ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского»

ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

О.В. Сорокина

Учебное пособие для студентов нематематических направлений подготовки

Саратов 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с Федеральным Государственным образовательным стандартом высшего образования и программой курса «Математика» для студентов Института химии СГУ.

Курс «Математика» является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной. Ее изучение предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач;
- овладение основными приемами дифференцирования функций;
- выработку умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

Цель пособия – помочь студентам Института химии СГУ освоить основные методы дифференцирования функций одной переменной и получить практические навыки при решении типовых задач по данной теме.

В пособии рассматриваются вопросы вычисления производных функций одной независимой переменной, заданной в различных формах, а также основные приложения дифференциального исчисления в геометрии и механики. Подробное содержание приведено в оглавлении. В пособии кратко изложены необходимые теоретические сведения и формульные соотношения, основной материал иллюстрируют многочисленные примеры. Приведены задачи для самостоятельного решения. Самостоятельное решение этих задач позволит студентам освоить методику дифференцирования и будет способствовать лучшему пониманию пройденного материала. Ответы к задачам помогут проконтролировать правильность их решения.

Пособие может быть полезно при изучении данной темы студентами нематематических направлений подготовки, изучающих высшую математику.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Интервал, отрезок, промежуток

Если a и b – действительные числа и a меньше b $(a<b)$, то совокупность всех действительных чисел x, подчиняющихся условию $a<x<b$, образует *интервал*. Левым концом интервала является число a, а правым концом – число b. Обозначается интервал символом (a,b).

С геометрической точки зрения интервал (a,b) представляет собой совокупность всех точек прямой, находящихся между точками a и b, причем концы этого отрезка в интервал не включаются.

На рис.1.1 представлен интервал (a,b). Кружки показывают, что точки a и b не принадлежат интервалу (a,b).

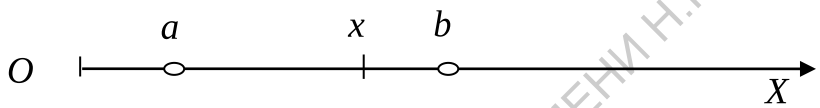

Рис.1.1

Если к интервалу (a,b) присоединить числа a и b, то получим *отрезок*, который обозначается символом $[a,b]$. Таким образом, под отрезком $[a,b]$ понимается совокупность всех действительных чисел x, удовлетворяющее неравенству $a \le x \le b$.

На рис.1.2 представлен отрезок $[a,b]$.

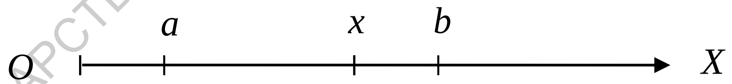

Рис.1.2

Под символом $[a,b)$ $((a,b])$ следует понимать множество всех действительных чисел x, подчиняющихся условию $a \le x < b$ $(a < x \le b)$, т. е. рассматриваются все действительные числа, содержащиеся между числами a и b, причем число a к ним присоединяется, а число b – нет (число b к ним присоединяется, а число a – нет).

$[a,b)$ и $(a,b]$ называют *полуотрезками*. На рис. 1.3 представлен полуотрезок $[a,b)$, а на рис. 1.4 – полуотрезок $(a,b]$.

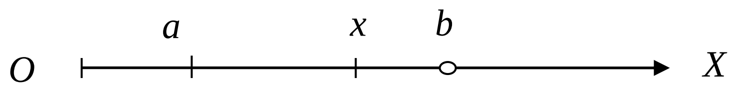

Рис.1.3

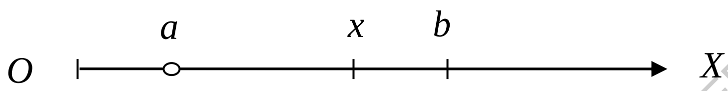

Рис.1.4

В том случае, когда безразлично, принадлежат ли граничные точки a и b рассматриваемым множествам чисел или нет, вместо терминов «интервал» и «отрезок» употребляется термин «промежуток».

Совокупность всех действительных чисел обозначается в виде интервала $(-\infty,+\infty)$.

Совокупность всех действительных чисел x, больших, чем a, записывается в виде $a<x<+\infty$, или $(a,+\infty)$.

Совокупность всех действительных чисел x, не меньших, чем a, записывается в виде $a\le x<+\infty$, или $[a,+\infty)$.

Запись $-\infty<x<b$ или $(-\infty,b)$ означает, что рассматриваются все действительные числа x, меньше числа b, а запись $-\infty<x\le b$ или $(-\infty,b]$ означает, что рассматривается совокупность действительных чисел x, не больших числа b.

Интервалы, включающие знаки $-\infty,\ +\infty$ называются *бесконечными*.

1.2. Абсолютная величина числа и ее свойства

Пусть a – действительное число. Если a положительно или равно нулю ($a\ge 0$), то его *абсолютной величиной* называется оно само, а если a отрицательно ($a<0$), то его *абсолютной величиной* называется число $-a$.

Абсолютная величина числа a обозначается символом $|a|$.

Таким образом, $|a|=\begin{cases} a, & a>0; \\ 0, & a=0; \\ -a, & a<0. \end{cases}$

Если $|x| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, то это означает, что x удовлетворяет неравенствам: $-\varepsilon < x < +\varepsilon$.

Если $|x| > \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, то это означает, что x удовлетворяет неравенствам: $\left[\begin{array}{l} x < -\varepsilon; \\ x > +\varepsilon. \end{array}\right.$

Эквивалентные неравенства (при $\varepsilon > 0$)

$$x^2 < \varepsilon^2 \leftrightarrow |x| < \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon < x < +\varepsilon,$$

определяют интервал, симметричный относительно нуля.

Примеры.

1. Если $a = 7 > 0$, то $|a| = |7| = 7$. Если $a = -5 < 0$, $|a| = |-5| = -(-5) = 5$.■

2. Если $|a| < 3$, то имеют место неравенства $-3 < x < +3$.■

3. Если $|x| \le \dfrac{\pi}{2}$, то x удовлетворяет неравенствам $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le +\dfrac{\pi}{2}$.■

4. Если $x^2 < 16$, то $|x| < 4$ и x удовлетворяет неравенствам $-4 < x < 4$.■

<u>Свойства абсолютных величин</u>

1°. $|x + y| \le |x| + |y|$, причем знак равенства имеет место только в том случае, когда все слагаемые имеют один и тот же знак.

2°. $|x - y| \ge |x| - |y|$.

3°. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

4°. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Примеры.

1. Определить числовую величину выражения $\left|\dfrac{2x+5}{7-2x^2}\right|$ при $x = 2$.

Решение.

При $x = 2$

$$\left|\frac{2x+5}{7-2x^2}\right| = \left|\frac{2\cdot 2+5}{7-2\cdot 2^2}\right| = \left|\frac{4+5}{7-8}\right| = \left|\frac{9}{-1}\right| = |-9| = 9.■$$

2. Определить, при каких значениях x будет справедливо неравенство $|x-3|<2$.

Решение.

Данное неравенство может быть записано в виде: $-2<x-3<2$. К каждой части этих неравенств прибавим по 3 и получим $-2+3<x<2+3$, откуда следует, что $1<x<5$. Таким образом, неравенство выполняется для всех значений x из интервала $(1,5)$.■

3. Определить, при каких значениях x выполняется неравенство $|x-a|<\varepsilon$.

Решение.

Поступая аналогично предыдущей задаче, получаем, что $-\varepsilon<x-a<\varepsilon$, а отсюда, прибавляя a к каждой части этих неравенств, имеем $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$. Следовательно, исходное неравенство выполняется для всех значений x из интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.■

4. Определить, при каких значениях x выполняется неравенство $|x+1|>3$.

Решение.

Из того, что $|x+1|>3$, следует, что $x+1<-3$ и $x+1>3$. Тогда $x<-4$ и $x>2$.■

5. При каких действительных значениях x корень $\sqrt{9-x^2}$ будет иметь действительные значения?

Решение.

Корень $\sqrt{9-x^2}$ будет иметь действительные значения, если подкоренное выражение не является отрицательным, т.е. когда $9-x^2\geq 0$, а $x^2\leq 9$. Тогда то $|x|\leq 3$ и x удовлетворяет неравенствам $-3\leq x\leq 3$.■

1.3. Функция одной независимой переменной

Под *постоянной величиной* понимается величина, не изменяющая своего числового значения в условиях данной задачи.

Постоянные величины разделяются на *абсолютные постоянные* величины и *параметры*.

Величина, которая сохраняет одно и то же значение при всех условиях, называется *абсолютной постоянной* величиной (примерами являются все числа, число π, скорость света в вакууме и т.д.).

Параметром называется такая постоянная величина, которая лишь в условиях данной задачи (данного исследования) сохраняет постоянное, вполне определенное числовое значение, но с изменением условий задачи принимает уже другое, хотя и определенное числовое значение.

Под *переменной величиной* понимается величина, которая изменяет свое числовое значение в условиях данной задачи.

Множество значений переменной величины называется *областью ее изменения*.

Две переменные величины называются *независимыми*, если значения, принимаемые одной из них, не зависят от значений, принимаемых другой. Например, в формуле для определения объема цилиндра $V = \pi R^2 H$ величины R и H – независимые переменные, так как значения, принимаемые высотой H цилиндра, не зависят от значений R, которые принимает радиус цилиндра.

Если известен закон, по которому значению переменной x, взятому из области ее изменения, ставится в соответствие единственное значение переменной y, то говорят, что y есть *функция* от x и обозначают

$$y = f(x) \quad \text{или} \quad y = y(x). \qquad (1.1)$$

Здесь x – независимая переменная или *аргумент*, y – зависимая переменная или функция. Символы $f(x)$ или $y(x)$ обозначают закон соответствия между x и y.

При такой зависимости считается, что функция задана *явно*.

Понятие функциональной зависимости широко используется при решении практических задач естествознания.

Примеры.

1. Если переменную величину «время» обозначить буквой t, а количество вещества, возникшего в результате некоторой реакции за время t обозначить Q, то функция $Q = Q(t)$ будет определять зависимость этого количества от времени.

2. Если t - время, а q - количество электричества, протекающего через сечение проводника в единицу времени, то функция $q = q(t)$ будет определять функциональную зависимость.

3. Если T - температура нагреваемого тела, а t - время, то функция $T = T(t)$ будет определять зависимость температуры от времени нагревания.

4. Согласно закону Бойля-Мариотта, в изотермическом процессе $pV = C$, где p – давление газа, а V – занимаемый объем. Здесь величины p, V – переменные, а величина C – параметр, так как она сохраняет постоянное значение только для данного газа и для данной температуры.■

Способ задания функции в виде (1.1) называется *аналитическим*.

Частным значением функции называется то ее значение, которое соответствует частному значению аргумента $x = x_0$. Для обозначения частного значения функции при $x = x_0$ используется символ $f(x_0)$ или $y(x_0)$.

Примеры.

1. Дана функция $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Вычислить: $f(-2)$, $f(0)$, $f(-x)$.

Решение.

$f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 1 = 3 \cdot 4 + 4 - 1 = 12 + 4 - 1 = 15.$

$f(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = -1.$

$f(-x) = 3 \cdot (-x)^2 - 2 \cdot (-x) - 1 = 3x^2 + 2x - 1.$■

2. Дана функция $\varphi(x) = \dfrac{5x+1}{2-x}$. Найти: $\varphi(3x)$, $3\varphi(x)$, $\varphi(x^3)$, $[\varphi(x)]^3$.

Решение.

В данном примере следует отличать $\varphi(3x)$ от $3\varphi(x)$ и $\varphi(x^3)$ от $[\varphi(x)]^3$.

$$\varphi(3x) = \frac{5 \cdot (3x) + 1}{2 - (3x)} = \frac{15x + 1}{2 - 3x}.$$

$$3\varphi(x) = 3 \cdot \frac{5x+1}{2-x} = \frac{15x+3}{2-x}.$$

$$\varphi(x^3) = \frac{5 \cdot (x^3) + 1}{2 - (x^3)} = \frac{5x^3 + 1}{2 - x^3}.$$

$$[\varphi(x)]^3 = \left(\frac{5x+1}{2-x}\right)^3 = \frac{(5x+1)^3}{(2-x)^3} = \frac{125x^3 + 75x^2 + 15x + 1}{8 - 12x + 6x^2 - x^3}.■$$

Если функция задана аналитически, то *областью существования функции* (*областью определения функции*) называется совокупность тех действительных значений аргумента, при которых аналитическое выражение, определяющее функцию, не теряет числового смысла и принимает только действительные значения. Обозначается $D(f)$.

Область определения функции в простейших случаях представляет собой: интервал, отрезок, полуотрезок, бесконечный интервал, совокупность нескольких интервалов или отрезков.

Область определения функции называется *симметричной*, если вместе с числом x этой области принадлежит и число $-x$.

Геометрически это значит, что область определения функции расположена симметрично относительно начала координат.

Совокупность действительных значений самой функции называется *множеством значений функции.* Обозначается $E(f)$.

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

1) *степенная* функция $y = x^a$, где a – действительное число;

2) *показательная* функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$;

3) *логарифмическая* функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$;

4) *тригонометрические* функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$;

5) *обратные тригонометрические* функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

Элементарными функциями называются функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций (т.е. формирования сложных функций), примененных конечное число раз.

Примеры.

1. Найти область существования функций:

$$a)\ y = 3x^2 - 2x - 1;\ b)\ y = \frac{5}{1-x};\ c)\ y = \frac{x-1}{x^2 - 7x + 12};\ d)\ y = \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x + 1}.$$

Решение.

a) Функция $y = 3x^2 - 2x - 1$ – целая рациональная функция. Она существует при любом действительном значении аргумента x и, следовательно, ее областью существования является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Область определения является симметричной.■

b) Функция $y = \dfrac{5}{1-x}$ – дробная рациональная функция. Она существует при всех значениях независимой переменной x, кроме тех, которые обращают в ноль ее знаменатель, т. е. в данном случае кроме $x = 1$. Таким образом, область существования этой функции состоит из объединения двух бесконечных интервалов: $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Область определения не является симметричной. ■

c) Функция $y = \dfrac{x-1}{x^2 - 7x + 12}$ – дробная рациональная функция. Она определена при всех значениях независимой переменной x, кроме тех, при которых знаменатель $x^2 - 7x + 12 = 0$. Решив квадратное уравнение, находим эти значения: $x = 3$ и $x = 4$. Таким образом, область существования этой функции состоит из объединения трех интервалов: $(-\infty,\ 3)\cup(3,\ 4)\cup(4,\ +\infty)$.■

d) Знаменатель функции $y=\dfrac{2x^3-1}{x^2+x+1}$ не имеет действительных корней, поэтому данная функция определена при всех действительных значениях x. Ее областью существования является бесконечный интервал $(-\infty,\ +\infty)$.■

2. Найти область определения функций:

$a)\ y=\sqrt{2-x}$; $b)\ y=\dfrac{5}{\sqrt{x+4}}$; $c)\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-3}}$.

