Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Л.П.Кувардина

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник задач
Часть 2

Учебное пособие для студентов дневного отделения
экономического факультета

Саратов 2015

1 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на данном интервале (a, b), если на этом интервале $F'(x) = f(x)$.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечно много первообразных, каждая из которых может быть представлена в виде $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Пример. Функция $F(x) = x^2$ является первообразной для функции $f(x) = 2x$, так как $F'(x) = (x^2)' = 2x$.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обзначается $\int f(x)\,dx$. Итак

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Здесь знак $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)\,dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования.

Отыскание неопределенного интеграла от функции $f(x)$ называют интегрированием функции $f(x)$.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $d\Big(\displaystyle\int f(x)\,dx\Big) = f(x)\,dx.$
2. $\Big(\displaystyle\int f(x)\,dx\Big)' = f(x).$
3. $\displaystyle\int dF(x) = F(x) + C.$
4. $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx, \quad \alpha = const,\ \alpha \neq 0.$
5. $\displaystyle\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

Таблица простейших интегралов

$$I.\quad \int dx = x + C.$$

$$II.\quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq 1).$$

$$III.\quad \int \frac{dx}{x} = ln|x| + C \quad (x \neq 0).$$

$$IV.\quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{array} \right.$$

$$V.\quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\,ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

$$VI.\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{array} \right.$$

$$VII.\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C.$$

$$VIII.\quad \int e^x\,dx = e^x + C.$$

$$IX.\quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{ln\,a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1).$$

$$X.\quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

$$XI.\quad \int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

$$XII.\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$XIII.\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

Рассмотрим следующие методы интегрирования.

1. Сведение к табличному интегралу с помощью простейших преобразований и свойств неопределенного интеграла.

2. Замена переменной интегрирования.

3. Интегрирование по частям.

4. Интегрирование дробно-рациональных функций методом неопределенных коэффициентов.

Сведение к табличному интегралу с помощью простейших преобразований и свойств неопределенного интеграла

Пример 1.1. Найти интеграл $\int(2x^3+3x^2-7)\,dx$.
Используя свойства 4 и 5, получаем

$$\int(2x^3+3x^2-7)\,dx = 2\int x^3\,dx + 3\int x^2\,dx - 7\int dx.$$

К первым двум интегралам правой части применим II табличный интеграл, а к третьему – табличный интеграл I, получим

$$\int(2x^3+3x^2-7)\,dx = 2\,\frac{1}{4}\,x^4 + 3\,\frac{x^3}{3} - 7x + C = \frac{1}{2}\,x^4 + x^3 - 7x + C.$$

Пример 1.2. Найти интеграл $\int \sqrt{x}\,dx$.

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Согласно табличному интегралу II

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\,x^{\frac{2}{3}} + C\,.$$

Пример 1.3. Найти интеграл $\int(sin\,x - 5cos\,x)\,dx$.
Используя свойства 4, 5 и таблличные интегралы X, XI,получаем

$$\int(sin\,x - 5cos\,x)\,dx = \int sin\,x\,dx - 5\int cos\,x\,dx = -cos\,x - 5sin\,x + C\,.$$

Пример 1.4. Найти интеграл $\int tg^2\,x\,dx$.

$$\int tg^2\,x\,dx = \int \frac{sin^2 x}{cos^{\,2} x}\,dx = \int \frac{1-cos^{\,2}x}{cos^{\,2}x}\,dx = \int \frac{1}{cos^{\,2}x}\,dx - \int x\,dx = $$
$$= tg\,x - x + C\,.$$

Пример 1.5. Найти интеграл $\int 3^{2x+1}\,dx$.
После преобразований, используя табличный интеграл IX, имеем

$$\int 3^{2x+1}\,dx = 3\int 9^x\,dx = 3\,\frac{9^x}{ln 9} + C = \frac{3}{2\,ln\,3}\,9^x + C\,.$$

Пример 1.6. Найти интеграл

$$\int \frac{2^{x+1}+5^{x-1}}{10^x}\,dx.$$

После алебраических преобразований, используя табличный интеграл IX, получаем

$$\int \frac{2^{x+1}+5^{x-1}}{10^x}\,dx = \int \frac{2}{5^x} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^x}\,dx = 2\int\left(\frac{1}{5}\right)^x dx + \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{2}\right)^x dx =$$

$$= 2\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{ln\,\frac{1}{5}} + \frac{1}{5}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{ln\,\frac{1}{2}} + C \ = -\frac{2}{5^x ln\,5} - \frac{1}{2^x 5\,ln\,2} + C\,.$$

Пример 1.7. Найти интеграл $\int\left(x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$.

После алебраических преобразований, используя табличный интеграл II, получаем

$$\int\left(x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx = \int\left(x^2 + 2\,\frac{x}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx = \int\left(x^2+2x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{-2}{3}}\right)dx =$$

$$= \int x^2\,dx + 2\int x^{\frac{2}{3}}\,dx + \int x^{\frac{-2}{3}}\,dx = \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1/3} + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{6}{5}\,x\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C\,.$$

Замена переменной интегрирования

Этот метод состоит в переходе от исходной переменнной интегрирования к другой переменной. Иногда такая замена приводит к значительному упрощению подынтегрального выражения.

Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной. Тогда

$$dx = \varphi'(t)dt, \qquad f(x) = f\big(\varphi(t)\big)$$

и

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt.$$

Эту формулу называют формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Особо следует отметить следующие два частных случая замены переменной.

1. Если надо найти неопределенный интеграл

$$\int f(ax+b)\,dx,$$

то, как правило, следует сделать линейную замену переменной

$$t = ax + b,$$

тогда

$$dt = adx, \qquad f(ax+b) = f(t)$$

и формула замены переменной в этом случае имеет вид

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt.$$

2. Если надо найти неопределенный интеграл следующего вида

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx,$$

то целесообразно сделать замену переменной

$$t = \varphi(x).$$

Тогда

$$dt = \varphi'(x)dt, \qquad f(t) = f\big(\varphi(x)\big)$$

и формула замены переменной в этом случае имеет вид

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt.$$

Пример 1.8. Найти интеграл $\int \frac{1}{5x+3}\,dx$.

Сделаем замену $t = 5x + 3$. Тогда $dt = 5\,dx$ и

$$\int \frac{1}{5x+3}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{t}\,dt.$$

Используем табличный интеграл III и вернемся к исходной переменной

$$\int \frac{1}{5x+3}\,dx = \frac{1}{5}\,ln\,t + C = \frac{1}{5}\,ln\,(5x+3) + C.$$

Пример 1.9. Найти интеграл

$$\int \frac{1}{(4x-7)^3}\,dx.$$

С помощью линейной замены переменной $t = 4x - 7$, $dt = 4\,dx$ получаем табличный интеграл II, имеем

$$\int \frac{1}{(4x-7)^3}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int t^{-3}\,dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{-3+1}}{(-3+1)} + C =$$
$$= -\frac{1}{8\,t^2} + C = -\frac{1}{8\,(4x-7)^2} + C.$$

Пример 1.10. Найти интеграл $\int sin(2x+6)\,dx$.

Сделаем замену $t = 2x+6$, $dt = 2\,dx$ и получим X табличный интеграл

$$\int sin(2x+6)\,dx = \frac{1}{2}\int sint\,dt = -\frac{1}{2}\,cos\,t + C = -\frac{1}{2}\,cos\,(2x+6) + C\,.$$

Пример 1.11. Найти интеграл $\int e^{3x+7}\,dx$.

Заменой $t = 3x+7$ интеграл сводится к VIII табличному интегралу, т.е.

$$\int e^{3x+7}\,dx = \frac{1}{3}\int e^t\,dt = \frac{1}{3}\,e^t + C = \frac{1}{3}\,e^{3x+7} + C.$$

Пример 1.12. Найти интеграл

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx.$$

Полагаем $t = x^2+3$, тогда $dt = 2xdx$ и $dx = \dfrac{dt}{2x}$. Подставляем в подынтегральное выражение, получаем III табличный интеграл и возвращаемся к исходной переменной x

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = ln|t| + C = ln(x^2+3) + C.$$

Пример 1.13. Найти интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{3x^2+5}}.$$

Берем подстановку $t = 3x^2+5$, имеем $dt = 6xdx$, $dx = \dfrac{dt}{6x}$, подставляем в подынтегральное выражение, интегрируем и возвращаемся к переменной x

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{3x^2+5}} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{6}\int t^{-\frac{1}{3}}\,dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}\,t^{-\frac{1}{3}+1} + C =$$
$$= \frac{1}{4}\,t^{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{4}\sqrt[3]{(3x^2+5)^2} + C.$$

Пример 1.14. Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt{1+ln\,x}}{x}\,dx.$$

Подстановка $t = 1 + ln\,x$ дает $dt = \dfrac{dx}{x}$, поэтому

$$\int \frac{\sqrt{1+ln\,x}}{x}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(1+ln\,x)^3} + C.$$

Пример 1.15. Найти интеграл

$$\int \frac{e^x dx}{4e^x+3}.$$

Положим $t = 4e^x + 3$, тогда $dt = 4e^x dx$ и $dx = \dfrac{dt}{4e^x}$. Поэтому

$$\int \frac{e^x dx}{4e^x+3} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\,ln|t| + C = \frac{1}{4}\,ln(4e^x+3) + C.$$

Пример 1.16. Найти интеграл $\int tgx\,dx$.
Так как

$$\int tgx\,dx = \int \frac{sin\,x}{cos\,x}\,dx,$$

то следует сделать следующую замену переменной $t = cos\,x$, тогда $dt = -sin\,xdx$. Следовательно

$$\int tgx\,dx = \int \frac{sin\,x}{cos\,x}\,dx = -\int \frac{dt}{t} = -ln|t| + C = -ln|cos\,x| + C.$$

Пример 1.17. Найти интеграл

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

В данной задаче целесообразно сделать замену $t = \sqrt{x}$, тогда $dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ и после подстановки имеем

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}\,e^t + C = \frac{1}{2}\,e^{\sqrt{x}} + C.$$

Пример 1.18. Найти интеграл $\int x\sqrt{x-3}\,dx$.

