Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Л.П.Кувардина

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник задач
Часть 1

Учебное пособие для студентов дневного отделения
экономического факультета

Саратов 2015

1 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого положительного (сколь угодно малого) числа ε, существует положительное число $\delta > 0$, зависящее от ε такое, что для любого x, удовлетворяющего условию

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \ , \qquad x \neq x_0,$$

соответствующее значение функции удовлетворяет неравенству

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon.$$

Обозначаение предела: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.
Это определение удобно записать в кванторах:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, x :\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Определение. Функция $f(x)$ имеет односторонний предел справа при $x \to x_0 + 0$, если для любого положительного числа ε, существует положительное число $\delta > 0$, зависящее от ε такое, что для любого x, удовлетворяющего условию

$$x_0 < x < x_0 + \delta,$$

соответствующее значение функции удовлетворяет неравенству

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon.$$

И обозначают $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$.
Это определение можно записать в кванторах:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = b \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, x :\ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Определение. Функция $f(x)$ имеет односторонний предел слева при $x \to x_0 - 0$, если для любого положительного числа ε, существует положительное число $\delta > 0$, зависящее от ε такое, что для любого x, удовлетворяющего условию

$$x_0 - \delta < x < x_0,$$

соответствующее значение функции удовлетворяет неравенству

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon.$$

И обозначают $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=b.$
Это определение можно записать в кванторах:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=b \Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon)>0 \quad \forall\,x:\; x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon.$$

Свойства пределов функций

В следующих свойствах предполагается, что функции $f(x)$и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может самой точки x_0. Пусть существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a, \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=b.$$

1. Предел суммы и разности функций равен сумме и разности пределов функций:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} g(x)=a\pm b.$$

2. Предел произведения функций равен произведению пределов функций:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)=a\cdot b.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за предел:

$$\lim_{x\to x_0} k\cdot f(x)=k\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)=k\cdot a.$$

4. Предел частного функций равен частному пределов функций, если $b\neq 0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{a}{b}.$$

5. Предел степени

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=a^b.$$

Свойства: предел суммы, разности, произведения, частного обощаются на случай любого конечного числа функций, имеющих конечный предел.

Нахождение пределов функции с помощью определения часто представляет весьма сложную задачу, поэтому развиты эффективные методы, позволяющие найти пределы. Так, если аргумент стремиться к бесконечности или к числу, не принадлежащему области определения функции, требуется применение специальных методов. Приведем простые и часто встречающиеся из этих пределов (везде постоянная $a > 0$).

1. $\lim\limits_{x\to\infty} ax = \infty.$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a}{x} = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a}{x} = \infty.$
4. $\lim\limits_{x\to -0} \frac{a}{x} = -\infty.$
5. $\lim\limits_{x\to +0} \frac{a}{x} = +\infty.$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 1, \\ 0, & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases}$
7. $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{если } a > 1, \\ +\infty, & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases}$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 1, \\ -\infty, & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{если } a > 1, \\ +\infty, & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases}$

Неопределённости. Если предельные значения функции равны 0 или ∞, то могут возникнуть неопределённости различных видов:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}, \ldots$$

Для нахождения таких пределов (раскрытия неопределённостей) разработаны кокретные методы. Некоторые наиболее простые методы будут рассмотрены. Заметим, что не все комбинации 0 и ∞ являются неопределённостями. Так следующие соотношения неопределённостями не являются

$$\frac{0}{\infty}, \quad \frac{\infty}{0}, \quad 0^{\pm\infty}, \quad (+\infty)^{\pm\infty}$$

поскольку

$$\frac{0}{\infty} \Rightarrow 0, \quad \frac{\infty}{0} \Rightarrow \infty, \quad 0^{+\infty} \Rightarrow 0, \quad (+\infty)^{-\infty} \Rightarrow 0, \ \ldots$$

При нахождении пределов часто используется замечательные пределы.

Первый замечательный предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

или в другом виде

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

I. Случай, когда вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

вместо x подставляем x_0 , если при этом не получаем неоднозначность.

Пример 1.1. Найти предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-12}{2x^2-3x-9}.$$

Предел функции находим непосредственной подстановкой

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-12}{2x^2-3x-9}=\frac{1^2+1-12}{2\cdot 1^2-3\cdot 1-9}=\frac{-10}{-10}=1.$$

Пример 1.2. Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2x+1}.$$

Предел функции находим подстановкой значения $x=2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2x+1}=\frac{\sqrt{2^2-4}}{2\cdot 2+1}=\frac{0}{5}=0.$$

Пример 1.3. Найти предел

$$\lim_{x\to -2} \lg(2+2x+x^2-x^3).$$

Воспользуемся непосредственной подстановкой предельного значения переменной

$$\lim_{x\to -2} \lg(2+2x+x^2-x^3) = \lg(2+2(-2)+(-2)^2-(-2)^3) = \lg(10) = 1.$$

II. Случай, когда ищем предел дроби, числитель и знаменатель которой многочлены, обращающиеся в нуль в предельной точке (неопределенность $\frac{0}{0}$). То есть,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x), Q(x)$ - многочлены. В этом случае число x_0 является корнем многочленов и $P(x)$, и $Q(x)$, поэтому согласно теореме Безу, оба многочлена делятся без остатка на $(x-x_0)$, то есть такую дробь всегда можно сократить на $(x-x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\cdot P_1(x)}{(x-x_0)\cdot Q_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

здесь $P_1(x), Q_1(x)$ - новые многочлены. В некоторых случаях этого преобразования достаточно чтобы найти предел, в некоторых необходимы дальнейшие преобразования.