Решение.

a) Для того чтобы функция y принимала только действительные значения, величина $2-x$, стоящая под корнем, не должна принимать отрицательных значений, т.е. $2-x\geq 0$, откуда $x\leq 2$. Таким образом, областью определения функции является совокупность действительных значений x, меньших или равных 2, т.е. полуотрезок $(-\infty, 2]$. Область определения не является симметричной.■

b) В представление функции входит квадратный корень. Выражение $\sqrt{x+4}$ принимает действительные значения, когда $x+4\geq 0$, т.е. когда $x\geq -4$. Но при $x=-4$ знаменатель дроби обращается в нуль, дробь теряет числовой смысл, а потому $x=-4$ не может входить в область определения функции. Значит, функция существует при $x>-4$ и область определения представляет собой бесконечный интервал $(-4,\ +\infty)$.■

c) В представление функции $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-3}}$ входит корень 3-ей степени, который принимает действительные значения при всех значениях подкоренного выражения. Так как корень находится в знаменателе, то при определении области существования функции следует исключить те значения x, при которых знаменатель равен нуль, т.е. $x=3$. Тогда область определения будет состоять из объединения двух бесконечных интервалов: $(-\infty,\ 3)\cup(3,\ +\infty)$.■

3. Найти область определения функций:

$a)\ y=\sqrt{x^2-1}$; $b)\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}}$; $c)\ y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; $d)\ y=\sqrt{(x-2)(x+3)}$.

Решение.

a) Для того чтобы функция $y=\sqrt{x^2-1}$ принимала только действительные значения, необходимо, чтобы $x^2-1\geq 0$, т.е. $x^2\geq 1$.

Это неравенство выполняется когда $x \le -1$ и $x \ge 1$. Таким образом, область определения функции состоит из двух полуотрезков: $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$.■

b) Функция $y = \dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}}$ содержит корень квадратный, который находится в знаменателе и, следовательно, не может быть равным нулю. Таким образом, область определения функции получим, решив неравенство: $5 - x^2 > 0 \leftrightarrow x^2 - 5 < 0 \leftrightarrow x^2 < 5 \leftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$. Отсюда получаем, что областью определения функции является интервал $\left(-\sqrt{5},\ \sqrt{5}\right)$.■

c) Функция $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ будет принимать действительные значения, когда подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $\dfrac{x+1}{x-1} \ge 0$. Для определения тех значений x, при которых это имеет место, следует решить системы неравенств (или воспользоваться методом интервалов):

$$\begin{cases} x+1 \le 0, \\ x-1 < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+1 \ge 0, \\ x-1 > 0. \end{cases}$$

Решение этих систем неравенств: $x \le -1$ и $x > 1$. Тогда областью определения функции является полуотрезок $(-\infty,-1]$ и интервал $(1,+\infty)$, т.е. $D(f) = (-\infty,-1] \cup (1,+\infty)$.■

d) Функция $y = \sqrt{(x-2)(x+3)}$ будет принимать действительные значения, когда подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $(x-2)(x+3) \ge 0$. Для определения тех значений x, при которых это имеет место, следует решить системы неравенств (или воспользоваться методом интервалов):

$$\begin{cases} x-2 \le 0, \\ x+3 \le 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ x+3 \ge 0. \end{cases}$$

Решение этих систем неравенств: $x \le -3$ и $x \ge 2$. Тогда областью определения функции являются два полуотрезка $(-\infty,-3]$ и $[2,+\infty)$, т.е. $D(f) = (-\infty,-3] \cup [2,+\infty)$.■

4. Найти область определения функций:

a) $y = \lg(2-x)$; b) $y = \sin(2x+3)$; c) $y = \arcsin(5x-8)$; d) $y = tg2x$.

Р е ш е н и е.

a) Для того чтобы функция $y = \lg(2-x)$ принимала только действительные значения, необходимо, чтобы $2 - x > 0$, т.е. $x < 2$. Таким образом, область определения функции интервал: $(-\infty,2)$.■

b) Функция $y = \sin x$ определена при любом значении аргумента x. Значит, выражение $2x+1$ может принимать любое значение. Таким образом, областью определения функции является бесконечный интервал: $(-\infty, +\infty)$.■

c) Областью существования функции $y = \arcsin x$ является отрезок $[-1, +1]$, то есть $-1 \le x \le 1$. Поэтому область существования функции $y = \arcsin(5x-8)$ может быть найдена из неравенств: $-1 \le 5x - 8 \le 1; \Leftrightarrow 7 \le 5x \le 9; \Leftrightarrow \frac{7}{5} \le x \le \frac{9}{5}$. Таким образом, $D(f) = \left[\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right]$.■

d) Функция $y = tgx$ определена при всех действительных значениях x, кроме $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k – любое целое число. Тогда функция $y = tg2x$, определена при $2x \ne (2k+1)\frac{\pi}{2}$, или $x \ne (2k+1)\frac{\pi}{4}$. Таким образом, область определения функции $y = tg2x$ состоит из всех действительных чисел, кроме значений $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$, где k – любое целое число.■

5. Найти множество значений функций:

a) $y = x^2 - 6x + 5$; b) $y = 2 + 3\sin x$.

Решение.

a) Выделяя из квадратного трехчлена полный квадрат, получим $y = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x-3)^2 - 4$. Первое слагаемое при всех действительных значениях x является неотрицательным числом, поэтому функция принимает значения, не меньшие -4. Таким образом, множество значений функции: $E(f) = [-4, +\infty)$.■

b) Функция $y = \sin x$ принимает значения, не превосходящие по модулю единицы: $|\sin x| \le 1$, или $-1 \le \sin x \le 1$. Умножив все части неравенства на 3 и прибавляя к ним по 2, получим $-3 \le 3\sin x \le 3, \Leftrightarrow -1 \le 2 + 3\sin x \le 5$. Следовательно, $E(f) = [-1, 5]$.■

1.4. График функции одной независимой переменной

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости xOy с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

При построении графиков функции применяются следующие приемы: построение «по точкам»; действия с графиками (сложение, вычитание, умножение); преобразование графиков (сдвиг, растяжение).

Для построения графика функции $y = f(x)$ «по точкам» поступают так: дают аргументу x несколько частных значений и, пользуясь аналитическим выражением функции, вычисляют соответствующие значения функции. Если, например, взяты значения аргумента $x = x_1;\ x = x_2; \ldots x = x_n$, то соответствующими им значениями функции будут $y_1 = f(x_1);\ y_2 = f(x_2); \ldots y_n = f(x_n)$. После этого берут прямоугольную систему координат, выбирают масштабную единицу и строят точки: $M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2), \ldots M_n(x_n, y_n)$. Полученные точки соединяют плавной линией. Эта кривая дает *эскиз* графика.

Исходя из графика функции $y = f(x)$, можно построить графики функций:

a) $y = f(x + c)$. Первоначальный график сдвинуть вдоль оси Ox на c единиц масштаба вправо, если $c < 0$, и влево, если $c > 0$;

b) $y = f(x) + B$. Первоначальный график сдвинуть вдоль оси Oy на B единиц масштаба вверх, если $B > 0$, и вниз, если $B < 0$;

c) $y = Af(x)$. Первоначальный график растянуть в A раз вдоль оси Oy (т.е умножить все его ординаты на A при сохранении величин соответствующих абсцисс);

d) $y = f(kx),\ k > 0$. Первоначальный график растянуть в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси Ox (т.е умножить все его абсциссы на $\frac{1}{k}$ при сохранении величин соответствующих ординат).

Применяя последовательно эти приемы, можно, зная график функции $y = f(x)$, построить график более сложной функции вида

$$y = Af(kx + c) + B.$$

Прежде чем приступить к построению графика функции, полезно рассмотреть некоторые свойства функции.

Функция $y = f(x)$, область определения $D(f)$ которой симметрична относительно нуля, называется *четной* (*нечетной*), если для любого значения $x \in D(f)$ выполняется равенство: $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

График четной функции расположен симметрично оси Oy, график нечетной функции – относительно начала координат.

Необходимо уяснить, что функция не обязательно должна быть либо четной, либо нечетной.

П р и м е р ы.

Выяснить, является ли функция четной или нечетной.

1. $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$; 2. $y=x^2\sqrt[3]{x}+2\sin x$; 3. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Р е ш е н и е.

1. Область определения функции $D(f)=(-\infty,+\infty)$ симметрична относительно начала координат. Заменяя x на $-x$, получим $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{x^2}{1+x^2}=f(x)$, то есть $f(-x)=f(x)$. Значит, данная функция четная.■

2. Область определения функции $D(f)=(-\infty,+\infty)$ симметрична относительно начала координат. Заменяя x на $-x$, получим $f(-x)=(-x)^2\sqrt[3]{(-x)}+2\sin(-x)=-x^2\sqrt[3]{x}-2\sin x=-\left(x^2\sqrt[3]{x}+2\sin x\right)=-f(x)$. Следовательно, данная функция нечетная.■

3. Область определения функции $D(f)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Вычислим $f(-x)$: $f(-x)=\dfrac{-x+1}{-x-1}=\dfrac{x-1}{x+1}$. Таким образом, $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, т.е. заданная функция не является ни четной, ни нечетной.■

Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T>0$, что для всех значений $x\in D(f)$ выполняется равенство

$$f(x)=f(x+kT), \tag{1.2}$$

где $k=\pm1;\pm2;\pm3;\ldots$

Из определения периодической функции следует, что если $x\in D(f)$, то области определения $D(f)$ принадлежат также точки $x+kT$, где $k=\pm1;\pm2;\pm3;\ldots$

Числа вида kT, $k=\pm1;\pm2;\pm3;\ldots$ в (1.2) называют *периодом функции*.

Число T, обладающее свойством (1.2), называется *основным периодом функции*.

Построение графика периодической функции облегчается тем, что можно ограничиться построением его части только для тех точек области определения функции, которые находятся на полуотрезках $[x_0,x_0+T)$ или $(x_0,x_0+T]$, где $x_0\in D(f)$, и последующим периодическим повторением построенной части графика.

Основным периодом тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$ является $T = 2\pi$.

Основным периодом тригонометрических функций $y = tgx$, $y = ctgx$ является $T = \pi$.

Примеры.

Найти основные периоды функций.

1. $y = \cos 8x$. 2. $y = \sin 6x + tg 4x$.

Решение.

1. Так как основной период функции $\cos x$ равен 2π, то основной период функции $\cos 8x$ равен $\frac{2\pi}{8}$, т.е. $\frac{\pi}{4}$.■

2. Здесь для первого слагаемого основной период равен $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, а для второго он равен $\frac{\pi}{4}$. Очевидно, что основной период данной функции есть наименьшее общее кратное чисел $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{4}$, т.е. π.■

Функции могут обладать свойствами, полезными в практическом применении.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей в интервале* (a, b), если для любых двух точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (рис. 1.5).

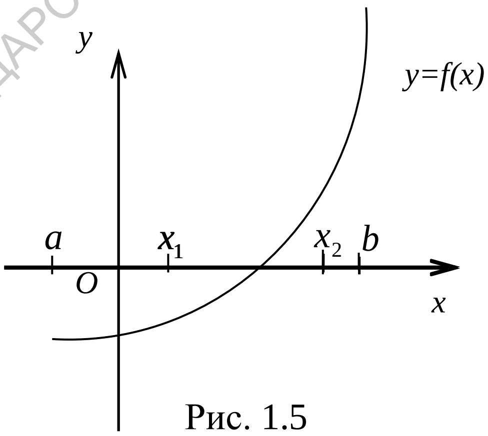

Рис. 1.5

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей в интервале* (a,b), если для любых двух точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (рис. 1.6).

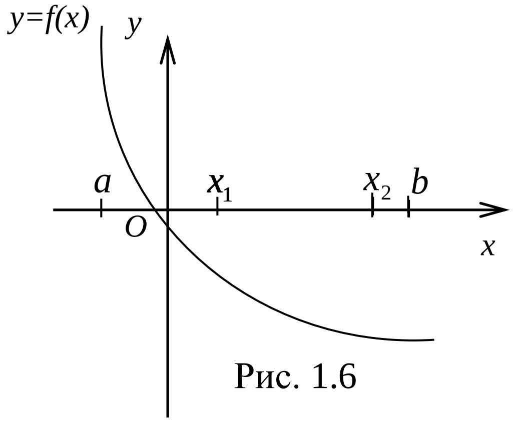

Рис. 1.6

Точка $x_0 \in (a,b)$ называется *точкой минимума функции* $y = f(x)$, если при любом достаточно малом $h > 0$, выполняется неравенство $f(x_0 - h) > f(x_0)$ и $f(x_0 + h) < f(x_0)$.

Точка $x_0 \in (a,b)$ называется *точкой максимума функции* $y = f(x)$, если при любом достаточно малом $h > 0$, выполняется неравенство $f(x_0 - h) < f(x_0)$ и $f(x_0 + h) > f(x_0)$.

Значение функции $y = f(x)$ в точках минимума (максимума) называются *минимумом(максимумом) функции* или *экстремумом функции* (рис. 1.7): $\max\limits_{(a,b)} f(x) = f(x_1)$; $\min\limits_{(a,b)} f(x) = f(x_2)$.

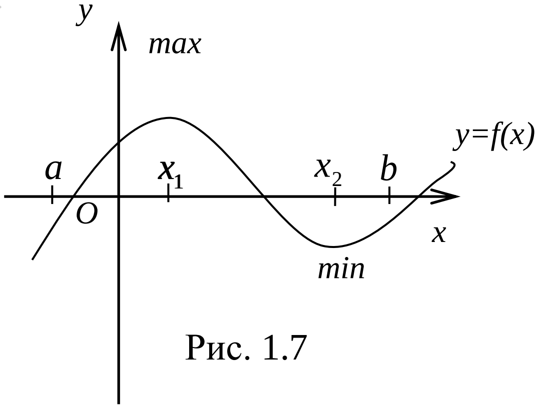

Рис. 1.7

Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой в интервале* (a,b), если график этой функции расположен ниже касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис. 1.8).

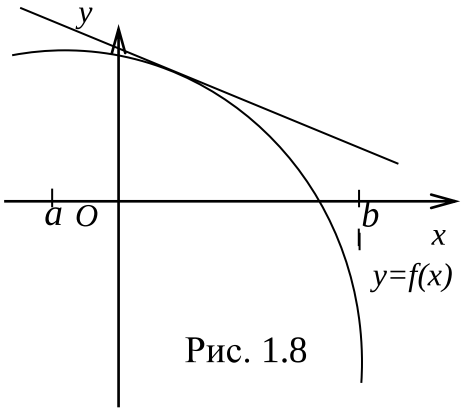

Рис. 1.8

Функция $y = f(x)$ называется *вогнутой в интервале* (a,b), если график этой функции расположен выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис. 1.9).

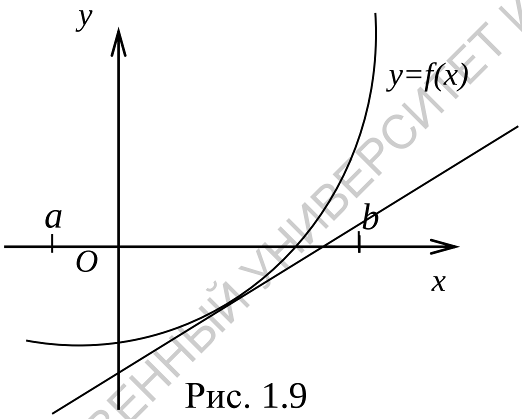

Рис. 1.9

Точка $x_0 \in (a,b)$ называется *точкой перегиба функции* $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 оси абсцисс, в пределах которой функция $y = f(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные направления выпуклости (рис. 1.10).

