится с доказательством или без доказательства; если теорема доказывается, то доказательство прямое или косвенное; указывается математический аппарат доказательства, приём доказательства).

Изображается граф теорем.

Теорема 1 (свойство угла). Два луча с общим началом всегда лежат в одной плоскости.

Сформулирована в категоричной форме.

Условная форма $(X \to Y)$: Если есть два луча с общим началом, то они лежат в одной плоскости.

$$\left([OA)\cap[OB)=\{O\}\right)\wedge\left(\angle AOB=[OA)\cup[OB)\right)\to\left([OA\subset\alpha)\wedge[OB)\subset\alpha\right)$$

Логическая структура теоремы: $(X \wedge Y)\to(W \wedge Z)$.

Обратная теорема $(Y \to X)$: Если лучи лежат в одной плоскости, то они имеют общее начало.

$$\left(\left([O_1A)\subset\alpha\right)\wedge\left([O_2B)\subset\alpha\right)\right)\to\left([O_1A)\cap[O_2B)=\{O\}\right)\wedge\left([O_1A)\cup[O_2B)=\angle AOB\right)$$

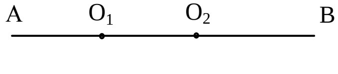
Обратная теорема верна в случае, когда $O \equiv O_1 \equiv O_2$.

Теорема противоположная обратной $(\neg Y \to \neg X)$: Если лучи не лежат в одной плоскости, то они не имеют общее начало.

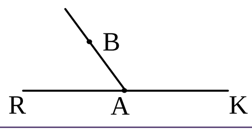
Противоположная теорема $(\neg X \to \neg Y)$: Если два луча не имеют общего начала, то они не лежат в одной плоскости.

Противоположная теорема не верна. Пример:

$$(O_1A\subset\alpha),(O_2B\subset\alpha)$$
$$[O_1A)\cap[O_2B)=\varnothing$$
$$[O_1A)\cup[O_2B)\neq\angle$$



Теорема 2. Любой луч, исходящий из вершины развернутого угла, проходит между сторонами этого угла.



Сформулирована в категоричной форме.

$$(\forall B)((B \notin [AR)) \wedge (B \notin [AK)))(\angle RAK - \textit{развернутый}) \rightarrow$$
$$\rightarrow [AB) - \textit{угол между сторонами развернутого угла.}$$

Условная форма $(X \rightarrow Y)$: Если луч исходит из вершины развернутого угла, то он проходит между сторонами этого угла.

Обратная теорема $(Y \rightarrow X)$ (неверна):

$$(\forall B)((B \notin [AR)) \wedge (B \notin [AK)))[AB) - \textit{угол между сторонами}$$
$$\textit{развернутого угла} \rightarrow (\angle RAK - \textit{развернутый}).$$

Теорема противоположная обратной $(\neg Y \rightarrow \neg X)$:

$$(\forall B)((B \notin [AR)) \wedge (B \notin [AK)))[AB) - \textit{угол не лежит между}$$
$$\textit{сторонами развернутого угла} \rightarrow (\angle RAK - \textit{не развернутый}).$$

Противоположная теорема $(\neg X \rightarrow \neg Y)$: Если луч не исходит из вершины развернутого угла, то он не проходит между сторонами этого угла.

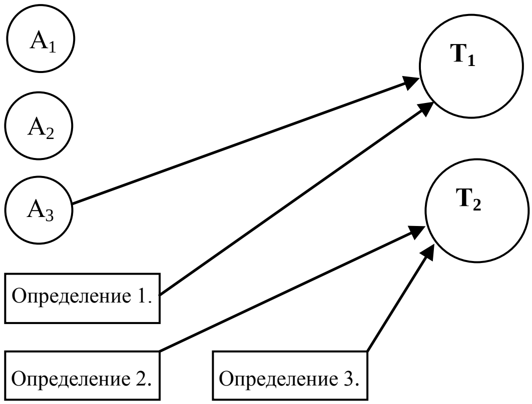
$$(\forall B)((B \notin [AR)) \wedge (B \notin [AK)))(\angle RAK - \textit{не развернутый}) \rightarrow$$
$$\rightarrow [AB) - \textit{угол не лежит между сторонами развернутого угла.}$$

Аксиома 1.Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

Аксиома 2. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна, и только одна плоскость.

Аксиома 3. Прямая, проходящая через две точки плоскости, принадлежит этой плоскости.

Граф теорем.



Методические указания 3. Процедуру можно определить как систему последовательно осуществляемых операций, обладающую следующим свойством: после любой операции, входящей в ее состав, либо больше не выполняется никаких операций, либо выполняется некоторая определенная операция, либо имеет место разветвление процедуры, то есть выполняется одна из некоторого конечного набора операций.

То, какая именно операция осуществляется при разветвлении вслед за данной операцией, может однозначно определяться тем, выполняются ли некоторые четкие условия, содержащие ссылки на тот или иной признак (признаки) какого-либо объекта (объектов). Разветвления, обладающие этим свойством, называют однозначно детерминированными, а все прочие разветвления – неоднозначно детерминированными.

Назовём процедуру алгоритмической – алгоритмом – если она состоит из эффективных операций и не содержит неоднозначно детерминированных разветвлений.

Алгоритм, кратко сформулированный в виде некоторого предложения (для лучшего запоминания) назовём правилом; любое правило может быть развёрнуто и представлено системой последовательно осуществляемых операций.

Квазиалгоритмическая процедура – алгоритмическое предписание – может содержать неоднозначно детерминированные разветвления, но то, какая именно операция осуществляется при таком разветвлении вслед за данной операцией, с достаточно высокой вероятностью определяется тем, выполняются ли условия того типа, который был описан выше при характеристике однозначно детерминированных разветвлений.

Процедуры, описываемые как фактически осуществленные – примеры решения типовых задач (примеры) – обычно не содержат разветвлений.

Логический анализ математической процедуры:

– определение процедуры: алгоритм, правило, пример решения типовой задачи;

– выделение последовательности операций и логических связок в процедуре;

– установление связи с другими знаниями.

Математический анализ математической процедуры – установление математической основы (базовых математических положений, которые позволяют строить процедуру).

При логико-дидактическом анализе параграфа проводится логико-математический анализ каждой процедуры.

Задача 14. Во внутренней области угла *AOB* дана точка *M*. Какой фигурой является множество таких точек *X*, что отрезок *MX* имеет общую точку хотя бы с одной стороной угла?

В ходе исследования (анализа, решения) выясняется, что условие «хотя бы с одной стороной» надо трактовать как пересечение с одной или двумя сторонами угла. Тогда $X \equiv O$ – пересечение с двумя сторонами угла, а искомое геометрическое место точек – это окружность с центром в точке *M*, радиуса *MO*.

Решение задачи может быть переформулировано в виде теоремы: окружность с центром в точке *M*, радиуса *MO* является множеством точек, таких, что для любой точки *X* этой окружности:

$$(\forall \angle AOB)(\forall M \in \pi)(\exists Окр(M, r))(\forall X \in Окр(M, r))$$
$$[(r = MO) \to ([MX] \cap [OA] = Y_1) \wedge ([MX] \cap [OB] = Y_2)].$$

РАЗДЕЛ 1. ПОНЯТИЯ В ПЛАНИМЕТРИИ И СТЕРЕОМЕТРИИ.

В каждой математической теории неразрывно переплетены математика и логика. Это переплетение начинается с определений понятий теории, проходит через формулировки теорем и методы их доказательств, через принципы характеризации математических (аксиоматических) теорий. Это переплетение математики и логики прекрасно выражается на логико-математическом языке. Свой математический язык, язык терминов и символов, математика создавала на протяжении тысячелетий. Логика в нем традиционно присутствовала на словесном (вербальном) уровне. Во второй половине XIX века и в XX веке, когда логика превратилась в полноправную математическую науку – математическую логику, был сформирован и математический язык этой науки – логический язык. Соединившись с математическим языком каждой конкретной математической теории, он образовал логико-математический язык этой теории. Как известно, точный смысл математических предложений и рассуждений определяется смыслом входящих в них как математических, так и логических терминов. Непонимание логических терминов, логики математического предложения может стать причиной непонимания математического существа дела.

Под логико-математическим языком понимается расширение обычно используемого в школьном обучении математического языка, т.е. языка математических терминов и символов, с помощью добавления языка математической логики, а также теоретико-множественного языка. Одним из важнейших методических качеств, которым обладает этот язык, является его качество средства «наглядности». Наглядность здесь носит специфический, а именно – символический характер. По образному выражению А.А. Столяра, «так же как чертеж обнажает геометрическую форму (структуру) предмета и представляет ее в чистом виде, символическая запись на логико-математическом языке предложений и рассуждений обнажает их логическую форму (структуру) и представляет ее в чистом виде». Таким образом, запись на логико-математическом языке способствует разъяснению точного смысла математических предложений сложной логической структуры, выявлению различий в понятиях, отысканию путей доказательства и т.д. [7, с. 22-23]

I. Работа с теоретическим материалом темы. (20 минут)

Изучите раздел «Логика с элементами математической логики» и пункт «Определения в математике» из Хрестоматии [5]. Разработайте конспект по теме «Определения в математике».

II. Тестовые задания на усвоение теоретического материала (25 минут). Заполните пропуски в каждой классификации.

1.

Точки (3)
A,B,C

Лежат на одной прямой

$AB + BC > AC$, $AC + CB > AB$, $BA + AC > BC$
Являются вершинами треугольника

2.

Точка, прямая
A, a

точка принадлежит прямой
прямая содержит точку

точка не лежит на прямой
прямая не проходит через точку
$a \cap \{A\} = \varnothing$

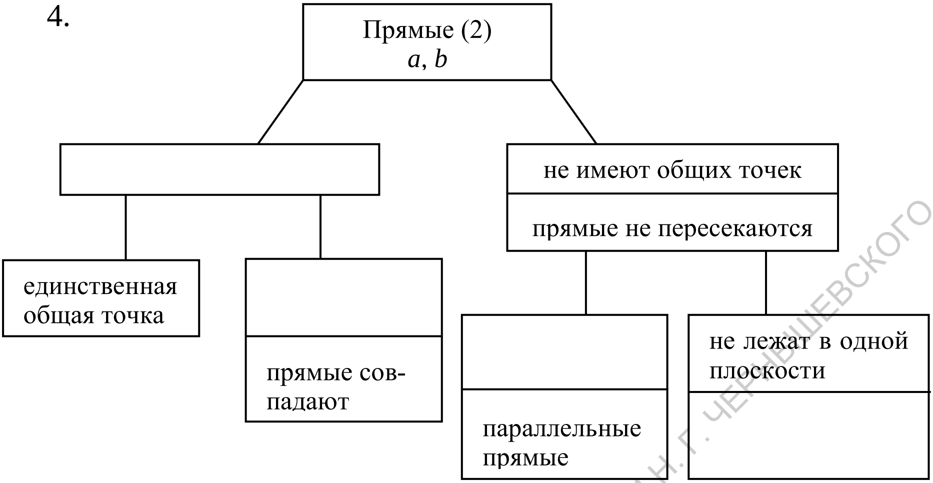
3.

Точка, плоскость
A, α

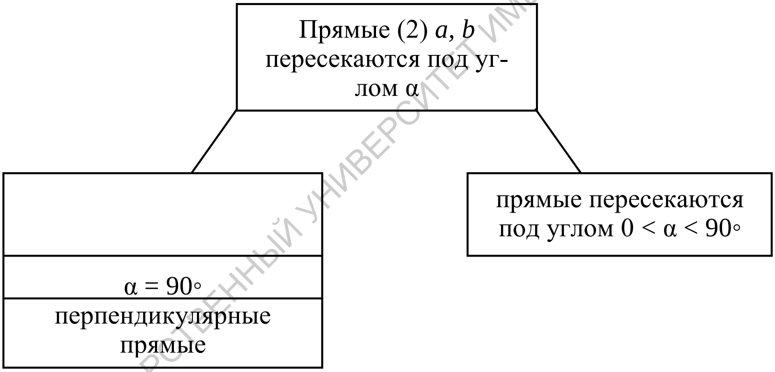
точка лежит в плоскости
плоскость проходит через точку
$\alpha \cap \{A\} = A$ $\alpha \cup \{A\} = \alpha$

точка не принадлежит плоскости
плоскость не содержит точку

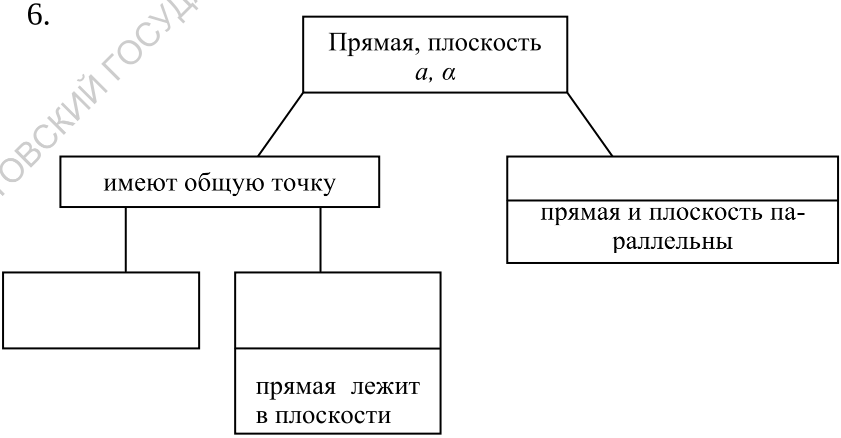
4.


Прямые (2)
a, b
не имеют общих точек
прямые не пересекаются
единственная общая точка
прямые сов-падают
параллельные прямые
не лежат в одной плоскости

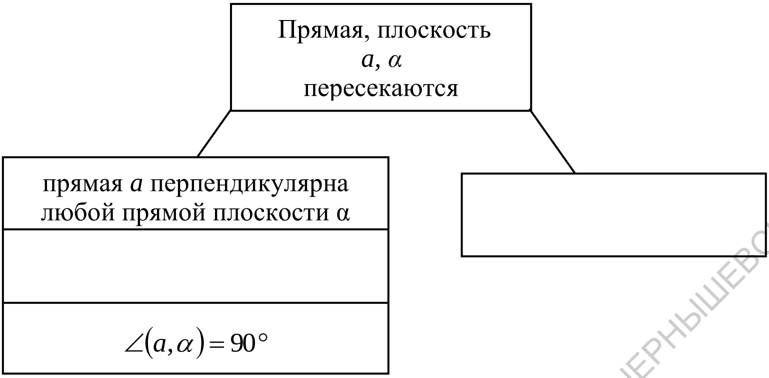
5.


Прямые (2) a, b пересекаются под уг-лом α
прямые пересекаются под углом 0 < α < 90◦
α = 90◦
перпендикулярные прямые

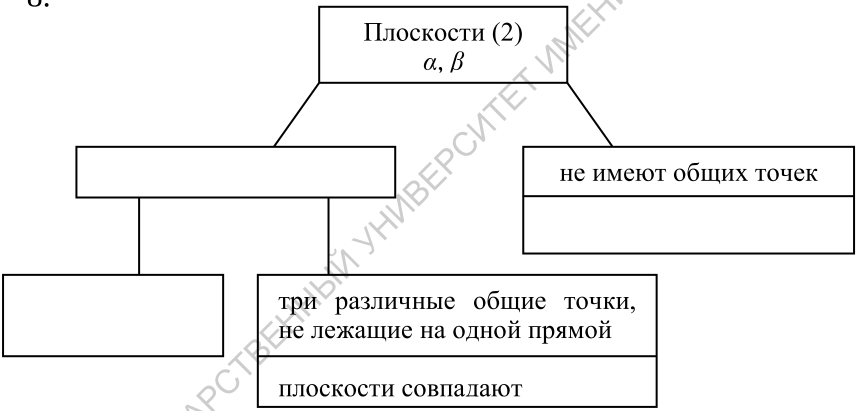
6.