Пример 1.4. Найти предел

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{2x^2-3x-9}.$$

Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{2x^2-3x-9} = \left[\frac{3^2+3-12}{2\cdot 3^2-3\cdot 3-9} = \frac{0}{0}\right].$$

Для того, чтобы избавиться от данного вида неопределенности, разложим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела на множители, используя формулу:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1, x_2 - корни квадратного многочлена. Числитель:

$$x^2 + x - 12, \quad D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{-1+7}{2} = 3, \\ \dfrac{-1-7}{2} = -4. \end{array} \right.$$

Поэтому числитель дроби представим следующим образом

$$x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4).$$

Знаменатель.

$$2x^2 - 3x - 9, \quad D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 9 + 72 = 81,$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{4} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{3+9}{4} = 3, \\ \dfrac{3-9}{4} = -\dfrac{3}{2}. \end{array} \right.$$

Поэтому знаменатель дроби можно представить следующим образом

$$2x^2 - 3x - 9 = 2(x - 3)\left(x + \frac{3}{2}\right),$$

или

$$2x^2 - 3x - 9 = (x - 3)(2x + 3).$$

Подставим найденные разложения в исходный предел и сократим дробь на $(x - 3)$, получим

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 3x - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(2x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+4)}{(2x+3)} = \frac{(3+4)}{(2 \cdot 3 + 3)} = \frac{7}{9}.$$

Пример 1.5. Найти предел

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}.$$

При непосредственной подстановке получаем неопределенность

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \left[\frac{2^2 - 4}{2^2 - 5 \cdot 2 + 6} = \frac{0}{0} \right].$$

Так как числитель и знаменатель дроби при $x = 2$ обращаются в нуль. Разлагаем числитель и знаменатель дроби на множители. Для многочлена из числителя используем формулу сокращенного умножения:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

Знаменатель.

$$x^2 - 5x + 6, \quad D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1,$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{5+1}{2} = 3, \\[2ex] \dfrac{5-1}{2} = 2. \end{array} \right.$$

Поэтому знаменатель дроби представим следующим образом

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2).$$

Подставим найденные разложения в исходный предел и сократим дробь на $(x-2)$, окончательно получаем

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{4}{-1} = -4.$$

Пример 1.6. Найти предел

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}.$$

При непосредственной подстановке получаем неопределенность

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \left[\frac{2^3 - 8}{2 - 2} = \frac{0}{0} \right].$$

Разложим числитель дроби на множители, для этого используем формулу сокращенного умножения:

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2),$$

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4).$$

Подставим разложение и сократим дробь на $(x-2)$, окончательно получаем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=2^2+2\cdot 2+4=12.$$

III. Случай, когда при $x\to\infty$ ищем предел дроби, и числитель, и знаменатель которой многочлены. (Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.) То есть,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x), Q(x)$ - многочлены. В данном случае непосредственное использование теоремы о пределе частного невозможно, так как предел и числителя, и знаменателя не конечны. Для нахождения предела преобразуем дробь.

Пусть многочлены имеют вид

$$P(x)=\alpha_1x^k+\alpha_2x^{k-1}+...+\alpha_kx+\alpha_{k+1},$$

$$Q(x)=\beta_1x^m+\beta_2x^{m-1}+...+\beta_mx+\beta_{m+1}.$$

В обоих многочленах выносим старшую степень переменной за скобку

$$P(x)=\alpha_1x^k+\alpha_2x^{k-1}+...+\alpha_kx+\alpha_{k+1}=x^k\cdot\left(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{x}+...+\frac{\alpha_{k+1}}{x^k}\right),$$

$$Q(x)=\beta_1x^m+\beta_2x^{m-1}+...+\beta_mx+\beta_{m+1}=x^m\cdot\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{x}+...+\frac{\beta_{m+1}}{x^m}\right),$$

и подставляем в предел, то есть, и в числителе, и в знаменателе выносим старшую степень переменной за скобку, затем сокращаем.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^k\cdot\left(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{x}+...+\frac{\alpha_{k+1}}{x^k}\right)}{x^m\cdot\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{x}+...+\frac{\beta_{m+1}}{x^m}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{k-m}\cdot\frac{\left(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{x}+...+\frac{\alpha_{k+1}}{x^k}\right)}{\left(\beta_1+\frac{\beta_2}{x}+...+\frac{\beta_{m+1}}{x^m}\right)}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_2}{x}=0\ ,\ ...\ ,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_{k+1}}{x^k}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\beta_2}{x}=0\ ,\ ...\ ,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\beta_{m+1}}{x^m}=0,$$

то можем найти предел второго сомножителя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\alpha_1+\dfrac{\alpha_2}{x}+...+\dfrac{\alpha_{k+1}}{x^k}\right)}{\left(\beta_1+\dfrac{\beta_2}{x}+...+\dfrac{\beta_{m+1}}{x^m}\right)}=\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}x^{k-m}\cdot\frac{\left(\alpha_1+\dfrac{\alpha_2}{x}+...+\dfrac{\alpha_{k+1}}{x^k}\right)}{\left(\beta_1+\dfrac{\beta_2}{x}+...+\dfrac{\beta_{m+1}}{x^m}\right)}=\lim_{x\to\infty}x^{k-m}\cdot\frac{\alpha_1}{\beta_1}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}, & \text{если } k=m;\\ 0, & \text{если } k<m;\\ \pm\infty, & \text{если } k>m.\end{cases}$$

Знак предела в последнем случае ($k>m$) определяется знаками чисел α_1, β_1, а также при нечетном $k-m$ по знаку x.