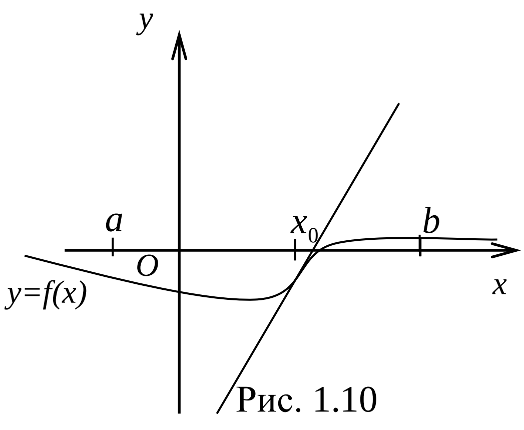

Рис. 1.10

1.5. Предел функции одной независимой переменной

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x, стремящемся к a ($x \to a$), если для любого, сколь угодно малого, наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для всех значений x, входящих в область определения функции, отличных от a и удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

В определении предела функции следует обратить внимание на то, что вовсе не требуется, чтобы функция $f(x)$ была непременно определена в точке a. Для того чтобы функция $f(x)$ имела возможность стремиться к пределу при $x \to a$, необходимо лишь, чтобы в области ее существования были точки, как угодно близкие к a и отличные от a.

Если $x \to a$ и $x < a$, то используют запись $x \to a - 0$.

Если $x \to a$ и $x > a$, то используют запись $x \to a + 0$.

Числа $f(a - 0) = \lim\limits_{x \to a - 0} f(x)$ и $f(a + 0) = \lim\limits_{x \to a + 0} f(x)$ называются соответственно *левосторонним и правосторонним пределами функции* $f(x)$ в точке a.

Для существования предела функции $f(x)$ при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы $f(a - 0) = f(a + 0)$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0. \tag{1.3}$$

Функция $\varphi(x)$ обратная бесконечно малой функции $f(x)$, называется *бесконечно большой*. В этом случае пишут

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \infty \quad (\lim_{x \to a} \varphi(x) = +\infty, \text{ или } \lim_{x \to a} \varphi(x) = -\infty). \tag{1.4}$$

Функция $f(x)$ называется *ограниченной* при $x \to a$, если существует такое число $M > 0$, что для всех x из окрестности числа a выполняется неравенство $|f(x)| \le M$.

<u>Свойства бесконечно малых функций</u>

1◦. Если функция $f(x)$ бесконечно мала при $x \to a$, то и $-f(x)$ также бесконечно мала при $x \to a$.

2◦. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ бесконечно малы при $x \to a$, то сумма их, а также и разность их: $f_1(x) + f_2(x)$ и $f_1(x) - f_2(x)$ бесконечно малы при $x \to a$.

3◦. Если функция $f(x)$ бесконечно мала при $x \to a$, а функция $g(x)$ – ограничена, то их произведение $f(x)g(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

Свойства бесконечно больших функций

1◦. Если при $x \to a$, функция $f(x)$ имеет конечный предел ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$), а функция $\varphi(x)$ – бесконечно большая ($\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$), то их сумма является бесконечно большой функцией, т.е.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) + \varphi(x)\right] = \infty,$$

а предел отношения $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.

2◦. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b\ (b > 0)$, а $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, причем $g(x) > 0$ в окрестности точки a, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

3◦. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $k > 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\left[kf(x)\right] = +\infty$.

4◦. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right] = \infty$.

Теоремы о предельном переходе

Если существуют пределы при $x \to a$ функций $f(x)$ и $g(x)$, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = d$, то

1. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = c \pm d$.
2. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x) = c\cdot d$.
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{c}{d}$ $\quad(\lim\limits_{x\to a} g(x) = d \neq 0)$.
4. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^k = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^k = c^k$, где $k - const$.
5. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = c^d$.
6. $\lim\limits_{x\to a}\left[\log_b f(x)\right] = \log_b\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right] = \log_b c$ $\quad(\lim\limits_{x\to a} f(x) = c > 0)$.

При вычислении пределов полезно иметь в виду равенство:

$$a^m - b^m = (a-b)\left(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}\right). \tag{1.5}$$

Полагая здесь $a = x$, а $b = 1$, получим

$$x^m - 1 = (x-1)\left(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1\right). \tag{1.6}$$

П р и м е р ы.

Найти предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$. 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$. 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-5}{x^2-7x+12}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+5}{3x^3+x-1}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$. 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$. 9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 2}4^{\frac{2x}{x+1}}$. 11. $\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{3x}{x+2}}$. 12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}}$. 13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{\frac{2x-1}{x+2}}$.

Р е ш е н и е.

1. При вычислении предела в аналитическом выражении функции заменим аргумент x его предельным значением

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}=\left[\frac{2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-3}{3\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)-15}\right]=\left[\frac{4}{-8}\right]=\left[-\frac{1}{2}\right]=-\frac{1}{2}.$$

После подстановки предельного значения получено определенное числовое значение, следовательно, предел существует и равен $-\dfrac{1}{2}$.■

2. Числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x^3-8}{x-2}$ при $x\to 2$ обращаются в нуль (говорят, имеет место неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$). Теорему 3 о пределе дроби применить нельзя, так как предел знаменателя равен нулю. Функция $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$ при $x=2$ не существует. Однако определение предела функции не требует, чтобы точка $x=2$ входила в область определения функции и мы можем считать, что x, стремясь к 2, никогда не становится равным 2, а потому $x-2\neq 0$. Тогда

$$\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=\left[2^2+2\cdot 2+4\right]=12.■$$

3. При $x \to 3$ имеем предел числителя: $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)=1$ и предел знаменателя $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-7x+12)=0$. Теорема 3 о пределе дроби неприменима. Рассмотрим обратную дробь $\dfrac{x^2-7x+12}{2x-5}$ и ее предел при $x \to 3$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{2x-5}=\left[\frac{0}{1}\right]=0$$

(здесь теорема 3 о пределе дроби применима). Функция $\dfrac{x^2-7x+12}{2x-5}$ при $x \to 3$ является бесконечно малой, а потому функция $\dfrac{2x-5}{x^2-7x+12}$ – бесконечно большая и тогда $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-5}{x^2-7x+12}=\infty$.■

4. Здесь членами разности являются бесконечно большие функции при $x \to 3$ (говорят, имеет место неопределенность вида $\infty-\infty$) и поэтому невозможно применить теорему 1 о пределе разности. Произведем преобразование выражения под знаком предела:

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{x+2-1}{(x-2)(x+2)}=\frac{x+1}{(x-2)(x+2)}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{(x-2)(x+1)}\overset{\text{см. пример}3}{=}\left[\frac{3}{0}\right]=\infty.■$$

5. При $x \to \infty$ на основании свойств бесконечно больших функций и числитель, и знаменатель дроби являются бесконечно большими функциями (говорят, имеет место неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$). Теорема о пределе дроби неприменима и ничего определенного без специального исследования сказать нельзя, то есть необходимо «раскрыть» полученную неопределенность. Для этого разделим и числитель и знаменатель дроби на высшую степень x, встречающуюся в членах дроби, а после этого перейдем к пределу.

В исходной дроби x^3 – одночлен с наивысшей степенью. Разделим и числитель и знаменатель дроби на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+5}{3x^3+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}}{3+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty} 2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=\left[\frac{2+0+0}{3+0-0}\right]=\frac{2}{3},$$ так как при $x\to\infty$

$\frac{1}{x}$ – бесконечно малая функция, а потому $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^3}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$; $\frac{5}{x^3}=5\cdot\frac{1}{x^3}$ – бесконечно малые функции и их пределы равны нулю, когда $x\to\infty$.

Таким образом, после деления числителя и знаменателя на x^3, оказалось возможным применить теорему 3 о пределе дроби, так как и числитель, и знаменатель дроби имеют пределы, равные соответственно 2 и 3, и предел знаменателя не равен нулю.■

6. При $x\to 0$ числитель и знаменатель имеют своим пределом нуль, а потому они бесконечно малы:

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-1\right)=\sqrt{\lim_{x\to 0}(1+x)}-1=1-1=0.$$

Имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Перенесем иррациональность в знаменатель, умножив для этого числитель и знаменатель дроби на $\left(\sqrt{1+x}-1\right)$. Будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x})^2-1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)}+1}=\frac{1}{2}.$$

Так как $x\to 0$, не становясь равным нулю, то возможно деление на x числителя и знаменателя дроби.■

7. Так как при $x\to+\infty$ мы имеем дело с разностью двух бесконечно больших величин (неопределенность вида $\infty-\infty$), то непосредственно теорема 1 о предельном переходе не может быть применена и нужны специальные исследования.

Умножим и разделим данное выражение на сопряженное с ним. Получим

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2-x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=-2\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=0,$$

так как при $x \to +\infty$ знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, есть функция бесконечно большая, а потому дробь $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}$ есть величина бесконечно малая и ее произведение на -2 есть тоже бесконечно малая функция.■

8. При $x \to 0$ числитель и знаменатель являются бесконечно малыми функциями. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, которую необходимо «раскрыть».

Произведем замену переменной под знаком предела. Положим $1+x=t^5$. Тогда при $x \to 0$, очевидно, $t \to 1$. Значит,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^5-1}\overset{(1.6)}{=}\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t+1}{t^4+t^3+t^2+t+1}=\frac{3}{5}.■$$

9. Здесь при $x \to \dfrac{\pi}{2}$ мы имеем дело с отношение двух бесконечно малых функций, т.е. с неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$. «Раскроем» эту неопределенность. Зная, что $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = (1-\sin x)(1+\sin x)$, имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x}=$$

$$\frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.■$$

10. На основании теоремы 5 о предельном переходе, получим

$$\lim_{x\to 2}4^{\frac{2x}{x+1}}=4^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x}{x+1}}=\left\{\lim_{x\to 2}\frac{2x}{x+1}=\frac{2\cdot 2}{2+1}=\frac{4}{3}\right\}=4^{\frac{4}{3}}=4\sqrt[3]{4}.■$$

11. На основании теоремы 5 о предельном переходе, получим

$$\lim_{x\to\infty}2^{\frac{3x}{x+2}}=2^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x+2}}=\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{2}{x}}=\frac{3}{1+0}=3\right\}=2^3=8.■$$

12. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)=0, \qquad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}=1,$ можно применить теорему 5 о предельном переходе

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}}=0^1=0.\blacksquare$$

13. Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+\frac{3}{x}}{5+\frac{7}{x}}\right)=\dfrac{2+0}{5+0}=\dfrac{2}{5}, \qquad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=2$ и можно применить теорему 5 о предельном переходе

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{\frac{2x-1}{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+2}}=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}.\blacksquare$$

При вычислении предела тригонометрических функций используется формула *первого замечательного предела*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1.7}$$

Очевидно, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}=1.$$

Примеры.

Найти предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}\ (k-const).$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{\sin lx}\ (k,l-const).$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx}{x}\ (k-const).$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos kx}{x^2}\ (k-const).$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-tgx).$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}.$

Решение.

1. Для решения данной задачи сделаем замену переменной: $kx=t$. Тогда при $x\to 0$, очевидно, $t\to 0$, а $x=\dfrac{t}{k}$. Значит

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\left(\frac{t}{k}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{k\sin t}{t}=k\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\overset{(1.7)}{=}k\cdot 1=k.\blacksquare$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k. \qquad (1.8)$$

2. Для решения данной задачи разделим числитель и знаменатель дроби на $x\neq 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin lx}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\sin kx}{x}\right)}{\left(\dfrac{\sin lx}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin lx}{x}}\overset{(1.8)}{=}\frac{k}{l}.\blacksquare$$

3. Для решения данной задачи используем тригонометрическое соотношение $tgkx=\dfrac{\sin kx}{\cos kx}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgkx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x\cdot\cos kx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos kx}=k\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos kx}=$$

$$=k\cdot\frac{1}{\cos 0}=k\cdot\frac{1}{1}=k.\blacksquare$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgkx}{x}=k. \qquad (1.9)$$

4. При $x\to 0$ числитель и знаменатель дроби – бесконечно малые функции. Поэтому будем «раскрывать» неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Воспользуемся известным тригонометрическим тождеством: $1-\cos kx=2\sin^2\dfrac{kx}{2}$ и тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{kx}{2}}{x^2}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{kx}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{kx}{2}}{x}\overset{(1.8)}{=}2\cdot\frac{k}{2}\cdot\frac{k}{2}=\frac{k^2}{2}.\blacksquare$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{x^2}=\frac{k^2}{2}. \qquad (1.10)$$

5. При $x\to\dfrac{\pi}{2}$ функции $\sec x$ и tgx – бесконечно большие функции. Таким образом, под знаком предела находится разность двух бесконечно больших функций и теорему 1 о пределе разности применить нельзя. Имеет место неопределенность вида $\infty-\infty$, которую необходимо «раскрыть».

Преобразуем разность следующим образом:

$$\sec x - tgx = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x \cdot (1+\sin x)} =$$

$$= \frac{1-\sin^2 x}{\cos x \cdot (1+\sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x \cdot (1+\sin x)} = \frac{\cos x}{1+\sin x}.$$

После этого получаем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\sec x - tgx\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{0}{2} = 0. \blacksquare$$

6. При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби – бесконечно малые функции. Поэтому будем «раскрывать» неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем дробь

$$\frac{tgx - \sin x}{x^3} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x \cdot (1-\cos x)}{x^3 \cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Учитывая, что при $x \to 0$ предел каждого из сомножителей существует, можно воспользоваться теоремой 2 о предельном переходе, тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{(1.7),(1.10)}{=} 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \blacksquare$$

7. При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби – бесконечно малые функции. Поэтому будем «раскрывать» неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Сделаем замену переменной: $\arcsin x = t$. Тогда при $x \to 0$, очевидно, $t \to 0$, а $x = \sin t$. Значит

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \overset{(1.7)}{=} 1. \blacksquare$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1. \qquad (1.11)$$

Задачи для самостоятельного решения.

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$. 2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$. 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2}+5}{x-2}$. 7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}$. 8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[6]{x}}$.

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{1-tg^2 x}$. 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$. 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{\sin 5x}$. 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$ $(a - const)$. 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{3x^2+2+7}\right)^{\frac{2x^2+5}{x^2-1}}$.

Ответы.

1. $\dfrac{14}{23}$. 2. $\dfrac{1}{2}$. 3. $\dfrac{2}{3}$. 4. -1. 5. 2. 6. $\dfrac{2}{3}$. 7. $\dfrac{5}{12}$. 8. $\dfrac{3}{2}$. 9. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

10. $\dfrac{3}{2}$. 11. $\dfrac{2}{5}$. 12. 1. 13. $2\cos a$. 14. $\dfrac{1}{9}$.

