ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского»

ГЕНЕТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ И ЗАДАЧИ АКТУАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТЬ I

Л.В. Борисова, И.Д. Сагаева

Учебно-методическое пособие

Саратов 2015

1 Генетические алгоритмы

Генетические алгоритмы – это адаптивные методы поиска, которые в последнее время используются для решения задач оптимизации. Они являются поисковыми механизмами, основанными на эволюционных принципах естественного отбора и генетики. Теоретические основы генетического алгоритма были первоначально разработаны Холландом.

Генетический алгоритм используют принципы и терминологию, заимствованные у биологической науки – генетики. Так каждая особь представляет потенциальное решение некоторой проблемы. Множество особей составляет популяцию. Все члены популяции характеризуются внешними параметрами или фенотипом. Вся генетическая информация особи называется генотипом. Эта информация находится в хромосомах и записана в виде набора молекул ДНК. Каждое врожденное качество особи кодируется определенной частью хромосомы, которая называется геном этого свойства.

Поиск оптимального или субоптимального решения проблемы выполняется в процессе эволюции популяции, т.е. последовательного преобразования одного конечного множества решений в другое с помощью генетических операторов. Генетический алгоритм использует механизмы естественной эволюции, основанные на трех принципах.

Первый принцип основан на концепции выживания сильнейших особей и естественного отбора по Дарвину. В генетических алгоритмах каждая особь представляет собой решение некоторой проблемы. Для оценки приспособленности особи используется т.н. фитнесс-функция. Фитнесс-функция может совпадать с целевой функцией. Таким образом, по аналогии с этим принципом особи с лучшими значениями фитнесс-функции имеют большие шансы выжить и репродуцировать.

Второй принцип обусловлен тем фактом, что хромосома потомка состоит из частей, полученных из хромосом родителей. Этот принцип был открыт Г.Менделем. Его формализация дает основу для оператора скрещивания.

Третий принцип основан на концепции мутации, открытой де Вре. Первоначально этот термин использовался для описания существенных изменений свойств потомков и приобретения ими свойств, отсутствующих у родителей. По аналогии с этим принципом генетические алгоритмы используют подобный механизм для резкого изменения свойств потомков и, тем самым, повышают разнообразие особей в популяции (множестве решений).

Эти три принципа составляют ядро эволюционных вычислений. С их помощью популяция (множество решений данной проблемы) эволюционирует от поколения к поколению. Эволюцию искусственной популяции – поиск множества решений некоторой проблемы, формально можно описать в виде алгоритма, который представлен на следующей схеме:

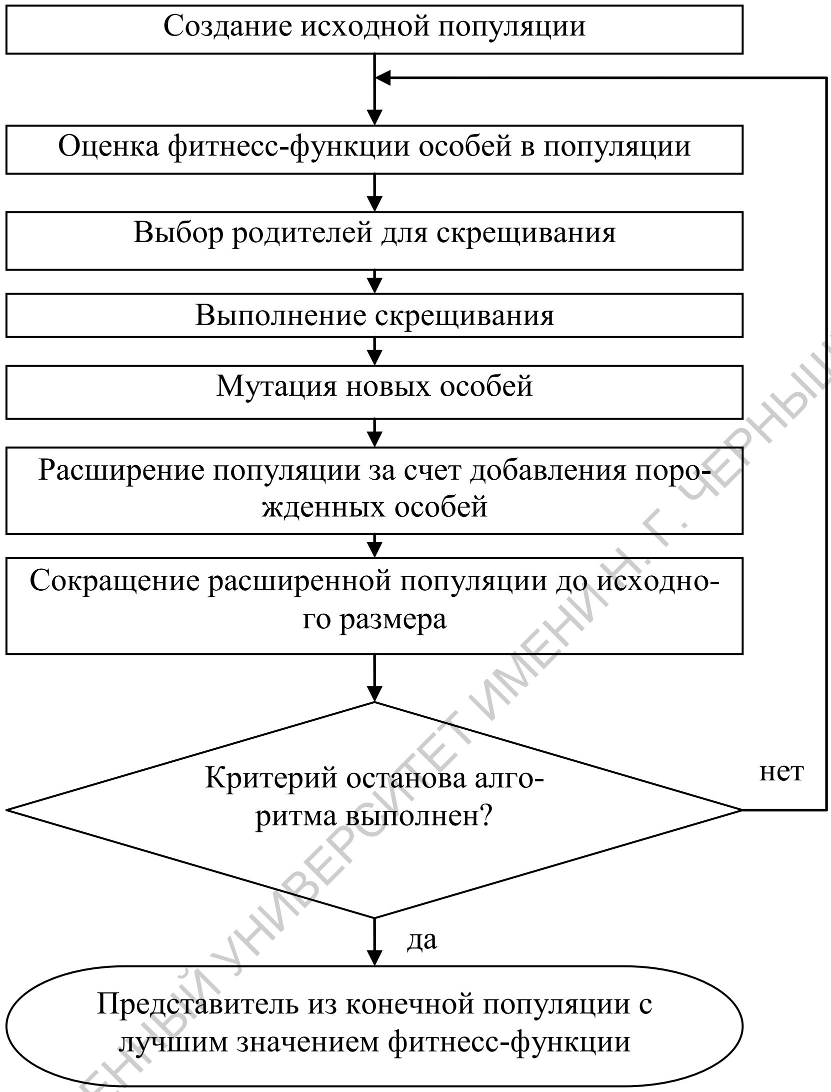

Рисунок 1 - Схема работы генетического алгоритма

1.1 Кодирование признаков

Для решения задач необходимо представить каждый признак в форме, подходящей для использования в генетическом алгоритме. Часто для представления генотипа объекта применяются битовые строки. При этом каждому признаку в фенотипе соответствует один ген в генотипе объекта. Ген описывается битовой строкой, обычно фиксированной длины, которая кодирует значение этого признака.

Однако обычный двоичный код отличается тем, что в нем два близких числа могут иметь разные значения битов во всех позициях (т. е. имеют большое расстояние по Хэммингу). Например, числа 7 и 8 различаются на 4 бита: 01112 = 710; 10002 = 810. Мутация старшего бита, например, превращает 7 в 15, а 8 в 0. Во многих задачах могут быть нежелательны такие резкие изменения, сразу уводящие решение в другую область поиска. Поэтому обычный двоичный код может быть заменен на код Грея, в котором любые два соседних числа отличаются значением только одного бита. Коды Грея легко получаются из двоичных чисел путём сложения по модулю 2 с тем же числом, сдвинутым вправо на один бит.

Для сокращения длины хромосом иногда применяют логарифмическое кодирование, при котором первый бит используется для знака показательной функции, второй бит – для знака степени этой функции, и остальные биты представляют значение самой степени [7].