Прямая, плоскость
a, α
имеют общую точку
прямая и плоскость па-раллельны
прямая лежит в плоскости

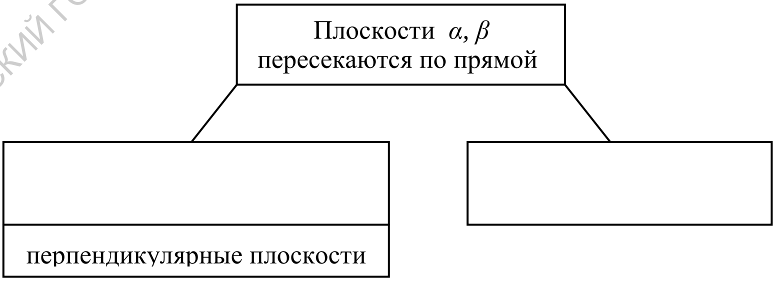
7.


Прямая, плоскость
a, α
пересекаются
прямая a перпендикулярна любой прямой плоскости α
$\angle(a,\alpha)=90^\circ$

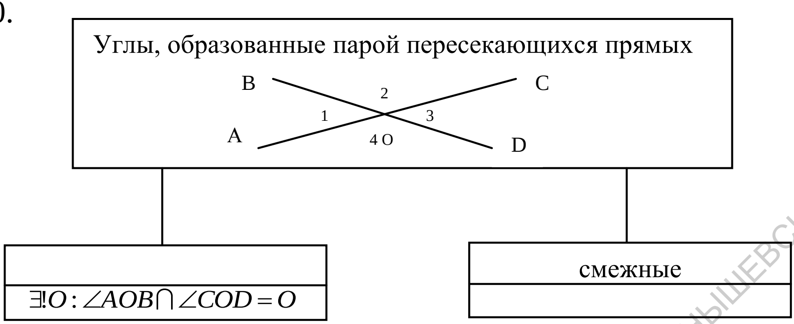
8.


Плоскости (2)
α, β
не имеют общих точек
три различные общие точки, не лежащие на одной прямой
плоскости совпадают

9.


Плоскости α, β пересекаются по прямой
перпендикулярные плоскости

10.



III. Тренировочные задания.

Пример. В учебнике «Геометрия, 7-9» Л.С. Атанасяна [1] дается определение угла: «Угол – это геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Лучи называются сторонами угла, а их общее начало – вершиной угла».

Запишем это определение через равенство на математическом языке.

Определение 1. $\angle AOB = [OA) \cup [OB)$, где $\angle$ – обозначение угла, O – вершина, A, B – точки, лежащие на сторонах угла, $[OA)$ и $[OB)$ – стороны угла.

Запишем более точное определение угла, используя эквивалентность.

Определение 2.

$(\forall O, A, B -$ точки плоскости $\wedge \mathrm{O} \neq \mathrm{A} \neq \mathrm{B})$

$(\angle AOB -$ угол с вершиной в O$) \overset{опр}{\Leftrightarrow}$

$\overset{опр}{\Leftrightarrow} [(OA -$ луч с вершиной в $O) \wedge (OB -$ луч с вершиной в $O)]$

Из последнего определения получаем:

Определение 3.

$(\forall O, A, B \in R^2)$ $(\mathrm{O} \neq \mathrm{A} \neq \mathrm{B})$

$(\angle AOB -$ угол с вершиной в $O) \overset{опр}{\Leftrightarrow} [OA) \cap [OB) = O$

В зависимости от взаимного расположения трех точек на прямой можно выделить разные виды углов:

Угол на плоскости

O, A, B лежат на одной прямой

O, A, B не лежат на одной прямой

$O \in [AB]$
AOB – развернутый

$O \notin [AB]$
AOB – с совпадающими сторонами

Возникает вопрос, насколько определенное нами понятие «рабочее». То есть, насколько часто будет использоваться это понятие. Постараемся ответить на вопрос, где мы встречаемся с углом, как с объединением двух лучей: обращаясь к своему познавательному опыту, заключаем, что при исследовании плоскости: угол делит плоскость на две части, а так же при решении задач на построение циркулем и линейкой.

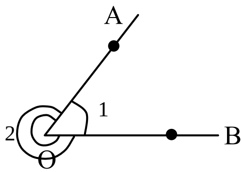


Рисунок 1

Построим геометрическую модель плоскости, разделенной углом (рисунок 1).

Если на сторонах угла взять точки и соединить их отрезком, то область, ограниченную лучами и содержащую этот отрезок, будем называть внутренней областью и обозначать π. А другую – внешней, и обозначать π′. Из этого следует, что $[AB] \subset \pi$.

Теперь мы можем рассматривать две различные геометрические фигуры: угол $\angle AOB$ с внутренней областью, который будем обозначать α и по-прежнему называть углом, и угол $\angle AOB$ с внешней областью, который будем обозначать α′ и называть дополнительным углом к углу α.

Углы α и α′ формально можно определить через равенство следующим образом:

<u>Определение 4:</u> $\alpha = (\angle AOB) \cup \pi$

<u>Определение 5:</u> $\alpha' = (\angle AOB) \cup \pi'$

В следующих задачах проанализируйте определение и запишите его на математическом языке. При необходимости проведите классификацию определяемого понятия. Приведите геометрическую модель определяемого понятия.

1. В учебнике [1] на странице 178 дано определение серединного перпендикуляра к отрезку: «Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему».

2. В учебнике [1] на странице 12 дано определение биссектрисы угла: «Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется биссектрисой угла».

3. В учебнике [1] на странице 28 дано определение треугольника: «Отметим какие-нибудь три точки, не лежащие на одной прямой, и соединим их отрезками. Получим геометрическую фигуру, которая называется треугольником. Отмеченные три точки называются вершинами, а построенные отрезки – сторонами треугольника. Треугольник будем обозначать так: ΔABC».

4. В учебнике [1] на странице 33 дано определение медианы: «Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой треугольника».

5. В учебнике [1] на странице 33 дано определение биссектрисы: «Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется биссектрисой треугольника».

6. В учебнике [1] на странице 34 дано определение высоты: «Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется высотой треугольника».

7. В учебнике [1] на странице 146 дано определение средней линии треугольника: «Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон».

8. В учебнике [1] на странице 43 дано определение окружности: «Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки».

9. В учебнике [1] на странице 43 дано определение хорды окружности: «Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой».

10. В учебнике [1] на странице 43 дано определение дуги окружности: «Любые две точки окружности делят ее на две части. Каждая из этих частей называется дугой окружности».

11. В учебнике [1] на странице 43 дано определение диаметра: «Хорда, проходящая черед центр окружности, называется диаметром».

12. В учебнике [1] на странице 166 дано определение касательной к окружности: «Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности».

13. В учебнике [1] на странице 170 дано определение центрального угла: «Угол с вершиной в центре окружности называется ее центральным углом».

14. В учебнике [1] на странице 171 дано определение вписанного угла: «Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом».

15. В учебнике [6] на странице 125 перед учащимися ставится ряд проблемных вопросов, решение которых позволяет определить случаи взаимного расположения двух окружностей:

«Как определить расстояние между двумя окружностями? Как можно найти это расстояние?

Наш опыт подсказывает нам, что расстоянием между двумя окружностями с центрами O и O_1 является длина отрезка AA_1, принадлежащего прямой OO_1, соединяющей центры этих окружностей…».

16. В учебнике [1] на странице 44 дано определение круга: «Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется кругом».

17. В учебнике [6] на странице 135 дано определение сегмента круга: «Хорда разбивает круг на две части, каждая из которых называется сегментом круга».

18. В учебнике [13] на странице 168 дано определение ломаной: «Ломаной $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ называется фигура, которая состоит из точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и соединяющих их отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются вершинами ломаной, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ – звеньями ломаной».

19. В учебнике [1] на странице 98 дано определение многоугольника: «Рассмотрим фигуру, составленную из отрезков *AB*, *BC*, *CD*, … , *EF*, *FA*, так, что смежные отрезки (т.е. отрезки *AB* и *BC*, *BC* и *CD*, …, *FA* и *AB*) не лежат на одной прямой, и несмежные отрезки не имеют общих точек. Такая фигура называется многоугольником. Точки *A*, *B*, *C*, …, *E*, *F* называются вершинами, а отрезки *AB*, *BC*, *CD*, … , *EF*, *FA* – сторонами многоугольника».

20. В учебнике [1] на странице 98 дано определение диагонали многоугольника: «Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, называется диагональю многоугольника».

21. В учебнике [1] на странице 275 дано определение правильного многоугольника: «Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны».

22. В учебнике [1] на странице 101 дано определение параллелограмма: «Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны».

23. В учебнике [1] на странице 108 дано определение прямоугольника: «Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые».

24. В учебнике [1] на странице 108 дано определение ромба: «Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны».

25. В учебнике [1] на странице 108 дано определение квадрата: «Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны».

26. В учебнике [1] на странице 103 дано определение трапеции: «Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются ее основаниями, а две другие стороны – боковыми сторонами».

27. В учебнике [1] на странице 210 дано определение средней линии трапеции: «Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон».

28. В учебнике [1] на странице 111 дано определение осевой симметрии: «Фигура называется симметричной относительно прямой *a*, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой *a* также принадлежит этой фигуре. Прямая *a* называется осью симметрии фигуры. Говорят также, что фигура обладает осевой симметрией».

29. В учебнике [1] на странице 111 дано определение центральной симметрии: «Фигура называется симметричной относительно точки *O*, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки *O* также принадлежит этой фигуре. Точка *O* называется центром симметрии фигуры. Говорят также, что фигура обладает центральной симметрией».

30. В учебнике [1] на странице 294 дано определение движения: «Движение плоскости – это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния».

31. В учебнике [1] на странице 300 дано определение параллельного переноса: «Пусть $\vec{a}$ – данный вектор. Параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что вектор $\overrightarrow{MM_1}$, равен вектору $\vec{a}$».

32. В учебнике [1] на странице 301 дано определение поворота: «Отметим на плоскости точку O (центр поворота) и зададим угол α (угол поворота). Поворотом плоскости вокруг точки O на угол α называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что $OM=OM_1$ и угол MOM_1 равен α».

33. В учебнике [1] на странице 301 дано определение подобия: «Фигуры F и F_1 называются подобными, если каждой точке фигуры F можно сопоставить точку фигуры F_1 так, что для любых двух точек M и N фигуры F и сопоставленных им точек M_1 и N_1 фигуры F_1 выполняется равенство $\dfrac{MN}{M_1N_1} = k$, где k – одно и то же положительное число для всех точек. При этом предполагается, что каждая точка фигуры F_1 оказывается сопоставленной какой-то точке фигуры F. Число k называется коэффициентом подобия фигур F и F_1.

34. В учебнике [14] на странице 145 дано определение гомотетии: «Пусть F – данная фигура и O – фиксированная точка. Проведем через произвольную точку X фигуры F луч OX и отложим на нем отрезок OX', равный $k \circ OX$, где k – положительное число. Преобразование фигуры F, при котором каждая ее точка X переходит в точку X', построенную указанным способом, называется гомотетией относительно центра O. Число k называется коэффициентом гомотетии, фигуры F и F' называются гомотетичными».

35. В учебнике [1] на странице 139 дано определение подобных треугольников: «Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого».

36. В учебнике [1] на странице 181 дано определение вписанной окружности: «Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник – описанным около этой окружности».

37. В учебнике [1] на странице 183 дано определение описанной окружности: «Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника, а многоугольник – вписанным в эту окружность».

38. В учебнике [1] на странице 193 дано определение вектора: «Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется направленным отрезком или вектором».

39. В учебнике [1] на странице 199 дано определение суммы векторов: «Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора. Отметим произвольную точку A и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$ равный $\vec{a}$. Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$».

40. В учебнике [1] на странице 202 дано определение разности векторов: «Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$».

41. В учебнике [1] на странице 265 дано определение скалярного произведения векторов: «Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними».

42. В учебнике [2] на странице 24 дано определение тетраэдра: «Рассмотрим произвольный треугольник ABC и точку D, не лежа-

щую в плоскости этого треугольника. Соединив точку D отрезками с вершинами треугольника ABC, получим треугольник DAB, DBC и DCA. Поверхность, составленная из четырех треугольников ABC, DAB, DBC и DCA, называется тетраэдром и обозначается так: $DABC$.

Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются гранями, их стороны – ребрами, а вершины – вершинами тетраэдра».

43. В учебнике [2] на странице 25 дано определение параллелепипеда: «Рассмотрим два равных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, расположенных в параллельных плоскостях так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны. Четырехугольники

$$ABB_1A_1,\ BCC_1B_1,\ CDD_1C_1,\ DAA_1D_1 \qquad (1)$$

также являются параллелограммами, так как каждый из них имеет попарно параллельные противоположные стороны (например, в четырехугольнике ABB_1A_1 стороны AA_1 и BB_1 параллельны по условию, а стороны AB и A_1B_1 – по свойству линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей). Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и четырех параллелограммов (1), называется параллелепипедом и обозначается так: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются гранями, их стороны – ребрами, а вершины параллелограммов – вершина параллелепипеда».

44. В учебнике [2] на странице 43 дано определение угла между прямой и плоскостью: «Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость».

45. В учебнике [2] на странице 47 дано определение двугранного угла: «Двугранным углом называется фигура, образованная

прямой *a* и двумя полуплоскостями с границей *a*, не принадлежащими одной плоскости».

46. В учебнике [2] на странице 57 дано определение многогранника: «Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранной поверхностью или многогранником. Многоугольники, их которых составлен многогранник, называются его гранями. Стороны граней называются ребрами, а концы ребер – вершинами многогранника».

47. В учебнике [2] на странице 70 дано определение правильного многогранника: «Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани – равные правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер».

48. В учебнике [2] на странице 59 дано определение призмы: «Рассмотрим два равных многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, соединяющие соответственные вершины многоугольника, параллельны. Каждый из n четырехугольников

$$A_1A_2B_1B_2\,,\ A_2A_3B_3B_2\,,\ \ldots,\ A_nA_1B_1B_n \qquad (1)$$

является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны.

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов (1), называется призмой.

Многоугольники $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$, называются основаниями, а параллелограммы (1) – боковыми гранями призмы. Отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, называются боковыми ребрами призмы».

49. В учебнике [2] на странице 59 дано определение правильной призмы: «Прямая призма называется правильной, если ее основания – правильные многоугольники».

____

50. В учебнике [2] на странице 62 дано определение пирамиды: «Рассмотрим многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединив точку P отрезками с вершинами многоугольника, получим n треугольников: PA_1A_2, $PA_2A_3, \ldots, PA_nA_1$. (1)

Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$ и n треугольников (1), называется пирамидой. Многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ называется основанием, а треугольники (1) – боковыми гранями пирамиды».

51. В учебнике [2] на странице 63 дано определение правильной пирамиды: «Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой».

52. В учебнике [2] на странице 64 дано определение усеченной пирамиды: «Возьмем произвольную пирамиду $PA_1A_2 \ldots A_n$ и проведем секущую плоскость β, параллельную плоскости α основания пирамиды и пересекающую боковые ребра в точках $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Плоскость β разбивает пирамиду на два многогранника. Многогранник, гранями которого являются n-угольники $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ (нижнее и верхнее основания), расположенные в параллельных плоскостях, и n четырехугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, $\ldots$, $A_nA_1B_1B_n$ (боковые грани), называется усеченной пирамидой».

53. В учебнике [2] на странице 84 дано определение компланарного вектора: «Векторы называются компланарными, если при

откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости. Другими словами, векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости».