Для нахождения этого интеграла воспользуемся следующей заменой переменной $t = \sqrt{x-3}$, следовательно $x = t^2 + 3$ и $dx = 2tdt$. Поэтому

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx = \int (t^2+3)\,t\cdot 2t\,dt = 2\int (t^4+3t^2)\,dt = 2\Big(\frac{t^5}{5}+\frac{3t^3}{3}\Big) + C =$$
$$= \frac{2}{5}(\sqrt{x-3})^5 + 2(\sqrt{x-3})^3 + C.$$

Пример 1.19. Найти интеграл

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}.$$

В качестве новой переменной возьмем знаменатель подынтегрального выражения $t = \sqrt{x+2}$, тогда $x = t^2 - 2$ и $dx = 2\,tdt$. В результате этой замены подынтегральная функция окажется многочленом, интеграл от которого легко найти.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}} = \int \frac{t^2-2}{t}\cdot 2\,t\,dt = 2\int (t^2-2)\,dt = \frac{2}{3}\,t^3 - 4t + C =$$
$$= \frac{2}{3}\,(\sqrt{x+2})^3 - 4\sqrt{x+2} + C.$$

Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int u\,dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v\,du$. Этот метод применяют, когда интеграл $\int v\,du$ проще исходного.

Для применения формулы интегрирования по частям к интегралу $\int f(x)\,dx$ следует подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ представить в виде произведения двух сомножителей u и dv. При этом за dv всегда выбирается такое выражение, содержащие dx, из которого интегрированием можно найти v. За u в большинстве случаев принимается функция, которая при дифференцировании упрощается, например, $ln\,x$, x^n, $arcsin\,x$, $arctg\,x$.

В некоторых случаях при подсчете интеграла формулу интегрирования по частям применяют дважды.

Пример 1.20. Найти интеграл $\int ln\,x\,dx$.

Пусть $u = ln\,x$, $dv = dx$, тогда $v = x$, $du = \frac{dx}{x}$. Теперь воспользуемся формулой интегрирования по частям.

$$\int ln\,x\,dx = x\,ln\,x - \int x\frac{dx}{x} = x\,ln\,x - \int dx = x\,ln\,x - x + C = x(ln\,x - 1) + C.$$

Пример 1.21. Найти интеграл $\int arcsin\,x\,dx$.

Полагая $u = arcsin\,x$, $dv = dx$, находим $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = \int dx = x$. По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int arcsin\,x\;dx = x\;arcsin\,x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Последний интеграл подсчитаем отдельно, при этом воспользуемся заменой переменной $t = 1 - x^2$, тогда $dt = -2xdx$. Поэтому

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -t^{\frac{1}{2}} + C = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

В результате имеем

$$\int arcsin\,x\;dx = x\;arcsin\,x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 1.22. Найти интеграл

$$\int \frac{ln\,x}{x^3}\,dx.$$

Пусть $u = ln\,x$ и $dv = \dfrac{dx}{x^3}$, тогда

$$du = \frac{dx}{x}, \qquad v = \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = -\frac{1}{2x^2}.$$

Теперь воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int \frac{ln\, x}{x^3}\, dx = -\frac{ln\, x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{dx}{x} = -\frac{ln\, x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} =$$

$$= -\frac{ln\, x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C = C - \frac{1 + 2ln\, x}{4x^2}.$$

Пример 1.23. Найти интеграл $\int x\; cos\, x\, dx$.

В данном случае функцию u и dv следует выбрать следующим образом $u = x$, $dv = cos\, x\, dx$, поэтому

$$du = dx, \qquad v = \int\; cos\, x\, dx = sin\, x.$$

Интегрируем

$$\int x\; cos\, x\, dx = x\, sin\, x - \int\; sin\, x\, dx = x\, sin\, x + cos\, x + C.$$

Пример 1.24. Найти интеграл $\int x^2\; cos\, x\, dx$.

Положим $u = x^2$, $dv = cos\, x\, dx$, тогда

$$du = 2xdx, \qquad v = \int\; cos\, x\, dx = sin\, x.$$

Применим формулу интегрирования по частям, получим

$$\int x^2\; cos\, x\, dx = x^2\, sin\, x - \int\; sin\, x\; \cdot 2x\, dx = x^2\, sin\, x - 2\int x\, sin\, x\, dx.$$

Под знаком интеграла мы понизили степень x на единицу. К полученному интегралу $\int x\, sin\, x\, dx$ применим еще раз формулу интегрирования по частям. т Теперь полагаем $u = x$, $dv = sin\, x\, dx$ тогда

$$du = dx, \qquad v = \int\; sin\, x\, dx = -cos\, x$$

и

$$\int x\; sin\, x\, dx = -x\, cos\, x - \int -cos\, x\, dx = -x\, cos\, x + sin\, x + C.$$

В результате находим интеграл

$$\int x^2\; cos\, x\, dx = x^2\, sin\, x - 2\int x\, sin\, x\, dx =$$

$$= x^2\, sin\, x - 2\Big(-x\, cos\, x + sin\, x + C\Big) = x^2\, sin\, x. + 2x\, cos\, x - 2sin\, x + C$$