1.2 Основные генетические операторы

1.2.1 Отбор родителей

Отбор – это первая генетическая операция, осуществляемая над популяцией. В результате должны быть отобраны хромосомы, которые будут участвовать в процессе генерации новой популяции. Существуют следующие методы отбора.

Турнирный отбор. Из популяции, содержащей N особей, выбираются случайным образом t особей, и лучшая из них особь записывается в промежуточный массив. Эта операция повторяется N раз. Особи в полученном промежуточном массиве затем используются для скрещивания (также случайным образом).

Пропорциональный отбор или метод "рулетки" отображает особей в отрезки линии (или сектора рулетки) таким образом, что их размер пропорционален значению целевой функции для данной особи. Далее случайно генерируются числа из диапазона [0,1] и в промежуточную популяцию выбираются те особи, в чей "отрезок" попадают эти случайные числа.

Отбор на основе усечения. Этот метод обычно используется для больших популяций. При этом сначала отбираемые особи упорядочиваются согласно их значениям целевой функции. Затем в качестве родителей выбираются только лучшие особи. Далее, с равной вероятностью, среди них случайным образом выбирают пары, которые производят потомков [7].

После из полученной промежуточной популяции необходимо выбрать пары особей для выполнения операции скрещивания. Основными методами выбора пар особей являются следующие.

Случайный выбор (панмиксия) родительской пары, при котором оба родителя случайным образом выбираются из всей промежуточной популяции. Следует отметить, что при этом любая особь может входить в несколько пар.

Селективный выбор. Здесь родителями могут стать только те особи, значение целевой функции которых не меньше среднего значения по популяции при равной вероятности этих кандидатов составить брачную пару.

Часто используется также два следующих подхода: инбридинг и аутбридинг. В них формирование пары происходит на основе близкого или дальнего родства соответственно. Инбридинг - это подход, при котором первый член пары выбирается случайно, а вторым является максимально близкая к нему особь. Аутбридинг формирует пары из максимально далеких особей [7].

1.2.2 Оператор рекомбинации (воспроизведения)

Оператор рекомбинации применяют сразу же после оператора отбора родителей для получения новых особей-потомков. Смысл рекомбинации заключается в том, что созданные потомки должны наследовать генную информацию от обоих родителей. Различают дискретную рекомбинацию и кроссинговер (скрещивание). Дискретная рекомбинация применяется к хромосомам с вещественными генами. Рекомбинацию бинарных строк принято называть кроссинговером или скрещиванием.

Одноточечный кроссинговер моделируется следующим образом. Пусть имеются две родительские особи. Для них случайным образом определяется точка внутри хромосомы, в которой обе хромосомы делятся на две части и обмениваются ими. Также применяется двух- и n-точечный кроссинговер.

Однородный кроссинговер – это вид кроссинговера, когда каждый ген потомка создается путем копирования соответствующего гена из первого или второго родителя, то есть каждая позиция потенциально является точкой кроссинговера. Для этого случайным образом генерируется двоичная маска кроссинговера той же длины, что у хромосом родителей. Четность бита маски показывает родителя, из которого копируется ген потомка [7].

Ограниченный кроссинговер. В этом виде скрещивания точки кроссинговера могут выбираться только там, где значения генов у родителей различны [7].

1.2.3 Мутация

После процесса воспроизводства происходят мутации. Данный оператор способствует выходу популяции из локального экстремума и препятствует преждевременной сходимости. Это достигается за счет того, что изменяется случайно выбранный ген в хромосоме. Так же как и кроссинговер, мутации могут проводиться не только по одной случайной точке.

Обычно для каждой особи случайно выбирается позиция и с малой вероятностью выполняется инвертирование значения переменной в выбранной позиции.

1.2.4 Сокращение промежуточной популяции

В простейшем случае с помощью скрещивания и мутации генерируется столько потомков, сколько было родителей. Такой способ называется чистой заменой. Далее родители устраняются, а потомки формируют следующее поколение. Однако при этом не исключено, что некоторые очень хорошие решения могут быть заменены худшими [7].

Элитарная схема предполагает генерацию меньшего числа потомков, чем было родителей. Полученные потомки заменяют худших родителей согласно значениям фитнесс-функции. Для этой схемы возможна преждевременная сходимость к локальным экстремумам [7].

Селекционная схема отбора. Родители и потомки выступают на равных правах - они помещаются в одну репродукционную группу. В ней все особи этой группы ранжируются и в следующее поколение включаются только лучшие N особей.

1.3 Параллельные генетические алгоритмы (ПГА)

Для нетривиальных задач выполнение одного репродуктивного цикла в генетическом алгоритме требует значительных вычислительных ресурсов Вычисление значения фитнесс-функции для каждой особи часто является самой трудоемкой операцией в генетическом алгоритме. Для повышения эффективности разрабатываются новые методы кодирования особей, генетические операторы кроссинговера и мутации, гибридные и параллельные алгоритмы [7].

Первые работы в этом направлении появились в 60-х годах, но только в 80-е годы, когда были разработаны доступные средства параллельной реализации, исследования параллельных генетических алгоритмов приняли систематический массовый характер и практическую направленность [7].

В основе ПГА лежит структуризация популяции (множества потенциальных решений) – его разбиения на несколько подмножеств (подпопуляций). Это разбиение можно сделать различными способами, которые и определяют различные виды таких алгоритмов. Согласно современной классификации различают глобальные ПГА, распределенные, клеточные и коэволюционные генетические алгоритмы [7].

В параллельном генетическом алгоритме на основе модели «рабочий-хозяин» затраты по вычислению значений фитнесс-функций равномерно распределяются по всем процессорам, для которых используется одна и та же фитнесс-функция. Поэтому для n особей и P (одинаковых) процессоров каждому процессору относится n/P особей. Значения фитнесс-функции вычисляются соответствующими (рабочими) процессорами и посылаются в один процессор (хозяин), который собирает всю информацию, обрабатывает и передает ее снова рабочим процессорам. Процессор "хозяин" имеет информацию о значениях фитнесс-функции для всех особей и может генерировать следующее поколение на этой основе [7].

В ПГА на основе "модели островов" каждая подпопуляция развивается на своем "острове". Между островами достаточно редко производится обмен лучшими особями. Преимущество РГА в том, что они работают быстрее даже на однопроцессорных компьютерных системах вследствие лучшей структуризации. Причина в том, что число вычислений сокращается благодаря распределению поиска в различных областях пространства решений [7].