1.6. Число е

При вычислении предела функций часто используются формулы *второго замечательного предела*, дающего число $e \cong 2{,}71828\ldots$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \tag{1.12}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{1.13}$$

Как следствие, из (1.12)-(1.13) получаются следующие полезные формулы $(k = const)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k, \tag{1.14}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k. \tag{1.15}$$

Второй замечательный предел позволяет найти пределы, содержащие неопределенность вида 1^∞.

П р и м е р ы.

Найти предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+5tg^2x\right)^{3ctg^2x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^x$.

Р е ш е н и е.

1. Полагая в формуле (1.14) $k=-1$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=e^{-1}=\frac{1}{e}.\blacksquare$$

2. Полагая в формуле (1.15) $k=2$, получим $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^2.\blacksquare$

3. Для того чтобы решение свести к формуле (1.15), сделаем замену переменной $tg^2x=z$. Выразим ctg^2x через z. Так как $ctg^2x=\frac{1}{tg^2x}$, то $ctg^2x=\frac{1}{z}$. Решим вопрос о пределе новой переменной z. Очевидно, если $x\to 0$, то $z=tg^2x\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\left(1+5tg^2x\right)^{3ctg^2x}=\lim_{z\to 0}(1+5z)^{3\frac{1}{z}}=\left[\lim_{z\to 0}(1+5z)^{\frac{1}{z}}\right]^3\overset{(1.15)}{=}\left(e^5\right)^3=e^{15}.\blacksquare$$

4. Здесь основанием степени является функция, для которой $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$, а показатель степени $x\to\infty$. Таким образом, имеет место неопределенность вида 1^∞. Для ее «раскрытия» выполним некоторые алгебраические преобразования

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}\overset{(1.12),(1.14)}{=}$$

$$=\frac{e}{e^{-1}}=e^2.\blacksquare$$

5. В данном случае имеем неопределенность вида 1^{∞}.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{7}{x}}{1+\frac{5}{x}}\right)^{2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x+4}}{\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x+4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{4}}{\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{4}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{4}}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{4}=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{4}=1\right\}=\frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x}\right]^{2}\cdot 1}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}\right]^{2}\cdot 1}\overset{(1.14)}{=}$$

$$=\frac{\left(e^{7}\right)^{2}}{\left(e^{5}\right)^{2}}=\frac{e^{14}}{e^{10}}=e^{4}.\blacksquare$$

6. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=\frac{1+0+0}{1+0}=1$, а показатель степени $x\to\infty$, имеем неопределенность вида 1^{∞}. Приведем данный предел ко второму замечательному пределу.

Преобразуем основание степени, выделив в нем единицу

$$\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}=1+\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}-1\right)=1+\frac{x^2+2x+2-x^2-3}{x^2+3}=1+\frac{2x-1}{x^2+3}.$$

Преобразуем показатель степени, умножив ее на $1=\frac{2x-1}{x^2+3}\cdot\frac{x^2+3}{2x-1}$.

Тогда $x=\frac{2x-1}{x^2+3}\cdot\frac{x^2+3}{2x-1}\cdot x$ и получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}\cdot\frac{2x-1}{x^2+3}\cdot x}.$$

Если теперь сделать замену $z=\frac{2x-1}{x^2+3}$, то $\frac{1}{z}=\frac{x^2+3}{2x-1}$ и $z\to 0$ при $x\to\infty$, то

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}\cdot} = \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} \overset{(1.13)}{=} e.$$

Также существует предел $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x^2+3}\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+3} = 2.$

Следовательно, можно применить теорему 5 о предельном переходе

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}\cdot\frac{2x-1}{x^2+3}\cdot x} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+3}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+3}} = e^2.\blacksquare$$

При вычислении пределов выражений, содержащих логарифмические и показательные функции используется теорема 6 о предельном переходе.

Между десятичным и натуральным логарифмами существует связь, выражаемая формулой

$$\lg x = M\ln x, \tag{1.16}$$

где M – модуль перехода: $M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}43429$.

Примеры.

Найти предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to 9}\lg(x+1)$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{x^2+x+5}{x^2-2}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ $(a=const,\ a>0,\ a\neq 1)$. 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$. 7. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

Решение.

1. На основании теоремы 6 о предельном переходе, получим

$$\lim_{x\to 9}\lg(x+1) = \lg\left[\lim_{x\to 9}(x+1)\right] = \lg 10 = 1.\blacksquare$$

2. Так как существует $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+5}{x^2-2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}} = 1 \neq 0$, то по теореме 6 о предельном переходе

$$\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2+x+5}{x^2-2}=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+5}{x^2-2}\right]=\ln 1=0.\blacksquare$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{(1.13)}=$

$=\ln e=1.\blacksquare$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \qquad (1.17)$$

4. Сделаем подстановку:

$$a^x-1=z.$$

Из подстановки следует, что

$$a^x=z+1\Rightarrow x\ln a=\ln(1+z)\Rightarrow x=\frac{\ln(1+z)}{\ln a}.$$

Очевидно, что при $x\to 0$, новая переменная $z\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\left(\dfrac{\ln(1+z}{\ln a}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{\ln a}{\left(\dfrac{\ln(1+z}{z}\right)}=\frac{\ln a}{\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+z}{z}\right)}\overset{(1.17)}{=}\frac{\ln a}{1}=\ln a.\blacksquare$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \qquad (1.18)$$

5. Решение этой задачи потребует некоторых преобразований для того, чтобы можно было использовать результаты двух предыдущих задач. Выражение, стоящее под знаком предела, умножим и разделим на x:

$$\frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}=\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{3^{2x}-1}=\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{\dfrac{9^x-1}{x}}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{\dfrac{9^x-1}{x}}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-1}{x}}\overset{(1.17),(1.18)}{=}$$

$$=1\cdot\frac{1}{\ln 9}=\frac{1}{\ln 9}.\blacksquare$$

6. Преобразуем числитель дроби, чтобы можно было использовать (1.18.

$$\frac{a^x-b^x}{x}=\frac{a^x-1-b^x+1}{x}=\frac{a^x-1-(b^x-1)}{x}=\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}\overset{(1.18)}{=}$$

$$=\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}.\blacksquare$$

7. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела.

$$\frac{\ln x-1}{x-e}=\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=\ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}=\ln\lim_{x\to e}\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}=\ln\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x}{e}-1\right)^{\frac{1}{x-e}}=$$

$$=\ln\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}\cdot\frac{1}{e}}==\ln\left[\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}\cdot}\right]^{\frac{1}{e}}\overset{(1.15)}{=}\ln e^{\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}.\blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

Найти пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{3\cos ecx}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+3}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+1}\right)^{3x-1}$.
7. $\lim\limits_{x\to 4}\ln\frac{x-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{tgx}-1}{x}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{x}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$.

Ответы.

1. $e^{\frac{2}{3}}$. 2. $e^{\frac{1}{3}}$. 3. e^{6}. 4. $e^{-\frac{1}{3}}$. 5. e^{-3}. 6. e^{3}.
7. $\ln 4\sqrt{2}$ 8. $\ln 3$. 9. -3. 10. $\frac{1}{2}$.

1.7. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$. Бесконечно малые функции можно сравнивать. При сравнении двух бесконечно малых функций различают следующие случаи.

1. Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой *высшего порядка малости* по сравнению с $\varphi(x)$.

Обозначают $f(x) = o(\varphi(x))$.

2. Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$, то функция $\varphi(x)$ называется бесконечно малой *высшего порядка малости* по сравнению с $f(x)$.

Обозначают $\varphi(x) = o(f(x))$.

3. Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = A\ (A \neq 0,\ A \neq 1)$, то бесконечно малые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются бесконечно малыми *одного порядка малости*.

4. Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$, то бесконечно малые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются *эквивалентными* бесконечно малыми.

Обозначают $f(x) \sim \varphi(x)$.

5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{[\varphi(x)]^k} = A\ (k > 0, A \neq 0)$, то бесконечно малая функция $f(x)$ называется бесконечно малой *k-ого порядка малости*, по сравнению с $\varphi(x)$.

<u>Теоремы о бесконечно малых функциях</u>

1°. Произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая высшего порядка малости по сравнению с сомножителями.

2°. Бесконечно малые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность $f(x) - \varphi(x)$ является бесконечно малой высшего порядка малости по сравнению с $f(x)$ и $\varphi(x)$.

3°. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую из них или какую-нибудь одну заменить эквивалентной ей бесконечно малой функцией.

Учитывая (1.7), (1.11), (1.17), (1.18) полезно иметь в виду эквивалентность следующих бесконечно малых функций при $x \to 0$:

$\sin x \sim x$; $tgx \sim x$; $\arcsin x \sim x$; $arctgx \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$; $a^x - 1 \sim x \ln a$; $e^x - 1 \sim x$.

П р и м е р ы.

1. Сравнить бесконечно малые функции $f(x) = x\ln(1+x)$, $\varphi(x) = x\sin x$ при $x \to 0$.

Р е ш е н и е.

Находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Следовательно, $f(x) \sim \varphi(x)$.■

2. Показать, что если x – бесконечно малая первого порядка, то $f(x) = 1-\cos x$ – бесконечно малая второго порядка, по сравнению с x.

Р е ш е н и е.

Чтобы показать требуемое, надо на основании определения 5 показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ есть величина постоянная, не равная нулю. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.■$$

3. Найти предел функции, используя теорему 3 об эквивалентных бесконечно малых функциях.

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}$; $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x^4+x^2+x}$; $\quad c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{tg(x^2)}$.

Р е ш е н и е.

$a)$ При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби–бесконечно малые функции. Известно, что $\ln(1+3x) \sim 3x$, а $\sin 4x \sim 4x$. Тогда, используя теорему 3 о бесконечно малых функциях, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}.■$$

$b)$ При $x \to 0$ $\sin 4x \sim 4x$. Тогда, используя теорему 3 о бесконечно малых функциях, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x^4+x^2+x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x(x^3+x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{(x^3+x+1)} = \frac{3}{1} = 3.■$$

$c)$ Заменим числитель и знаменатель дроби эквивалентными бесконечно малыми: $\ln(1+3x\sin x) \sim 3x\sin x$, $tg(x^2) \sim x^2$. Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{tg(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{x^2} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 3\cdot 1 = 3.■$$

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

Найти пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}$. 5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$.

О т в е т ы.

1. $\dfrac{9}{4}$. 2. $-\dfrac{1}{2}$. 3. $-\dfrac{1}{2}$. 4. $-\dfrac{1}{2}$. 5. 1.

1.8. Непрерывность функции

Если предел функции $f(x)$ при $x\to a$ существует и равен значению функции в точке $x=a$, то функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a.

Для того чтобы согласно этому определению функция была непрерывной в точке a, требуется выполнения следующих условий:

1) функция $f(x)$ должна быть определена в самой точке a и в некоторой окрестности точки a;

2) функция $f(x)$ должна иметь конечный предел при $x\to a$:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A;$$

3) этот предел A должен быть равен значению функции в точке a:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a). \tag{1.19}$$

Для непрерывности функции в точке a, требуется, чтобы выполнялись равенства

$$f(a-0)=f(a+0)=f(a), \tag{1.20}$$

где $f(a-0)$, $f(a+0)$ – соответственно левосторонний и правосторонний пределы функции в точке a.

Функция непрерывная в каждой точке некоторой области (интервала, отрезка и т.п.) называется *непрерывной в этой области*.

Если в точке a, принадлежащей области определения функции или являющейся граничной для этой области, не выполняется условие непрерывности функции (1.20) в какой-либо его части, то она называется *точкой разрыва*.

Для точек разрыва функции имеет место следующая классификация.

1. Если левосторонний предел функции $f(a-0)$ и ее правосторонний предел $f(a+0)$ существуют, но не равны между собой, т.е.

$$f(a-0)\neq f(a+0), \tag{1.21}$$

то точка a называется *точкой разрыва первого рода*.

2. Если левосторонний предел функции $f(a-0)$ и ее правосторонний предел $f(a+0)$ существуют, равны между собой, но их значения не совпадают со значение функции в точке a, т. е.

$$f(a-0)=f(a+0)\neq f(a), \qquad (1.22)$$

то точка a называется *точкой «устранимого» разрыва*.

3. Если в точке a не существует хотя бы один из односторонних пределов, то точка a называется *точкой разрыва второго рода*.

Свойства непрерывных функций

1◦. Сумма, разность и произведение двух функций, непрерывных в одной и той же точке a, есть функция непрерывная в той же точке.

2◦. Частное от деления двух непрерывных в точке a функций есть функция непрерывная, при условии, что делитель не равен нулю при $x=a$.

Примеры.

1. Доказать, что функция $f(x)=3x^3-4x+5$ непрерывна при любом значении x, т. е. непрерывна на бесконечном интервале $(-\infty,+\infty)$.

Решение.

Заданная функция определена на бесконечном интервале $(-\infty,+\infty)$. Возьмем из этого интервала произвольное значение $x=a$. На основании известных теорем о пределах $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\left(3x^3-4x+5\right)=3a^3-4a+5$.

Но $f(a)=3a^3-4a+5$, и, таким образом, выполнено условие непрерывности (1.19). Учитывая, что $a-$произвольное число интервала $(-\infty,+\infty)$, заключаем, что заданная функция непрерывна на бесконечном интервале.■

2. Какого рода разрыв в точке $x=0$ имеет функция $y=arctg\,\frac{1}{x}$?

Решение.

В точке $x=0$ функция $arctg\,\frac{1}{x}$ не существует. Найдем односторонние пределы функции:

$\lim\limits_{x\to -0} arctg\,\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$, так как при $x\to -0$ величина $\frac{1}{x}\to-\infty$, а $arctg\,\frac{1}{x}\to-\frac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{x\to+0} arctg\,\frac{1}{x} = +\frac{\pi}{2}$, так как при $x \to +0$ величина $\frac{1}{x} \to +\infty$, а $arctg\,\frac{1}{x} \to +\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, $f(-0) = -\frac{\pi}{2}$, $f(+0) = +\frac{\pi}{2}$ и оба односторонних предела существуют, но между собою не равны и $x = 0$ – точка разрыва 1-ого рода. В этой точке функция будет иметь скачок равный $f(+0) - f(-0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.■

3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x - 2}$ в точке $x = 2$.

Решение.

Так как при $x = 2$ функция не существует и тем самым нарушено первое условие непрерывности, то в этой точке функция терпит разрыв. Найдем односторонние пределы функции:

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^3 - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2-0} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x\to 2-0} (x^2 + 2x + 4) = 12.$$

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x^3 - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2+0} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x\to 2+0} (x^2 + 2x + 4) = 12.$$

Таким образом, $f(2-0) = f(2+0) = 12$ и существует предел функции при $x \to 2$. Так как выполнено условие (1.22), точка $x = 2$ является точкой «устранимого» разрыва. Разрыв в точке $x = 2$ можно «устранить», если значение функции в этой точке принять равным 12, т.е. $f(2) = 12$.■

4. Показать, что при $x = 4$ функция $y = \frac{x}{x - 4}$ имеет разрыв.

Решение.