Пример 1.25. Найти интеграл $\int x\, arctg\, x\, dx$.
Полагая $u = arctg\, x,\ \ dv = xdx$, находим

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad v = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}.$$

По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int x\ arctg\, x\, dx = \frac{x^2}{2}\ arctg\, x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx.$$

Последний интеграл найдем отдельно

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - arctg\, x + C.$$

Окончательно имеем

$$\int x\ arctg\, x\, dx = \frac{x^2}{2}\ arctg\, x - \frac{1}{2}(x - arctg\, x + C) = \frac{x^2+1}{2}\ arctg\, x - \frac{x}{2} + C.$$

Пример 1.26. Найти интеграл $\int x\ e^x\, dx$.
Пусть $u = x$ и $dv = e^x dx$, тогда $du = dx$, $v = \int e^x\, dx = e^x$. Теперь воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int x\ e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - \ e^x + C.$$

Пример 1.27. Найти интеграл $\int x^2\ e^{3x}\, dx$.
Полжим $u = x^2$, $dv = e^{3x}\, dx$, тогда

$$du = 2xdx, \qquad v = \int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}\, d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x}.$$

По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int x^2\ e^{3x}\, dx = \frac{x^2}{3}\, e^{3x} - \frac{2}{3}\int x\ e^{3x}\, dx.$$

К последнему интегралу вновь применяем формулу интегрирования по частям. Положим $u = x$, $dv = e^{3x}\, dx$, тогда

$$du = dx, \qquad v = \int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}e^{3x}.$$

Поэтому

$$\int x\, e^{3x}\, dx = \frac{x}{3}\, e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\, dx = \frac{x}{3}\, e^{3x} - \frac{1}{9}\, e^{3x} + C.$$

В результате находим интеграл

$$\int x^2\, e^{3x}\, dx = \frac{x^2}{3}\, e^{3x} - \frac{2}{3}\int x\, e^{3x}\, dx = \frac{x^2}{3}\, e^{3x} - \frac{2}{3}\Big(\frac{x}{3}\, e^{3x} - \frac{1}{9}\, e^{3x} + C\Big) = \\ = \frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2) + C.$$

Интегрирование дробно-рациональных функций методом неопределенных коэффициентов

Интеграл от дробно-рациональной функции $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$, где $P(x)$, $Q(x)$ многочлены, можно найти, разложив подынтегральную функцию на слагаемые, которые довольно просто интегрируются, в том числе и заменой переменной.

Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя. В противном случае дробь называют неправильной. Неправильная рациональная дробь делением числителя на знаменатель представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, у которой степень числителя меньше степени знаменателя.

Правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ разложим на элементарные дроби. Если многочлен $Q(x)$ представим

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda},$$

где $a, b, \ldots, l$ – различные действительные корни многочлена, $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ – кратности корней, то имеет место разложение дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \\ + \frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}} + \ldots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \ldots + \frac{L_{\lambda}}{(x-l)^{\lambda}}.$$

Для вычисления неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, L_{\lambda}$ обе части последнего равенства умножают на

$$(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda},$$

затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x.

После разложения на элементарные дроби, интегрирование правильной рациональной дроби сводится к нахождению интегралов

$$\int \frac{dx}{x-a} = ln\,|x-a| + C,$$

и

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n} dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C.$$

Пример 1.28. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2-x-2}.$$

Подынтегральная функция является правильной дробью. Найдем корни знаменателя и разложим его на множители.

$$x^2-x-2 = (x-2)(x+1).$$

Запишем схему разложения подынтегральной дроби на сумму элементарных дробей.

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}.$$

Освободимся от знаменателей, умножив обе части равенства на

$$(x-2)(x+1).$$

Получим

$$1 = A(x+1) + B(x-2), \qquad x(A+B) + (A-2B-1) = 0.$$

Составим систему уравнений, приравнивая коэффициенты при различных степенях x нулю.

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A-2B-1=0. \end{cases}$$

Отсюда находим коэффициенты $A = \frac{1}{3}, B = \frac{-1}{3}$ и подставляем в разложение подынтегральной дроби.

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\Big).$$

Подставляя под знак интеграла полученную сумму элементарных дробей и интегрируем каждое слагаемое отдельно

$$\int \frac{dx}{x^2-x-2} = \frac{1}{3}\int \Big(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\Big)dx = \frac{1}{3}\Big(\int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x+1}\Big) =$$
$$= \frac{1}{3}\Big(ln\,(x-2) - ln\,(x+1)\Big) + C = \frac{1}{3}\,ln\,\frac{x-2}{x+1} + C.$$

Пример 1.29. Найти интеграл

$$\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}\,dx.$$

Подынтегральная функция является правильной дробью. Найдем корни знаменателя и разложим его на множители.

$$x^3+4x^2+4x = x(x^2+4x+4) = x(x+2)^2.$$

Схема разложения подынтегральной дроби на сумму элементарных дробей выглядит следующим образом

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

Умножим обе части равенства на $x(x+2)^2$, получим

$$3x^2+8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx,$$
$$(A+B-3)x^2 + (4A+2B+C)x + (4A-8) = 0.$$

Составим систему уравнений, приравнивая коэффициенты при различных степенях x нулю.

$$\begin{cases} A+B-3=0, \\ 4A+2B+C=0, \\ 4A-8=0. \end{cases}$$

Решаем эту систему и находим коэффициенты $A=2, B=1, C=-10$, подставляем в разложение подынтегральной дроби.