Модель клеточных генетических алгоритмов (КГА) основана на пространственно распределенной популяции, в которой эволюционные взаимодействия возможны только с ближайшими соседними особями. При этом особи обычно расположены в узлах некоторой регулярной структуры – сетки размерности d = 1, 2 или 3. КГА итеративно рассматривают взаимодействие группы особей, принадлежащих определенному локальному окружению. В простейшем случае рассматривается окрестность фон Неймана, где центральный элемент и его четыре ближайших соседа по вертикали и горизонтали образуют небольшой пул, в котором применяются генетические операторы. В каждом поколении КГА рассматривает в качестве центрального элемента окрестности только одну особь. Так как особь может принадлежать только нескольким окрестностям, то ее изменение влияет на соседей "мягко". Это обеспечивает хороший компромисс между медленной сходимостью и расширением пространства поиска. В процессе поиска решения возникают и эволюционируют виртуальные острова – смежные области особей с примерно одинаковыми значениями целевой функции [7].

Генетические алгоритмы хорошо себя проявили для решения задач оптимизации. Примером такой задачи может служить задача выбора оптимального портфеля ценных бумаг с ограничением на кардинальность числа активов.

2 Модели оптимального портфельного инвестирования

Под портфелем понимается набор инвестиций в ценные бумаги, обращающиеся на финансовом рынке. В 1952 г. Гарри Марковиц опубликовал фундаментальную работу, которая является основой подхода к инвестициям с точки зрения современной теории формирования портфеля. Допустим, инвестор в настоящий момент времени имеет конкретную сумму денег, которые будут инвестированы на определенный промежуток времени, называемый периодом владения. В конце периода инвестор продает ценные бумаги. В начальный момент инвестор должен принять решение о покупке конкретных ценных бумаг, которые будут находиться в его портфеле до конечного момента. Поскольку портфель представляет собой набор различных ценных бумаг, это решение эквивалентно выбору оптимального портфеля из набора возможных портфелей. Данную проблему часто называют проблемой выбора инвестиционного портфеля.

При выборе активов необходимо определить, какие доли капитала инвестировать в различные типы и виды ценных бумаг. На этом этапе формируется эффективный портфель. Этот портфель представляет собой портфель, имеющий либо наибольшую ожидаемую доходность при заданном уровне риска, либо наименьший риск при заданной ожидаемой доходности.

Существует три основных модели формирования оптимального портфеля. К ним относится модель Марковица, модель Тобина и модель Шарпа, которая также известна под названием рыночная модель. Решение для этих моделей может быть получено с помощью методов квадратичного программирования.

Однако обычно на рынке предлагается огромное количество активов, а на число активов портфеля накладывается ограничение – кардинальность числа активов. Введение ограничения на кардинальность числа активов, присутствующих в портфеле, меняет классическую модель квадратичной оптимизации на смешанно-целочисленную задачу квадратичного программирования. Поскольку для данной задачи трудно найти оптимальное решение, многие исследователи и трейдеры используют эвристики, т.е. неточные методы решения задач в этой области. Один из таких методов – это генетический алгоритм. Число активов на рынке может быть очень большим и для эффективного решения задачи отыскания оптимального портфеля генетический алгоритм целесообразно сделать параллельным.

2.1 Общие понятия

2.1.1 Определение инвестирования

Инвестиция – это вложение капитала в какое-либо дело путем приобретения ценных бумаг или непосредственно предприятия в целях получения дополнительной прибыли или воздействия на дела предприятия.

Инвестиции являются неотъемлемой частью современной экономики. От кредитов инвестиции отличаются степенью риска для инвестора – кредит и проценты необходимо возвращать в оговорённые сроки независимо от прибыльности проекта, инвестиции возвращаются и приносят доход только в прибыльных проектах. Если проект убыточен – инвестиции могут быть утрачены полностью или частично.

Инвестиционная деятельность – это вложение инвестиций и осуществление практических действий в целях получения прибыли или достижения иного полезного эффекта

По объектам инвестирования выделяются реальные, финансовые и спекулятивные инвестиции. К реальным инвестициям относится покупка капитала в различных формах. Финансовые инвестиции, напротив, предполагают косвенное приобретение капитала через финансовые активы (ценные бумаги, ПИФы, предоставленные кредиты и т.д). Спекулятивные инвестиции производятся с целью возможного изменения цены купленных активов.

Также инвестиции можно разделить по целям на прямые и портфельные инвестиции. Прямые инвестиции – это вложения денежных средств в материальное производство и сбыт с целью участия в управлении предприятием и получения дохода от участия в их деятельности. Портфельные инвестиции – инвестиции в ценные бумаги, формируемые в виде портфеля ценных бумаг. Такое инвестирование предполагает пассивное владение ценными бумагами, которое не предусматривает со стороны инвестора участия в оперативном управлении компанией.

2.1.2 Инвестирование в ценные бумаги

Ценная бумага – документ, удостоверяющий, с соблюдением установленной формы и обязательных реквизитов, имущественные права, осуществление или передача которых возможны только при его предъявлении. Ценные бумаги делятся на три вида: облигации, акции и производные ценные бумаги.

Облигацией называется эмиссионная долговая ценная бумага, владелец которой имеет право получить от лица её выпустившего в оговоренный срок её номинальную стоимость деньгами или в виде иного имущественного эквивалента. Также облигация может предусматривать право владельца на получение процента от её номинальной стоимости либо иные имущественные права. Облигации делятся на государственные, муниципальные и корпоративные. Государственные облигации выпускаются с целью покрытия бюджетного дефицита. Муниципальные облигации создаются городскими, местными властями в виде займа под муниципальную собственность с целью финансирования различных проектов. Корпоративные облигации выпускаются корпорациями для финансирования своей деятельности.

Акция – это ценная бумага, закрепляющая права её владельца на получение части прибыли акционерного общества в виде дивидендов, на участие в управлении акционерным обществом и на часть имущества, остающегося после его ликвидации, пропорционально количеству акций, находящихся в собственности у владельца.

Различают обыкновенные и привилегированные акции. Обыкновенные акции дают право на участие в управлении обществом и участвуют в распределении прибыли акционерного общества. Источником выплаты дивидендов по обыкновенным акциям является чистая прибыль общества. Другой вид акций – привилегированные акции могут вносить ограничения на участие в управлении, а также могут давать дополнительные права в управлении. Они по сравнению с обыкновенными акциями имеют ряд преимуществ: возможность получения гарантированного дохода, первоочередное выделение прибыли на выплату дивидендов, первоочередное погашение стоимости акции при ликвидации акционерного общества.

Производная ценная бумага или дериватив – это договор, по которому стороны получают право или берут обязательство выполнить некоторые действия в отношении базового актива. Обычно предусматривается возможность купить, продать, предоставить, получить некоторый товар или ценные бумаги. Базовыми активами по договору могут быть ценные бумаги, товары, валюта. К деривативам относятся свопы, опционы, фьючерсы и т.д.

2.1.3Основные характеристики ценных бумаг

Доходность ценной бумаги за период владения определяется по формуле:

$$r = \frac{P_1 - P_0}{P_0}, \qquad (2.1.1)$$

где P_0 – цена акции в начале периода, а P_1 – цена акции в конце периода.