54. В учебнике [2] на странице 113 дано определение зеркальной симметрии: «Зеркальной симметрией (симметрией относительно плоскости α) называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей относительно плоскости α точку M_1».

55. В учебнике [2] на странице 119 дано определение цилиндра: «Рассмотрим две параллельные плоскости α и β и окружность L с центром O радиуса r, расположенную в плоскости α. Через каждую точку окружности L проведем прямую, перпендикулярную к плоскости α. Отрезки этих прямых, заключенные между плоскостями α и β, образуют цилиндрическую поверхность. Сами отрезки называются образующими цилиндрической поверхности.

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1, называется цилиндром. Цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра, а круги – основаниями цилиндра. Образующие цилиндрической поверхности называются образующими цилиндра, прямая OO_1 – осью цилиндра».

56. В учебнике [2] на странице 124 дано определение конуса: «Рассмотрим окружность L с центром O и прямую ОР, перпендикулярную к плоскости этой окружности. Каждую точку окружности соединим отрезком с точкой Р. Поверхность, образованная этими отрезками, называется конической поверхностью, а сами отрезки – образующими конической поверхности.

Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L, называется конусом. Коническая поверхность называется боковой поверхностью конуса, а круг – основанием конуса.

Точка P называется вершиной конуса, а образующие конической поверхности – образующими конуса».

57. В учебнике [2] на странице 125 дано определение усеченного конуса: «Возьмем произвольный конус и проведем секущую плоскость, перпендикулярную к его оси. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется усеченным конусом. Основание исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью, называются основаниями усеченного конуса, а отрезок, соединяющий их центры, – высотой усеченного конуса».

58. В учебнике [2] на странице 129 дано определение сферы: «Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки. Данная точка называется центром сферы, а данное расстояние – радиусом сферы».

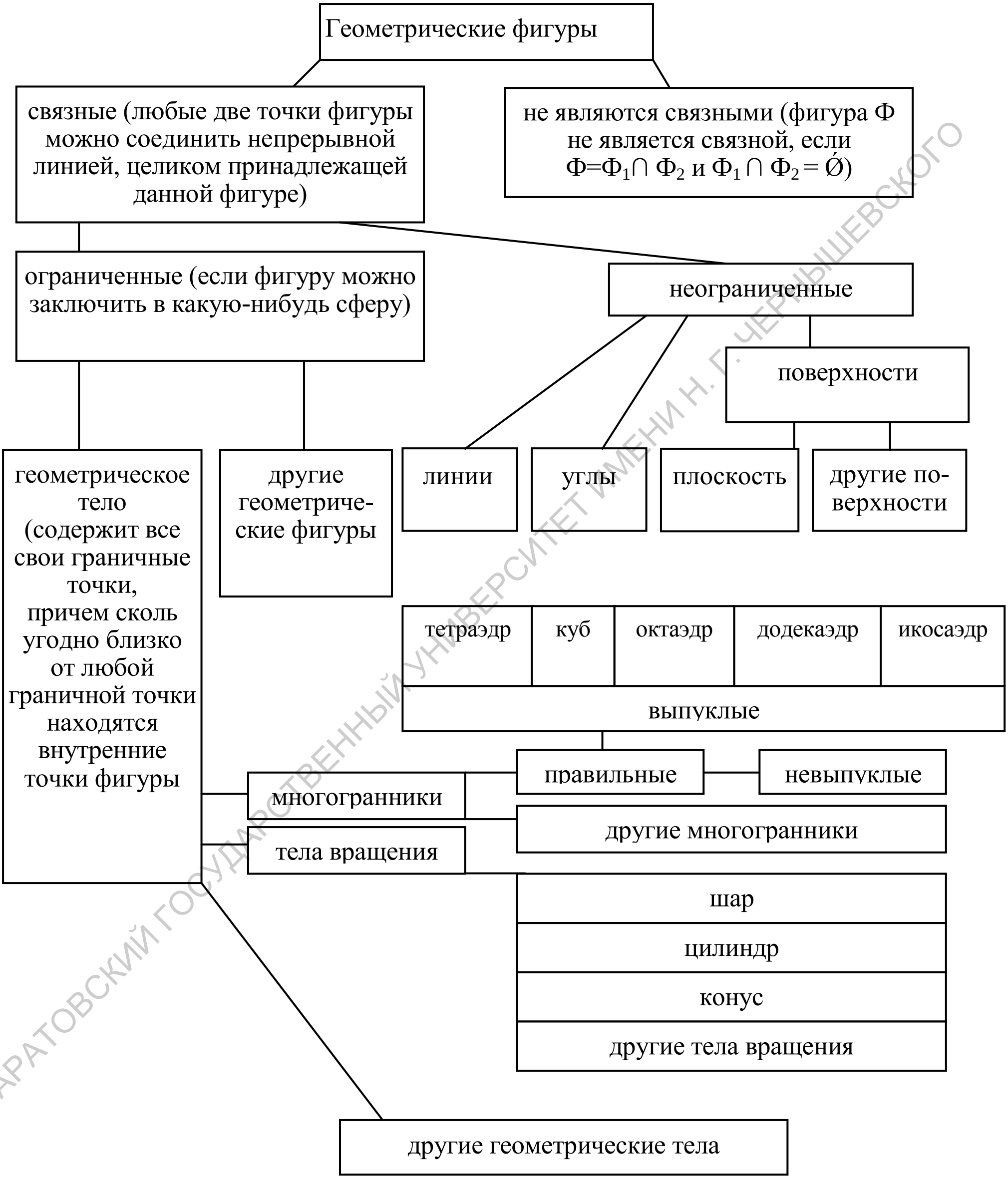
59. В учебнике [2] на странице 129 дано определение шара: «Тело, ограниченное сферой, называется шаром. Центр, радиус и диаметр сферы называются также центром, радиусом и диаметром шара».

60. В учебнике [15] на странице 355 дано определение тела вращения: «Телом вращения в простейшем случае называется такое тело, которое плоскостями, перпендикулярными некоторой прямой (оси вращения), пересекается по кругам с центрами на этой прямой».

IV. Задачи повышенной сложности.

1. Установите родовидовые связи следующих понятий:
   1.1 углы, образованные пересечением двух прямых третьей.
   1.2 треугольник.
   1.3 окружность.
   1.4 ломаная.
   1.5 многоугольник.
   1.6 параллелограмм.
   1.7 прямоугольник.
   1.8 ромб.
   1.9 квадрат.
   1.10 трапеция.
2. Опишите все случаи взаимного расположения:
   2.1 четырех точек.
   2.2 трех прямых.
   2.3 трех плоскостей.
   2.4 прямой и двух точек.
   2.5 точки и двух прямых.
   2.6 плоскости и двух точек.
   2.7 точки и двух плоскостей.
   2.8 плоскости и двух прямых.
   2.9 прямой и двух плоскостей.
   2.10 двух прямых и двух точек.

Пример. Установите родовидовые связи понятия геометрические фигуры.



V. Творческое задание.

Изучите предложенный хрестоматийный материал (по необходимости дополните библиографический список). Выясните, из каких положений (математических, дидактических и психолого-дидактических) исходил Колмогоров при разработке школьного курса математики, и в первую очередь, при формировании понятийного аппарата школьного курса математики..

1) Колмогоров А.Н. Научные основы школьного курса математики. Первая лекция: Современные взгляды на природу математики. – Журнал «Математика в школе», 3 (1969).
2) Колмогоров А.Н. Научные основы школьного курса математики. Вторая лекция: Натуральные числа. – Журнал «Математика в школе», 5 (1969).
3) Колмогоров А.Н. Научные основы школьного курса математики. Третья лекция: Обобщение понятия числа. Неотрицательные рациональные числа. – Журнал «Математика в школе», 2 (1970).
4) Колмогоров А.Н. О скалярных величинах, – Журнал «Математика в школе», 3 (1986).
5) Колмогоров А.Н. Научные основы школьного курса математики. Программы педагогических институтов. – М. : Просвещение, 1983.
6) Колмогоров А.Н. Математика - наука и профессия. 1988.

РАЗДЕЛ 2. ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ И ПРИЗНАКОВ ПОНЯТИЙ.

Теорема – важнейший структурный элемент математики как науки. Понимание того, как устроены теоремы, понимание существа понятия «доказательство теоремы» и методов доказательства теорем образуют те логические основания, без усвоения которых невозможно ни изучать математику, ни преподавать ее.

С точки зрения традиционной логики, математическая теорема есть суждение. Понятие суждения представляет собой вторую важнейшую категорию, выделенную традиционной логикой. В суждениях выражаются знания о связях между понятиями. Точнее, суждение – это форма мысли, в которой утверждается (или отрицается) либо связь между предметом и его признаком, либо связь (отношение) между предметами, либо факт существования предмета; суждение может быть либо истинным, либо ложным и при этом непременно одним из двух.

Высказывание – это предложение языка, выражающее суждение.

«Суждение» – термин, пришедший из традиционной логики. В математической логике ему соответствует термин «высказывание». Понятие, выражаемые этими терминами часто отождествляются. Или же под суждением понимается сама мысль о связи понятий, а под высказыванием – предложение языка, выражающее эту мысль. Образно говоря, можно сказать, что суждение – в голове, а высказывание – на языке. Поскольку иначе, как с помощью языка суждение выразить невозможно, поэтому суждение можно отождествлять с высказыванием.

Итак, высказывание – это предложение, которое что-либо утверждает (или отрицает) и о котором можно судить, истинно оно или ложно.

Истинное суждение (высказывание) – такое, в котором связь понятий правильно отражает реальные свойства и отношения предмета мысли. Ложное суждение (высказывание) – такое, в котором связь понятий искажает объективные свойства и отношения предмета мысли [7, с. 50-51].

I. Работа с теоретическим материалом темы (20 минут).

Изучите пункты «Математические теоремы как суждения», «Прямая и обратная теоремы», «Противоположная и обратная противоположной теоремы» из Хрестоматии [5]. Ответьте на вопрос: «Изменилось ли ваше представление о теореме как «об утверждении, справедливость которого устанавливается путем рассуждений» [1, с.29]? Разработайте конспект по одной из тем:

1) «Математические теоремы как суждения»;
2) «Прямая, обратная и противоположная теоремы».

II. Тестовые задания на усвоение теоретического материала (25 минут). В следующих заданиях определите, истинны или ложны суждения о свойствах точек, прямых и плоскостей, записанные на логико-математическом языке.

1. Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну: $(\forall A, B, a)(\exists! a)(A \in a) \wedge (B \in a)$.

2. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна: $(\forall A, a, \alpha)(A \notin a)(\exists! \alpha)(a, A \in \alpha)$.

3. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна: $(\forall a, \alpha)(a \cap b)(\exists! \alpha)(a, b \in \alpha)$.

4. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость: $(\forall a, b)(a \parallel \alpha)((a \cap \alpha) \to (b \cap \alpha))$.

5. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости:
$(\forall a, b, \alpha)((a \notin \alpha) \wedge (a \parallel b) \wedge (b \in \alpha)) \to (a \parallel \alpha)$.

6. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой:
$(\forall \alpha, \beta)((a \cap \beta) \wedge (a \parallel \alpha) \wedge (\alpha \cap \beta = c)) \to (b \parallel a)$.

7. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая, либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости:
$(\forall a, b, \alpha)((a \parallel b) \wedge (a \parallel \alpha)) \to (b \parallel \alpha) \vee (b \in \alpha)$.

8. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая образует угол в 90° с этой прямой: $(\forall a,b,c)\big((a\parallel b)\wedge(a\perp c)\big)\to(b\perp c)$.

9. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости: $\big((a\parallel b)\wedge(a\perp\alpha)\big)\to(b\perp\alpha)$.

10. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны: $(\forall a,b)\,\big((a\perp\alpha)\wedge(b\perp\alpha)\big)\to(a\parallel\alpha)$

III. Тренировочные задания.

Пример.

Характеристические свойства угла (признаки):

Определение 4. $\alpha=[OA)\cup[OB)\cup\pi$.

Определение 5. $\alpha'=[OA)\cup[OB)\cup\pi'$.

Свойства угла:

Теорема 1. $\alpha\cup\alpha'=\Pi$

Теорема 2. $\alpha\cap\alpha'=\angle AOB$.

Введем определение равных углов.

Определение 6. Углы называются равными, если их можно совместить наложением друг на друга. [6, с. 172]

Теорема 3. $\alpha=\alpha'\Rightarrow\alpha,\alpha'$ – развернутые углы.

Введем понятие градусной меры угла.

Обычно за единицу измерения углов принимают градус – угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла.

Определение 7. Положительное число $\hat{\alpha}$, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется градусной мерой угла.

Величину угла будет обозначать знаком ^. Например: $\hat{\alpha}$.

Теорема 4. $\hat{\alpha}+\hat{\alpha}'=360^\circ$.

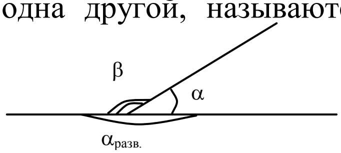
Теорема 5. $\hat{\alpha}_{разв.}=180^\circ$.

Теорема 6. $\hat{\alpha}<\hat{\alpha}'$.

Введем понятие смежного угла.

Определение 8. Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются смежными.

Теорема 7. $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180°$.



В следующих задачах сформулируйте и запишите в виде теорем на логико-математическом языке все признаки и свойства следующих понятий:

1. серединный перпендикуляр к отрезку;
2. биссектриса угла;
3. треугольник;
4. медиана треугольника;
5. биссектриса треугольника;
6. высота треугольника;
7. средняя линия треугольника;
8. окружность;
9. хорда окружности;
10. дуга окружности;
11. диаметр;
12. касательная к окружности;
13. центральный угол;
14. вписанный угол;
15. расстояние между двумя окружностями;
16. круг;
17. сегмент круга;
18. ломаная;
19. многоугольник;
20. диагональ многоугольника;
21. правильный многоугольник;
22. параллелограмм;
23. прямоугольник;
24. ромб;
25. квадрат;
26. трапеция;
27. средняя линия трапеции;
28. осевая симметрия;

29. центральная симметрия;
30. движение;
31. параллельный перенос;
32. поворот;
33. подобие;
34. гомотетия;
35. подобные треугольники;
36. вписанная окружность;
37. описанная окружность;
38. вектор;
39. сумма векторов;
40. разность векторов;
41. скалярное произведение векторов;
42. тетраэдр;
43. параллелепипед;
44. угол между прямой и плоскостью;
45. двугранный угол;
46. многогранник;
47. правильный многогранник;
48. призма;
49. правильная призма;
50. пирамида;
51. правильная пирамида;
52. усеченная пирамида;
53. компланарный вектор;
54. зеркальная симметрия;
55. цилиндр;
56. конус;
57. усеченный конус;
58. сфера;
59. шар;
60. тело вращения.

IV. Задачи повышенной сложности.

При выполнении тренировочных задач вы получили совокупность теорем, которые назовем теоремами первого уровня. Используя этим теоремы, выведите, по крайней мере, еще 3 теоремы. При необходимости вводите новые понятия.

Пример.

Теорема 8. Для смежных углов α и β: $\alpha = 180^\circ - \beta$ и $\beta = 180^\circ - \alpha$ (следствие из теоремы 7).

Теорема 9. Если $\alpha = \beta$ и α и β – смежные, то $\alpha = \beta = 90^\circ$ (следствие из теоремы 7).

Определение 9. Угол, величина которого равна 90°, называется прямым.

Определение 10. Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжением сторон другого.

Теорема 10. Вертикальные углы равны (следствие из теорем 4, 5, 7, 8).

V. Творческое задание.

По приведенной ниже схеме опишите одну из следующих геометрических фигур:

а) шаровой сектор;

б) шаровой сегмент;

в) шаровой слой;

г*) сферический треугольник;

д*) сферический двуугольник.