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2}.$$

Теперь интегрируем

$$\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}\,dx = \int\Big(\,\frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2}\,\Big)\,dx = 2\int\frac{1}{x}\,dx +$$
$$+\int\frac{1}{x+2}\,dx - 10\int(x+2)^{-2}\,dx = 2\;ln\,|x| + ln\,|x+2| + \frac{10}{x+2} + C.$$

Пример 1.30. Найти интеграл

$$\int \frac{x^4}{x^4 - 2x^2 + 1}\, dx.$$

Выделим из подынтегральной неправильной дроби целую часть, разделив числитель на знаменатель

$$\frac{x^4}{x^4 - 2x^2 + 1} = 1 + \frac{2x^2 - 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

Разложим полученную правильную дробь на элементарные дроби. Так как

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x-1)^2(x+1)^2,$$

то

$$\frac{2x^2 - 1}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}.$$

Умножим обе части равенства на $(x-1)^2(x+1)^2$, получим

$$2x^2 - 1 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2.$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ A - C + B + D = 2, \\ -A - C + 2B - 2D = 0, \\ -A + C + B + D = -1. \end{cases}$$

Решаем эту систему и находим коэффициенты $A = \frac{3}{4}, B = D = \frac{1}{4}, C = -\frac{3}{4}$, подставляем в разложение подынтегральной дроби.

$$\frac{x^4}{x^4 - 2x^2 + 1} = 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Теперь интегрируем

$$\int \frac{x^4}{x^4 - 2x^2 + 1}\, dx = \int dx + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x+1} +$$

$$+ \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x+1)^2} = x + \frac{3}{4}\, ln\,|x-1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}\, ln\,|x+1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} + C =$$

$$= \frac{3}{4}\, ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \frac{2x^3 - 3x}{2(x^2-1)} + C.$$

Найти интегралы.

1.1. $\int (7x^6 - 15x^4 + 21x^2 - 3)\,dx.$

1.2. $\int (13x^{12} - 5x^9 + 3x^5 - 3x^2 + 1)\,dx.$

1.3. $\int (3x^8 - x^5 + 12x^3 + x)\,dx.$

1.4. $\int (5x^4 - 3x^2 - 8x + 2)\,dx.$

1.5. $\int (2x - 1)^3\,dx.$

1.6. $\int (x + 2)^3\,dx.$

1.7. $\int (3x + 1)^2\,dx.$

1.8. $\int (6x - 5)^2\,dx.$

1.9. $\int \sqrt[3]{x}\,dx.$

1.10. $\int \sqrt[5]{x}\,dx.$

1.11. $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx.$

1.12. $\int \sqrt[4]{x^3}\,dx.$

1.13. $\int \left(x + \sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx.$

1.14. $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^2 dx.$

1.15. $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 dx.$

1.16. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx.$

1.17. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx.$

1.18. $\int \left(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 dx.$

1.19. $\int \left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 dx.$

1.20. $\int \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3 dx.$

1.21. $\int (2sin\, x+3cos\, x)\, dx.$

1.22. $\int (4sin\, x+cos\, x)\, dx.$

1.23. $\int (3sin\, x-cos\, x)\, dx.$

1.24. $\int (12sin\, x-5cos\, x)\, dx.$

1.25. $\int \left(1+tg^2\, x\right) dx.$

1.26. $\int ctg^2\, x\, dx.$

1.27. $\int \left(x+tg^2\, x\right) dx.$

1.28. $\int \left(2x+ctg^2\, x\right) dx.$

1.29. $\int 2^{3x+1}\, dx.$

1.30. $\int 2^{x+2}\, dx.$

1.31. $\int 3^{x-2}\, dx.$

1.32. $\int 3^{x-1}\, dx.$

1.33. $\int 5^{x+1}\, dx.$

1.34. $\int 5^{2x-1}\, dx.$

1.35. $\int \left(1+e^x\right) dx.$

1.36. $\int \left(2x+e^x\right) dx.$

1.37. $\int \frac{2^{x-2} - 5^{x+1}}{10^x}\,dx.$

1.38. $\int \frac{4^{x+1} + 3^{x-1}}{12^x}\,dx.$

1.39. $\int \frac{1}{7x-4}\,dx.$

1.40. $\int \frac{1}{3x+11}\,dx.$

1.41. $\int \frac{1}{(3x-10)^5}\,dx.$

1.42. $\int \frac{1}{(5x+8)^7}\,dx.$

1.43. $\int \sqrt[5]{4x+3}\,dx.$

1.44. $\int \sqrt[4]{6x-1}\,dx.$

1.45. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{2x+7}}\,dx.$

1.46. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{5x+9}}\,dx.$

1.47. $\int \left(1 + \sqrt[7]{5x-1}\right)dx.$

1.48. $\int \left(x + \sqrt[5]{12x+1}\right)dx.$

1.49. $\int \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{5x+9}}\right)dx.$