Приобретая ценную бумагу в начале периода, инвестор не знает, чему будет равна ее доходность к концу периода, поскольку рыночная цена акции в конце периода зависят от множества самых разнообразных факторов, поэтому это дает основание считать доходность ценной бумаги случайной величиной [1].

Существуют два подхода к построению распределения вероятностей: субъективный и объективный (исторический).

При использовании субъективного подхода инвестор, прежде всего, должен определить возможные сценарии развития экономической ситуации в течение инвестиционного периода, оценить вероятность каждого результата и ожидаемую при этом доходность ценной бумаги. Этот подход позволяет оценивать сразу будущее значение доходности. Однако для обычного инвестора очень трудно сделать оценку вероятностей экономических сценариев и ожидаемую при этом доходность.

Чаще всего используется объективный, или исторический подход. Предполагается, что распределение вероятностей будущих величин практически совпадает с распределением вероятностей уже наблюдавшихся исторических величин. Поэтому для получения представления о распределении случайной величины r в будущем, достаточно построить распределение этих величин за некоторый промежуток времени в прошлом.

Исследования западных экономистов показывают, что для рынка акций наиболее приемлемым является промежуток 7-10 шагов расчета. В отличие от субъективного подхода, который предполагает разную вероятность различных значений доходности, при объективном подходе каждый результат имеет одинаковую вероятность, то есть при N наблюдениях случайной величины вероятность конкретного результата равна $\frac{1}{N}$ [3].

Множество факторов, от которых зависит конкретное значение доходности финансового инструмента, принято объединять под общим названием «состояние экономики». Предполагается, что число состояний конечно и каждому состоянию приписывается некоторое положительное число – вероятность данного состояния.

Доходность рассматривается как дискретная случайная величина. Исчерпывающей характеристикой случайной величины является ее закон распределения, но для большинства практических задач можно ограничиться основными числовыми характеристиками.

С помощью математического ожидания оценивают будущее, ожидаемое значение доходности i-той ценной бумаги. Если через r_{it} $(1 \le t \le N)$ обозначаются значения доходности i-той ценной бумаги в t-ом состоянии экономики, а P_t — вероятность данного состояния экономики, то математическое ожидание вычисляется по формуле:

$$\overline{m}_i = E[r_i] = \sum_{t=1}^{N} r_{it} P_t \qquad (2.1.2)$$

Дисперсия доходности характеризует отклонение доходности от ее ожидаемого значения, и если это отклонение равно нулю, то нет и риска, связанного с инвестированием в данную ценную бумагу. Вычисляется дисперсия по следующей формуле:

$$V[r_i] = E[(r_i - \overline{m}_i)^2] = \sum_{t=1}^{N} (r_{it} - \overline{m}_i)^2 \cdot P_t \tag{2.1.3}$$

Чем больше отклонение, тем больше риск данного актива. Это объясняет выбор величины дисперсии в портфельной теории в качестве меры риска. Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, поэтому часто бывает удобно использовать среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_i = \sqrt{V[r_i]} \tag{2.1.4}$$

Если используется объективный подход, то $P_t = \frac{1}{N}$. Тогда формулы для математического ожидания и дисперсии запишутся в следующем виде:

$$\overline{m}_i = E[r_i] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} r_{it} \tag{2.1.5}$$

$$V[r_i] = E[(r_i - \overline{m}_i)^2] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (r_{it} - \overline{m}_i)^2 \tag{2.1.6}$$

Характеристиками взаимосвязи пары случайных величин являются ковариация и корреляция. Ковариация характеризует степень зависимости доходностей двух ценных бумаг и их рассеяние вокруг точки с координатами $\overline{m}_i$ и $\overline{m}_j$:

$$V_{ij} = E[(r_i - \overline{m}_i)(r_j - \overline{m}_j)] \tag{2.1.7}$$

Размерность ковариации равна произведению размерностей случайных величин. Безразмерной характеристикой степени зависимости двух случайных величин является коэффициент корреляции:

$$\rho_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \tag{2.1.8}$$

где $\sigma_i \sigma_j$ - произведение среднеквадратичных отклонений соответствующих доходностей. Коэффициент корреляции всегда лежит в интервале от –1 до 1 [1].

Если коэффициент корреляции положителен, то доходности ценных бумаг имеют тенденцию изменяться в одних и тех же направлениях. Чем ближе значение коэффициента корреляции к единице, тем сильнее эта взаимосвязь, а когда он равен единице, то считается, что ценные бумаги имеют абсолютную положительную корреляцию, то есть в этом случае доходности связаны положительной линейной зависимостью, как показано на Рисунке 1а.

Если коэффициент отрицателен, то доходности ценных бумаг изменяются в противоположных направлениях. Чем ближе коэффициент корреляции к величине (–1), тем выше степень отрицательной взаимосвязи. Когда коэффициент корреляции равен (–1), то говорят об абсолютной отрицательной корреляции. Данная взаимосвязь доходностей представлена на Рисунке 1б.

В случае если коэффициент корреляции равен нулю, то между доходностями ценных бумаг отсутствует какая-либо взаимосвязь, как показано на Рисунке 1в [3].

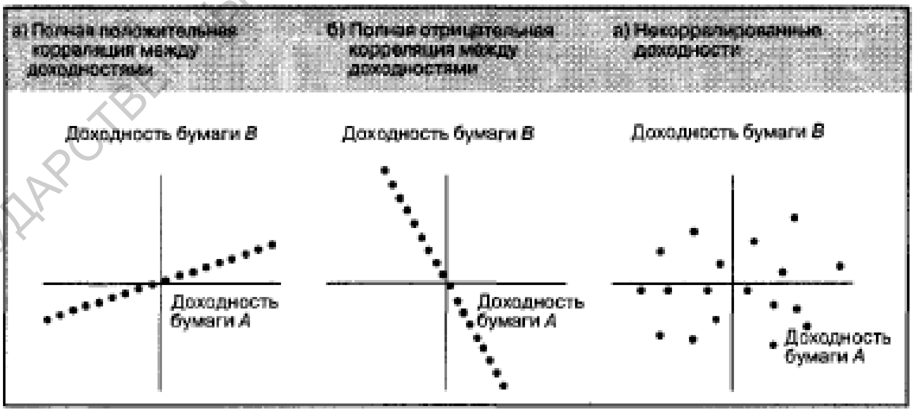

Рисунок 1 - Доходность двух ценных бумаг

Принимая решение об инвестировании в начальный момент времени, инвестор может оценить ожидаемую доходность каждой ценной бумаги и выбрать ценную бумагу с наибольшей ожидаемой доходностью. Однако рациональный инвестор помимо ожидаемой доходности должен оценить и риск, связанный с вложением в данный вид ценных бумаг. Таким образом, задача рационального инвестора заключается в поиске компромисса между доходностью и риском [1].