Пример 1.7. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-12}{2x^2-3x-9}.$$

Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-12}{2x^2-3x-9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Для того, чтобы избавиться от данного вида неопределенности, вынесем за скобки в числителе и знаменателе дроби старшую степень переменной и сократим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-12}{2x^2-3x-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{12}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\dfrac{3}{x}-\dfrac{9}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{12}{x^2}\right)}{\left(2-\dfrac{3}{x}-\dfrac{9}{x^2}\right)}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0\ ,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{a}{x^2}=0,$$

то после непосредственной подстановки находим предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-12}{2x^2-3x-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{12}{x^2}\right)}{\left(2-\dfrac{3}{x}-\dfrac{9}{x^2}\right)}=\frac{1+0-0}{2-0-0}=\frac{1}{2}.$$

Пример 1.8. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}.$$

Числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают при $x\to\infty$, следовательно имеет место неопределенность

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Вынесем за скобки в числителе и знаменателе дроби старшую степень переменной и сократим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)}{\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0\ ,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{a}{x^2}=0,$$

то, воспользовавшись теоремами суммы и частного пределов, окончательно получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)}{\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-0}{1-0+0}=1.$$

Пример 1.9. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-8}{x-2}.$$

При непосредственной подстановке получаем неопределенность

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-8}{x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Вынесем за скобки в числителе и знаменателе дроби старшую степень переменной и сократим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\dfrac{8}{x^3}\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{\left(1-\dfrac{8}{x^3}\right)}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}.$$

Предел второго сомножителя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{8}{x^3}\right)}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=1.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{\left(1-\dfrac{8}{x^3}\right)}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}x^2=+\infty.$$

IV. Случай нахождения предела от иррационального выражения при $x\to x_0$, неопределённость $\frac{0}{0}$. В этом случае используются следущие формулы сокращенного умножения:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2).$$

Преобразуется дробь так, чтобы выделить сомножитель $(x-x_0)$ и в числителе, и в знаменателе, затем сократить. В некоторых случаях этого преобразования достаточно чтобы найти предел, в некоторых необходимы дальнейшие преобразования. Подробнее этот метод рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 1.10. Найти предел

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$$

Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\left[\frac{\sqrt{4}-2}{4-4}=\frac{0}{0}\right].$$

Для того, чтобы избавиться от неопределенности, умножим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела на выражение, сопряженное числителю $\sqrt{x}-2$, то есть, на выражение $\sqrt{x}+2$. После этого воспользуемся формулой сокращеного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}.$$

Сократим дробь на множитель $(x-4)$, стремящийся к нулю, и найдем предел.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{4}+2\right)}=\frac{1}{4}.$$

Пример 1.11. Найти предел

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}.$$

При непосредственной подстановке получаем неопределенность

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}=\left[\frac{\sqrt{4}-2}{4-\sqrt{16}}=\frac{0}{0}\right].$$

Умножим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела на выражение, сопряженное числителю $\sqrt{1-x}-2$, то есть, на выражение $\sqrt{1-x}+2$. После этого умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю $4-\sqrt{1-5x}$, то есть, на выражение $4+\sqrt{1-5x}$. Затем дважды воспользуемся формулой сокращеного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Получим

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}=\lim_{x\to -3}\frac{(\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1-x}+2)(4+\sqrt{1-5x})}{(\sqrt{1-x}+2)(4-\sqrt{1-5x})(4+\sqrt{1-5x})}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{(1-x-4)(4+\sqrt{1-5x})}{(\sqrt{1-x}+2)(16-(1-5x))}=\lim_{x\to -3}\frac{-(x+3)(4+\sqrt{1-5x})}{(\sqrt{1-x}+2)5(x+3)}.$$

Сократим дробь на множитель $(x+3)$, стремящийся к нулю, и вычислим предел.

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}=\lim_{x\to-3}\frac{-(4+\sqrt{1-5x})}{5(\sqrt{1-x}+2)}=\frac{-(4+\sqrt{1-5(-3)})}{5(\sqrt{1-(-3)}+2)}=\frac{-2}{5}.$$

Пример 1.12. Найти предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}.$$

Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\left[\frac{\sqrt{0+1}-1}{\sqrt[3]{0+1}-1}=\frac{0}{0}\right].$$

Для того, чтобы избавиться от неопределенности, умножим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела на выражение, сопряженное числителю $\sqrt{x+1}-1$, то есть, на выражение $\sqrt{x+1}+1$. После этого воспользуемся формулой сокращеного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Для выражения $\sqrt[3]{x+1}-1$, стоящего в знаменателе выберем сомножитель $(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt{x+1}+1$ и умножим числитель и знаменатель дроби, на это выражение. После этого воспользуемся формулой сокращеного умножения $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$. Получаем