Так как при $x = 4$ функция не существует, то в этой точке функция терпит разрыв. Чтобы определить тип разрыва, найдем односторонние пределы функции: $\lim\limits_{x\to 4-0} \frac{x}{x-4} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 4+0} \frac{x}{x-4} = +\infty$. Таким образом, функция при $x \to 4$ не имеет ни левостороннего, ни правостороннего предела. Следовательно, $x = 4$ является точкой разрыва 2-ого рода.■

Задачи для самостоятельного решения.

Найти точки разрыва функций.

1. $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$. 2. $y = \frac{\sin x}{x}$. 3. $y = \frac{1}{(x-5)(x-1)}$. 4. $y = \frac{x^3 - 6x + 1}{x^2 - 3x + 2}$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Дифференцирование явных функций

Пусть x_1, x_2 – значения аргумента, а $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ – соответствующие значения функции $y = f(x)$.

Разность $\Delta x = x_2 - x_1$ называется *приращением аргумента*, а разность $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ – *приращением функции* на отрезке $[x_1, x_2]$.

Производной от функции $y = f(x)$ по аргументу x называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Обозначается y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Вычисление производной функции называется *дифференцированием*.

Производная функции при частном значении x есть число, если при этом значении x производная имеет конечное значение.

Значение производной при $x = x_0$ обозначается $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Если необходимо исследовать скорость изменения функции в зависимости от изменения независимой переменной используется понятие производной функции.

Пример.

Вычислить производную функции $y = x^2$ при $x = 3$.

Решение.

Найдем вначале производную как функцию x, а потом вычислим ее значение при $x = 3$.

В нашем случае

$$f(x) = x^2, \quad f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Найдем приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Найденное отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ есть не что иное, как *средняя скорость изменения* данной функции в промежутке $(x, x+\Delta x)$.

Для того чтобы найти производную y' этой функции, нужно найти предел полученного выражения при $\Delta x \to 0$ и, считая x величиной постоянной. Получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

При $x = 3$ значение производной $y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$. Найденное число будет определять *мгновенную скорость* изменения функции при $x = 3$.■

Геометрически $f'(x) = tg\alpha$, где α - угол наклона касательной в точке x к графику функции $y = f(x)$ с положительным направлением оси абсцисс. Отсюда следует, что если производная функции положительна в точках некоторой области изменения независимой переменной, то функция возрастает в этой области, если отрицательна – функция убывает.

В предыдущем примере, определив $y'(3) = 6$, мы нашли и тангенс угла между положительным направлением оси Ox и касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x = 3$.

При вычислении производной функции справедливы *основные правила* дифференцирования функций.

<u>Основные правила дифференцировании функций</u>

Пусть $u = u(x), v = v(x)$, $c -$ постоянная величина.

1◦. $(c)' = 0$.

2◦. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$.

3◦. $(u + v)' = u' + v'$.

4◦. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

5◦. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

При вычислении производных функций следует выучить наизусть и использовать таблицу производных основных функций, полученной на основании определения производной функции.

<u>Таблица производных основных функций</u>

$y = x^{\alpha}\ (\alpha \in R)$; $\qquad y' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$. (2.1)

$y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$; $\qquad y' = a^x \cdot \ln a$. (2.2)

$$y = e^x; \qquad y' = e^x. \tag{2.3}$$

$$y = \log_a x \ (a > 0,\ a \neq 1); \qquad y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}. \tag{2.4}$$

$$y = \ln x; \qquad y' = \frac{1}{x}. \tag{2.5}$$

$$y = \sin x; \qquad y' = \cos x. \tag{2.6}$$

$$y = \cos x; \qquad y' = -\sin x. \tag{2.7}$$

$$y = tgx; \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{2.8}$$

$$y = ctgx; \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{2.9}$$

$$y = \arcsin x; \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{2.10}$$

$$y = \arccos x; \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{2.11}$$

$$y = arctg\, x; \qquad y' = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{2.12}$$

$$y = arcctg\, x; \qquad y' = -\frac{1}{1 + x^2}. \tag{2.13}$$

Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то функция $y = f\left(\varphi(x)\right)$ называется *сложной функцией* от x. Переменная u называется *промежуточной* переменной.

Если для соответствующих друг другу значений x и u существуют конечные производные y'_u и u'_x, то сложная функция $y = f\left(\varphi(x)\right)$ имеет конечную производную по x, и эта производная определяется по формуле

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x, \tag{2.14}$$

причем производная y'_u вычисляется так, как если бы u было независимой переменной.

Это правило распространяется и на сложные функции, которые задаются с помощью цепи, содержащей три и более звена.

П р и м е р ы.

1. Найти производные следующих функций:

$$a)\ y=x^4;\ \ b)\ y=\sqrt{x};\ \ c)\ y=\sqrt[4]{x^3};\ \ d)\ y=\frac{1}{x};\ \ e)\ y=\lg x;\ \ f)\ y=5^x.$$

Р е ш е н и е.

$$a)\ y'=(x^4)'\overset{(2.1)}{=}\{\alpha=4\}=4x^3.\blacksquare$$

$$b)\ y'=\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\overset{(2.1)}{=}\left\{\alpha=\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.\blacksquare$$

Таким образом, в таблицу производных можно добавить часто встречающуюся формулу

$$y=\sqrt{x};\qquad\qquad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.\qquad(2.15)$$

$$c)\ y'=\left(\sqrt[4]{x^3}\right)'=\left(x^{\frac{3}{4}}\right)'\overset{(2.1)}{=}\left\{\alpha=\frac{3}{4}\right\}=\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}.\blacksquare$$

$$d)\ y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'\overset{(2.1)}{=}\{\alpha=-1\}=-x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}.\blacksquare$$

Таким образом, в таблицу производных можно добавить часто встречающуюся формулу

$$y=\frac{1}{x};\qquad\qquad y'=-\frac{1}{x^2}.\qquad(2.16)$$

$$e)\ y'=(\lg x)'\overset{(2.4)}{=}\{a=10\}=\frac{1}{x\ln 10}.\blacksquare$$

$$f)\ y'=(5^x)'\overset{(2.2)}{=}\{a=5\}=5^x\ln 5.\blacksquare$$

2. Найти производные следующих функций:

$$a)\ y=5x^3-3x^2+x-2;\qquad b)\ y=x^5e^x;\qquad c)\ y=\frac{\arcsin x}{x};$$

$$d)\ y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}.$$

Р е ш е н и е.

При решении задач будем пользоваться основными правилами дифференцирования функций $1^\circ-5^\circ$ и таблицей производных основных функций (2.1)-(2.13).

$$a)\ y'=(5x^3-3x^2+x-2)\overset{3^\circ}{=}(5x^3)'-(3x^2)'+(x)'-2'\overset{1^\circ,2^\circ}{=}$$

$$=5(x^3)'-3(x^2)'+(x)'\overset{(2.1)}{=}=15x^2-6x+1.\blacksquare$$

$$b)\ \ y'=(x^5e^x)'\overset{4^\circ}{=}(x^5)'\cdot e^x+x^5\cdot(e^x)'\overset{(2.1),(2.3)}{=}5x^4e^x+x^5e^x.\blacksquare$$

$$c)\ \ y'=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)'\overset{5^\circ}{=}\frac{(\arcsin x)'\cdot x-\arcsin x\cdot x'}{x^2}\overset{(2.1),(2.10)}{=}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x-\arcsin x}{x^2}=\frac{x-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}.\blacksquare$$

$$d)\ \ y'=\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)'\overset{5^\circ}{=}$$

$$=\frac{(\sin x-\cos x)'\cdot(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)\cdot(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}\overset{3^\circ}{=}$$

$$=\frac{((\sin x)'-(\cos x)')\cdot(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)\cdot((\sin x)'+(\cos x)')}{(\sin x+\cos x)^2}\overset{(2.6),(2.7)}{=}$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)\cdot(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)\cdot(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)^2+(\sin x-\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{2}{1+\sin 2x}.$$

3. Найти производные следующих функций:

$$a)\ \ y=\left(2x^3+5\right)^5;\quad b)\ \ y=\sqrt{x^2+2};\quad c)\ \ y=tg^6x;\quad d)\ \ y=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}};$$

$$e)\ y=\left(3x^4-\frac{6}{\sqrt{x}}-2\right)^7;\quad f)\ \ y=\sqrt[3]{\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}}.$$

Решение.

Заданные функции являются сложными функциями, поэтому при их дифференцировании будем применять формулу (2.14) и соответствующие формулы таблицы производных основных функций (2.1), (2.8), (2.15), (2.16)

$a)$ Положив $u=2x^3+5$, получим $y=u^5$, и поэтому на основании (2.14)

$$y'=5u^4\cdot u'=5\left(2x^3+5\right)^4\cdot 6x^2=30x^2\left(2x^3+5\right)^4.$$

Можно было бы сразу воспользоваться (2.1), не вводя промежуточную переменную u.■

$$b)\ y'=\left(\sqrt{x^2+2}\right)'\overset{(2.14)}{=}\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\left(x^2+2\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.\blacksquare$$

$$c)\ \ y' = \left((tgx)^6\right)' \overset{(2.1),(2.14)}{=} 6(tgx)^5(tgx)' \overset{(2.8)}{=} 6(tgx)^5\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = 6tg^5 x\sec^2 x. ■$$

$$d)\ \ y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)' \overset{(2.16)}{=} -\frac{1}{x^2+x+1}\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)' \overset{(2.15)}{=}$$

$$= -\frac{1}{x^2+x+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot(x^2+x+1)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2+x+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot(2x+1) == -\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}. ■$$

$$e)\ y' = \left(\left(3x^4-\frac{6}{\sqrt{x}}-2\right)^7\right)' \overset{(2.14)}{=} 7\left(3x^4-\frac{6}{\sqrt{x}}-2\right)^6\cdot(3x^4-6x^{-\frac{1}{2}}-2)' =$$

$$= 7\left(3x^4-\frac{6}{\sqrt{x}}-2\right)^6\left(3\cdot4\cdot x^3-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= 7\left(3x^4-\frac{6}{\sqrt{x}}-2\right)^6\left(12x^3+3\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right) = 21\left(3x^4-\frac{6}{\sqrt{x}}-2\right)^6\left(4x^3+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right). ■$$

$$f)\ \ y' = \left(\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)' =$$

так как в примере $2\ d)$ было получено: $\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)' = \frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$, то

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{(\sin x-\cos x)^{2/3}(\sin x+\cos x)^{4/3}}. = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2(\sin x+\cos x)^4}}. ■$$

4. Найти производные следующих функций:

$$a)\ y = 2^{x^2};\ \ b)\ y = e^{-3x};\ \ c)\ y = e^{ctgx};\ \ d)\ y = 4^{\sin^2 x};\ \ e)\ y = 7^{\frac{1}{4x}}.$$

Р е ш е н и е.

Заданные функции являются сложными функциями, поэтому при их дифференцировании будем применять формулу (2.14) и соответствующие формулы таблицы производных основных функций (2.1), (2.2), (2.3), (2.6).

$$a)\ \ y' = \left(2^{x^2}\right)' = 2^{x^2}\ln 2\cdot\left(x^2\right)' = 2^{x^2}\ln 2\cdot 2x = x2^{x^2+1}\ln 2. ■$$

$$b)\ y'=\left(e^{-3x}\right)'=e^{-3x}\cdot(-3x)'=-3e^{-3x}.\blacksquare$$

$$c)\ y'=\left(e^{ctgx}\right)'=e^{ctgx}\cdot(ctgx)'=e^{ctgx}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=-\frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}.\blacksquare$$

$$d)\ y'=\left(4^{\sin^2 x}\right)'=4^{\sin^2 x}\ln 4\cdot\left(\sin^2 x\right)'=4^{\sin^2 x}\ln 4\cdot 2\sin x\cdot(\sin x)'=$$

$$=4^{\sin^2 x}\ln 4\cdot 2\sin x\cdot\cos x==4^{\sin^2 x}\ln 4\cdot\sin 2x.\blacksquare$$

$$e)\ y'=\left(7^{\frac{1}{4x}}\right)'=7^{\frac{1}{4x}}\ln 7\cdot\left(\frac{1}{4x}\right)'=\frac{1}{4}7^{\frac{1}{4x}}\ln 7\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{4}7^{\frac{1}{4x}}\ln 7\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4x^2}7^{\frac{1}{4x}}\ln 7.\blacksquare$$

5. Найти производные следующих функций:

$a)\ y=\log_2(x+\sqrt{x});\quad b)\ y=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right);\quad c)\ y=\ln\ln x;\quad d)\ y=\ln\frac{x}{1-x^4};$

$e)\ y=\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

Решение.

Заданные функции являются сложными функциями, поэтому при их дифференцировании будем применять формулу (2.14) и соответствующие формулы таблицы производных основных функций (2.1), (2.4), (2.5), (2.15), (2.16).

$$a)\ y'=\left(\log_2(x+\sqrt{x})\right)'=\frac{1}{(x+\sqrt{x})\ln 2}\cdot(x+\sqrt{x})'=$$

$$=\frac{1}{(x+\sqrt{x})\ln 2}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{(x+\sqrt{x})\ln 2}\cdot\frac{1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x})\ln 2}.\blacksquare$$

$b)$ Перепишем логарифмическую функцию в виде

$$\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=\ln(x-1)-\ln x.$$

Тогда

$$y'=\left(\ln(x-1)-\ln x\right)'=\frac{1}{x-1}\cdot(x-1)'-\frac{1}{x}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x(x-1)}.\blacksquare$$

$$c)\ y'=(\ln\ln x)'=\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)'==\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}==\frac{1}{x\ln x}.\blacksquare$$

$d)$ Перепишем логарифмическую функцию в виде

$$\ln\frac{x}{1-x^4}=\ln x-\ln(1-x^4).$$

Тогда

$$y'=\left(\ln x-\ln(1-x^4)\right)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x^4}\cdot(1-x^4)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x^4}\cdot(-4x^3)=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{4x^3}{1-x^4}=\frac{1-x^4+4x^4}{x(1-x^4)}=\frac{1+3x^4}{x(1-x^4)}.\blacksquare$$

e) Перепишем логарифмическую функцию в виде

$$\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln x-\ln\sqrt{1+x^2}=\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Тогда

$$y'=\left(\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x(1+x^2)}.\blacksquare$$

6. Найти производные следующих функций:

$a)\ y=\sin 2x^2;\quad b)\ y=\cos\sqrt{x};\quad c)\ y=tg\dfrac{1+x}{x};\quad d)\ y=ctg\dfrac{x}{2};$

$e)\ y=e^{tgx}-x\cos 2x;\quad f)\ y=tg(\arcsin x).$

Р е ш е н и е.