2.1.4 Основные характеристики портфеля ценных бумаг

Рассмотрим портфель из *n* активов. Пусть x_i - доля общих вложений, инвестированных в *i-ю* ценную бумагу. Все доли являются неслучайными величинами, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad (2.1.9)$$

Доходность портфеля определяется как средневзвешенное значение доходностей ценных бумаг, включенных в портфель. В качестве весов используются доли x_i

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i \quad (2.1.10)$$

С учетом правил вычисления математического ожидания, ожидаемая доходность портфеля равна:

$$\overline{m}_p = E[r_p] = E[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i] = \sum_{i=1}^{n} E[x_i \cdot r_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot E[r_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{m}_i \quad (2.1.11)$$

Отклонение доходности портфеля от ожидаемого значения запишется в виде следующей формулы:

$$r_p - \overline{m}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{m}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i (r_i - \overline{m}_i) \quad (2.1.12)$$

Математическое ожидание квадрата этого отклонения определяет дисперсию портфеля:

$$V_p = E[(r_p - \overline{m}_p)^2] = E[\sum_{i=1}^{n} x_i (r_i - \overline{m}_i) \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j (r_j - \overline{m}_j)] =$$

$$= E[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j (r_i - \overline{m}_i)(r_j - \overline{m}_j)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j E[(r_i - \overline{m}_i)(r_j - \overline{m}_j)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij}$$

(2.1.13)

где $V_{ij} = E[(r_i - \overline{m}_i)(r_j - \overline{m}_j)]$ - ковариация доходностей *i*-го и *j*-го активов, показывающая линейность связи доходностей ценных бумаг между собой. В случае если $i = j$, то ковариация превращается в дисперсию доходности i-той ценной бумаги.

Риск портфеля определяется среднеквадратичным отклонением доходности, которое равно квадратному корню из дисперсии портфеля [1].

2.2Модели оптимального портфельного инвестирования

2.2.1Модель Марковица

Современная теория финансового риска, связанного с колебаниями цен финансовых инструментов и процентных ставок, базируется на портфельной теории Г. Марковица. Управление риском в модели Марковица выполняется при помощи составления оптимального (диверсифицированного) портфеля. Теоретической базой диверсификации Марковица является аппарат теории вероятностей и математической статистики. В рамках данного подхода доходность ценной бумаги рассматривается как случайная величина, доходность портфеля определяется через случайный вектор.

В модели Марковица предполагается стационарность модели «реального мира», то есть вероятности состояний экономики, и сами состояния не меняются [1].

Кроме того, рассматривается пассивное владение портфелем, когда ценные бумаги приобретаются на длительный срок. Инвестор выбирает в качестве цели некий показатель и формирует портфель, изменение доходности которого соответствует динамике данного показателя. После приобретения портфеля ценных бумаг дополнительные сделки с ними совершаются редко [2].

Эффективная диверсификация по Марковицу предусматривает такое объединение ценных бумаг в портфель, которое при заданной доходности портфеля обеспечивает наименьший уровень риска. Множество портфелей, каждый из которых имеет минимальный риск для некоторого значения ожидаемой доходности, называется эффективным множеством [2]. На графике, где по оси абсцисс откладывается значения риска для портфелей, а по оси ординат – значения ожидаемой доходности, множество эффективных портфелей определяется *эффективной портфельной границей.*

Доля вложений в рисковую ценную бумагу *j*-го вида, обозначается через x_j, $(j = 1,..,n)$, где *n* показывает число различных видов бумаг в портфеле. С помощью формул для вычисления дисперсии и ожидаемой доходности портфеля, задача выбора оптимальной структуры рискового портфеля формулируется следующим образом: найти вектор $X = (x_1, x_2 ..., x_n)$, который минимизирует дисперсию портфеля [1]:

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j , \tag{2.2.1}$$

при ограничениях

$$\overline{m}_p = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i x_i , \tag{2.2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{2.2.3}$$

Таким образом, задача Марковица представляет собой задачу на условный экстремум. Задача решается методом Лагранжа. Запишем вышеприведенные уравнения в матричной форме, используя для этого следующие обозначения:

$V = (V_{ij})$ – ковариационная матрица размерностью $n \times n$;

m – вектор-столбец ожидаемых доходностей размерностью $n \times 1$;

I – единичный вектор-столбец размерностью $n \times 1$;

X – вектор-столбец неизвестных долей размерностью $n \times 1$ [1].

Формализация задачи Марковица в матричной форме: найти вектор X, который минимизирует дисперсию портфеля:

$$V_p = X^T V X , \tag{2.2.4}$$

при ограничениях $m^T X = \overline{m}_p$, $I^T X = 1$

Составим функцию Лагранжа задачи

$$L(X, \lambda_1, \lambda_2) = X^T V X + \lambda_1 (m^T X - \overline{m}_p) + \lambda_2 (I^T X - 1), \tag{2.2.5}$$

где $X^T V X$ - целевая функция (дисперсия портфеля), экстремум которой определяется;

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ - вектор-столбец множителей Лагранжа (число элементов вектора λ равно числу ограничений задачи) [1].

Для определения экстремума функции Лагранжа, продифференцируем ее по всем аргументам и приравняем производные нулю:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1V_{11} + 2x_2V_{12} + \ldots + 2x_nV_{1n} + \lambda_1\overline{m}_1 + \lambda_2 = 0; \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_1V_{21} + 2x_2V_{22} + \ldots + 2x_nV_{2n} + \lambda_1\overline{m}_2 + \lambda_2 = 0; \\
\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_n} = 2x_1V_{n1} + 2x_2V_{n2} + \ldots + 2x_nV_{nn} + \lambda_1\overline{m}_n + \lambda_2 = 0; \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1\overline{m}_1 + x_2\overline{m}_2 + \ldots + x_n\overline{m}_n - \overline{m}_p = 0; \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - 1 = 0.
\end{cases}
\tag{2.2.6}
$$

Запишем систему уравнений в матричной форме:

$$
\begin{pmatrix}
2V_{11} & 2V_{12} & \ldots & 2V_{1n} & \overline{m}_1 & 1 \\
2V_{21} & 2V_{22} & \ldots & 2V_{2n} & \overline{m}_2 & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
2V_{n1} & 2V_{n2} & \ldots & 2V_{nn} & \overline{m}_n & 1 \\
\overline{m}_1 & \overline{m}_2 & \ldots & \overline{m}_n & 0 & 0 \\
1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ \overline{m}_p \\ 1 \end{pmatrix}
\tag{2.2.7}
$$

Теперь если обозначить матрицу системы через *A* (матрица «риск-доходность»), вектор-столбец неизвестных X, вектор правой части через *B*, то необходимо решить систему:

$$AX = B \tag{2.2.8}$$

откуда

$$X = A^{-1}B, \tag{2.9}$$

где A^{-1} – матрица, обратная к матрице *A*. Данное решение определяет структуру оптимального портфеля из *n* видов рисковых ценных бумаг, которая реализует заданный уровень ожидаемой доходности при минимальной дисперсии.