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)\left[(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt{x+1}+1\right]}{(\sqrt{x+1}+1)\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left[(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt{x+1}+1\right]}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x+1-1)\left[(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt{x+1}+1\right]}{(\sqrt{x+1}+1)(1+x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{x\left[(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt{x+1}+1\right]}{(\sqrt{x+1}+1)x}=$$

Сократим дробь на x и вычислим предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\left[(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt{x+1}+1\right]}{(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{\left[(\sqrt[3]{0+1})^2+\sqrt{0+1}+1\right]}{(\sqrt{0+1}+1)}=\frac{3}{2}.$$

V. Случай, когда при $x\to\infty$ ищем предел от иррационального выражения. Неопределённость $\infty-\infty$. В этом случае используются следущие формулы сокращенного умножения:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

Преобразуем данную функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности. Таким образом, этот случай нахождения предела функции сводится к случаю неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$. Для которых применим один из предыдущих методов. Подробнее метод рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 1.13. Найти предел

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x(x+2)} - x).$$

Анализируя условие задачи, делаем вывод, что при указанном поведении аргумента функция представляет разность двух положительных бесконечно больших величин. (Неопределённость $\infty - \infty$.)

Для того, чтобы избавиться от данного вида неопределенности, умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на величину, ему сопряженную, то есть, на $(\sqrt{x(x+2)} + x)$, а именно,

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x(x+2)} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x(x+2)} - x)(\sqrt{x(x+2)} + x)}{\sqrt{x(x+2)} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x(x+2) - x^2}{\sqrt{x(x+2)} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x(x+2)} + x}.$$

Вынесем в знаменателе из-под корня x, и сократим

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x(x+2)} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = 1.$$

Учитывая, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0,$$

используя свойства пределов, находим

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x(x+2)} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1+0} + 1} = 1.$$

Пример 1.14. Найти предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x - 1} - \sqrt{x^2 + 4x - 3} \right).$$

Анализируя условие задачи, делаем вывод, что при указанном поведении аргумента функция представляет разность двух положительных бесконечно больших величин. (Неопределённость $\infty - \infty$.) Для того, чтобы избавиться от данного вида неопределенности, умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на выражение, ему сопряженное, то есть, на $\left(\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{x^2+4x-3}\right)$, а именно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-1}-\sqrt{x^2+4x-3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x-1}-\sqrt{x^2+4x-3}\right)\left(\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{x^2+4x-3}\right)}{\left(\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{x^2+4x-3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x-1-(x^2+4x-3)}{\left(\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{x^2+4x-3}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{x^2+4x-3}}.$$

Мы приходим к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$, которую устраним, после того как вынесем за скобку x и в числителе, и в знаменателе дроби и сократим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-1}-\sqrt{x^2+4x-3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}}.$$

Учитывая, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0\ , \quad \lim_{x\to\infty}\frac{a}{x^2}=0,$$

используя свойства пределов, находим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-1}-\sqrt{x^2+4x-3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}} =$$

$$= \frac{1+0}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1+0-0}} = \frac{1}{2}.$$

Пример 1.15. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x+7}-\sqrt{2x^2+5x-3}\right).$$

Здесь имеет место неопределённость $\infty-\infty$. Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на $\left(\sqrt{2x^2+5x+7}+\sqrt{2x^2+5x-3}\right)$, а именно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x+7}-\sqrt{2x^2+5x-3}\right) =$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+5x+7}-\sqrt{2x^2+5x-3}\right)\left(\sqrt{2x^2+5x+7}+\sqrt{2x^2+5x-3}\right)}{\left(\sqrt{2x^2+5x+7}+\sqrt{2x^2+5x-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5x+7-(2x^2+5x-3)}{x\left(\sqrt{2+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}}.$$

Так как

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)=\sqrt{2+0+0}+\sqrt{2+0-0}=2\sqrt{2},$$

а

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10}{x}=0,$$

то окончательно получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x+7}-\sqrt{2x^2+5x-3}\right) = 0.$$

VI. Случай, когда под знаком предела стоят тригонометрические функции. Неопределённость $\frac{0}{0}$. В этом случае, как правило, используется первый замечательный предел, то есть,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Пределы этого случая можно привести к следующим пределам:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}=\lim\limits_{ax\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{ax}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax\cdot\cos ax}=\lim\limits_{ax\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos ax}=1\cdot 1=1.$

Преобразуя функцию, стоящую под знаком предела, всегда надо учитывать, что $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\operatorname{tg} 0 = 0$. При преобразованиях следует выделять сомножители вида $\dfrac{\sin ax}{ax}$ или $\dfrac{ax}{\sin ax}$. Рассмотрим на конкретные примеры.