1.50. $\int \left(x - \frac{1}{\sqrt[6]{10x+3}}\right)dx.$

1.51. $\int sin(3x-17)\,dx.$

1.52. $\int cos(x+24)\,dx.$

1.53. $\int \left(1 - sin(6x-21)\right)dx.$

1.54. $\int \left(x + cos(3x+7)\right)dx.$

1.55. $\int tg^2\,(3x+1)\,dx.$

1.56. $\int ctg^2\,(2x-5)\,dx.$

1.57. $\int \frac{2x}{x^2+15}\,dx.$

1.58. $\int \frac{3x}{3x^2+3}\,dx.$

1.59. $\int \frac{x^2}{4x^3+15}\,dx.$

1.60. $\int \frac{x^3}{7x^4-1}\,dx.$

1.61. $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt[3]{3x^2-1}}.$

1.62. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{6x^2+5}}.$

1.63. $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt[4]{x^2+13}}.$

1.64. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{2x^2+9}}.$

1.65. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{11x^2+1}}.$

1.66. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x^2-9}}.$

1.67. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+17}}.$

1.68. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{3x^4-19}}.$

1.69. $\int \frac{ln\,x}{x}\,dx.$

1.70. $\int \frac{(ln\,x)^3}{x}\,dx.$

1.71. $\int \frac{\sqrt{1+3ln\,x}}{x}\,dx.$

1.72. $\int \frac{\sqrt{5+3\,ln\,x}}{x}\,dx.$

1.73. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2-7\,ln\,x}}{5x}\,dx.$

1.74. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3-\,ln\,x}}{2x}\,dx.$

1.75. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^x+1}.$

1.76. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^x-5}.$

1.77. $\displaystyle\int \frac{2e^x dx}{16e^x+3}.$

1.78. $\displaystyle\int \frac{3e^x dx}{12\,e^x-1}.$

1.79. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{(e^x+1)^2}.$

1.80. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{(e^x-24)^3}.$

1.81. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{(2\,e^x+3)^4}.$

1.82. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{(3\,e^x-7)^8}.$

1.83. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+4}}.$

1.84. $\displaystyle\int \frac{2\,e^x dx}{\sqrt{3\,e^x+9}}.$

1.85. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{e^x+21}}.$

1.86. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{\sqrt[5]{11\,e^x-9}}.$