Оптимальную структуру портфеля, полученную из решения задачи Марковица, можно представить и в аналитическом виде [1]:

$$X = V^{-1} \cdot \frac{\overline{m}_p(I \cdot J_{12} - m \cdot J_1) + m \cdot J_{12} - I \cdot J_2}{J_{12}^2 - J_1J_2}, \tag{2.2.10}$$

где $J_1 = I^T VI$, $J_2 = m^T V^{-1} m$, $J_{12} = I^T V^{-1} m$.

Эта зависимость линейна относительно $\overline{m}_p$, т.е. с увеличением требуемой ожидаемой доходности портфеля, вклады в каждую ценную бумагу меняются линейно. Риск оптимального портфеля возрастает с ростом уровня ожидаемой доходности [1].

Стоит отметить, что в результате решения задачи некоторые доли могут получиться отрицательными. Отрицательные доли возможны в случае, если допускаются т.н. *«короткие продажи»* или продажи без покрытия. Суть короткой продажи в том, что инвестор продает ценные бумаги, взятые в долг у брокера. Впоследствии инвестор возвращает долг брокеру, покупая такие же ценные бумаги на торгах. Данный механизм обеспечивает возможность получать прибыль при снижении цен [2].

2.2 Модель Тобина

Рассмотрим портфель, который включает как рисковые, так и безрисковые ценные бумаги. Обозначим через x_0 долю безрисковых вложений с гарантированной доходностью r_0, через $X=(x_1,...,x_n)^T$ – вектор долей вложений в рисковые активы, тогда задача выбора оптимальной структуры комбинированного портфеля, состоящего из безрискового актива и *n* рисковых активов, формулируется следующим образом: найти вектор *X*, который минимизирует дисперсию портфеля [1]:

$$V_p = X^T V X\ , \qquad (2.2.11)$$

и удовлетворяет ограничениям

$$m^T X + r_0 x_0 = \overline{m}_p\ , \qquad (2.2.12)$$

$$I^T X + x_0 = 1. \qquad (2.2.13)$$

Данная задача была сформулирована американским экономистом Д.Тобиным, лауреатом нобелевской премии, и получила его имя.

Составим функцию Лагранжа задачи Тобина:

$$L(X, x_0, \lambda_1, \lambda_2) = X^T V X + \lambda_1 (m^T X + r_0 x_0 - \overline{m}_p) + \lambda_2 (I^T X + x_0 - 1). \qquad (2.2.14)$$

Возьмем производные от функции Лагранжа по всем переменным и приравняем их нулю. Получим следующую систему уравнений [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial X} = 2VX + \lambda_1 m + \lambda_2 I = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_0} = \lambda_1 r_0 + \lambda_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = m^T X + r_0 x_0 - \overline{m}_p = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = I^T X + x_0 - 1 = 0. \end{cases} \tag{2.2.15}$$

Из второго уравнения системы (2.15) определим множитель Лагранжа λ_2

$$\lambda_2 = -\lambda_1 r_0 \tag{2.2.16}$$

и, подставив его в первое уравнение, получим выражение для вектора X:

$$X = V^{-1} \cdot \frac{\lambda_1}{2}(Ir_0 - m) = (-\frac{\lambda_1}{2}) \cdot V^{-1}(m - r_0 I)\,. \tag{2.2.17}$$

С другой стороны, определяя долю безрисковых вложений из четвертого уравнения системы (2.15) [1]:

$$x_0 = 1 - I^T X$$

и подставляя полученное выражение в третье уравнение, получим

$$m^T X + r_0 - r_0 I^T X - \overline{m}_p = 0 \tag{2.2.18}$$

или

$$X = \frac{\overline{m}_p - r_0}{(m - r_0 I)^T} \tag{2.2.19}$$

Приравняем выражения (2.17) и (2.19) и определим множитель Лагранжа λ_1:

$$\left(-\frac{\lambda_1}{2}\right) = \frac{(\overline{m}_p - r_0)}{(m - r_0 I)^T V^{-1}(m - r_0 I)}\,. \tag{2.2.20}$$

Введем обозначение для квадратичной формы

$$g^2 = (m - r_0 I)^T V^{-1}(m - r_0 I) \tag{2.2.21}$$

Тогда, выражение для λ_1 можно записать в виде:

$$\lambda_1 = -\frac{2(\overline{m}_p - r_0)}{g^2}\,. \tag{2.2.22}$$

Подставляя (2.22) в (2.17) получим

$$X = \frac{V^{-1}(m - r_0 I)}{g^2}(\overline{m}_p - r_0)\,. \qquad (2.2.23)$$

Ожидаемая доходность комбинированного портфеля входит в (2.23) только как скалярный множитель, и поэтому структура рисковых вложений не зависит от $\overline{m}_p$, а зависит только от вероятностных характеристик ценных бумаг, то есть вектора доходностей и ковариационной матрицы, и не зависит от склонности инвестора к риску [1].

Минимальная дисперсия портфеля по определению равна

$$\begin{aligned}
V_p &= X^T V X = \left(\frac{V^{-1}(m - r_0 I)}{g^2}(\overline{m}_p - r_0)\right)^T V \left(\frac{V^{-1}(m - r_0 I)}{g^2}(\overline{m}_p - r_0)\right) = \\
&= \frac{(\overline{m}_p - r_0)^2}{g^4} \cdot \left(V^{-1}(m - r_0 I)\right)^T V \left(V^{-1}(m - r_0 I)\right) \overset{(AB)^T = B^T A^T}{=} \\
&= \frac{(\overline{m}_p - r_0)^2}{g^4} \cdot (m - r_0 I)^T (V^{-1})^T V V^{-1}(m - r_0 I) \overset{(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}}{=} \\
&= \frac{(\overline{m}_p - r_0)^2}{g^4} \cdot (m - r_0 I)^T (V^T)^{-1} E (m - r_0 I) \overset{V^T = V\,(симметричн\;ая)}{=} \\
&= \frac{(\overline{m}_p - r_0)^2}{g^4} \cdot \underbrace{(m - r_0 I)^T V^{-1}(m - r_0 I)}_{g^2} = \frac{(\overline{m}_p - r_0)^2}{g^2}
\end{aligned}$$

(2.2.24)

Отсюда следует линейность связи между ожидаемой доходностью оптимального портфеля и ее среднеквадратичным отклонением:

$$\sigma_p = \frac{\overline{m}_p - r_0}{g} \qquad (2.2.25)$$

или

$$\overline{m}_p = r_0 + g \cdot \sigma_p \qquad (2.2.26)$$

2.2.3 Модель Шарпа (рыночная модель)

Рыночная модель была предложена американским экономистом, лауреатом Нобелевской премии У.Шарпом в середине 60-х годов прошлого столетия.