Схема:

1. Определение.
2. Родо-видовые связи.
3. Рисунок – чертеж для плоской фигуры или способы изображения геометрического тела при параллельном проектировании (чертежи прямоугольной проекции).
4. Признаки и свойства геометрической фигуры.
5. Способы вычисления длин отрезков фигуры, ее углов, площади и объема (если данные величины существуют).
6. Описание частей фигуры и наиболее значимых конфигураций.
7. Геометрическая фигура в прямоугольной системе координат.

При необходимости используйте ресурсы Internet, школьные учебники, справочники, энциклопедии.

Задания г*, д* – задания уровня повышенной подготовки.

РАЗДЕЛ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

Доказательства в математике основываются на умозаключениях. Умозаключения – третий, после понятия и суждения, важнейший объект, важнейшая категория, изучаемая традиционной логикой. В умозаключениях выражаются логические связи между суждениями. В самом общем виде умозаключение представляет собой мыслительный процесс получения нового знания, выраженного в суждении, из других знаний, также выраженных в суждениях. Исходные суждения называются посылками умозаключения, а получаемое суждение – заключением или следствием. Таким образом, посредством умозаключений мы получаем приращение знаний, не обращаясь к исследованию предметов и явлений самой действительности, имеем возможность открывать такие связи и отношения действительности, которые невозможно усмотреть непосредственно.

Умозаключением называют логическую операцию, сопоставляющую одному или нескольким данным суждениям (высказываниям) новое суждение (высказывание). В зависимости от того, по каким правилам происходит это сопоставление, умозаключения делятся на дедуктивные (от лат. deductio – выведение) и индуктивные (от лат. inductio – наведение) или правдоподобные. Дедуктивные умозаключения связаны с логикой, индуктивные – с интуицией. Расхожим является мнение о том, что дедуктивные умозаключения – это «умозаключения от общего к частному», а индуктивные – это «умозаключения от частного к общему». Эти «определения» лишь в самых общих чертах характеризуют, в частности, дедуктивные умозаключения. Это одно приведенное свойство еще не является для них определяющим. Дедуктивное умозаключение основано, прежде всего, на анализе формальной (логической) структуры посылок и следствия, индуктивное умозаключение основано на анализе содержания посылок и следствия. [7, с. 118]

I. Работа с теоретическим материалом темы (20 минут).

Изучите пункты «Понятие доказательства», «О пользе теории множеств» из Хрестоматии [5]. Разработайте конспект по теме «Доказательства в геометрии».

II. Тестовые задания на усвоение теоретического материала (25 минут). Вспомните и воспроизведите доказательства основных фактов геометрии. Доказательство запишите на логико-математическом языке.

1. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной и притом только одна.

2. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

3. Пусть даны на плоскости две прямые и третья прямая их секущая. Две прямые, пересеченные третьей будут параллельны тогда и только тогда, когда накрест лежащие углы равны.

4. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещиваются.

5. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

6. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

7. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

8. Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.

9. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

10. Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

III. Тренировочные задания.

В предыдущем разделе «Изучение свойств и признаков понятий» вами были сформулированы и записаны в виде тео-

рем на логико-математическом языке признаки и свойства понятий. Докажите сформулированные теоремы.

Пример. Докажем сформулированные ранее теоремы.

Теорема 1. $\alpha \bigcup \alpha' = \Pi$

Доказательство.

Определение 4. $\alpha = [OA) \bigcup [OB) \bigcup \pi$.

Определение 5. $\alpha' = [OA) \bigcup [OB) \bigcup \pi'$.

$$\alpha \bigcup \alpha' = (([OA) \bigcup [OB)) \bigcup \pi) \bigcup (([OA) \bigcup [OB)) \bigcup \pi') =$$
$$= [OA) \bigcup [OB) \bigcup \pi \bigcup \pi' = \Pi \qquad (1)$$

Замечание: равенство (1) возможно доказать с использованием аксиом, что будет сделано в разделе 4.

Теорема 2. $\alpha \bigcap \alpha' = \angle AOB$

Доказательство.

Лемма 1. $([OA) \bigcup [OB)) \bigcap \pi = \varnothing$.

Лемма 2. $([OA) \bigcup [OB)) \bigcap \pi' = \varnothing$.

Лемма 3. $\pi \bigcap \pi' = \varnothing$.

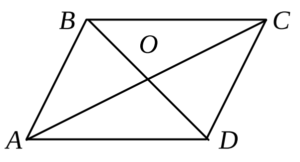
$$\alpha \bigcap \alpha' = (([OA) \bigcup [OB)) \bigcup \pi) \bigcap (([OA) \bigcup [OB)) \bigcup \pi') =$$
$$= ([OA) \bigcup [OB)) \bigcap ([OA) \bigcup [OB)) \bigcup (([OA) \bigcup [OB)) \bigcap \pi) \bigcup$$
$$\bigcup (([OA) \bigcup [OB)) \bigcap \pi') \bigcup (\pi \bigcap \pi')$$

По лемме 1, лемме 2 и лемме 3 получаем:

$$([OA) \bigcup [OB)) \bigcap ([OA) \bigcup [OB)) = \angle AOB \Leftrightarrow ([OA) \bigcup [OB)) = \angle AOB.$$

IV. Задачи повышенной сложности.

Пример. В книге [7] на странице 122 приведен пример формального доказательства следующего утверждения: «Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам». Представим результаты этого доказательства в виде таблицы.

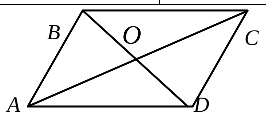
Утверждение		Обоснование
(1) ABCD - параллелограмм		Гипотеза
(2) O – середина диагонали BD : BO = OD		Гипотеза
(3) C_1 – точка луча AO такая, что AO = OC_1		Гипотеза
(4) BO = OD, AO =OC_1		(2) $\wedge$ (3)
(5) Если BO = OD, AO = OC_1, то ABC_1D - параллелограмм		По теореме: «Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм».

(6) ABC_1D - параллелограмм	MP: (4), (5)
(7) Если ABC_1D – параллелограмм, то $BC_1 \| AD$	По определению параллелограмма
(8) $BC_1 \| AD$	MP: (6), (7)
(9) Если ABCD – параллелограмм, то $BC \| AD$	По определению параллелограмма
(10) $BC \| AD$	MP: (1), (9)
(11) $BC_1 \| AD \wedge BC \| AD$	(8) $\wedge$ (10)
(12) Если $BC_1 \| AD$ и $BC \| AD$, то $BC_1 = BC$	Аксиома параллельности
(13) $BC_1 = BC$	MP: (11), (12)
(14) Если ABC_1D – параллелограмм, то $AB \| DC_1$	По определению параллелограмма
(15) $AB \| DC_1$	MP: (6), (14)
(16) Если ABCD – параллелограмм, то $AB \| DC$	По определению параллелограмма
(17) $AB \| DC$	MP: (1), (16)
(18) $AB \| DC_1 \wedge AB \| DC$	(15) $\wedge$ (17)
(19) Если $AB \| DC_1 \wedge AB \| DC$, то $DC_1 = DC$	Аксиома параллельности
(20) $DC_1 = DC$	MP: (18), (19)
(21) $BC_1 = BC \wedge DC_1 = DC$	(13) $\wedge$ (20)
(22) Если $BC_1 = BC$ и $DC_1 = DC$, то $C_1 = BC_1 \cap DC_1 = BC \cap DC = C$	По свойствам равенства
(23) $C_1 = C$	MP: (21), (22)
(24) $C_1 = C \wedge AO = OC_1$	(23) $\wedge$ (3)
(25) Если $C_1 = C$ и $AO = OC_1$, то $AO = OC$	По свойствам равенства
(26) $AO = OC$	MP: (24), (25)

В пунктах 6, 8, 10, 13, 15, 17, 20, 23, 26 используется правило вывода Modus Ponens (MP):

$$\frac{P;\ \text{Если } P,\ \text{то } Q}{Q}$$

В процессе обучения совсем формальные доказательства геометрических фактов не целесообразны. Поэтому, часть этапов доказательства опускается. В результате получаем более компактное и логически более понятное представление доказательства.

Утверждение		Обоснование
(1) ABCD - параллелограмм		Дано
(2) $AB \| CD$, $BC \| AD$		По определению параллелограмма

(3) $O \in [BD)$, BO = OD	По построению
(4) $C_1 \in [AO)$, AO = OC_1	По построению
(5) ABC_1D – параллелограмм	(3) $\wedge$ (4) $\wedge$ по теореме: «Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник - параллелограмм».
(6) $BC_1 \parallel AD$	По определению параллелограмма
(7) $BC_1 \equiv BC$	(2) $\wedge$ аксиома параллельности
(8) $AB \parallel DC_1$	По определению параллелограмма
(9) $DC_1 \equiv DC$	(2) $\wedge$ аксиома параллельности
(10) $C_1 \equiv C$	МР: (7), (9)
(11) $ABCD \equiv ABC_1D$	Из (7) $\wedge$ (9) $\wedge$ (10)

В следующих задачах докажите утверждения, представьте это доказательство в виде, отвечающем определению (формального) доказательства, а также в компактном и более понятном виде. Результаты оформите в виде двух таблиц, состоящих из двух колонок, одна из которых содержит утверждения, а другая – их обоснования.

1. Если у четырехугольника *ABCD* углы *A* и *C* тупые, то $AC < BD$.

2. Если в выпуклом четырехугольнике *ABCD* противоположные углы *A* и *C* – прямые, и на диагональ *AC* опущены перпендикуляры *BE* и *DF*, то *CE* = *FA*.

3. Если четыре различные точки плоскости *A, B, C* и *D* расположены так, что $AB \perp CD$, $AC \perp BC$, то и $AD \perp BC$.

4. Если точка *C* лежит между точками *A* и *B*, и в одной полуплоскости относительно *AB* построены равнобедренные треугольники *ACD* и *CEB* такие, что *AD* = *DC* = *CE*= *EB*, то для точки *D*, находящейся на расстоянии, равном *AD*, от вершин *D* и *E*, и не совпадающей с точкой *C*, выполняется равенство *AF* = *FB*.

5. Если *a, b, c* – стороны некоторого треугольника и $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, то этот треугольник – равносторонний.

6. Если прямая, проведенная из вершины *C* некоторого треугольника *ABC* делит медиану, опущенную из вершины *A*, пополам, то она делит сторону *AB* в отношении *1:2*.

7. Перпендикуляр, восстановленный из середины отрезка, соединяющего основания двух высот треугольника, делит третью сторону этого треугольника на две равные части.

8. Если в остроугольном треугольнике *ABC* на высоте *AH* выбрать произвольную точку *D*, через которую провести *BD* до пересечения со стороной *AC* в точке *E* и *CD* до пересечения со стороной *AB* в точке *F*, то $\angle AHE = \angle ANF$.

9. У любого тетраэдра есть по крайней мере одна вершина, все плоские углы при которой острые.

10. Если угол при вершине равнобедренного треугольника $\angle C=20°$, и на боковых сторонах *AB* и *BC* выбраны соответственно точки *M* и *N* так, что $\angle ABM=60°$, $\angle BAN=50°$, то $\angle BMN=30°$.

11. Если через внутреннюю точку *P* треугольника *ABC* провести прямые, параллельные его сторонам, обозначить тоски пересечения со сторонами *AB*, *BC* и *AC* треугольника соответственно C_1 и C_2, A_1 и A_2, B_1 и B_2, то $\dfrac{A_1A_2}{BC}+\dfrac{B_1B_2}{AC}+\dfrac{C_1C_2}{AB}=1.$

12. Все ромбы, вписанные в данный треугольник, подобны.

13. Если квадрат и треугольник равных площадей, вписаны в некоторый полукруг, причем одна из сторон треугольника совпадает с диаметром этого полукруга, то центр окружности, вписанной в данный треугольник, лежит на одной из сторон данного квадрата.

14. Если в треугольнике *ABC* отрезки *BD* и *BE* делят на три равные части угол *B*, *CD* и *CE* делят на три равные части угол *C*, а точка *E* расположена ближе к стороне *BC*, то $\angle BDE=\angle EDC$.

15. Если в четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются, то они делятся точкой пересечения пополам.

16. Если в тетраэдре *OABC* противоположные ребра *OA* и *BC*, а также *OB* и *AC* взаимно перпендикулярны, то и противоположные ребра *OC* и *AB* также взаимно перпендикулярны.

17. Отрезки, соединяющие середины противолежащих ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

18. Докажите, что стороны параллелограмма обратно пропорциональны соответствующим высотам.

19. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и через точку пересечения продолжений ее боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

20. В треугольнике центр вписанной окружности соединили с вершинами треугольника и точками касания. Докажите, что пары треугольников, прилежащие к одной вершине, равны.

V. Творческое задание: «Исторические теоремы геометрии». Разберите одну из предложенных теорем, приведите подробное доказательство на логико-математическом языке. Что вы знаете об авторах этих теорем?

1. Теорема Микеля.
2. Теорема Клиффорда.

Литература:

1. Коксетер. Введение в геометрию. – М., 1966.
2. Прасолов В. Задачи по планиметрии. Ч. 1/ В. Прасолов – М. : 1991. (задача №2.83).

РАЗДЕЛ 4. АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ В ГЕОМЕТРИИ.

Можно сказать, что математическая наука достигает совершенства лишь тогда, когда ей удается пользоваться аксиоматическим методом, т.е. когда наука принимает характер аксиоматической теории. Более того, развитие наук в XX в. показало, что математика выделяется в системе наук тем, что в ней чрезвычайно широко используется аксиоматический метод, который в значительной мере и обусловливает поразительную эффективность математики в процессе познания окружающего мира и преобразующего воздействия на него.

В начале XX в. благодаря главным образом работам немецкого математика Д.Гильберта (1862–1943) окончательно сформировались принципиальные положения аксиоматического метода и было осознано его значение для математики. Первые идеи, связанные с этим методом, восходят к титанам античной мысли Платону и Аристотелю (IV в. до н.э.). Первый практический шаг на этом пути был сделан более двух тысяч лет назад древнегреческим математиком Евклидом (около 300 г. до н.э.). Его труд "Начала" (15 книг) как энциклопедия геометрических знаний служил образцом написания математических работ на протяжении более двадцати веков.

Можно проследить два пути, по которым происходило становление тех или иных аксиоматических теорий, известных в математике.

Первый путь можно охарактеризовать тем, что та или иная математическая теория, достигнув достаточно высокого уровня развития, принимает характер аксиоматической теории. Подобным образом произошла аксиоматизация таких математических теорий, как арифметика (на основе системы аксиом Дж. Пеано), геометрия (на основе систем аксиом Д.Гильберта, Г.Вейля, М.Пиери и др.), теория вероятностей (аксиоматика А.Н.Колмогорова) и т.д.

Второй путь возникновения аксиоматических теорий связан с процессом постепенного осознания глубокого внутреннего сходства основных черт, казалось бы, совершенно разных математических теорий, с попыткой выделить общие черты, с тем чтобы, руководствуясь ими, построить аксиоматическую теорию. На этом пути возникли, по-видимому, все алгебраические (аксиоматические) теории, прежде всего теории групп, колец, полей и других алгебраических систем, общая или универсальная алгебра и т.д.

I. Работа с теоретическим материалом темы (20 минут).

Изучите пункты «Аксиоматический метод в математике», «Аксиоматический метод в обучении математике», «Дальнейшие свойства неформальных аксиоматических теорий» из Хрестоматии [5]. Разработайте конспект по одной из тем:

1) «Аксиоматический метод в математике»
2) «Свойства неформальных аксиоматических теорий».

II. Тестовые задания на усвоение теоретического материала (25 минут). Заполните пропуски.

1. ______________ – первоначальные утверждения о первоначальных понятиях, которые принимаются без доказательства.