1.87. $\displaystyle\int e^x(2\,e^x+13)\,dx.$

1.88. $\displaystyle\int e^x(6\,e^x+21)^2\,dx.$

1.89. $\displaystyle\int e^x(3\,e^x+17)^3\,dx.$

1.90. $\displaystyle\int e^x(25\,e^x-81)^5\,dx.$

1.91. $\int ctg\, x\, dx.$

1.92. $\int (1 + tg\, x)\, dx.$

1.93. $\int \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\, dx.$

1.94. $\int \frac{e^{2\sqrt{x}+3}}{\sqrt{x}}\, dx.$

1.95. $\int \frac{e^{\sqrt{x}+7}}{2\sqrt{x}}\, dx.$

1.96. $\int \frac{e^{2\sqrt{x}-3}}{3\sqrt{x}}\, dx.$

1.97. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx.$

1.98. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{2x^2}\, dx.$

1.99. $\int \frac{ln\, \frac{1}{x}}{x^2}\, dx.$

1.100. $\int \frac{lg\, \frac{1}{x}}{2\, x^2}\, dx.$

1.101. $\int \frac{cos\, (\frac{1}{x})}{x^2}\, dx.$

1.102. $\int \frac{sin\, (\frac{1}{x})}{2\, x^2}\, dx.$

1.103. $\int \frac{cos\, x\, dx}{\sqrt{1 + 2sin\, x}}.$

1.104. $\int \frac{sin\, x\, dx}{5\, \sqrt{cos\, x}}.$

1.105. $\int \frac{cos\, x\, dx}{(sin\, x)^2}.$

1.106. $\int \frac{sin\, x\, dx}{(cos\, x)^5}.$

1.107. $\int \frac{cos\, x\, dx}{(1 + sin\, x)^3}.$

1.108. $\int \frac{sin\, x}{5\, (1 - cos\, x)^5}\, dx.$

1.109. $\int cos\,x\,(2+\ sin\,x)^3\,dx.$

1.110. $\int sin\,x\,(1-2cos\,x)^5\,dx.$

1.111. $\int x\sqrt{x-2}\,dx.$

1.112. $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx.$

1.113. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$

1.114. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}.$

1.115. $\int x\,ln\,x\,dx.$

1.116. $\int x^2\,ln\,x\,dx.$

1.117. $\int \frac{ln\,x}{x}\,dx.$

1.118. $\int \frac{ln\,x}{x^2}\,dx.$

1.119. $\int \frac{ln\,x}{\sqrt{x}}\,dx.$

1.120. $\int \frac{ln\,x}{x^3}\,dx.$

1.121. $\int x\,ln\,(x+2)\,dx.$

1.122. $\int 3x\,ln\,(x-1)\,dx.$

1.123. $\int (x+2)\,ln\,x\,dx.$

1.124. $\int (x-1)\,ln\,x\,dx.$

1.125. $\int arccos\,x\,dx.$

1.126. $\int arctg\,x\,dx.$

1.127. $\int arcctg\,x\,dx.$

1.128. $\int x\ arcctg\, x\, dx.$

1.129. $\int x\ arccos\, x\, dx.$

1.130. $\int 5x\ arcsin\, x\, dx.$

1.131. $\int x\ sin\, x\, dx.$

1.132. $\int x^2\ sin\, x\, dx.$

1.133. $\int x\ sin\, 2x\, dx.$

1.134. $\int x\ cos\, 3x\, dx.$

1.135. $\int x^2\, e^x\, dx.$

1.136. $\int x^3\, e^x\, dx.$

1.137. $\int x\, 2^x\, dx.$

1.138. $\int x\, 3^{-x}\, dx.$

1.139. $\int x\, e^{-x}\, dx.$

1.140. $\int \frac{x^2}{e^x}\, dx.$

1.141. $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}.$

1.142. $\int \frac{dx}{x^2 - 9x + 18}.$

1.145. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 21}.$

1.146. $\int \frac{dx}{x^2 - 12x + 20}.$

1.147. $\int \frac{3x-28}{x^2+7x+6}\,dx.$

1.148. $\int \frac{5x-13}{x^2-5x+6}\,dx.$

1.149. $\int \frac{x-10}{x^2+x-2}\,dx.$

1.150. $\int \frac{3x+13}{x^2+5x+6}\,dx.$

1.151. $\int \frac{3x+23}{x^2-2x-3}\,dx.$

1.152. $\int \frac{7x+4}{x^2-x-2}\,dx.$

1.153. $\int \frac{dx}{x^3-x^2}.$

1.154. $\int \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx.$

1.155. $\int \frac{6x^2+11x+4}{x^3+3x^2+2x}\,dx.$

1.156. $\int \frac{2x^2+x+3}{x^3+2x^2-x-2}\,dx.$

1.157. $\int \frac{2x^2-7x-2}{x^3-3x^2-4x+12}\,dx.$

1.158. $\int \frac{x^4}{x^4-2x^2+1}\,dx.$

1.159. $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}\,dx.$

1.160. $\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}\,dx.$

2 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов интегрирования меняется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

3. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от слагаемых

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx.$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ –первообразная для $f(x)$, то есть, $F'(x) = f(x)$. Формула Ньютона-Лейбница сводит вычисление определенного интеграла от функции $f(x)$ к нахождению ее первоообразной $F(x)$.

Рассмотрим следующие методы интегрирования.
1. Интегрирование с применением формулы Ньютона-Лейбница.
2. Замена переменной интегрирования.
3. Интегрирование по частям.

Интегрирование с применением формулы Ньютона-Лейбница

Определенный интеграл равен разности значений неопределенного интеграла при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Пример 2.1. Найти интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx.$$

Знаяп первообразную функции $\sin x$, применяя формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$\int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos 0 - (-\cos\pi) = 2.$$

Пример 2.2. Найти интеграл

$$\int\limits_0^{1} (3x^2 + 2x - 1)\, dx.$$

Используя свойства определенного интеграла, применяя формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$\int\limits_0^{1} (3x^2 + 2x - 1)\, dx = 3\int\limits_0^{1} x^2\, dx + 2\int\limits_0^{1} x\, dx - \int\limits_0^{1} dx = x^3\Big|_0^1 + x^2\Big|_0^1 - x\Big|_0^1 = \\ = 1^3 + 1^2 - 1 = 1.$$

Пример 2.3. Найти интеграл

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx.$$

Зная первообразную функции подынтегральной функции, применяя формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Замена переменной интегрирования.

Этот метод состоит в переходе от исходной переменнной интегрирования к другой переменной. Иногда такая замена приводит к значительному упрощению подынтегрального выражения. При этом, если определенный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

преобразуется подстановкой $x = \varphi(t)$ в другой интеграл, с новой переменной интегрирования t, то прежние пределы a и b необходимо заменить новыми α, β которые определяются подстановкой, то есть, из уравнений $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Пример 2.3. Найти интеграл

$$\int\limits_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx.$$

Введем новую переменную интегрирования $t = \sqrt{1+3x}$. Отсюда находим $x = \dfrac{t^2-1}{3}$, $dx = \dfrac{2}{3}t\,dt$. Находим новые пределы интегрирования $\sqrt{1+3\cdot 0} = 1$, $\sqrt{1+3\cdot 5} = 4$. Итак, $0 \to 1$, $5 \to 4$. Подставляя, получим

$$\int\limits_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx = \frac{2}{9}\int\limits_1^4 (t^2-1)\,dt = \frac{2}{9}\Big(\frac{t^3}{3} - t\Big)\Big|_1^4 = \frac{2}{9}\Big(\frac{64-1}{3} - 4 + 1\Big) = 4.$$

Пример 2.4. Найти интеграл

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^3 x}{x}\,dx.$$

Введем новую переменную интегрирования $t = \ln x$. Отсюда находим $x = e^t$, $dt = \dfrac{dx}{x}$. Находим новые пределы интегрирования $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$. Итак, $1 \to 0$, $e \to 1$. Подставляя, получим

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^3 x}{x}\,dx = \int\limits_0^1 t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(1^4 - 0^4) = \frac{1}{4}.$$

Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a, b]$. Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int\limits_a^b u\,dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int\limits_a^b v\,du$. Этот метод применяют, когда интеграл $\int\limits_a^b v\,du$ проще исходного.