Пример 1.16. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 2x}.$$

Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 2x} = \left[\frac{\operatorname{tg} 0}{\sin 0} = \frac{0}{0}\right].$$

Для того, чтобы избавиться от данного вида неопределенности, во-первых, представим тангенс через синус и косинус того же аргумента. Затем разделим $\sin 7x$ на $7x$ и умножим на $7x$, аналогично поступим и с $\sin 2x$ – разделим на $2x$ и умножим на $2x$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\cos 7x}\cdot\frac{1}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{1}{\cos 7x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{7x}{2x}.$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x} = \lim_{7x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x} = \lim_{2x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 7x} = 1,$$

то наш предел представим как произведение четырех пределов, два из которых, согласно первому замечательному пределу равны единице, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 7x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{7x}{2x} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{7}{2} = \frac{7}{2}.$$

Пример 1.17. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}.$$

Убедимся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2} = \left[\frac{1-\cos 0}{0^2} = \frac{0}{0}\right].$$

Во-первых, применим формулу двойного аргумента аргумента:

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha.$$

Получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 6x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 3x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2.$$

Отдельно найдем предел, для этого умножим и разделим дробь на число 3:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{3x} = 3\lim_{3x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3\cdot 1 = 3.$$

Поэтому, используя свойства пределов функции, находим

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 6x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2 = 2\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}\right)^2 = 2\cdot 3^2 = 18.$$

Пример 1.18. Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{tg}\,6x}{\sin^2 2x}.$$

Убедимся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{tg}\,6x}{\sin^2 2x} = \left[\frac{0\cdot \mathrm{tg}\,0}{\sin^2 0} = \frac{0}{0}\right].$$

Для того, чтобы избавиться от данного вида неопределенности, во-первых, представим тангенс через синус и косинус того же аргумента. Затем разделим $\sin 6x$ на $6x$ и умножим на $6x$, аналогично поступим и с $\sin 2x$ – разделим на $(2x)^2$ и умножим на $(2x)^2$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{tg}\,6x}{\sin^2 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin 6x}{\cos 6x \sin^2 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{6x}\cdot\frac{1}{\cos 6x}\cdot\frac{(2x)^2}{\sin^2 2x}\cdot\frac{x6x}{(2x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{6x}\cdot\frac{1}{\cos 6x}\cdot\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2\cdot\frac{6}{4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{6x}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 6x}\cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2\cdot\frac{3}{2} =$$

$$= 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

VII. Случай, когда под знаком предела стоит функция, представляющая степень, основание которой стремиться к единице, а показатель – к бесконечности при $x \to x_0$ или $x \to \infty$. Неопределённость 1^∞. В этом случае подсчёт предела, как правило, оновывается на втором замечательном пределе:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{или в другом виде} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

При этом используется следущее свойство: если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = a^b.$$

Пределы этого случая часто сводятся к пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha.$$

Пример 1.19. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x.$$

Убедимся, что функция представляет степень, основание которой стремиться к единице, а показатель – к бесконечности при $x \to \infty$. Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+3\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = 1,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x = \left[1^\infty\right].$$

В данном случае для освобождения от неопределенности будем использовать второй замечательный предел. Для этого представим основание в виде суммы единицы и некоторой бесконечно малой величины при $x \to \infty$. С этой целью к основанию прибавим и вычтем единицу, затем преобразуем.

$$\frac{x+3}{x+1} = 1 + \frac{x+3}{x+1} - 1 = 1 + \frac{2}{x+1} = 1 + \frac{1}{\dfrac{x+1}{2}}.$$

Очевидно, что при $x \to \infty$ знаменатель $\dfrac{x+1}{2} \to \infty$, дробь $\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{2}} \to 0$,

а основание степени $1 + \dfrac{1}{\dfrac{x+1}{2}} \to 1$.

Таким образом, наш предел примет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x+1}{2}}\right)^x.$$

Теперь показатель степени умножим и разделим на полученный знаменатель $\dfrac{x+1}{2}$, то есть,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x+1}{2}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x+1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}\cdot\frac{2}{x+1}x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{x+1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x+1}}.$$

Так как предел выражения в квадратных скобках равен числу e, то есть,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x+1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}}=e,$$

а предел показателя степени

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=2.$$

Можем вычислить предел следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{x+1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x+1}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x+1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}}=e^2.$$

Пример 1.20. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x-3}\right)^{3x+1}.$$

Убедимся, что функция представляет степень, основание которой стремиться к единице, а показатель – к бесконечности при $x \to \infty$. Так как

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x-1}{5x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(5-\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(5-3\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{5-0}{5-0} = 1,$$

следовательно, имеем неопределенность:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x-1}{5x-3}\right)^{3x+1} = \left[1^{\infty}\right].$$

Для вычисления предепа используем второй замечательный предел. Представим основание в виде суммы единицы и некоторой бесконечно малой величины при $x \to \infty$. С этой целью к основанию прибавим и вычтем единицу, затем преобразуем.

$$\frac{5x-1}{5x-3} = 1 + \frac{5x-1}{5x-3} - 1 = 1 + \frac{2}{5x-3} = 1 + \frac{1}{\dfrac{5x-3}{2}}.$$

Очевидно, что при $x \to \infty$ знаменатель $\dfrac{5x-3}{2} \to \infty$, дробь $\dfrac{1}{\dfrac{5x-3}{2}} \to 0$, а основание степени $1 + \dfrac{1}{\dfrac{5x-3}{2}} \to 1$. Итак, наш предел можно записать следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x-1}{5x-3}\right)^{3x+1} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\dfrac{5x-3}{2}}\right)^{3x+1}.$$

Преобразуем показатель степени. Умножим и разделим его на полученный знаменатель $\dfrac{5x-3}{2}$, имеем

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\dfrac{5x-3}{2}}\right)^{3x+1} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\dfrac{5x-3}{2}}\right)^{\dfrac{5x-3}{2} \cdot \dfrac{2}{5x-3}(3x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{5x-3}{2}} \right)^{\frac{5x-3}{2}} \right]^{\frac{2(3x+1)}{5x-3}}.$$

Поскольку предел выражения в квадратных скобках равен числу e:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{5x-3}{2}} \right)^{\frac{5x-3}{2}} = e,$$

предел показателя степени

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2(3x+1)}{5x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(5-\frac{3}{x}\right)} = \frac{2\,(3+0)}{(5-0)} = \frac{6}{5}.$$

то можем вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x-1}{5x-3} \right)^{3x+1} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{5x-3}{2}} \right)^{\frac{5x-3}{2}} \right]^{\frac{2(3x+1)}{5x-3}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{5x-3}{2}} \right)^{\frac{5x-3}{2}} \right]^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2(3x+1)}{5x-3}} = e^{\frac{6}{5}}.$$

Вычислить следующие пределы.