2. Высказывание, определяющее значение понятия, называется ______________________ .

3. Аксиоматическая теория, две любые модели которой изоморфны, называется ____________________________ .

4. Аксиома, не зависящая от остальных, то есть такая, которая не может быть выведена из остальных аксиом этой системы, называется ________________________________ .

5. ______________ – новые утверждения о первоначальных и определяемых понятиях, полученные с помощью правил логического умозаключения, исходя из выбранной системы аксиом.

6. Теория называется ________________________ , если в ней не может быть доказано одновременно некоторое утверждение A и его отрицание $\overline{A}$.

7. Понятие, смысл которого определен, называется ____________________________ .

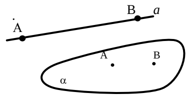
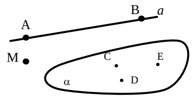
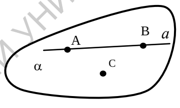
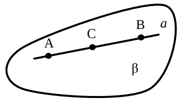
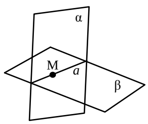
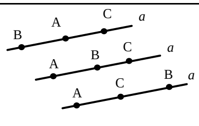
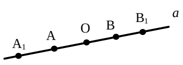
8. Понятия, которые не определяются и используются без объяснения их смысла, называются _____________________________ .

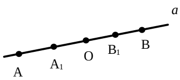
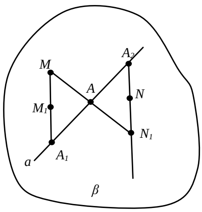
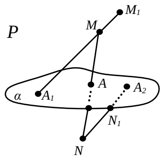
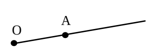
9. Теория называется ________________________, если она содержит достаточное для какой-нибудь цели количество теорем.

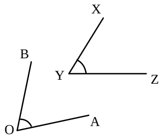
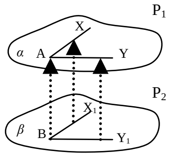
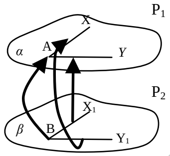
10. Совокупность всех теорем, доказываемых на основе систем аксиом, называется ________________________________ .

III. Тренировочные задания.

<u>Пример</u>. Система аксиом по Атанасяну Л.С.

Система аксиом Атанасяна			
Неопределяемые понятия: точка, прямая, плоскость, «лежать между» для точек прямой, наложение			
№	Формулировка	Геометрическая модель	Запись на логико-математическом языке
1	2	3	4
А1	На каждой прямой и в каждой плоскости имеются по крайней мере две точки.		$(\forall a)(\exists A,B): A,B\in a$ $(\forall \alpha)(\exists A,B): A,B\in \alpha$
А2	Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой, и по крайней мере 4 точки, не лежащие в одной плоскости.		$(\forall a)(\exists A,B,M)$ $(A,B\in a\to M\notin a)\vee(A,M\in a\to$ $\to B\notin a)\vee(M,B\in a\to A\notin a)$ $(\forall \alpha)(\exists C,D,E,M)$ $(C,D,E\in\alpha\to M\notin\alpha)\vee$ $(D,E,M\in\alpha\to C\notin\alpha)\vee$ $(C,E,M\in\alpha\to D\notin\alpha)\vee$ $(C,D,M\in\alpha\to E\notin\alpha)$
А3	Через любые две точки проходит прямая и притом только одна.		$(\forall A,B)(\exists! a)$: $(A\in a)\wedge(B\in a)$
А4	Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.		$(\forall a,A,B,C)(A,B\in a)(C\notin a)(\exists! a)$ $[(A\in a)\wedge(B\in a)\wedge(C\in a)]$
А5	Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.		$(\forall A,B,C,a,\beta)(A,B,C\in a)$: $[(A\in\beta)\wedge(B\in\beta)]\to(C\in\beta)$
А6	Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.		$(\forall M,\alpha,\beta)(\alpha\cap\beta=M)(\exists a)$: $[(M\in a)\wedge(\alpha\cap\beta=a)]$
А7	Из трех точек прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими.		$(\forall A,B,\tilde{N},a)(A,B,C\in a)$ $((A\neq B)\wedge(B\neq C)\wedge(A\neq C))$: $(A\in[BC])\vee(B\in[AC])\vee(C\in[AB]$
А8	Каждая точка *O* прямой разделяет ее на две части – два луча – так, что		

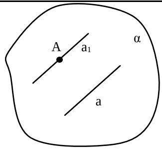
	любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки *O*, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки *O*. При этом точка *O* не принадлежит ни одному из указанных лучей.		$(\forall O, A, B, A_1, B_1, a)(O, A, B \in a)$ $(O \in [AB])\ (a = [OA) \cup \{O\} \cup [OB))$ $([OA) \cap [OB) = \varnothing)$ $(A_1 \in [OA) \to (A_1 \in [AO]) \vee (A \in [A_1O$ $(B_1 \in [OB) \to (B_1 \in [BO]) \vee (B \in [B_1O]$
Определение. [AB] – отрезок, если $[AB] = [AB) \cap [BA)$.			
A9	Каждая прямая *a*, лежащая в плоскости, разделяет эту плоскость на две части – две полуплоскости – так, что любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой *a*, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой *a*. При этом точки прямой *a* не принадлежат ни одной из этих полуплоскостей.		$(\forall A, A_1, A_2, M, M_1, N, N_1, a, \beta)$ $(a \subset \beta)\ (M, N \in \beta)$ $(MN \cap a = A) : (A \in MN)$ $(\beta = [aM) \cup a \cup [aN))$ $([aM) \cap [aN) = \varnothing)$ $((M_1 \in [aM)) \to (\exists A_1 \in a)) :$ $((M_1 \in [MA_1]) \vee (M \in [M_1A_1]))$ $((N_1 \in [aN)) \to (\exists A_2 \in a)) :$ $((N_1 \in [NA_2]) \vee (N \in [N_1A_2]))$
A10	Каждая плоскость α разделяет пространство на две части – два полупространства – так, что любые две точки одного и того же полупространства лежат по одну сторону от плоскости α, а любые две точки разных полупространств лежат по разные стороны от плоскости α.		$(\forall A, A_1, A_2, M, M_1, N, N_1, \alpha, \mathrm{P})$ $(\alpha \subset \mathrm{P})\ (M, N \in \mathrm{P})$ $(MN \cap \alpha = A) : (A \in MN)$ $(\mathrm{P} = [\alpha M) \cup \alpha \cup [\alpha N))$ $([\alpha M) \cap [\alpha N) = \varnothing)$ $((M_1 \in [\alpha M)) \to (\exists A_1 \in \alpha)) :$ $((M_1 \in [A_1M]) \vee (M \in [A_1M_1]))$ $((N_1 \in [\alpha N)) \to (\exists A_2 \in \alpha)) :$ $((N_1 \in [A_2N]) \vee (N \in [A_2N_1]))$
A11	Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.		
A12	На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.		$(\forall A, O, M, N)\ (\forall [MN])(\forall [OA))$ $(\exists! A \in [OA)) : (OA = MN)$

A13	От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.		$(\forall A,B,O,X,Y,Z)(\forall[OA))$ $(\forall[(OA),B))(\forall\angle XYZ<180^\circ)$ $(\exists![OB]\subset[(OA),B)):(\angle AOB=\angle XYZ$
A14	Два равных угла *XAY* и X_1BY_1, лежащие в плоскостях α и β, являющихся границами полупространств P_1 и P_2, можно совместить наложением так, что при этом совместятся полупространства P_1 и P_2, причем это можно сделать двумя способами: в одном случае совместятся лучи *[AX)* и $[BX_1)$, *[AY)* и $[BY_1)$, а в другом – лучи *[AX)* и $[BY_1)$, *[AY)* и $[BX_1)$.	 	

Определение. Фигура – любое множество точек.

A15	Любая фигура равна сама себе.		$(\Phi\equiv\Phi)$
A16	Если фигура Φ равна фигуре Φ_1, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ.		$(\forall\Phi,\Phi_1)$: $\Phi\equiv\Phi_1\Rightarrow\Phi_1\equiv\Phi$
A17	Если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3.		$(\forall\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)$: $((\Phi_1\equiv\Phi_2)\wedge(\Phi_2\equiv\Phi_3))\Rightarrow$ $\Rightarrow(\Phi_1\equiv\Phi_3)$
A18	При выбранной единице измерения отрезков, длина каждого отрезка выражается положительным числом.		$(\forall[OE],[AB])$: $[OE]=1\Rightarrow AB>0$
A19	При выбранной единице измерения отрезков, для любого положительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.		$(\forall[OE])(\forall n>0)$ $OE=1\Rightarrow(\exists AB):AB=n$

Определение. Две прямые параллельны, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются: $a\cap b=\varnothing\to a\parallel b$.

А20	**Аксиома параллельности** В любой плоскости через точку, не лежащую на данной прямой этой плоскости, проходит только одна прямая, параллельная данной.		$(\forall \alpha, a, A)(a \subset \alpha)(A \notin a)$ $(A \in \alpha)(\exists! a_1 \subset \alpha)(A \in a_1):$ $(a \cap a_1) = \varnothing \Leftrightarrow a \parallel a_1$

В следующих системах аксиом (по Погорелову, по Гильберту, по Вейлю, по А.Д. Александрову) запишите аксиомы на логико-математическом языке и представьте их геометрические модели.

Система аксиом Погорелова			
Неопределяемые понятия: точка, прямая, плоскость			
№	Формулировка	Геометрическая модель	Запись на логико-математическом языке
1	2	3	4
Аксиомы планиметрии			
П1	Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.		
П2	Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.		
П3	Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.		
П4	Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.		
П5	Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.		

П6	На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.		
П7	От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.		
П8	Какой бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительной данной полупрямой.		
П9	Через точку, не лежащую на данной прямой можно провести не более одной прямой, параллельной данной.		
Аксиомы стереометрии			
П10	Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.		
П11	Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.		

Система аксиом Гильберта			
Неопределяемые понятия: точка, прямая, плоскость			
№	Формулировка	Геометрическая модель	Запись на логико-математическом языке
1	2	3	4
Аксиомы принадлежности			
Г1	Для любых двух точек A, B существует прямая a, которой принадлежит каждая из данных точек.		
Г2	Для двух точек A, B может существовать не более одной прямой a, которой эти точки принадлежат.		

Г3	Если дана прямая a, то всегда существуют по крайней мере две точки A, B, которые принадлежат прямой a.		
Г4	Если A, B, C – точки, не принадлежащие одной прямой, то существует плоскость α, которой эти точки принадлежат. Для любой плоскости α существует точка А, принадлежащая α.		
Г5	Для любых трех точек A, B, C, не принадлежащих одной прямой, может существовать не более одной плоскости β, которой принадлежит каждая из этих точек.		
Г6	Если две точки A, B принадлежат как прямой a, так и плоскости β, то прямая a принадлежит плоскости β.		
Г7	Если существует точка A, принадлежащая двум плоскостям β, γ, то существует вторая точка B, принадлежащая плоскостям β, γ.		
Г8	Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.		
Аксиомы порядка			
Г9	Если точка B лежит между точками A и C, то A, B, C – различные точки одной прямой и B лежит также между C и A.		
Г10	Для любых двух точек A и B существует по крайней мере одна точка C, такая, что B лежит между A и C.		
Г11	Если даны три различные точки A, B, C, лежащие на одной прямой, то из этих точек не более чем одна может лежать между двумя другими.		
Г12	Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой, и		

	a – прямая, лежащая в плоскости (ABC), но не проходящая ни через одну из точек A, B, C. Если при этом прямая a проходит через внутреннюю точку отрезка AB, то она должна пройти через внутреннюю точку по крайней мере одного из двух отрезков $[AC]$ и $[BC]$.		
Аксиомы конгруэнтности			
Г13	Если даны двухвершинники AB и $A'B''$, то существует точка B', лежащая по одну сторону с B'' от A' и такая, что двухвершинник AB равен двухвершиннику $A'B''$ ($AB=A'B'$). Для каждого двухвершинника AB справедливо соотношение $AB=BA$.		
Г14	Если двухвершинники $A'B'$ и $A''B''$ равны одному и тому же двухвершиннику AB, то двухвершинник $A'B'$ равен $A''B''$.		
Г15	Если точка B лежит между точками A и C, точка B' лежит между точками A' и C', то из равенств двухвершинников $AB=A'B'$, $BC=B'C'$ вытекает равенство $AC=A'C'$.		
Г16	Пусть дан одномерный угол $\angle(h,k)$, стороны которого не принадлежат одной прямой и полуплоскость α_1, ребру a которой принадлежит данный луч h с вершиной O'. Существует единственный луч k' с начальной точкой O', принадлежащий полуплоскости α_1, и такой, что угол $\angle(h,k)$ равен углу $\angle(h',k')$. Всякий угол равен самому себе.		

Г17	Если в треугольниках *(ABC)* и *(A′B′C′)* стороны *AB* и *AC* соответственно равны сторонам *A′B′* и *A′C′* и угол $\angle(BAC)$, равен углу $\angle(B'A'C')$, то выполняется равенство $\angle(ABC)=\angle(A'B'C')$		
Г18	**Аксиома непрерывности** Пусть точки отрезка *[AB]* разбиты на два класса K_1, K_2 так, что выполняются следующие условия: 1) Каждая точка *M* отрезка *[AB]* принадлежит одному из классов K_1, K_2, точка *A* принадлежит классу K_1, точка *B* – классу K_2. Классы K_1 и K_2 содержат точки, отличные от *A* и *B*. 2) Каждая точка M_1 класса K_1 отличная от *A* лежит между точкой *A* и любой точкой M_2 класса K_2. Тогда на отрезке *[AB]* существует точка *P*, такая, что каждая точка M_1 , лежащая между *A* и *P*, принадлежит классу K_1, а каждая точка M_2, лежащая между *P* и *B*, принадлежит K_2.		
Г19	**Аксиома параллельности Евклида** Существует такая прямая *a*, не принадлежащая ей точка *B*, что через точку *B* проходит не более одной прямой b, параллельной данной прямой *a*.		

Система аксиом Вейля			
Неопределяемые понятия: точка, вектор			
№	Формулировка	Геометрическая модель	Запись на логико-математическом языке
1	2	3	4
	Аксиомы сложения		
B1	Каждым элементам a, b однозначно сопоставлен некоторый элемент c – их «сумма», что записывается $c=a+b$ или, что равносильно, $c=b+a$ (так что $a+b=b+a$).		
B2	Для всяких элементов a, b, c: $(a+b)+c=a+(b+c)$.		
B3	Существует такой элемент 0 – нуль-вектор, что для всякого a: $a+0=a$.		
B4	Для всякого элемента a существует «обратный» $(-a)$, т.е. такой, что $a+(-a)=0$.		
	Аксиомы умножения на число		
B5	Всякому элемента a и всякому вещественному числу λ однозначно сопоставлен элемент, записываемый как λa или, что равносильно $a\lambda$.		
B6	Для всяких λ, μ и a: $\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$.		
B7	Для всяких λ, μ и a: $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$.		
B8	Для всяких a, b и λ : $\lambda(a+b)= \lambda a+\lambda b$.		
B9	Для всякого a: $1\cdot a=a$.		
	Аксиомы скалярного произведения		
B10	Для каждых векторов a, b однозначно определено вещественное число – их «скалярное произведение», обозначаемое $a\cdot b$ или, что равносильно, $b\cdot a$.		
B11	Для каждых a, b, c: $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$		
B12	Для каждых a, b и числа λ: $(\lambda a)\cdot b=\lambda(a\cdot b)$		
B13	При $a\neq 0$: $a\cdot a>0$ ($a\cdot a$ обозначается a^2, и $\sqrt{a^2}$ обозначается $\|a\|$)		

В14	**Аксиома размерности** На плоскости имеется два, и не более, линейно независимых вектора, а в пространстве – три, и не более линейно независимых вектора.		
Аксиомы соответствия			
В15	Каждой упорядоченной паре точек A, B сопоставлен некоторый вектор $\vec{AB}$.		
В16	Для каждой точки A и вектора a существует, и притом единственная, точка B такая, что $\vec{AB} = a$ (то есть от любой точки A можно отложить вектор, равный данному).		
В17	Для любых точек A, B, C: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.		
В18	Существует хотя бы одна точка.		