Пример 2.5. Найти интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx.$$

Для нахождения интеграла применим формулу интегрирования по частям. Полагая $u = x$, $dv = \sin x\,dx$. Отсюда находим $du = dx$, $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$. Поэтому

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = -(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 0\cos 0) + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -(0 - 0) + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Пример 2.6. Найти интеграл

$$\int\limits_1^e ln\,x\,dx.$$

Применим формулу интегрирования по частям. Пусть $u = ln\,x$, $dv = dx$, тогда $v = x$, $du = \dfrac{dx}{x}$. Теперь воспользуемся формулой интегрирования по частям.

$$\int\limits_1^e ln\,x\,dx = x\,ln\,x\Big|_1^e - \int\limits_1^e x\frac{dx}{x} = x\,ln\,x\Big|_1^e - \int\limits_1^e dx =$$

$$= (e\,ln\,e - 1\,ln\,1) - x\Big|_1^e = (e - 0) - (e - 1) = 1.$$

Пример 1.22. Найти интеграл

$$\int\limits_1^e \frac{ln\,x}{x^3}\,dx.$$

Пусть $u = ln\,x$ и $dv = \dfrac{dx}{x^3}$, тогда

$$du = \frac{dx}{x}, \qquad v = \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = -\frac{1}{2x^2}.$$

Теперь воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int\limits_1^e \frac{ln\,x}{x^3}\,dx = -\frac{ln\,x}{2x^2}\Big|_1^e - \int\limits_1^e -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{dx}{x} = -\frac{ln\,x}{2x^2}\Big|_1^e + \frac{1}{2}\int\limits_1^e \frac{dx}{x^3} =$$

$$= -\frac{ln\,x}{2x^2}\Big|_1^e - \frac{1}{4x^2}\Big|_1^e = -\frac{1+2ln\,x}{4x^2}\Big|_1^e = -\Big(\frac{1+2ln\,e}{4e^2} - \frac{1+2ln\,1}{4\cdot 1^2}\Big) =$$

$$= -\Big(\frac{3}{4e^2} - \frac{1}{4}\Big) = \frac{e^2-3}{4e^2}.$$

Найти интегралы.

$$2.1. \int_1^2 (4x^3 - 15x^2 + 21x^2 - 1)\,dx.$$

$$2.2. \int_0^3 (3x^2 - 5x + 3)\,dx.$$

$$2.3. \int_0^1 (3x^8 - x^5 + 12x^3 + x)\,dx.$$

$$2.4. \int_0^1 (5x^4 - 3x^2 - 8x + 2)\,dx.$$

$$2.5. \int_5^7 (2x - 1)\,dx.$$

$$2.6. \int_1^2 (x + 2)^3\,dx.$$

$$2.7. \int_1^2 (3x + 1)^2\,dx.$$

$$2.8. \int_1^2 (6x - 5)^2\,dx.$$

$$2.9. \int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx.$$

$$2.10. \int_1^8 \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{2x}\right) dx.$$

$$2.11. \int_1^8 \sqrt[3]{x^2}\,dx.$$

$$2.12. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx.$$

2.13. $\displaystyle\int\limits_1^2 \left(x + \sqrt[3]{x^2}\right) dx.$

2.14. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx.$

2.15. $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{1}{x} \, dx.$

2.16. $\displaystyle\int\limits_1^8 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx.$

2.17. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \, dx.$

2.18. $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{\ln^5 x}{x} \, dx.$

2.19. $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{\ln^4 x + \ln^2}{x} \, dx.$

2.20. $\displaystyle\int\limits_1^8 \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{2x}\right) dx.$

2.21. $\displaystyle\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x^2} \, dx.$

2.22. $\displaystyle\int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx.$

2.23. $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx.$

2.24. $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{\sqrt[4]{1 + \ln x}}{x} \, dx.$

$$2.25.\ \int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx.$$

$$2.26.\ \int\limits_0^1 xe^{x}\,dx.$$

$$2.27.\ \int\limits_0^1 xe^{-2x}\,dx.$$

$$2.28.\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx.$$

$$2.29.\ \int\limits_0^{\pi} x\cos x\,dx.$$

$$2.30.\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin x\,dx.$$

$$2.31.\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (x+3)\sin 2x\,dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малугин В.А.Математика для экономистов: Линейная алгебра. Задачи и упражнения. М.: Эксмо, 2006. 175с.

2. Малугин В.А.Математика для экономистов: Математический анализ. Курс лекций. М.: Эксмо, 2006. 265с.

3. Данко П. Е. , Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. М.: Высшая школа, 1980. 320 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1,2. -М.: Наука, 1968г.