Предполагается, что доходность акции за некоторый временной период связана с доходностью акции на рыночный индекс. В США в качестве такого индекса используется широко известный S&P 500, в России же используется фондовый индекс РТС, расчет которого производится на основе 50 акций крупнейших российских эмитентов. В этом случае с ростом рыночного индекса, вероятно, будет расти и цена акции, а с падением рыночного индекса, соответственно падать. Данную взаимосвязь отображает рыночная модель [2]. В ее основе лежит метод линейного регрессионного анализа. С помощью него связываются две случайные величины, причем одна из них является зависимой, а другая нет. Независимой считается доходность рыночного индекса. В качестве зависимой переменной берется доходность некоторой ценной бумаги. Фондовые индексы характеризуют рынок ценных бумаг в целом, поэтому обычно модель Шарпа называют рыночной моделью [3].

Линейная регрессионная модель позволяет представить взаимосвязь между доходностями в следующем виде:

$$r_j = \alpha_j + \beta_j \cdot r_I + \varepsilon_j, \qquad (2.2.27)$$

где r_j - доходность ценной бумаги *j* за некоторый период, r_I - доходность на рыночный индекс за этот же период (определяется, так же как и доходность любой ценной бумаги), α_j - коэффициент смещения, β_j - коэффициент наклона, ε_j - случайная погрешность. Коэффициент наклона рыночной модели часто называют «бета» - коэффициентом. Для его вычисления по результатам наблюдений используется метод наименьших квадратов [3]. Тогда коэффициент «бета» равен:

$$\beta_j = \frac{\sigma_{jI}}{\sigma_I^2}, \qquad (2.2.28)$$

где σ_{jI} обозначает ковариацию между доходностью акции *j* и доходностью на рыночный индекс, а σ_I^2 обозначает дисперсию доходности на индекс. Акция, имеющая доходность, которая является зеркальным отражением доходности на индекс, будет иметь β, равный 1. Те акции, которые имеют β

больше единицы, обладают большей изменчивостью, чем рыночный индекс, и носят название «агрессивные» акции. И наоборот, акции с β меньше единицы обладают меньшей изменчивостью, чем рыночный индекс, и называются «оборонительными» акциями [2]. Как показывают исследования, для большинства ценных бумаг β больше нуля, хотя иногда встречаются ценные бумаги и с отрицательным β - коэффициентом.

Коэффициент α определяется также по методу наименьших квадратов:

$$\alpha_j = E[r_j] - \beta_j \cdot E[r_I] = \overline{m}_j - \beta_j \cdot \overline{m}_I , \tag{2.2.29}$$

где *E[]*–обозначает операцию вычисления математического ожидания [3].

Случайную погрешность можно рассматривать как случайную переменную, которая имеет распределение вероятностей с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением, обозначенным $\sigma^2_{\varepsilon j}$ [2].

В рыночной модели общий риск *j-ой* ценной бумаги, измеряемый ее дисперсией σ^2_j, состоит из рыночного и собственного риска. Он вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma^2_j &= V[r_j] = V[\alpha_j + \beta_j \cdot r_I + \varepsilon_j] = V[\alpha_j] + V[\beta_j \cdot r_I] + V[\varepsilon_j] = \\ &= \beta^2_j \cdot V[r_I] + V[\varepsilon_j] = \beta^2_j \sigma^2_I + \sigma^2_{\varepsilon j} \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

где σ^2_I обозначает дисперсию доходности на рыночный индекс, $\beta^2_j \sigma^2_I$ - рыночный риск *j-той* ценной бумаги, а $\sigma^2_{\varepsilon j}$ - дисперсия случайной погрешности ε_j, которая обозначает собственный риск *j-той* ценной бумаги [2].

Общая формула для вычисления дисперсии случайной погрешности имеет вид:

$$\sigma^2_{\varepsilon j} = \frac{1}{N-2} \sum_{t=1}^{N} (r_{jt} - (\alpha_j + \beta_j r_{It}))^2 \tag{2.2.31}$$

В данном случае средняя арифметическая величина вычисляется делением на $(N-2)$, поскольку две степени свободы были утеряны при вычислении α_j и β_j [3].

Из формулы (2.30) следует, что коэффициент β является количественным измерителем систематического риска.

Рассмотрим портфель ценных бумаг. Если обозначить через x_j - долю ценных бумаг *j-го* вида ($j=1,..,n$) в портфеле, то доходность портфеля может быть вычислена по следующей формуле:

$$r_p = \sum_{j=1}^{n} x_j r_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j + r_I \sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j + \sum_{j=1}^{n} x_j \varepsilon_j = \alpha_p + \beta_p \cdot r_I + \varepsilon_p, \qquad (2.2.32)$$

где $\alpha_p = \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j$, $\beta_p = \sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j$ и $\varepsilon_p = \sum_{j=1}^{n} x_j \varepsilon_j$. То есть портфельные величины α_p, β_p и ε_p являются средневзвешенными суммами соответствующих коэффициентов.

Тогда ожидаемое значение доходности портфеля будет равно:

$$\overline{m}_p = E[r_p] = E[\alpha_p + \beta_p \cdot r_I + \varepsilon_p] = E[\alpha_p] + E[\beta_p \cdot r_I] + \sum_{j=1}^{n} x_j E[\varepsilon_j] \overset{E[\varepsilon_j]=0}{=} \alpha_p + \beta_p \cdot \overline{m}_I \qquad (2.2.33)$$

Вычислим общий риск портфеля, предполагая, что случайные отклонения доходности ценных бумаг являются некоррелированными [2]:

$$\sigma_p^2 = V[r_p] = V[\alpha_p] + V[\beta_p \cdot r_I] + V[\varepsilon_p] = \beta_p^2 \cdot \sigma_I^2 + \sum_{j=1}^{n} V[x_j \varepsilon_j] = \beta_p^2 \cdot \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2 \qquad (2.2.34)$$

где $\beta_p^2 = \left[\sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j\right]^2$, $\beta_p^2 \cdot \sigma_I^2$ - рыночный, а $\sigma_{\varepsilon p}^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sigma_{\varepsilon j}^2$ - собственный риск портфеля.

В общем случае можно заметить, что чем более диверсифицирован портфель, тем меньше каждая доля x_j. При этом значение β_p не меняется существенным образом, за исключением случаев включения в портфель ценных бумаг с относительно низким или высоким значением β. Так как β

портфеля является средним значением β ценных бумаг, входящих в портфель, то нет оснований предполагать, что увеличение диверсификации портфеля вызовет изменение β портфеля и, следовательно, рыночного риска портфеля в какую-либо сторону. Таким образом, можно утверждать, что диверсификация приводит к усреднению рыночного риска.