Система аксиом А.Д. Александрова			
Неопределяемые понятия: точка, отрезок, плоскость			
№	Формулировка	Геометрическая модель	Запись на логико-математическом языке
1	2	3	4
Аксиомы связи			
Л1	Существует хотя бы один отрезок; у каждого отрезка есть два и только два конца; кроме того, отрезок содержит другие точки: точки, лежащие на отрезке.		
Л2	Любые две точки можно соединить отрезком и притом только одним.		
Л3	Всякая точка, лежащая на отрезке, делит его на два отрезка, то есть если C на AB, то отрезки AC, BC образуют вместе отрезок AB и не имеют общих точек кроме C.		
Л4	Если точка C лежит на отрезке AB, а B на CD, то отрезки AB, CD образуют отрезок AD.		

Аксиомы равенства			
Л5	При любых двух отрезках *AB, MN* существует и притом единственный отрезок *AC*, равный *MN* и налегающий на *AB*.		
Л6	Два отрезка, равные одному и тому же отрезку, равны друг другу.		
Л7	Если C на AB, C_1 на A_1B_1 и $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, то $AB=A_1B_1$.		
Л8	При любых данных отрезках a, $b=AB$ существует содержащий AB отрезок AA_1, на котором есть такие точки $A_1,A_2,\ldots,A_n$, что $AA_1=AA_2=\ldots=AA_n$. Короче – при любых отрезках a, b можно отложить вдоль b отрезки, равные a, столько раз, что они «покроют» b.		
Л9	**Аксиома непрерывности** Если имеется бесконечная последовательность вложенных отрезков, то есть если $A_1B_1 \supset A_2B_2 \supset \ldots$, то существует точка, общая всем этим отрезкам.		
Плоскостные аксиомы			
Л10	По отношению к каждому данному отрезку a две точки, не лежащие ни на каком отрезке, содержащем a, делятся на два класса: в один класс входят точки, лежащие с одной стороны от a, а в другой – точки, лежащие с другой стороны от a, причем в каждом классе есть точки.		
Л11	От каждого отрезка по данную сторону от него, от данного его конца можно отложить угол, равный данному (настоящему) углу. При этом можно пользоваться любой		

	поперечиной и угол будет всегда один и тот же «с точностью до продолжения и укорочения сторон».		
Л12	Если отрезки *AC, BD* равны и идут в одну сторону от отрезка *AB* под прямым углом, то *CD=AB*.		
Аксиомы стереометрии			
Л13	Плоскость есть фигура, на которой выполняется планиметрия.		
Л14	Для каждых трех точек существует содержащая их плоскость.		
Л15	Существуют четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.		
Л16	Если две плоскости имеют общую точку, то их пересечение является прямой на них обеих.		
Л17	Два отрезка, равные третьему, равны.		

IV. Задачи повышенной сложности.

Из имеющихся систем аксиом (Погорелова, Гильберта, Вейля, А.Д. Александрова) выведите первые теоремы, запишите их на логико-математическом языке, представьте геометрические модели. При необходимости вводите нужные определения.

Пример. Теоремы из системы аксиом Атанасяна.

Теорема 11 (из аксиом А2, А5 и определения треугольника).

Введем понятие треугольника.

Определение 11. $\Delta ABC = [AB] \cup [BC] \cup [AC]$, где *A, B, C* – точки, не лежащие на одной прямой; *A, B, C* – вершины треугольника, *[AB], [BC], [AC]* – стороны треугольника.

Запишем более точное определение, используя эквивалентность.

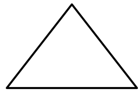
Определение 12.

$\forall A, B, C$ – точки плоскости, $A \neq B \neq C, C \notin AB$,

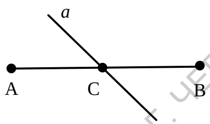
(ABC – треугольник) $\Leftrightarrow$[(AB – сторона) $\wedge$ (BC – сторона) $\wedge$ (AC – сторона)].

Из определения 12 получаем:

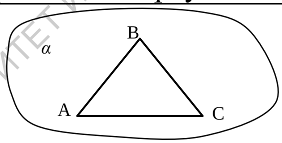
<u>Определение 13.</u> $(\forall A,B,C\in R^3):(A\neq B\neq C,\ C\notin[AB])\rightarrow$ $\Delta ABC=[AB]\cup[BC]\cup[AC]$.

В пространстве существует треугольник (имеется по крайней мере один треугольник в пространстве).	

<u>Теорема 12</u> (из аксиом А5, А7, А9).

Если через точку С из отрезка АВ провести прямую, то А и В будут лежать в разных плоскостях относительно этой прямой. $(\forall A,B,C,a)(C\in AB)$ $(AB\cap a=C)\rightarrow[aA)\cap[aB)=\varnothing$	

<u>Теорема 13</u> (из аксиомы А4 и определения треугольника).

В любой плоскости существует хотя бы один треугольник. $(\forall A,B,\tilde{N},\alpha):(\Delta ABC\in\alpha)$	

V. Творческое задание.

1. Изучение неевклидовой геометрии. Опишите одну из моделей неевклидовой геометрии:

а) овальная геометрия;

б) гиперболическая геометрия;

в) модель Пуанкаре;

г) модель Клейна.

2. Опишите систему аксиом сферической геометрии. Определите первоначальные понятия, запишите аксиомы на логико-математическом языке, приведите геометрические модели.

Литература:

1. Гиндикин С.Г. Волшебный мир Анри Пуанкаре / Квант, 1976, №3.

2. Игошин В.И. Основания геометрии. / В.И. Игошин – Саратов : Издательство «Научная книга», 2004. – 84 с.

3. Ширшов А. Модель Кэли-Клейна геометрии Лобачевского / Квант, 1976, №3.

РАЗДЕЛ 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЦЕДУРЫ: ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, ВЫЧИСЛЕНИЕ, ПОСТРОЕНИЕ.

Основная часть нашего сознательного мышления связана с решением задач. Когда мы не развлекаемся и не мечтаем, наши мысли направлены к какой-то конечной цели, мы ищем пути и средства к достижению это цели, мы пытаемся выработать какой-то курс, следуя которому, можно достичь нашей конечной цели.

Решение задач – специфическое достижение разума, разум же – особы дар, которым наделен человек. Способность к преодолению препятствий, к нахождению обходного маневра там, где не видно прямого пути, возвышает умное животное над тупым, человека – нам самым умным животным и талантливых людей – над другими людьми.

Нет ничего более интересного, чем изучение проявлений человеческой деятельности. Наиболее характерными из них являются решение задач, размышление над тем, как можно достичь некоторой определенной цели, придумывание необходимых для этого средств. Мы стремимся хорошо разобраться в этой деятельности, и такое стремление представляет большой интерес.

В прошлом мы изучали задачи элементарной математики, объединяя в группы задачи, решаемые один и тем же методом. Тем самым мы обеспечили себе определенную экспериментальную базу; теперь же, используя эту базу, попытаемся подняться на более высокую ступень обобщения, стремясь при этом охватить, по возможности, также и задачи нематематического характера. Попытка найти общий метод, применимый ко всем видам задач, может показаться чересчур претенциозной, но она совершенно естественна, так как, несмотря на то, что множество задач, с которыми мы можем встретиться, бесконечно, у любого из нас есть только один мозг для их решения, и поэтому естественно, что мы желали бы обладать одним универсальным методом решения всех задач. [16, с. 144]

I. Работа с теоретическим материалом темы (20 минут).

Изучите пункты «Метод двух геометрических мест», «О задачах», «Задачи на построение» из Хрестоматии [5]. Разработайте конспект по одной из тем:

1) «Задачи на нахождение и процедура их решения»;
2) «Задачи на доказательство и процедура их решения»;
3) «Задачи на построение и процедура их решения».

II. Тестовые задания на усвоение теоретического материала (25 минут). Заполните пропуски.

Геометрическая фигура	Вычисление			
	длин	углов	площадей	объемов
1	2	3	4	5
Треугольник	*a, b, c* – стороны *P* – периметр $P = a + b + c$ *p* – полупериметр $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ *n* – средняя линия h_a – высота к стороне *a* m_a – медиана к стороне *a* l_α – биссектриса угла α R – радиус описанной окружности r – радиус вписанной окружности a_c – проекция стороны *a* на сторону *c*	α, β, γ – углы треугольника, лежащие против сторон *a*, *b*, и *c* соответственно. $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$	S – площадь $S=\dfrac{ah_a}{2}$ $S = pr$ $S=\dfrac{abc}{4R}$ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	
	$\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$			
	$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$ $m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ $l_a=\dfrac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)\cdot bc}$ $l_\alpha=\dfrac{2bc}{b+c}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$ $h_a:h_b:h_c=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}$ $n=\frac{1}{2}a\ (n\parallel a)$	$\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{l_a(b+c)}{2bc}$		

Круг	Правильные многоугольники	Трапеция	Параллелограмм

Шар	Конус	Цилиндр	Пирамида	Куб	Призма

III. Тренировочные задания.

1. Задачи на доказательство.

1.1 Доказательство свойств, теорем, фигур.

1. Докажите, что если смежные углы равны, то они прямые.

2. Докажите, что если накрест лежащие углы одной пары равны, то равны и накрест лежащие углы другой пары.

3. Докажите, что если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую.

4. Докажите, что сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

5. Две стороны треугольника равны. Докажите, что и медианы, проведенные к этим сторонам, равны.

6. Докажите, что в каждом равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, равны.

7. Докажите, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, а против большей стороны – больший угол.

8. Докажите, что биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника пересекаются под углом 45°.

9. Докажите, что катет прямоугольного треугольник, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы.

10. Докажите, что хорда окружности, не проходящая через центр, меньше диаметра.

11. Докажите, что равные хорды окружности равноудалены от центра.

12. Докажите, что если две хорды равноудалены от центра окружности, то они равны.

13. Докажите, что сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма равна 180°.

14. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB=CD$ и $AD=BC$, то он – параллелограмм.

15. Докажите, что если у параллелограмма диагонали равны, то он – прямоугольник.

16. Докажите, что если у четырехугольника все углы равны, то он – прямоугольник.

17. Докажите, что если диагональ параллелограмма делит его углы пополам, то этот параллелограмм – ромб.

18. Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от всех его сторон.

19. Докажите, что средние линии треугольника разбивают его на четыре равных треугольника.

20. Докажите, что прямоугольные равнобедренные треугольники подобны.

1.2 Доказательство формул, площадей, объемов.

1. Докажите, что $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$.

2. Докажите, что $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ$.

3. Докажите, что $\cos 140^\circ = -\cos 40^\circ$.

4. Докажите, что для любого острого угла α: $\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

5. Докажите, что квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними (теорема косинусов).

6. Докажите, что стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов (теорема синусов).

7. Докажите, что площадь трапеции равна произведению длины ее средней линии на высоту.

8. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

9. Докажите, что если сторона равностороннего треугольника равна a, то его площадь $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

10. Докажите формулу Герона для площади S треугольника: если a, b, c – стороны треугольника, p – его полупериметр, то $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

11. Докажите, что площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

12. Докажите, что площадь треугольника $S = \dfrac{abc}{4R}$, где a, b, c – стороны треугольника, а R – радиус описанной окружности.

13. Докажите, что площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания на высоту призмы.

14. Докажите, что площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра ее основания на апофему пирамиды.

15. Докажите, что объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

16. Докажите, что объем призмы равен произведению площади основания на высоту.

17. Докажите, что объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

18. Докажите, что объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

19. Докажите, что объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

20. Докажите, что объем шара радиуса r равен $\frac{4}{3}\pi r^3$.

1.3 Доказательства с использованием геометрических преобразований.

1. Докажите, что при осевой симметрии плоскости прямая, параллельная оси симметрии, отображается на прямую, параллельную оси симметрии.

2. Докажите, что при осевой симметрии плоскости прямая, перпендикулярная к оси симметрии, отображается на себя.

3. Докажите, что при центральной симметрии плоскости прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую.

4. Докажите, что при центральной симметрии плоскости прямая, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

5. Докажите, что при движении угол отображается на равный ему угол.

6. Докажите, что при движении параллельные прямые отображаются на параллельные прямые.

7. Докажите, что при движении параллелограмм отображается на параллелограмм.

8. Докажите, что при движении трапеция отображается на трапецию.

9. Докажите, что при движении ромб отображается на ромб.

10. Докажите, что при движении прямоугольник отображается на прямоугольник, а квадрат – на квадрат.

11. Докажите, что при движении окружность отображается на окружность того же радиуса.

12. Докажите, что отображение плоскости, при котором каждая точка отображается на себя, является наложением.

13. Докажите, что при повороте квадрата вокруг точки пересечения его диагоналей на угол 90° квадрат отображается на себя.

14. При данном движении каждая из двух точке *A* и *B* отображается на себя. Докажите, что любая точка прямой *AB* отображается на себя.

15. При данном движении каждая из вершин треугольника *ABC* отображается на себя. Докажите, что любая точка плоскости отображается на себя.

16. Докажите, что прямая, на которой лежит биссектриса угла, является осью симметрии этого угла.

17. Докажите, что если треугольник имеет ось симметрии, то он равнобедренный.

18. Докажите, что если у треугольника есть две оси симметрии, то он равносторонний.

19. Докажите, что прямоугольные равнобедренные треугольники подобны.

20. Докажите, что любые два неравных треугольника с соответственно параллельными сторонами гомотетичны.

2. Задачи на вычисления.

2.1 Вычисление длин и расстояний.

1. В треугольнике *ABC* известны стороны $AB=4$, $BC=5$, $CA=7$. Прямая, проходящая через вершину В перпендикулярно биссектрисе угла *BAC*, пересекает *AC* в точке *K*. Через *K* проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла *BCA*, которая пересекает *BC* в точке *M*. И наконец, через *M* проходит прямая, перпендикулярная биссектрисе угла *ABC*, которая пересекает *AB* в точке *P*. Найдите длину отрезка *AP*.

2. В треугольнике *ABC* известно, что $AB=3$, $BC=4$, $CA=6$. На *BC* взята точка *M* так, что $CM=1$. Прямая, проходящая через *M* перпендикулярно биссектрисе угла *ACB*, пересекает *AC* в точке *N*, а прямая, проходящая через *N* перпендикулярно биссектрисе угла *BAC*, пересекает прямую *AB* в точке *K*. Найдите *BK* и *AK*.

3. Внутри отрезка *AC* расположена точка *B*. Известно, что $AB=1{,}2$. Отрезки *AC* и *BC* являются диаметрами окружностей. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

4. На прямой расположены точки *A, B, C* и *D*, причем $AB=2$, $CD=3$. Отрезки *AC* и *BD* являются диаметрами двух окружностей. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

5. В треугольнике *ABC* на стороне *AC* взята точка *M* так, что $\angle ABM=\angle ACB$. Известно также, что $AM=1$, $MC=3$. Найдите длину стороны *AB*.

6. Периметр параллелограмма 48 см, одна из сторон 13 см. Найдите длины остальных сторон.

7. Найдите длину диагонали *AC* параллелограмма *ABCD*, если его периметр 40 дм, а периметр треугольника *ABC* равен 27 дм.