1.1. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-2x-15}$, a). $x_0=3$, b). $x_0=-3$, c). $x_0=\infty$.

1.2. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2-7x+6}{x^2-3x-18}$, a). $x_0=2$, b). $x_0=6$, c). $x_0=\infty$.

1.3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}$, a). $x_0=1$, b). $x_0=4$, c). $x_0=\infty$.

1.4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$, a). $x_0=1$, b). $x_0=2$, c). $x_0=\infty$.

1.5. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2-6x-7}{x^2-9x+14}$, a). $x_0=3$, b). $x_0=7$, c). $x_0=\infty$.

1.6. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$, a). $x_0=5$, b). $x_0=-1$, c). $x_0=\infty$.

1.7. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-2x-15}$, a). $x_0=7$, b). $x_0=5$, c). $x_0=\infty$.

1.8. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2+8x+7}{x^2-2x-3}$, a). $x_0=2$, b). $x_0=-1$, c). $x_0=\infty$.

1.9. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2+6x+8}{x^2-3x-10}$, a). $x_0=1$, b). $x_0=-2$, c). $x_0=\infty$.

1.10. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2-6x-7}{3x^2+x-2}$, a). $x_0=-2$, b). $x_0=-1$, c). $x_0=\infty$.

1.11. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$, a). $x_0=1$, b). $x_0=5$, c). $x_0=\infty$.

1.12. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$, a). $x_0=0$, b). $x_0=-5$, c). $x_0=\infty$.

1.13. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{4x^2-5x+1}{3x-x^2-2}$, a). $x_0=-1$, b). $x_0=1$, c). $x_0=\infty$.

1.14. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2-3x+2}{14-x-3x^2}$, a). $x_0=1$, b). $x_0=2$, c). $x_0=\infty$.

1.15. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$, a). $x_0=2$, b). $x_0=3$, c). $x_0=\infty$.

1.16. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$, a). $x_0=1$, b). $x_0=4$, c). $x_0=\infty$.

1.17. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$, $a).\ x_0=1$, $b).\ x_0=-1$, $c).\ x_0=\infty$.

1.18. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$, $a).\ x_0=2$, $b).\ x_0=1$, $c).\ x_0=\infty$.

1.19. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$, $a).\ x_0=2$, $b).\ x_0=1$, $c).\ x_0=\infty$.

1.20. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$, $a).\ x_0=1$, $b).\ x_0=2$, $c).\ x_0=\infty$.

1.21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$.

1.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{x-1}$.

1.23. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-3x}$.

1.24. $\lim\limits_{x\to 2}(12-3x^4-4x^3+6x^2)$.

1.25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4}{1+x^2}$.

1.26. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cos 3x$.

1.27. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x\cos 3x$.

1.28. $\lim\limits_{x\to -1}x^5+5^x+1$.

1.29. $\lim\limits_{x\to -1}x^2+2^x-3$.

1.30. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{(1+x^2)^2}$.

1.31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+25}-5}{x^2+x^3}$.

1.32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^3+x^2}$.

1.33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x^2+x}$.

1.34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x^3+x}$.

1.35. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$.

1.36. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$.

1.37. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

1.38. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

1.39. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

1.40. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$.

1.41. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$.

1.42. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

1.43. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

1.44. $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

1.45. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}$.

1.46. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt[3]{x+3}-2}{\sqrt{x+3}-2\sqrt{2}}$.

1.47. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x}}$.

1.48. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{12+x}-\sqrt{8+2x}}{\sqrt{8-x}-\sqrt{x}}$.

1.49. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3x-5}}{\sqrt{4-x}-\sqrt{2x-5}}$.

1.50. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

1.51. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$.

1.52. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-7x}\right)$.

1.53. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5x-\sqrt{25x^2+x}\right)$.

1.54. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

1.55. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x-1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

1.56. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

1.57. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x-12}-\sqrt{2x^2+7}\right)$.

1.58. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{2x^2+4x+3}\right)$.

1.59. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+6x-3}-\sqrt{4x^2+5x-6}\right)$.

1.61. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

1.62. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+5}-\sqrt{2x^2+2}\right)$.

1.63. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-10}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

1.64. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x+2}\right)$.

1.65. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+4x+3}\right)$.

1.66. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7x-3}-\sqrt{x^2+4x-3}\right)$.

1.67. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-6}\right)$.

1.68. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x^2+3}\right)$.

1.69. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-3}-\sqrt{x^2-6}\right)$.

1.70. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$.

1.71. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

1.72. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{x}$.

1.73. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 9x}$.

1.74. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x \operatorname{tg} 3x}{x^2}$.

1.75. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 2x}$.