Заданные функции являются сложными функциями, поэтому при их дифференцировании будем применять формулу (2.14) и соответствующие формулы таблицы производных основных функций (2.1), (2.3), (2.6), (2.7), (2.8), (2.9), (2.10), (2.15), (2.16).

$$a)\ y'=\left(\sin 2x^2\right)'=\cos 2x^2\cdot\left(2x^2\right)'=4x\cos 2x^2.\blacksquare$$

$$b)\ y'=\left(\cos\sqrt{x}\right)'=-\sin\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\right)'=-\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.\blacksquare$$

$$c)\ y'=\left(tg\frac{1+x}{x}\right)'=\frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}}\left(\frac{1+x}{x}\right)'=\frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}}\left(\frac{1}{x}+1\right)'=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2\cos^2\frac{1+x}{x}}.\blacksquare$$

$$d)\ y'=\left(ctg\frac{x}{2}\right)'=-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'=-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}.\blacksquare$$

$$e)\ y'=(e^{tgx}-x\cos 2x)'\overset{3^\circ}{=}\left(e^{tgx}\right)'-\left(x\cos 2x\right)'=$$

$$=e^{tgx}\cdot(tgx)'-\left((x)'\cdot\cos 2x+x\cdot(\cos 2x)'\right)=$$

$$=e^{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-\left(\cos 2x+x\cdot(-\sin 2x)(2x)'\right)=\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}-\cos 2x+2x\cdot\sin 2x.\blacksquare$$

$$f)\ y'=\left(tg(\arcsin x)\right)'=\frac{1}{\cos^2(\arcsin x)}\cdot(\arcsin x)'=$$

$$=\frac{1}{\cos^2(\arcsin x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\cos^2(\arcsin x)}.\blacksquare$$

7. Найти производные следующих функций:

$a)\ y=\arccos\sqrt{1-x}$; $b)\ y=arctg\,\dfrac{1}{x}$; $c)\ y=arcctg\,5x^3$;

$d)\ y=\arcsin(1-x^2)$.

Решение.

Заданные функции являются сложными функциями, поэтому при их дифференцировании будем применять формулу (2.14) и соответствующие формулы таблицы производных основных функций (2.1), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13), (2.15), (2.16).

$$a)\ y'=\left(\arccos\sqrt{1-x}\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{1-x}\right)'=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-1+x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot(1-x)'=-\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot(-1)=\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}.\blacksquare$$

$$b)\ y'=\left(arctg\,\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{1+x^2}.\blacksquare$$

$$c)\ y'=(arcctg\,5x^3)'=-\frac{1}{1+(5x^3)^2}(5x^3)'=-\frac{1}{1+25x^6}\cdot(5\cdot 3x^2)=$$

$$=-\frac{15x^2}{1+25x^6}.\blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

Найти производные функций.

1. $y=\left(1+2\sqrt{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)^4$. 2. $y=\left(\cos^2 x+\dfrac{2}{3}\right)\sin^3 x$.

3. $y=e^x arctg\,e^x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$. 4. $y=e^{\sqrt{x}}-x^2 tg\,2x$.

5. $y=2^{\sin x}+\sqrt{x}ctg\,3x$. 6. $y=\arccos\sqrt{\dfrac{\cos 3x}{\cos^3 x}}$.

7. $y = arctg\,\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$. 8. $y = \ln\dfrac{x^2-2}{\sqrt{(6-2x^2)^3}}$.

9. $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$. 10. $y = \dfrac{1}{2}tg^2\sqrt{x} + \ln\cos\sqrt{x}$.

Ответы.

1. $y' = 4\left(1+2\sqrt{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)^3\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{6}{x^3}\right)$. 2. $y' = 5\sin^2 x\cos^3 x$.

3. $y' = e^x arctge^x$. 4. $y' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - 2xtg\,2x - \dfrac{2x^2}{\cos^2 2x}$.

5. $y' = 2^{\sin x}\ln 2\cos x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}ctg3x - \dfrac{3\sqrt{x}}{\sin^2 3x}$.

6. $y' = -\sqrt{\dfrac{3}{\cos x\cos 3x}}$. 7. $y' = -\dfrac{1}{2}$. 8. $y' = \dfrac{x^3}{(x^2-2)(3-x^2)}$.

9. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. 10. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}tg^3\sqrt{x}$.

2.2. Логарифмическое дифференцирование

Если требуется продифференцировать произведение нескольких функций или дробь, числитель и знаменатель которой содержат произведения, часто удобно сначала обе части данного выражения прологарифмировать по основанию e, а потом уже приступить к дифференцированию. Этот прием получил название *логарифмического дифференцирования.* К этому приему удобно прибегать и при дифференцировании выражений, содержащих корни из дробей. К нему прибегают всегда, когда следует продифференцировать функцию вида

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)}. \qquad (2.17)$$

Примеры.

1. Найти производные следующих функций:

$a)\ y = (x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3);\quad b)\ y = \dfrac{\sqrt[4]{x^2+7x-8}\cdot\sqrt[6]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+x-4}};$

$c)\ y = \dfrac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}.$

Решение.

Во всех предложенных примерах целесообразно воспользоваться логарифмическим дифференцированием.

$a)$ Если $y = (x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)$, то

$$\ln y = 2\ln(x+5) + 3\ln(2x-7) + \ln(x-2) + \ln(x+3). \qquad (2.18)$$

Будем считать функцию $\ln y$ сложной функцией переменной x. Тогда

$$\left(\ln y\right)' = \frac{1}{y}y'. \qquad (2.19)$$

Вычислив производную левой и правой части равенства (2.18) и, учитывая (2.19), получим

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x+5} + \frac{3}{2x-7}\cdot 2 + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}.$$

Умножая обе части этого равенства на $y = (x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)$, получим

$$y' = (x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)\left[\frac{2}{x+5} + \frac{6}{2x-7} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}\right].\blacksquare$$

b) Логарифмируя обе части данного выражения по основанию e, получим

$$\ln y = \frac{1}{4}\ln(x^2+7x-8) + \frac{1}{6}\ln(x^4-1) - \frac{1}{3}\ln(x^3-3x^2+x-4).$$

Дифференцируя обе части равенства с учетом (2.19), получим

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{4(x^2+7x-8)}\cdot(2x+7) + \frac{1}{6(x^4-1)}\cdot 4x^3 -$$

$$-\frac{1}{3(x^3-3x^2+x-4)}\cdot(3x^2-3x+1).$$

Умножая обе части этого равенства на y, получаем окончательно выражение искомой производной:

$$y' = \frac{\sqrt[4]{x^2+7x-8}\cdot\sqrt[6]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+x-4}}\left(\frac{2x+7}{4(x^2+7x-8)} + \frac{4x^3}{6(x^4-1)} -\right.$$

$$\left.-\frac{3x^2-3x+1}{3(x^3-3x^2+x-4)}\right).\blacksquare$$

c) Логарифмируя исходное выражение по основанию e, получим

$$\ln y = 2\ln(x+5) + 3\ln(x-4) - 5\ln(x+2) - 2\ln(x+4).$$

Дифференцируя обе части равенства, получим

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2} - \frac{2}{x+4}.$$

Умножая обе части этого равенства на y, получим

$$y' = \frac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}\left(\frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2} - \frac{2}{x+4}\right).\blacksquare$$

2. Найти производные следующих функций:

$a)\ y = x^x\,(x>0);\ \ b)\ y=(\sin x)^{\cos x}\,(0<x<\pi)$.

Р е ш е н и е.

В представленных задачах имеем дело с функциями вида (2.17). При дифференцировании таких функций непригодна ни формула (2.1), ни (2.2) так как в первой из них основание степени есть функция x, а показатель степени – величина постоянная, во второй из них основание степени – постоянная величина, а показатель степени – функция x. В рассматриваемом случае и основание степени, и показатель степени являются функциями x. Будем применять прием логарифмического дифференцирования.

$a)$ Беря натуральные логарифмы от обеих частей равенства, получим $\ln y = x\ln x.$ Продифференцируем обе части равенства, учитывая (2.19)

$$\frac{1}{y}y' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x};\qquad \frac{1}{y}y' = \ln x + 1.$$

Умножая обе части равенства на $y = x^x$, получим окончательно

$$y' = x^x\ (\ln x + 1).\blacksquare$$

$b)$ Беря натуральные логарифмы от обеих частей равенства, получим

$$\ln y = \cos x \ln\sin x$$

(так как $\sin x$ стоит под знаком логарифма, то является существенным условие $0<x<\pi$. Для значений x из этого интервала $\sin x>0$ и $\ln\sin x$ имеет смысл.)

Продифференцируем обе части равенства, учитывая (2.19)

$$\frac{1}{y}y' = -\sin x\cdot\ln\sin x + \cos x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x.$$

Умножая обе части последнего равенства на $y=(\sin x)^{\cos x}$, получим окончательно

$$y' = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\cdot\ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right).\blacksquare$$

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

Найти производные функций.

1. $y = \dfrac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}$. 2. $y = x^{x^2}\ (x>0)$. 3. $y=(\sin x)^{tgx}(0<x<\pi)$.

Ответы.

1. $y' = \dfrac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\left[\dfrac{6}{2x-1}+\dfrac{3}{2(3x+2)}-\dfrac{10}{5x+4}+\dfrac{1}{3(1-x)}\right]$.

2. $y' = x^{x^2+1}(1+2\ln x)$. 3. $y' = (\sin x)^{tgx}(1+\sec^2 x\cdot \ln\sin x)$.

2.3. Дифференцирование неявных функций

Если независимая переменная x и функция y связаны уравнением вида

$$F(x,y)=0, \tag{2.20}$$

которое не разрешено относительно y, то y называется *неявной функцией* x.

Для определения y' обе части уравнения (2.20) дифференцируются по x с учетом, что y есть функция x, и из полученного уравнения находится y'.

Пример.

Найти производные следующих функций:

1. $x^2+y^2-25=0$. 2. $x^3+\ln y - x^2e^y=0$.

Решение.

1. Так как y является функцией от x, то будем рассматривать y^2 как сложную функцию от x. Следовательно, $\left(y^2\right)'=2yy'$. Продифференцировав по x обе части данного уравнения, получим $2x+2yy'=0$, т.е. $y'=-\dfrac{x}{y}$.■

2. Дифференцируя по x обе части данного уравнения, получим

$$3x^2+\frac{1}{y}y'-2xe^y-x^2e^yy'=0.$$

Выразив из этого уравнения y', получим

$$y'=\frac{(2xe^y-3x^2)y}{1-x^2ye^y}.■$$

Задачи для самостоятельного решения.

Найти производные функций.

1. $x^3+y^3-3xy=0$. 2. $y=x\sin y+y\sin x=0$. 3. $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$.

Ответы.

1. $y'=\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$. 2. $y'=-\dfrac{y\cos x+\sin y}{x\cos y+\sin x}$. 3. $y'=-\dfrac{e^x-y2^{xy}\ln 2}{e^y-x2^{xy}\ln 2}$.

2.4. Дифференцирование функций, заданных параметрически

В геометрии и механике часто используется параметрический способ задания уравнения кривой. Кривую линию в этом случае рассматривают как геометрическое место последовательных положений движущейся точки, а координаты x и y этой точки выражают в виде непрерывных функций вспомогательной переменной t, которая называется параметром. Плоская кривая в этом случае определяется двумя уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \tag{2.21}$$

Параметр t должен изменяться в таком промежутке, чтобы при изменении его в этом промежутке точка с координатами (x, y) описывала всю кривую или рассматриваемую часть.

Задание кривой уравнениями (2.21) называется *параметрическим.*

Если из уравнений (2.21) можно исключить параметр t, то y определится как явная или неявная функция x. Однако, исключение параметра t из уравнений (2.21) является в большинстве случаев задачей трудной, а иногда и просто неразрешимой.

В механике уравнения (2.21) называются уравнениями движения точки. Если из этих уравнений исключить t, то получится уравнение траектории точки.

П р и м е р.

Исключить параметр t из уравнений и определить линию, определяемую полученным уравнением.

1. $\begin{cases} x = 8t^2 - 7, \\ y = 16t^2 + 4. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

Р е ш е н и е.

1. Из первого уравнения выразим t^2:

$$t^2 = \frac{x+7}{8}.$$

Подставим это значение t^2 во второе уравнение:

$$y = 16 \cdot \frac{x+7}{8} + 4; \Rightarrow y = 2x + 18.$$

Линия, определяемая этим уравнением, – прямая.■

2. Обе части первого уравнения разделим на a, а второго на b:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos t, \\ \dfrac{y}{b} = \sin t. \end{cases}$$

Обе части каждого из этих уравнений возведем в квадрат и почленно сложим:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \cos^2 t,$$

$$+$$

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sin^2 t,$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Полученное уравнение определяет эллипс. Когда $0 \le t \le 2\pi$, точка на эллипсе описывает всю кривую.■

Производная функции, заданной параметрически в виде (2.21), вычисляется по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{2.22}$$

Пример.

Найти производную от функций, заданных параметрически.

1. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$.

Решение.

1. Чтобы воспользоваться формулой (2.22), найдем $x'_t = 3t^2 + 3$, $y'_t = 15t^4 + 15t^2$. Тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2.$$■

2. $x'_t = -2\sin t + 2\sin 2t = 4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}$,

$$y'_t = 2\cos t - 2\cos 2t = 4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}.$$

Тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}} = tg\frac{3t}{2}.$$■

З а д а ч и   д л я   с а м о с т о я т е л ь н о г о   р е ш е н и я .

Найти производные функций, заданных параметрически.

1. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$. 2. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$.. 3. $\begin{cases} x = e^{-t}\sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

О т в е т ы .

1. $y'_x = ctg\,\dfrac{t}{2}.$ 2. $y'_x = -tgt.$ 3. $y'_x = e^{2t}.$

2.5. Дифференциал функции

Операция дифференцирования связана с определением дифференциала функции.

Из соотношения

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

можно записать

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$, величина, стремящаяся к нулю, когда приращение аргумента Δx стремится к нулю.

Отсюда

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \tag{2.23}$$

Величина приращения функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ определяется значением $f'(x)\Delta x$, так как второе слагаемое $\alpha(\Delta x)\Delta x$ в (2.23) при $\Delta x \to 0$ есть величина бесконечно малая более высокого порядка малости чем Δx.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения аргумента, равная произведению производной функции на приращение независимой переменной $dy = f'(x)\Delta x$.

Дифференциалом независимой переменной называется ее приращение: $dx = \Delta x$.

Тогда для дифференциала функции получим формулу

$$dy = f'(x)dx. \tag{2.24}$$

Формулу (2.23) можно переписать в виде

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x. \tag{2.25}$$

Если Δx мало, а $f'(x) \neq 0$, то величина $\alpha\Delta x$ значительно меньше, чем дифференциал функции dy, причем тем меньше, чем меньше Δx. Поэтому вычисление приращения функции Δy может быть с хорошим приближением заменено вычислением дифференциала функции dy, которое значительно проще.

$$\Delta y \approx dy. \tag{2.26}$$

Из формулы (2.26), учитывая, что $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, следует

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{2.27}$$

Эта формула позволяет по известному значению функции и ее производной в точке x найти приближенное значение функции в точке $x+\Delta x$, близкой к x, и тем самым дает возможность использовать дифференциал для приближенных вычислений.

<u>Свойства дифференциала функции</u>

1◦. $dc = 0,$ где $c = const$.

2◦. $d(cu) = cdu,$ где $c = const$.

3◦. $d(u \pm v) = du \pm dv.$

4◦. $d(u \cdot v) = udv + vdu.$

5◦. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{udv - vdu}{v^2}.$

П р и м е р ы.