8. В параллелограмме *ABCD* $\angle A=30°$, $AB=12$ дм. Найдите расстояние от точки *C* до прямой *AD* и до отрезка *AD*.

9. Диагональ прямоугольника равна *d* и образует со стороной угол в 30°. Найдите длину меньшей стороны прямоугольника.

10. Сторона ромба равна *a*, а угол 150°. Найдите расстояние между его противолежащими сторонами.

11. Отрезки *KP* и *EF* пересекаются в точке *M* так, что $KM=MP$ и $EM=MF$. Найдите расстояние *KE*, если длина отрезка *PF* равна 12 см.

12.Через концы отрезка *AB* проведены параллельные прямые *AC* и *BD*, а через середину *O* отрезка *AB* – прямая, пересекающая эти прямые в точках *C* и *D*. Найдите расстояние *AC*, если *BD=8 см*.

13. В ΔABC $AB=BC$. Найдите длину медианы *BD*, если периметры треугольников *ABD* и *ABC* соответственно равны 40 см и 50 см.

14. Медиана равнобедренного треугольника делит его периметр на части, равные 18 см и 24 см. Найдите стороны треугольника.

15. В ΔABC *AB=18 см*, $\angle B=30°$, $\angle C=90°$. Найдите расстояние от точки *A* до прямой *CB*.

16. В ΔABC $\angle A=\angle B=45°$ и *AB=19 см*. Найдите расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

17. В треугольнике *ABC* $\angle C=90°$, $\angle A=60°$, *AB=32 см*. Найдите *AC*.

18. Периметр параллелограмма *ABCD* равен 50 см, $\angle C=30°$, а перпендикуляр *BH* к прямой *CD* равен 6,5 см. Найдите стороны параллелограмма.

19. Найдите расстояние между параллельными прямыми, если длина поперечины, образующей с ними углы в 30°, равна 54 см.

20. Отрезок, равный 28 см, разделен на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

2.2 Вычисление углов.

1. Чему может быть равен $\angle AOC$, если $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$, где $\alpha = 78°$, $\beta = 82°$.

2. Известно, что $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$ и при этом луч OB расположен внутри угла AOC. Лучи OA' и OB' симметричны лучам OA и OB соответственно относительно OC. Найдите $\angle AOC$, $\angle AOB'$, $\angle AOA'$, если $\alpha = 42°$, $\beta = 28°$.

3. Четыре пересекающиеся в одной точке прямые делят плоскость на восемь углов. Три из этих углов равны $52°$, $94°$ и $16°$. Чему равны остальные углы? Чему равны углы между парами прямых?

4. Угол AOB равен $40°$, а угол BOC равен $80°$. Чему равен угол между биссектрисами углов AOB и BOC?

5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол BAC равен $80°$. Пусть M – середина BC. Чему равен угол BAM?

6. Пусть O – центр окружности, AB – хорда этой окружности, отличная от диаметра, M – середина AB. Чему равен угол OMB?

7. Чему равен угол, если известно, что биссектриса смежного с ним угла образует угол $20°$ с одной из сторон этого угла?

8.Через точку на прямой a проведены прямые p и q. Известно, что угол между прямыми a и p равен $20°$, а угол между прямыми a и q равен $80°$. Чему равен угол между прямыми p и q?

9. Из точки O плоскости выходят три луча, на которых взяты точки A, B и C так, что $OA = OB = OC$. Известно также, что $\angle AOB = 70°$, $\angle BOC = 160°$, $\angle COA = 130°$. Найдите углы треугольника ABC.

10. Внутри угла, величина которого равна $40°$, взята точка A, из которой опущены перпендикуляры AB и AC на стороны угла. Найдите угол BAC.

11. В треугольнике ABC сторона $AB = 2$, а углы A и B равны соответственно $60°$ и $70°$. На стороне AC взята точка D так, что $AD = 1$. Найдите углы треугольника BDC.

12. Центры трех попарно касающихся друг друга внешним образом окружностей расположены в точках A, B и C, $\angle ABC = 90°$. Точки касания K, P и M; точка P находится на стороне AC. Найдите угол KPM.

13. Все вершины четырехугольника $ABCD$ расположены на окружности. Дуга AB равна $100°$, а дуга CD равна $102°$. Найдите угол между прямыми AC и BD, AD и BC.

14. Найдите углы четырехугольника $ABCD$, вершины которого расположены на окружности, если $\angle ABD = 74^\circ$, $\angle DBC = 38^\circ$, $\angle BDC = 65^\circ$.

15. Окружность касается одной из сторон угла в его вершине – точке A и пересекает другую сторону в точке B. Величина угла равна 40°; M – точка на меньшей дуге AB. Найдите угол AMB.

16. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вершины которого расположены на окружности, пересекаются в точке M. Известно, что угол $\angle ABC = 72^\circ$, $\angle BCD = 102^\circ$, $\angle AMD = 110^\circ$. Найдите $\angle ACD$.

17. Найдите углы A, B и C выпуклого четырехугольника $ABCD$, если $\angle A=\angle B=\angle C$, а $\angle D=135^\circ$.

18. Найдите углы, которые образуют диагонали ромба с его сторонами, если один из углов ромба равен 45°.

19. Биссектриса угла параллелограмма пересекает его сторону под углом 29°. Найдите углы параллелограмма.

20. Угол ромба равен 50°. Найдите угол между меньшей его диагональю и стороной.

2.3 Вычисление площадей.

1. Периметр прямоугольника равен 28 дм, радиус описанной окружности 5 дм. Найдите площадь.

2. Диагональ прямоугольника, равная d, образует со стороной угол α. Найдите площадь прямоугольника.

3. Диагональ параллелограмма перпендикулярна стороне. Первая равна 14 см, а вторая 25 см. Найдите площадь параллелограмма.

4. Сторона параллелограмма равна a, а диагональ, равная d, образует с ней угол 60°. Найдите площадь параллелограмма.

5. Найдите площадь ромба, если его высота равна 20 см, а один из углов 30°.

6. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 87,5 см, а радиус вписанной окружности 21,2 см.

7. Найдите площадь ромба ABCD, если его высота $BH = 4$ *см*, и H – середина стороны AD.

8. Основания равнобокой трапеции 5 см и 11 см, а периметр 28 см. Найдите площадь трапеции.

9.Найдите площадь равнобокой трапеции, если ее большее основание равно 22 см, боковая сторона 8,5 см, а диагональ 19,5 см.

10.Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна c. Найдите его площадь.

11. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна b, угол при основании β. Найдите площадь.

12. Диагонали четырехугольника перпендикулярны, их длины равны 12 см и 15 см. Найдите площадь четырехугольника.

13. Найдите площадь треугольника, у которого одна сторона равна 37,4 см, а прилежащие к ней углы 43,5° и 74,4°.

14. Найдите площадь треугольника, описанного около окружности радиуса 12 см, если его периметр 12 дм.

15. Найдите площадь сектора AOB, где AB – сторона квадрата, вписанного в окружность с центром O и радиусом 4 см.

16. Осевые сечения двух разных цилиндров – равные прямоугольники со сторонами 4 м и 6 м. Найдите площадь поверхности того цилиндра, у которого она больше.

17. Найдите площадь поверхности цилиндра, если диаметр одного его основания d их центра другого основания видел под углом α.

18. Периметр осевого сечения конуса равен 30 см, а величина угла наклона образующей к плоскости основания равна 60°. Найдите площадь полной поверхности конуса.

19. Образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь основания конуса.

20. Образующая конуса равна 6 м и наклонена к плоскости основания под углом *60°*. Найдите площадь основания конуса.

2.4 Вычисление объемов.

1. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 3 см и 5 см и углом 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2. Найдите объем призмы.

2. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 4 см и составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем призмы.

3. В основании призмы лежит правильный треугольник со стороной равной 5 см. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания и представляет собой ромб, длина одной из диагоналей которого равна 8 см. Найдите объем призмы.

4. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 13, а диагонали его боковых граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$. Найдите объем параллелепипеда.

5. Основание прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Найдите объем этого параллелепипеда, если диагональ его боковой грани, равная 8 см, образует с плоскостью основания угол 30◦.

6. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания относятся как 2:1, а диагональное сечение есть квадрат с площадью 25 см^2. Найдите объем параллелепипеда.

7. Найдите объем прямого параллелепипеда, стороны основания которого равны 10 см и 18 см, одна из диагоналей основания равна 21 см и большая диагональ параллелепипеда равна 29 см.

8. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной a углом 60◦. Ребро AA' также равно a и образует с ребрами AB и AD углы 45◦. Найдите объем параллелепипеда.

9. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a и боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом α.

10. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, боковые ребра которой попарно перпендикулярны и равны 3 см, 4 см, 5 см.

11. Стороны оснований усеченной правильной шестиугольной пирамиды равны 2 см и 4 см, а высота равна 5 см. Найдите ее объем.

12. Цилиндр описан вокруг куба, диагональ которого равна a. Найдите объем цилиндра.

13. В цилиндре параллельно его оси на расстоянии a от нее проведена секущая плоскость, которая от окружности основания отсекает дугу α. Площадь сечения равна S. Найдите объем цилиндра.

14. Площадь основания цилиндра равна Q, а площадь его осевого сечения равна S. Найдите объем цилиндра.

15. В конус вписан куб со стороной a так, что основание куба лежит на основании конуса. Найдите объем конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом α.

16. Образующая кругового конуса равна 3 см. Найдите наибольший объем конуса.

17. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, образующая равна l и составляет с плоскостью основания угол α. Найдите объем усеченного конуса.

18. Высота конуса равна 5 см. На расстоянии 2 см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите

объем исходного конуса, если объем меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 24 см^3.

19. В конус, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объем шара, если объем конуса равен 27 см^3.

20. Около правильной треугольной призмы, высота которой вдвое больше стороны ее основания, описан шар. Найдите отношение объема шара к объему призмы.

3. Задачи на построение.

3.1 Геометрические построения на плоскости.

1. Даны три точки *A, B, C,* не лежащие на одной прямой. Через *A* проведите прямую, расположенную между *B* и *C* и одинаково удаленную от них.

2. Дан треугольник *AB.* Постройте отрезок *DE*, параллельный прямой *AC*, так, чтобы точки *D* и *E* лежали на сторонах *AB* и *BC* и *DE*=*AD*+*CE*.

3. Постройте треугольник по углу и двум высотам, опущенным на стороны этого угла.

4. Постройте треугольник по двум углам и периметру.

5. Постройте прямоугольный треугольник по катету и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу.

6. Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу.

7. Постройте равнобедренный треугольник по углу при основании и высоте, опущенной на боковую сторону.

8. Постройте равносторонний треугольник по радиусу вписанной в него окружности.

9. Постройте квадрат по диагонали.

10. Постройте прямоугольник по сумме сторон и углу между диагональю и стороной.

11. Постройте ромб по углу и диагонали, исходящей из вершины этого угла.

12. Постройте параллелограмм по двум сторонам и углу между диагоналями.

13. Постройте параллелограмм по периметру, диагонали и острому углу.

14. Постройте трапецию по большему основанию, средней линии и углам при меньшем основании.

15. Постройте трапецию по боковой стороне, диагонали и углу между диагоналями.

16. Постройте четырехугольник по двум смежным сторонам, углу между ними, диагонали, выходящей из вершины данного угла, и углу между диагоналями.

17. Даны прямая а, точка А, лежащая на этой прямой, и точка В, не лежащая на ней. Постройте окружность, проходящую через точку В и касающуюся прямой а в точке А.

18. Через данную точку проведите окружность, касающуюся данной окружности в данной на ней точке.

19. Даны две параллельные прямые и точка, не лежащая ни на одной из них. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данных прямых.

20. Постройте окружность, касающуюся двух данных параллельных прямых и третьей прямой, пересекающей параллельные прямые.

3.2 Решение задач на построение алгебраическим методом.

1. Постройте с помощью циркуля и линейки отрезок, определяемый выражением: $x = \frac{abc}{de}$.

2. Постройте с помощью циркуля и линейки отрезок, определяемый выражением: $x = \frac{a^4}{b^3}$.

3. Постройте с помощью циркуля и линейки отрезок, определяемый выражением: $x = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$.

4. Постройте с помощью циркуля и линейки отрезок, определяемый выражением: $x = \frac{a^3 + b^3}{a^2}$.

5. Постройте с помощью циркуля и линейки отрезок, определяемый выражением: $x = a\sqrt{n}$, где n – натуральное число.

6. Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе между ними.

7. Постройте прямоугольный треугольник, у которого один катет в два раза больше другого и гипотенуза равна данному отрезку c.

8. Постройте прямоугольный треугольник, у которого один катет в два раза больше другого и высота, опущенная на гипотенузу равна данному отрезку h.

9. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе c и опущенной на нее высоте h.

10. Постройте квадрат, вписанный в равнобедренный прямоугольный треугольник.

11. Постройте квадрат, вписанный в равносторонний треугольник.

12. Через данную вне окружности точку проведите к данной окружности секущую так, чтобы внешняя часть секущей была равна ее внутренней части.

13. Через данную вне окружности точку проведите к данной окружности секущую так, чтобы внешняя часть секущей была в два раза больше внутренней.

14. Через данную вне окружности точку проведите к данной окружности секущую так, чтобы окружность отсекала на ней хорду данной длины.

15. Постройте окружность, проходящую через две данные точки A и B и касающуюся данной прямой l.

16. Через точку A радиусом r проведите окружность так, чтобы касательная к ней из точки B имела данную длину a.

17. Впишите в данную окружность правильный треугольник.

18. Впишите в данную окружность правильный шестиугольник.

19. Впишите в данную окружность квадрат.

20. Впишите в данную окружность правильный десятиугольник.

3.3 Геометрические преобразования плоскости и их применение к решению задач на построение.

Параллельный перенос.

1. Между двумя данными окружностями поместить отрезок данной длины параллельно данной прямой так, чтобы концы его принадлежали данным окружностям.

2. Постройте параллелограмм по сторонам и углу между диагоналями.

3. Постройте трапецию по четырем ее сторонам a, b, c, d (a и b – основания, $a>b$; c и d – боковые стороны, $c \le d$).

4. Постройте четырехугольник, зная две стороны, угол между ними и две диагонали.

Центральная симметрия.

5. Через данную точку проведите прямую, отрезок которой между данной прямой и данной окружностью делился бы в данной точке пополам.

6. Постройте треугольник *ABC*, зная сторону *AB*, медиану *AM* и высоту *BH*.

7. Даны угол и внутри него точки *A* и *B*. Постройте параллелограмм, для которого точки *A* и *B* – противоположные вершины, а две другие вершины лежат на сторонах угла.

8. Даны две точки *A* и *B* и окружность. Проведите через *A* и *B* две параллельные прямые, которые при пересечении с окружностью образуют равные хорды.

Поворот.

9. Даны две прямые a и b и точка *C,* не принадлежащая им. На прямой a найдите точку *A*, а на прямой b – точку *B*, такие, чтобы треугольник *ABC* был равносторонним.

10. Даны прямая, окружность и точка *A*, не лежащая на них. Постройте квадрат *ABCD* так, чтобы вершина *B* лежала на данной окружности, а вершина *D* – на данной прямой.

11. Дан равносторонний треугольник и точка на одной его стороне. Вписать в него другой равносторонний треугольник так, чтобы вершина его находилась на данной точке *P*.

12. Около данной окружности опишите равносторонний треугольник, одна из сторон которого проходит через данную точку *P*.

Осевая симметрия.

13. Дан треугольник ABC и внутри него точка M. Постройте равнобедренный треугольник PMQ с вершиной в точке M, основанием, параллельным AC и двумя вершинами P и Q, принадлежащими AB и BC соответственно.

14. Постройте треугольник с наименьшим периметром, одна вершина которого находится в данной точке внутри угла, а две другие – на сторонах угла.