1.76. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 7x}$.

1.77. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x \operatorname{tg} 4x}{\sin 5x}$.

1.78. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x \operatorname{tg} 4x}{\sin^2 3x}$.

1.79. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x \operatorname{tg} 3x}{x^2}$.

1.80. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x \cos 5x}{\sin 3x}$.

1.81. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x \sin 2x}{\sin^2 4x}$.

1.82. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x \sin 3x}{\sin^2 2x}$.

1.83. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 6x \sin 2x}{\sin^2 5x}$.

1.84. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin 2x}{\operatorname{tg}^2 4x}$.

1.85. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x \cos 8x}{\sin 3x}$.

1.86. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x \cos 7x}{\sin 2x}$.

1.87. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 8x}{x^2}$.

1.88. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{x^2}$.

1.89. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 8x}{x \sin x}$.

1.90. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 6x}{x \sin 4x}$.

1.91. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$.

1.92. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x-3}\right)^{(x-7)}$.

1.93. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{3x-2}\right)^{(2x-3)}$.

1.94. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-3}\right)^{(x+2)}$.

1.95. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{4x}$.

1.96. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-3}\right)^{(x+2)}$.

1.97. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

1.98. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+7}{x^2-5}\right)^{x^2-4}$.

1.99. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-1}{3x^2-5}\right)^{5x^2+1}$.

1.100. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x}\right)^{7x}$.

1.101. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2}\right)^{3x^2}$.

1.102. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+3}{6x-1}\right)^{(3x-1)}$.

1.103. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-7x}{1-7x}\right)^{(x-3)}$.

1.104. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{x}$.

1.105. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-7}{3x-9}\right)^{3-2x}$.

1.106. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+15}{4x+8}\right)^{3x+5}$.

1.107. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+13}{2x^2-1}\right)^{2x}$.

1.107. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{15x+15}{15x-5}\right)^{-15x}$.

1.108. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x-2}\right)^{x^2}$.

1.109. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+33}{3x+13}\right)^{-x^2}$.

2 ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Определение. Производной от функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Геометрически производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x, т.е. $y' = tg\alpha$.

Функция называется дифференцируемой в некоторой точке, если в этой точке она имеет производную. Отыскание производной функции $f(x)$ называется дифференцированием функции $f(x)$.

Таблица производных элементарных функций

$$I.\ (x^n)' = n\,x^{n-1} \quad (n - \text{число}).$$
$$II.\ (\sin x)' = \cos x.$$
$$III.\ (\cos x)' = -\sin x.$$
$$IV.\ (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$
$$V.\ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$
$$VI.\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
$$VII.\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
$$VIII.\ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$
$$IX.\ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$
$$X.\ (e^x)' = e^x.$$
$$XI.\ (a^x)' = a^x\, ln\, a \quad (a > 0).$$
$$XII.\ (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$
$$XIII.\ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0).$$

Основные правила дифференцирования

1. $C' = 0$.
2. $x' = 1$.
3. $(C\,u)' = C\,u'$.
4. $(u + v - w)' = y' + v' - w'$.
5. $(uv)' = u'v + uv'$.
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
7. Если $y = f(u), u = u(x)$, т.е. $y = f\big(u(x)\big)$, где функции $f(u), u(x)$ имеют прозводные, то $\quad y'_x = y'_u u'_x$

(это правило называется дифференцированием сложной функции).

Пример 2.1. Найти производную функции $y = cos^3 x$.

Это сложная функия. Полагая $y = u^3$, $u = cos\,x$, согласно правилу дифференцирования сложной функции, получим

$$y' = (cos^3 x)' = (u^3)' = 3u^2 \cdot u' = 3(cos\,x)^2 \cdot (cos\,x)' = -3sin\,x(cos\,x)^2.$$

Пример 2.2. Найти производную функции $y = sin 7x$.

Это сложная функия. Полагая $y = sin\,u$, $u = 7x$, дифференцируем

$$y' = (sin 7x)' = (sin\,u)' = cos\,u \cdot u' = cos 7x \cdot 7 = 7cos 7x.$$

Пример 2.3. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2 + 5}$.

Это сложная функия. Полагая $y = \sqrt[3]{u}$, $u = x^2 + 5$, дифференцируем

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + 5})' = (\sqrt[3]{u})' = \left(u^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} u' = \frac{1}{3}(x^2 + 5)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \\ = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 5)^2}}$$

Дифференцирование этой функции можно записать и без обозначения промежуточного аргумента. Это короче и быстрее.

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + 5})' = \left((x^2 + 5)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\,(x^2 + 5)^{-\frac{2}{3}}(x^2 + 5)' = \\ = \frac{1}{3}\,(x^2 + 5)^{-\frac{2}{3}}(2x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 5)^2}}.$$

Правило дифференцирования сложной функции распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций.

Пример 2.4. Найти производную функции $y = \sqrt{sin(x^3 + 3x - 1)}$.