1. Найти дифференциал функции:

$a)\ y = arctgx;$ $b)\ s = e^{t^3};$ $c)\ y = (2x-3)^3.$

Р е ш е н и е.

$a)\ dy = (arctgx)'dx; \Rightarrow dy = \dfrac{1}{1+x^2}dx.$■

$b)\ ds = \left(e^{t^3}\right)' dt; \Rightarrow ds = 3t^2 e^{t^3} dt.$■

$c)\ dy = \left((2x-3)^3\right)' dx; \quad \Rightarrow dy = 6(2x-3)^2 dx.$■

2. Определить приращение и дифференциал функции $y = x^3$ при переходе x от значения $x = 2$ к значению $x_1 = 2{,}01.$

Р е ш е н и е.

Решим задачу сначала в общем виде, то есть определим приращение заданной функции при произвольных значениях x и Δx, а потом уже при заданных.

$y = x^3;$ $y' = 3x^2;$ $dy = y'dx = 3x^2 dx.$

$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =;$

$\Delta y = \underbrace{3x^2\Delta x}_{dy} + \underbrace{3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}_{\alpha\Delta x}.$

Определим Δy и dy при заданных числовых значениях x и Δx. Начальное значение $x = 2$. Приращение аргумента

$$\Delta x = x_1 - x = 2{,}01 - 2 = 0{,}01,$$

а потому приращение функции

$$\Delta y = \underbrace{3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}01}_{dy} + \underbrace{3 \cdot 2 \cdot (0{,}01)^2 + (0{,}01)^3}_{\alpha\Delta x} = 0{,}12 + 0{,}0006 + 0{,}000001 = 0{,}120601.$$

$dy = 0{,}12.$

Определим погрешность, которая допущена при замене приращения функции ее дифференциалом.

Абсолютная погрешность

$$|\Delta y - dy| = |0{,}120601 - 0{,}12| = 0{,}000601.$$

Относительная погрешность

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \left|\frac{0{,}000601}{0{,}120601}\right| = 0{,}00498 \approx 0{,}005,$$

что составляет $0{,}5$ %.■

3. Показать, что при $\Delta x \to 0$ имеет место приближенное равенство

$$(1 + \Delta x)^\alpha \approx 1 + \alpha\Delta x.$$

Решение.

Рассмотрим функцию $y = x^\alpha$. Тогда

$$\Delta y = (x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha; \qquad dy = \alpha x^{\alpha-1} dx.$$

На основании (2.26) имеем

$(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha \approx \alpha x^{\alpha-1} dx$, а $(x + \Delta x)^\alpha \approx x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1} dx$.

Полагая здесь $x = 1$ и $\Delta x = dx$, получим

$$(1 + \Delta x)^\alpha \approx 1 + \alpha\Delta x. \qquad (2.28)$$

4. Используя формулу (2.28) найти приближенные значения:

$a)$ $(1{,}03)^5$; $b)$ $\sqrt{1{,}005}$; $c)$ $\sqrt[4]{267}$.

Решение.

$a)$ $(1{,}03)^5 = (1 + 0{,}03)^5 \overset{(2.28)}{\approx} 1 + 5 \cdot 0{,}03 = 1{,}15$ $(\Delta x = 0{,}03;\ \alpha = 5)$.■

$b)$ $\sqrt{1{,}005} = (1 + 0{,}005)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}005 = 1{,}0025$ $(\Delta x = 0{,}005;\ \alpha = \frac{1}{2})$.

$$c)\ \sqrt[4]{267} = \sqrt[4]{256 + 11} = \sqrt[4]{256\left(1 + \frac{11}{256}\right)} = \sqrt[4]{256} \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{11}{256}} = 4\sqrt[4]{1 + \frac{11}{256}} \approx$$

$$\approx 4\left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{256}\right) \approx 4(1 + 0{,}0107) = 4{,}0428 \ \left(\Delta x = \frac{11}{256};\ \alpha = \frac{1}{4}\right).$$■

5. Найти приближенное значение $\arcsin 0{,}51$.

Решение.

Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Тогда, используя (2.27), получим

$$\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \Delta x.$$

Полагая $x = 0{,}5;\ \Delta x = 0{,}01$, получаем

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}5^2}} 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 \approx 0{,}513. \blacksquare$$

6. Вычислить приближенное значение площади круга, радиус которого равен $3{,}02$ м.

Решение.

Воспользуемся известной формулой для определения площади круга $S(R) = \pi R^2$. Используя (2.27), получим $S(R + \Delta R) \approx S(R) + dS$. Но $dS = S'(R)\Delta R;\ \Rightarrow ds = 2\pi R \cdot \Delta R$. Полагая $R = 3;\ \Delta R = 0{,}02$, получаем

$$S(3{,}02) \approx \pi 3^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 0{,}02 = 9{,}12\pi \approx 28{,}66\ (м^2). \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти дифференциал функции $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$.

2. Определить приращение и дифференциал функции $y = 3x^2 + 5x - 4$ при переходе x от значения $x = 2$ к значению $x_1 = 1{,}98$.

3. Используя формулу (2.28) найти приближенные значения:

$a)\ \dfrac{5}{\sqrt[3]{1{,}002}}$; $\quad b)\ \sqrt{4{,}012}$; $\quad c)\ \sqrt[3]{0{,}9843}$.

4. Найти приближенное значение $arctg 1{,}5$.

5. Вычислить приближенное значение объема шара, радиус которого равен $2{,}01$ м.

Ответы.

1. $dy = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$. $\quad$ 2. $\Delta y = -0{,}3388;\quad dy = -0{,}34$.

3. $a)$ 4,997; $b)$ 2,003; $c)$ 0,995. $\quad$ 4. 0,811. $\quad$ 5. $34{,}04\ м^3$.

2.6. Производные высших порядков

Производная функции $y = f(x)$ в общем случае сама является функцией, а, следовательно, возможно повторное дифференцирование, определяющее производную второго порядка

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Если процесс дифференцирования продолжить, то n-ая производная вычисляется по формуле

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'=\frac{d^n f}{dx^n}$$

Для обозначения последовательных производных примем обозначения: $y'', y''', y^{(4)},\dots,y^{(n)}$.

Если $s=s(t)$ – закон прямолинейного движения точки, то вторая производная пути по времени $\frac{d^2 s}{dt^2}$ есть ускорение точки.

Примеры.

1. Найти y'' функций:

$a)$ $y=3x^4+5x^3-4x^2+8;$ $\qquad$ $b)$ $y=\arcsin x.$

Решение.

$a)$ $y'=12x^3+15x^2-8x;$ $\qquad$ $y''=36x^2+30x-8.$ ■

$b)$ $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$$y''=\left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.\blacksquare$$

2. Найти y''' функций:

$a)$ $y=\sqrt{x+5};$ $\qquad$ $b)$ $y=\dfrac{1+x}{1-x}.$

Решение.

$a)$ $y'=\left((x+5)^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}(x+5)^{-\frac{1}{2}};$ $\qquad$ $y''=-\dfrac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}};$

$$y'''=\frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8(x+5)^2\sqrt{x+5}}.\blacksquare$$

$b)$ $y'=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=\dfrac{2}{(1-x)^2};$ $\qquad$ $y''=2\cdot\left((1-x)^{-2}\right)'=-4\cdot(1-x)^{-3};$

$$y''=12\cdot(1-x)^{-4}=\frac{12}{(1-x)^4}.\blacksquare$$

3. Найти $y^{(n)}$ функции $y=a^x$.

Решение.

Здесь необходимо найти формулу, по которой можно определить производную любого порядка этой функции. Для этого следует найти несколько последовательных производных, и подметить закономерность, по которой они все образовываются.

$$y'=a^x\ln a;\qquad y''=a^x(\ln a)^2;\qquad y'''=a^x(\ln a)^3;\qquad y^{(4)}=a^x(\ln a)^4.$$

Нетрудно заметить, что каждая из найденных производных равна произведению a^x на $\ln a$ в степени, равной порядку производной. Полагая, что эта закономерность сохраняется для производной любого порядка, получаем $y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$. ■

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти y'' функции $y=\dfrac{1}{3}x^2\cdot\sqrt{1-x^2}+\dfrac{2}{3}\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x$.

2. Найти y''' функций: $a)$ $y=\dfrac{x}{6(x+1)}$; $b)$ $y=\dfrac{1}{2}\ln^2 x$; $c)$ $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

3. Найти $y^{(n)}$ функций: $a)$ $y=e^{kx}$; $b)$ $y=\sin x$; $c)$ $y=2^x+2^{-x}$.

Ответы.

1. $y''=2\sqrt{1-x^2}$.

2. $a)$ $y'''=\dfrac{1}{(x+1)^4}$; $b)$ $y'''=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$; $c)$ $y'''=-\dfrac{15}{8x^3\sqrt{x}}$.

3. $a)$ $y^{(n)}=k^ne^{kx}$; $b)$ $y^{(n)}=\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$;

$c)$ $y^{(n)}=\left[2^x+(-1)^n2^{-x}\right]\ln^n 2$.

2.7. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ таковы, что:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$;

или

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\pm\infty$;

2) имеют первые производные в окрестности точки $x=a$ (за возможным исключением самой точки a);

3) существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$,

тогда существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (2.29)$$

В случае, когда и отношение производных удовлетворяет соответствующим условиям, то следует перейти к отношению вторых производных.

Примеры.

1. Найти следующие пределы функций:

$a)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}$; $b)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$; $c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение.

$$a)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(2.29)}{=}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x^3-5x^2+2x+8)'}{(x^4-2x^3-16x^2+2x+15)'}=\lim_{x\to -1}\frac{3x^3-10x+2}{4x^3-6x^2-32x+2}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}.\blacksquare$$

$$b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(2.29)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^x-e)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1/x}{e^x}=\frac{3}{e}.\blacksquare$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(2.29)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(2.29)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}.\blacksquare$$

2. Найти следующие пределы функций:

$a)\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$; $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tg5x}$; $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

Решение.

$$a)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{(2.29)}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{(2.29)}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{6x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{(2.29)}{=}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{6}{e^x}=0.\blacksquare$$

$$b)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tg5x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{(2.29)}{=}\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{(tg3x)'}{(tg5x)'}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\left(\dfrac{3}{\cos^2 3x}\right)}{\left(\dfrac{5}{\cos^2 5x}\right)}=$$

$$=\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2=\frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2\overset{(2.29)}{=}$$

$$=\frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x}\right)^2=\frac{3}{5}\cdot\frac{25}{9}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)^2=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{-1}\right)^2=\frac{5}{3}.\blacksquare$$

$$c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{(2.29)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(xe^{x/2})'}{(x+e^x)'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x/2}\left(2+\frac{x}{2}\right)}{e^x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{x/2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{(2.29)}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x/2}}=0.\blacksquare$$

3. Найти следующие пределы функций:

$a)\ \lim\limits_{x\to0}\left(x^2\ln x\right);$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right).$

Р е ш е н и е.

a) Здесь мы имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Представим произведение функций в виде частного, а затем, получив неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to0}\left(x^2\ln x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{x^{-2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{(2.29)}{=}\lim_{x\to0}\frac{x^{-1}}{-2x^{-3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x^2=0.\blacksquare$$

b) Здесь мы имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Приведем дроби к общему знаменателю, а затем применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(2.29)}{=}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(2.29)}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^x}{(2+x)e^x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.\blacksquare$$

4. Найти следующие пределы функций:

$a)\ \lim\limits_{x\to+0}x^x;$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}};$ $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\ln x}$

Р е ш е н и е.

Представленные задачи относятся к задачам, имеющим неопределенности вида: 0^0; ∞^0; 1^∞, которые можно свести к неопределенности вида $0\cdot\infty$, которые, в свою очередь, можно решить с помощью правила Лопиталя. Это достигается с помощью тождества

$$\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}, \tag{2.30}$$

в предположении, что $f(x)>0$. Тогда

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}e^{\varphi(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)}, \tag{2.31}$$

и дело сводится к определению $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)$.

a) На основании (2.30) можем записать, что $x^x=e^{x\ln x}$, а потому

$$\lim_{x\to+0}x^x=\left[0^0\right]=\lim_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}x\ln x}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to+0}x\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{(2.29)}{=}\lim_{x\to+0}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}=-\lim_{x\to+0}x=0\right\}=$$

$$=e^0=1.\blacksquare$$

b) На основании (2.30) можем записать, что $x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$, а потому

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\left[\infty^0\right]=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{(2.29)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\right\}=e^0=1.\blacksquare$$

c) На основании (2.30) можем записать, что $(1+x)^{\ln x}=e^{\ln x\ln(1+x)}$, а потому

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\ln x}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to+0}e^{\ln x\ln(1+x)}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\ln x\ln(1+x)}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to+0}(\ln x\cdot\ln(1+x))=[\infty\cdot0]=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1+x)}{(\ln x)^{-1}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(2.29)}{=}\right.$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\frac{1}{1+x}\right)}{-(\ln x)^{-2}\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x\ln^2x}{1+x}=-\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2x}{1/x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{(2.29)}{=}-\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-x^{-2}}=$$

$$\left.=2\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{(2.29)}{=}2\lim_{x\to+0}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}=-2\lim_{x\to+0}x=0\right\}=e^0=1.\blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

Используя правило Лопиталя, найти следующие пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$. 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3x}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$.   5. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln tgx}{\ln tg2x}$.   6. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}(xctg\pi x)$;   8. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.   9. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to+0}(\sin x)^x$;   11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{\sin 2x}$.   12. $\lim\limits_{x\to+0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

Ответы.

1. $\dfrac{3}{5}$.   2. 2.   3. $\dfrac{1}{3}$.   4. $+\infty$.   5. 1.   6. $\dfrac{1}{2}$.

7. $\dfrac{1}{\pi}$.   8. $-\dfrac{1}{2}$.   9. 0.   10. 1.   11. 1.   12. e^{-6}.

2.8. Исследование функций

В исследовании поведения функции большой интерес представляет знание точек минимума, максимума, перегиба функции, а также интервалов возрастания, убывания, характер прогиба. Анализ поведения производных первого и второго порядков дают возможность ответа на интересующие вопросы.

Возрастание и убывание функции

Теорема о возрастании (убывании) функции. Если во всех точках некоторого интервала первая производная $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), то функция $f(x)$ в этом интервале возрастает (убывает).

При решении задач, в которых требуется определить интервалы возрастания и убывания функции, следует прежде всего определить область существования этой функции.

Примеры.

Определить интервалы возрастания и убывания функций:

1. $y=x^3-12x+11$.   2. $y=\dfrac{2x^2}{1-x^2}$.   3. $y=x(1+\sqrt{x})$.

Решение.

1. Областью существования данной функции является вся ось Ox. $y'=3x^2-12$. Чтобы определить интервалы возрастания функции, решим неравенство

$$3x^2-12>0; \qquad x^2-4>0; \qquad x^2>4; \qquad |x|>2.$$

Следовательно, данная функция возрастает в двух бесконечных интервалах: $(-\infty,-2)$ и $(2,+\infty)$.