15. Даны прямые l, a и окружность $\acute{\omega}$. Постройте квадрат так, чтобы две его противоположные вершины принадлежали прямой l, а две другие – прямой a и окружности $\acute{\omega}$.

16. Постройте четырехугольник *ABCD* по четырем сторонам, если известно, что его диагональ *AC* делит угол *A* пополам.

Гомотетия и подобие.

17. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник данного периметра 2р.

18. Постройте ромб, зная его острый угол и сумму диагоналей.

19. Постройте трапецию, зная соотношение оснований, два угла, прилежащие к большему основанию, и высоту.

20. Дана окружности и на ней три точки *A, B, C*. Проведите через точку *A* такую хорду *AK*, которая делилась бы хордой *BC* пополам.

IV. Задачи повышенной сложности.

1. В треугольнике *ABC*: $\angle B = \frac{\pi}{4}$, $\angle C = \frac{\pi}{3}$, BM и CN – медианы, на которых построены окружности, пересекающиеся в точках *P* и *Q* так, что $PQ \bigcap MN = F$. Найти отношение *NF : FM*.

2. В треугольнике *ABC: AB = 4, BC = 3, AC = 2*. Биссектриса угла *BAC* пересекает сторону *BC* в точке *K*. Прямая, проходящая через *B* параллельно *AC*, пересекает продолжение биссектрисы *AK* в точке *M*. Найдите длину отрезка *KM*.

3. На ребрах *PA* и *PC* правильной четырехугольной пирамиды *PABCD* (*P* – вершина) взяты точки *K* и *M* соответственно, причем *AK : KP = 1 : 3, CM = PM*. Найти отношение, в котором ребро *PB* делится плоскостью (*KMD*).

4. В пирамиде *SABCD* ребро *SA* = $\sqrt{35}$ и является её высотой. *ABCD* – трапеция с основание *AB = 14*, боковой стороной *AD = 6* и углами: угол *CAB = CAD = 45*◦. Найти длину медианы *SM* грани *SBC*.

5. В треугольнике *ABC* проведены высота *AH = h*, медиана *AM = m*, биссектриса *AN*, причем *N* – середина *MN*. Найти расстояние *A* до точки пересечения высот треугольника.

6. Сторона *AB* треугольника *ABC* продолжена за точку *A* на отрезок *AD*, равный *AC*. На лучах *BA* и *BC* взяты соответственно точки *K* и *M* так, что площади треугольников *BDM* и *BCK* равны. Найти угол *BKM*, если угол *BAC = α*.

7. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* диагонали пересекаются в точке *P* так, что $\angle ADP = \frac{1}{2}\angle PDC$, $\angle ADP = \frac{2}{3}\angle PAD$ и *AD = BD = CD*. Найти все углы четырехугольника.

8. Внутри угла B равностороннего треугольника ABC взята точка M так, что $\angle BMC = 30°$, $\angle BMA = 17°$. Найти углы BAM и BCM.

9. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC, а угол при вершине A равен α. Точка D лежит на стороне AB, причем $BD = AC$, E – середина AD и F – середина BC. Найти угол BEF.

10. В равнобедренном треугольнике с вершиной A на стороне AC взяли точки P и R, а на стороне AB точку Q так, что $BC = BR = RQ = PQ = AP$. Найти угол A.

11. Найти площадь трапеции, диагонали которой равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2.

12. Найти площадь четырехугольника $ADOE$, о вершинах которого известно следующее: A – вершина треугольника ABC, в котором проведены биссектриса CE и медиана BD, O – точка пересечения CE и BD; кроме того, даны $BC = a$, $AC = b$, $S_{ABC} = S$.

13. Найти площадь трапеции $ABCD$, середины оснований которой – точки M и K ($M \in CD$, $K \in AB$) – соединены отрезками с вершинами A и C соответственно, причем $AM \perp DK$, $CK \perp BM$, $\angle CKD = 60°$, а высота трапеции равна 1.

14. Найти площадь общей части двух квадратов, если вершина A квадрата $ABCD$ расположена в центре квадрата $MNPQ$, а сторона $AB = MN$ и отсекает третью часть от MN.

15. Найти площадь поверхности пирамиды, в основании которой – треугольник со сторонами 13, 14 и 15, боковое ребро, противолежащее средней по величине стороне основания, перпендикулярно к плоскости основания и равно 16.

16. Найти объем призмы, в основании которой – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a, а боковое ребро b, противоположное гипотенузе, составляет острые углы α и β с катетами.

17. Найти объем прямого параллелепипеда, основание которого – ромб со стороной a, угол между плоскостями двух боковых граней – α, диагональ боковой грани составляет с плоскостью другой боковой грани угол β.

18. Найти объем правильной треугольной пирамиды $SABC$, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен 2α, а из

основания высоты пирамиды опущен перпендикуляр p на боковое ребро.

19. Найти объем конуса, радиус основания которого равен 2, а радиус вписанной в конус сферы равен 1.

20. Найти объем цилиндра, диагональ осевого сечения которого составляет с основанием угол α, если этот цилиндр вписан в сферу радиуса R.

V. Творческое задание «Метод параллельных сечений для исследования поверхностей второго порядка».

Изучите метод параллельных сечений, приведите примеры использования метода при исследовании поверхностей второго порядка. Приведите примеры поверхностей, построенных по принципу сетчатых конструкций.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ОПОРНАЯ СХЕМА-КОНСПЕКТ

Теорема о продолжении отрезка.

Каждый отрезок можно продолжить за оба конца на отрезки, равные данным.

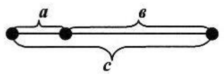
Если у отрезков AB, AC есть общая точка, кроме A, то они налегают один на другой. Отрезки, отложенные вдоль одного и того же отрезка, налегают друг на друга.

Если C на AB и D на CB, то C на A D.

Каждый угол имеет два смежных с ним угла.

Геометрия отрезков

Алгебра отрезков



$c=a+в$ $a=c-в$ $в=c-a$

$a>в,\ a_1=a,\ в_1=в \Rightarrow a_1>в_1$

$a>в,\ a_1=a,\ в_1=в \Rightarrow a_1-в_1=a-в$

$a+в=в+a$ $(a+в)+c=a+(в+c)$

$a+в>a$ $a>в,\ в>c \Rightarrow a>c$

$a\geq c,\ в>d \Rightarrow a+в>c+d$

$\forall n\in N,\ a=в \Rightarrow na=nв$

$\forall n\in N,\ a>в \Rightarrow na>nв$

$\forall n\in N,\ a=в \Rightarrow (1/n)a=(1/n)в$

$\forall n\in N,\ a>в \Rightarrow (1/n)a>(1/n)в$

Теорема о середине отрезка

- луч

- прямая

Основные свойства прямой и луча.

1. **Существование и единственность.**
2. **Включение отрезка.**
3. **Деление точкой.**

Измерение отрезков

Теорема (о длине отрезка):

(I) $a=b \Rightarrow l(a)=l(b);$

(II) $l(a+b)=l(a)+l(b);$

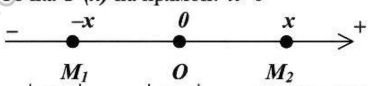
(III) $l(e)=1.$

Число *l(a)* называется длиной отрезка в масштабе *e* или при единице *e*.

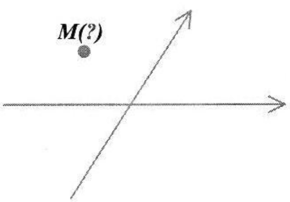
Теорема об отношении равенства.

Теорема о замене масштаба.

Координаты на прямой

1. Масштаб
2. Точка ***O (x)*** на прямой: $x=0$
3. 

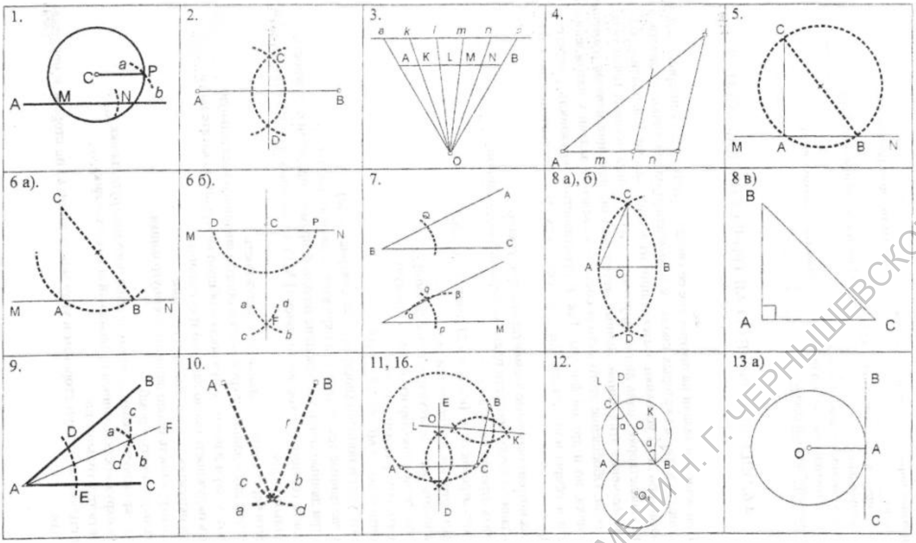
4. $x=|OM|$, $-x=-|OM|$, где $M\in\{M_1,M_2\}$
5. $|AB|=|b-a|$, $A(a)$, $B(b)$
6. $M(x)$, $x\in\mathbb{R}$
7. $OM \leftrightarrow \mathbb{R}$

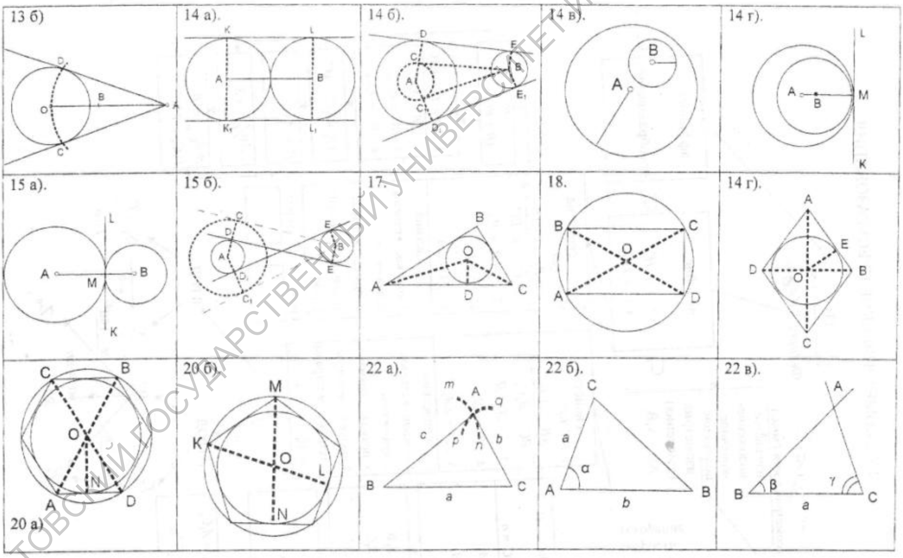


ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ.

Основные элементарные построения.

1. Через данную точку провести прямую, параллельную данной.
2. Разделить отрезок пополам.
3. Разделить отрезок на n равных частей
4. Разделить отрезок в отношении m:n
5. Восстановить перпендикуляр в точке прямой
6. Опустить перпендикуляр из точки на прямую.
7. Построить угол равный данному.
8. Построить углы: а) 60, б) 30, в) 45
9. Разделить угол α пополам (построить биссектрису угла)
10. Через две данные точки провести окружность данного радиуса.
11. Через три данные точки (не лежащие на одной прямой) провести окружность.
12. Построить ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом.
13. Провести через точку касательную к окружности.
14. Провести к двум данным окружностям общую внешнюю касательную.
15. Провести к двум данным окружностям общую внутреннюю касательную.
16. Описать окружность около данного треугольника.
17. Вписать окружность в данный треугольник.
18. Описать окружность около данного прямоугольника.
19. Вписать окружность в ромб.
20. Описать окружность около данного правильного многоугольника.
21. Вписать окружность в данный правильный многоугольник.
22. Построить треугольник по: а) трем сторонам; б) двум сторонам и углу между ними; в) по стороне и прилежащим углам.


1.
2.
3.
4.
5.
6 а).
6 б).
7.
8 а), б)
8 в)
9.
10.
11, 16.
12.
13 а)


13 б)
14 а).
14 б).
14 в).
14 г).
15 а).
15 б).
17.
18.
14 г).
20 б).
22 а).
22 б).
22 в).
20 а)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанасян Л.С. Геометрия. 7-9: учебн. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 20-е изд. – М. : Просвещение, 2010. 384 с. : ил.

2. Атанасян Л.С. Геометрия, 10-11: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 11-е изд. – М. : Просвещение, 2002. 206 с. : ил.

3. Бевз Г.П. Геометрия: учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владимирова. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 1994. 351 с.

4. Бутузов В.Ф. Геометрия. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов; под ред. В.А. Садовничего. – М. : Просвещение, 2010. 127 с.

5. Вдовиченко А.А. Элементарная математика. Часть 2: геометрия. Хрестоматия: для студентов, обучающихся по направлению 050100 – педагогическое образование, профиль – математическое образование / А.А. Вдовиченко – Саратов, 2015. 72 с.

6. Гусев В.А. Геометрия. 5-6 классы: Учебное пособие. – М.: ООО «ТИД «Русское слово – РС»», 2002. 256 с.

7. Игошин В.И. Математическая логика как педагогика математики / В.И. Игошин – Саратов : Издательский центр «Наука», 2009. 360 с.

8. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.И. Игошин. – 2-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2008. 448 с.

9. Игошин В.И. Тетрадь по геометрии для 7-9 классов (Геометрические построения на плоскости. Геометрические преобразования плоскости и их применение к решению задач на построение) / В.И. Игошин. – Саратов, 1997. 72 с.

10. Игошин В.И. Тетрадь по геометрии для 11 класса (Круглые тела и их сечения, объемы, площади поверхности) / В.И. Игошин. – Саратов, 1998. 64 с.

11. Игошин В.И. Тетрадь по геометрии для 11 класса (Многогранники и их сечения, площади поверхности, объемы) / В.И. Игошин. – Саратов, 1997. 64 с.

12. Лабораторные работы по методике преподавания математики: Методические рекомендации по организации лабораторных

занятий по методике преподавания математики. Общая методика. – Н.Новгород : НГПИ им. М. Горького, 1991. 65 с.

13. Мищенко Т.М., Шарыгин И.Ф. Геометрия. 9 класс: Методическое пособие к учебнику И.Ф. Шарыгина «Геометрия 7-9» / Т.М. Мищенко, И.Ф. Шарыгин. – М. : Дрофа, 2001. 128 с.

14. Погорелов А.В. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов. – 10-е изд. – М. : Просвещение, 2009. 224 с. : ил.

15. Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений. – 7-е изд. – М. : Просвещение, 1997. 383 с. : ил.

16. Пойа Д. Математическое открытие / пер. с англ. В.С. Бермана. Под ред. И.М. Яглома. – 2-е изд., стер. – М. : Издательство «Наука», 1976. 448 с.

17. Стол Роберт Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / пер. с англ. Ю.А. Гастева и И.Х. Шмаина. Под ред. Ю.А. Шихановича. – М. : «Просвещение», 1968. 231 с.

18. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7-9 кл.: Учеб. для общеобразоват. учеб. завед. / И.Ф. Шарыгин. – 5-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2001. 368 с.

Учебно-методическое пособие

А.А. Вдовиченко

ПРАКТИКУМ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ. ГЕОМЕТРИЯ

Работа издана в авторской редакции

Подписано в печать Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$
Усл. печ. л. 5.625 Гарнитура Times