Это сложная функия. Будем дифференцировать без обозначения промежуточного аргумента

$$y' = \left(\sqrt{sin(x^3 + 3x - 1)}\right)' = \left((sin(x^3 + 3x - 1))^{\frac{1}{2}}\right)' =$$
$$= \frac{1}{2}\,(sin(x^3 + 3x - 1))^{\frac{1}{2}-1} \cdot (sin(x^3 + 3x - 1))' =$$
$$= \frac{1}{2}\,(sin(x^3 + 3x - 1))^{-\frac{1}{2}} cos(x^3 + 3x - 1) \cdot (x^3 + 3x - 1)' =$$
$$= \frac{1}{2}\,(sin(x^3 + 3x - 1))^{-\frac{1}{2}} cos(x^3 + 3x - 1) \cdot (3x^2 + 3).$$

Пример 2.5. Найти производную функции $y = e^{cos2x}$.

$$y' = \left(e^{cos2x}\right)' = e^{cos2x} \cdot (cos2x)' = e^{cos2x}(-sin2x)(2x)' =$$
$$= e^{cos2x}(-sin2x)2 = -2e^{cos2x} sin2x.$$

Пример 2.6. Найти производную функции $y = 2^{x^3}$.

$$y' = \left(2^{x^3}\right)' = 2^{x^3} ln\, 2 \cdot (x^3)' = 2^{x^3} ln\, 2 \cdot 3x^2 = 3ln\, 2 \cdot x^2 \cdot 2^{x^3}.$$

Пример 2.7. Найти производную функции $y = ln\, tg\, \frac{x}{2}$.

$$y' = \left(ln\, tg\, \frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{tg\, \frac{x}{2}} \cdot \left(tg\, \frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{tg\, \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{cos^2\, \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' =$$
$$= \frac{cos\, \frac{x}{2}}{sin\, \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{cos^2\, \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\ sin\, \frac{x}{2}\ cos\, \frac{x}{2}} = \frac{1}{sin\, x}.$$

Пример 2.8. Найти производную функции $y = arctg\, \dfrac{x^2}{2}$.

$$y' = \left(arctg\, \frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{4}{4 + x^4} \cdot \frac{1}{2}\,(x^2)' =$$
$$= \frac{4}{4 + x^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{4x}{4 + x^4}.$$

Найти производные следующих функциий.

2.1. $y = x^5 + 5x^4 + 4x^3$.

2.2. $y = x^4 - 2x^3 - 6x^2$.

2.3. $y = 1 - x^3 - x^4$.

2.4. $y = 12 - 3x^4 - 4x^3 + 6x^2$.

2.5. $y = \dfrac{4}{1+x^2}$.

2.6. $y = \dfrac{1}{x^3}$.

2.7. $y = \dfrac{4}{x^4} + \dfrac{x^4}{4}$.

2.8. $y = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{x^4-1}{2}$.

2.9. $y = \dfrac{5}{1+3x^2}$.

2.10. $y = \dfrac{1}{x^3 - x^2}$.

2.11. $y = \dfrac{x+2}{12 + x - x^2}$.

2.12. $y = \dfrac{x^4 + 3x^2 - 5}{x^3 + x}$.

2.13. $y = \sqrt{1 + 7x - 3x^2}$.

2.14. $y = \sqrt{x^2 + 5x - 8}$.

2.15. $y = \sqrt[3]{(1+x^2)^2}$.

2.16. $y = \sqrt[3]{(x^3+1)^4}$.

2.17. $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{2x-3}}$.

2.18. $y = \sqrt{\dfrac{x-5}{x+8}}$.

2.19. $y = \sqrt{\left(\dfrac{3x-7}{x-9}\right)^3}$.

2.20. $y = \sqrt{\left(\dfrac{4x+15}{3x+8}\right)^3}$.

2.21. $y = \sqrt[3]{\left(\dfrac{7x+2}{2x-7}\right)^2}$.

2.22. $y = \sqrt[3]{\left(\dfrac{x-5}{x+8}\right)^2}$.

2.23. $y = sin^3(1+x^2)$.

2.24. $y = cos^2(x^3+2)$.

2.25. $y = sin^2\dfrac{1}{x^2+1}$.

2.26. $y = cos^3\dfrac{1}{x^2+3}$.

2.27. $y = tg(1+5x)$.

2.28. $y = ctg(7x-2)$.

2.29. $y = ln\, sin\, 3x$.

2.30. $y = ln\, cos\, 5x$.

2.31. $y = ln\, tg\, 4x$.

2.32. $y = ln\, ctg\, 6x$.

2.33. $y = ln(x + \sqrt{x^2+3})$.

2.34. $y = ln(x + \sqrt{2x^2+7})$.

2.35. $y = ln(e^x + xe^x)$.

2.36. $y = ln(e^{-x} + xe^x)$.

2.37. $y = x^2e^{-x}$.

2.38. $y = x^2e^{-2x}$.

2.39. $y = e^{\frac{1}{cos\, x}}$.

2.40. $y = e^{tg\, x}$.

2.41. $y = e^x(sin\, x + cos\, x)$.

2.42. $y = e^{-x}(sin\, x + cos\, x)$.

2.43. $y = (tg\, x + ctg\, x)^2$.

2.44. $y = \dfrac{sin\, x}{cos^2 x}$.

2.45. $y = ln(ln\, x) - ln^2 x$.

2.46. $y = \dfrac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малугин В.А.Математика для экономистов: Линейная алгебра. Задачи и упражнения. М.: Эксмо, 2006. 175с.

2. Малугин В.А.Математика для экономистов: Математический анализ. Курс лекций. М.: Эксмо, 2006. 265с.

3. Данко П. Е. , Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. М.: Высшая школа, 1980. 320 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1,2. -М.: Наука, 1968г.