Совершенно другая ситуация возникает при рассмотрении собственного риска портфеля. Рассмотрим следующую ситуацию. Предположим, что во все ценные бумаги инвестировано одинаковое количество средств. Тогда x_j $(j = 1,.., n)$ составит $\frac{1}{n}$, а уровень собственного риска будет равен:

$$\sigma^2_{\varepsilon p} = \frac{1}{n}\left[\frac{\sigma^2_{\varepsilon 1} + \sigma^2_{\varepsilon 2} + ... + \sigma^2_{\varepsilon n}}{n}\right]. \qquad (2.2.35)$$

Внутри квадратных скобок находится значение среднего собственного риска ценных бумаг из портфеля. Но собственный риск портфеля в *n* раз меньше данного значения. Таким образом, диверсификация существенно уменьшает собственный риск портфеля [2]. Эффект диверсификации представлен на следующем рисунке:

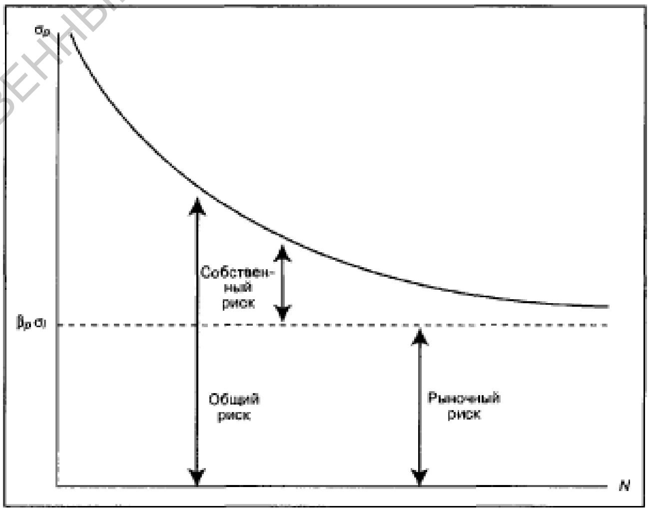

Рисунок 2 - Эффект диверсификации

Задача Марковица в этом случае выглядит следующим образом: найти вектор *X*, который минимизирует дисперсию портфеля:

$$V_p = \left[\sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j\right]^2 \sigma^2_I + \sum_{j=1}^{n} x^2_j \sigma^2_{\varepsilon j}, \qquad (2.2.36)$$

и удовлетворяет ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{m}_j = m_p, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1. \tag{2.2.37}$$

Составим функцию Лагранжа задачи

$$L(x_1,..., x_n, \lambda_1, \lambda_2) = \left[\sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j\right]^2 \sigma_I^2 + \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sigma_{\varepsilon j}^2 + \lambda_1 (\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{m}_j - m_p) + \lambda_2 (\sum_{j=1}^{n} x_j - 1) \tag{2.2.38}$$

Продифференцируем ее по всем аргументам и приравняем производные нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2(\beta_1^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon 1}^2) x_1 + 2\beta_1 \beta_2 \sigma_I^2 x_2 + ... + 2\beta_1 \beta_n \sigma_I^2 x_n + \lambda_1 \overline{m}_1 + \lambda_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2\beta_2 \beta_1 \sigma_I^2 x_1 + 2(\beta_2^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon 2}^2) x_2 + ... + 2\beta_2 \beta_n \sigma_I^2 x_n + \lambda_1 \overline{m}_2 + \lambda_2 = 0; \\ .... \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = 2\beta_n \beta_1 \sigma_I^2 x_1 + 2\beta_n \beta_2 \sigma_I^2 x_2 + ... + 2(\beta_n^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon n}^2) x_n + \lambda_1 \overline{m}_n + \lambda_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 \overline{m}_1 + x_2 \overline{m}_2 + ... + x_n \overline{m}_n - \overline{m}_p = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 + x_2 + ... + x_n - 1 = 0. \end{cases} \tag{2.2.39}$$

Систему уравнений можно записать и в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 2(\beta_1^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon 1}^2) & 2\beta_1 \beta_2 \sigma_I^2 & ... & 2\beta_1 \beta_n \sigma_I^2 & \overline{m}_1 & 1 \\ 2\beta_2 \beta_1 \sigma_I^2 & 2(\beta_2^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon 2}^2) & ... & 2\beta_2 \beta_n \sigma_I^2 & \overline{m}_2 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 2\beta_n \beta_1 \sigma_I^2 & 2\beta_n \beta_2 \sigma_I^2 & ... & 2(\beta_n^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon n}^2) & \overline{m}_n & 1 \\ \overline{m}_1 & \overline{m}_2 & ... & \overline{m}_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ m_p \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.40}$$

Если через *A* обозначить матрицу в вышеприведенном уравнении, вектор неизвестных через *X*, а вектор правой части через *B*, то необходимо решить систему:

$$AX = B \tag{2.2.41}$$

То есть $X = A^{-1}B$, где A^{-1} – матрица, обратная к A. Данное решение определяет структуру оптимального портфеля, которая реализует заданный уровень ожидаемой доходности при минимальной дисперсии.

Литература

1. Бабешко, Л.О. Математическое моделирование финансовой деятельности: Учебное пособие. М.: Финакадемия, 2008. 192 с.

2. Шарп, У. Инвестиции : пер. с англ. / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бэйли ; пер. А.Н. Буренина, А.А. Васина. М.: ИНФРА-М, 2001. 1028 с.

3. Максимова, В.Ф. Инвестиционный менеджмент: Учебно-практическое пособие. М. : Изд. Центр ЕАОИ, 2007. 214 с.

4. Шапкин, А.С. Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций: Монография. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2003. 544 с.

5. Дубов, А.М. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. / А.М. Дубров, Б.А Лагоша, Е.Ю Хрусталев. М.: Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права, 2003. 190 с.

6. Сидоров, С.П. Модели оптимального портфельного инвестирования : учеб.-метод. пособие для студентов механико-математического факультета. / С.П.Сидоров, Е.А.Захарова, А.А.Хомченко, Н.П.Гришина. Саратов: Издательство Сарат. ун-та, 2015. 77 с. ил.

7. Сперанский, Д.В. Эволюционные вычисления [Электронный ресурс] / Д.В. Сперанский, Ю.А. Скобцов. © НОУ «ИНТУИТ», 2003 – 2015.

URL: http://www.intuit.ru/studies/courses/14227/1284/info (дата обращения 09.05.2015). Лекции 1, 3, 4. Яз. рус.

8. Буренин, А.Н. Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов: Учебное пособие. М.: 1 Федеративная Книготорговая Компания, 1998. 352 с.

9. Гитман, Л.Дж. Основы инвестирования. Пер. с англ. / Л.Дж.Гитман, М.Д.Джонк. М.: Дело, 1997. 1008 с.