Чтобы определить интервалы возрастания функции, решим неравенство $3x^2 - 12 < 0$. Его решением будет $|x| < 2$. Отсюда следует, что функция убывает на интервале $(-2, +2)$.■

2. Область существования функции

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2}; \Rightarrow y' = \frac{2(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}.$$

Числитель и знаменатель последней дроби положительны при всех значениях $x \in D(f)$. Следовательно, функция возрастает на всей области существования.■

3. Область существования функции: $D(f) = [0, +\infty)$. Найдем производную функции $y' = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Очевидно, производная функции положительна на области определения функции, следовательно, функция возрастает на $D(f)$.■

Точки экстремума функции

Необходимое условие существования экстремума функции.

Если функция $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 имеет экстремум, то $f'(x_0) = 0$ или не существует.

Точка x_0, в которой $f'(x_0) = 0$, называется *стационарной точкой.*

Точки, в которых $f'(x) = 0$, или $f'(x)$ не существует, называются *критическими точками*.

Первое достаточное условие существования экстремума функции

Если x_0 – критическая точка функции $f(x)$ и при произвольном достаточно малом $h > 0$ выполняются неравенства $f'(x_0 - h) > 0$, $f'(x_0 + h) < 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум; если же $f'(x_0 - h) < 0$, $f'(x_0 + h) > 0$, то функция в точке x_0 имеет минимум.

Если знаки $f'(x_0 - h)$, $f'(x_0 + h)$ одинаковы, то функция $f(x)$ в точке x_0 экстремума не имеет.

Для исследования функции на экстремум при помощи первой производной (первый способ), следует:

1. Найти $f'(x)$ – первую производную функции.

2. Найти критические точки функции $f(x)$, то есть те точки $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ из интервала (a, b), в которых $f'(x) = 0$, $f'(x) = \infty$ или не существует.

3. Все критические точки расположить в порядке возрастания их абсцисс в интервале (a, b): $a < x_1 < x_2 < x_3 <, \ldots < x_n < b$.

4. Внутри каждого из интервалов $(a, x_1); (x_1, x_2); (x_2, x_3); \ldots; (x_n, b)$ установить, какой знак имеет $f'(x)$.

5. Сравнить знаки $f'(x)$ в двух соседних интервалах, переходя последовательно слева направо от первого интервала к последнему. Если при таком переходе знаки $f'(x)$ в двух соседних интервалах различны, то экстремум в критической точке перехода есть. При этом максимум будет, если знак меняется с $+$ на $-$, а минимум, если он поменяется с $-$ на $+$. В противном случае, экстремума в рассматриваемой критической точке нет.

6. Найти значения функции $f(x)$ в точках, где она имеет экстремум (экстремальные значения функции).

<u>Второе достаточное условие существования экстремума функции</u>

Если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум: при $f''(x_0) < 0$ – максимум, при $f''(x_0) > 0$ – минимум.

Для исследования функции на экстремум при помощи второй производной (второй способ), следует:

1. Найти $f'(x)$ – первую производную функции.

2. Решить уравнение $f'(x) = 0$.

3. Найти $f''(x)$ – вторую производную функции.

3. Исследовать знак $f''(x)$ в каждой точке, найденной в п.2. Если в рассматриваемой точке $f''(x) > 0$, то в этой точке будет минимум, а если $f''(x) < 0$, то в этой точке будет максимум. В случае, если в рассматриваемой точке $f''(x) = 0$, то исследование следует провести с помощью первого способа.

Примеры.

Исследовать на экстремум функции:

1. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$. 2. $y = (x-5)e^x$. 3. $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Решение.

1. Проведем исследование первым способом. Областью существования функции является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

Находим $f'(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$.

Найдем стационарные точки: $f'(x) = 0$.

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0; \Rightarrow x(x^2 - x - 3) = 0; \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^2 - x - 3 = 0. \end{array}\right.$$

Следовательно, стационарными будут точки $x_1 = 0; x_2 = 3; x_3 = -1$.

Производная конечна при любом x, следовательно, критическими точками будут только найденные.

Располагаем критические точки в порядке возрастания: $-1;\ 0;\ 3$.

Рассмотрим интервалы: $(-\infty, -1);\ (-1, 0);\ (0, 3);\ (3, +\infty)$.

Определяем знак первой производной внутри каждого из интервалов, подставляя в выражение для производной любое значение x из соответствующего интервала. Первая производная в интервалах имеет следующую последовательность знаков: $-, +, -, +$.

Таким образом, в критической точке $x=-1$ имеет место минимум, в критической точке $x=0$ – максимум, а в критической точке $x=3$ – минимум.

Найдем экстремальные значения функции:

$$f(-1)=\frac{17}{12};\quad f(0)=2;\quad f(3)=-\frac{37}{4}.\blacksquare$$

2. Проведем исследование первым способом. Областью существования функции является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

Находим $f'(x)=(x-4)e^x$.

Найдем стационарные точки: $f'(x)=0$.

$$(x-4)e^x=0;\ \Rightarrow x-4=0\,(e^x>0);\ \Rightarrow x=4.$$

Производная конечна при любом x, следовательно, критической будет точка $x=4$.

Рассмотрим интервалы: $(-\infty, 4);\ (4, +\infty)$.

Очевидно, первая производная в интервалах имеет следующую последовательность знаков: $-, +$ и в точке $x=4$ функция имеет минимум: $f(4)=-e^4$.■

3. Проведем исследование вторым способом. Областью существования функции является отрезок $[-1; +1]$.

Находим $f'(x)=\left(x\sqrt{1-x^2}\right)'=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

Найдем стационарные точки:

$$f'(x)=0;\ \Rightarrow \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=0;\ \Rightarrow 1-2x^2=0;\ \Rightarrow x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2};\ x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Находим $f''(x)=\left(\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=\dfrac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

Определим знак второй производной в стационарных точках:

$$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0;\; f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$$

Следовательно, в точке $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ функция имеет минимум, а в точке $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ – максимум.

Найдем экстремальные значения функции:

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2};\; f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$.■

Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых она принимает наибольшее и наименьшее значения. Этих значений функция достигает или в критических точках, или на концах отрезка $[a, b]$.

Поэтому, чтобы определить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, надо определить критические точки функции и вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка $[a, b]$. Из полученных значений самое большое будет наибольшим значением функции, а самое маленькое – наименьшим.

Примеры.

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x - x^3$ на отрезке $[-2, 3]$.

Решение.

Находим $f'(x) = 3 - 3x^2$.

Найдем стационарные точки: $f'(x) = 0; \Rightarrow 3 - 3x^2 = 0; \Rightarrow x = \pm 1.$

Определим значения функции в стационарных точках:

$f(-1) = -2;\quad f(1) = 2$.

Вычисляем значения функции на концах отрезка:

$f(-2) = 2;\quad f(3) = -18.$

Из полученных четырех значений выбираем наибольшее и наименьшее: наибольшее значение функции на отрезке $[-2, 3]$ равно 2, а наименьшее равно -18.

2. Найти такой цилиндр, который имел бы наибольший объем при данной полной поверхности S.

Решение.

Пусть радиус основания цилиндра равен x, а высота цилиндра равна y. Тогда

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi y; \Rightarrow y = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right).$$

Следовательно, объем цилиндра $V = \pi x^2 \cdot y$ выразится так:

$$V = V(x) = \pi x^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right) = \frac{S}{2}x - \pi x^3.$$

Задача сводится к исследованию функции на максимум при $x > 0$. Найдем производную функции $V(x)$ и приравняем ее к нулю.

$$V'(x) = \left(\frac{S}{2}x - \pi x^3\right)' = \frac{S}{2} - 3\pi x^2; \Rightarrow \frac{S}{2} - 3\pi x^2 = 0; \Rightarrow x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$$

Найдем вторую производную: $V''(x) = \left(\frac{S}{2} - 3\pi x^2\right)' = -6\pi x$. При $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, очевидно, $V''(x) < 0$ и объем имеет единственный максимум, который и будет наибольшим значением функции, причем

$$y = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{S - 2\pi\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right)^2}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}} = 2x,$$

т. е. осевое сечение цилиндра должно быть квадратом.■

3. Основание треугольника равно a, а его периметр $2p$. Определить его две другие стороны так, чтобы площадь его была наибольшей.

Решение.

Пусть вторая сторона треугольника $b = x$. Тогда его третья сторона равна $c = 2p - a - x$. Известно, что площадь треугольника определяется по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, т. е.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)}, \quad (0 < x < p).$$

Таким образом, из условия задачи определена функция, наибольшее значение которой надо найти. Очевидно, что эта функция достигает наибольшего значения, когда ее подкоренное выражение будет наибольшим. В подкоренном выражении первые два постоянные сомножители можно не учитывать, а потому будем определять наибольшее значение $f(x) = (p-x)(a+x-p)$. Находим первую производную:

$$f'(x) = -(a+x-p) + (p-x) = 2p - a - 2x.$$

Решая уравнение $2p-a-2x=0$, находим, что $b=x=p-\dfrac{a}{2}$. Третья сторона $c=2p-a-\left(p-\dfrac{a}{2}\right)=p-\dfrac{a}{2}$, т.е. $b=c$, и рассматриваемый треугольник – равнобедренный. Так как $f''(x)=-2<0$, то при $x=p-\dfrac{a}{2}$ площадь достигает наибольшего значения.■

Точки перегиба функции

Достаточное условие выпуклости (вогнутости) функции

Если $f''(x)<0$ $(f''(x)>0)$ в интервале (a,b), то функция является выпуклой (вогнутой) в этом интервале.

Точки кривой, в которых $f''(x)=0$ или $f''(x)=\infty$, а также те из них, в которых $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками второго рода*.

Точки перегиба функции следует искать среди критических точек второго рода.

Если x_0 – критическая точка второго рода и для любой малой величины $h>0$ выполняются неравенства: $f''(x_0-h)>0$, $f''(x_0+h)>0$ или $f''(x_0-h)<0$, $f''(x_0+h)>0$, то точка кривой $y=f(x)$ с абсциссой x_0 является точкой перегиба.

Примеры.

Определить интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба функции:

1. $y=5x^2+20x+9$. 2. $y=x^3$. 3. $y=(x-5)^{5/3}+2$.

Решение.

1. Область существования функции – интервал $(-\infty,+\infty)$.

$$y'=10x+20; \qquad y''=10>0.$$

Так как $y''>0$ при любом значении x, то кривая вогнута на всем интервале $(-\infty,+\infty)$ и точек перегиба нет.

2. Область существования функции – интервал $(-\infty,+\infty)$.

$$y'=3x^2; \qquad y''=6x.$$

Решением уравнения $6x=0$ является $x=0$. Вторая производная конечна и существует при любом x, а потому $x=0$ – единственная критическая точка второго рода. Область существования функции эта точка разделяет на два интервала: $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$, в каждом из которых y'' сохраняет знак. Для $x\in(-\infty,0)$ вторая производная

$y'' < 0$ и функция выпуклая. Для $x \in (0, +\infty)$ вторая производная $y'' > 0$ и функция вогнутая. Таким образом, при переходе через точку $x = 0$ вторая производная меняет знак. Эта точка является точкой перегиба. Координаты точки перегиба $(0,0)$.■

3. Область определения функции – интервал $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = \frac{5}{3}(x-5)^{2/3}; \quad y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}}.$$

Вторая производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует в точке $x = 5$, которая является критической точкой второго рода. Эта точка делит область существования на два интервала: $(-\infty, 5)$ и $(5, +\infty)$, в каждом из которых y'' сохраняет знак. Для $x \in (-\infty, 5)$ вторая производная $y'' < 0$ и функция выпуклая. Для $x \in (5, +\infty)$ вторая производная $y'' > 0$ и функция вогнутая. Таким образом, при переходе через точку $x = 5$ вторая производная меняет знак. Эта точка является точкой перегиба. Координаты точки перегиба $(5; 2)$.■

Асимптоты функции

Прямая L называется *асимптотой* кривой $y = f(x)$, если расстояние точки $M(x; y)$ кривой от прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат.

Различают асимптоты: вертикальные, горизонтальные, наклонные.

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если существуют пределы:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx].$$

или

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx].$$

Примеры.

Найти асимптоты кривых:

1. $y = \dfrac{1}{x}$. 2. $y = \dfrac{2}{x^2 - 4}$. 3. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

Р е ш е н и е.

1. Находим вертикальные асимптоты. Для этого необходимо найти те значения x, вблизи которых функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ неограниченно возрастает по абсолютной величине. Таким значением будет $x=0$ и уравнение вертикальной асимптоты $x=0$, т.е. это ось Oy.

Находим горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0; \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0,$$

и кривая имеет единственную горизонтальную асимптоту $y=0$, т.е. это ось Ox.■

2. Для определения вертикальных асимптот находим те значения x, вблизи которых функция $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$ неограниченно возрастает по абсолютной величине. Таким значениями являются $x=-2$ и $x=+2$. Вертикальными асимптотами будут прямые $x=-2$ и $x=+2$.

Для определения горизонтальных асимптот находим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2-4}=0; \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2-4}=0.$$

Горизонтальная асимптота одна $y=0$, т.е. это ось Ox.■

3. Для определения вертикальных асимптот находим те значения x, вблизи которых функция $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$ неограниченно возрастает по абсолютной величине. Так как при $x\to-2$, функция $f(x)\to\infty$, то прямая $x=-2$ является вертикальной асимптотой данной кривой.

Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}=\infty$, то горизонтальных асимптот кривая не имеет.

Найдем наклонные асимптоты: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+3}{x(x+2)}=1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-2x+3}{x+2}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+3}{x+2}=-4.$$

Таким образом, наклонная асимптота имеет уравнение: $y=x-4$.■

Задачи для самостоятельного решения.

1. Определить интервалы возрастания и убывания функций:

$a)\ y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1;$ $\quad b)\ y = \dfrac{2x}{1+x^2};$ $\quad c)\ y = (x^2-1)^{3/2}.$

2. Исследовать на экстремум функции:

$a)\ y = 4x^3 + 24x^2 + 32x;$ $\quad b)\ y = \sqrt[3]{x^2};$ $\quad c)\ y = x + \sqrt{3-x}.$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-3, 2]$.

4. Найти наибольший объем конуса, образующая которого равна l.

5. Требуется изготовить цилиндрический сосуд, заданного объема V, открытый сверху. Определить его радиус и высоту так, чтобы поверхность была наименьшей.

6. Определить интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба функции:

$a)\ y = -6x^2 + 8x - 11;$ $b)\ y = x^3 - 12x^2 + x - 1;$ $c)\ y = (x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}.$

7. Найти асимптоты кривых:

$a)\ y = x^2 e^{-x};$ $\quad b)\ y = \dfrac{x-2}{x+4};$ $\quad c)\ y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}.$

Ответы.

1. $a)$ возрастает в интервалах $(-\infty, 1)$ и $(3, +\infty)$, убывает в интервале $(1, 3)$; $b)$ возрастает в интервале $(-1, +1)$, убывает в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(+1, +\infty)$; $c)$ убывает в интервале $(-\infty, -1)$, возрастает в интервале $(+1, +\infty)$.

2. $a)$ $x = -4 -$ точка минимума $f(-4) = 0$, $x = -2 -$ точка максимума $f(-2) = 16$, $x = 0 -$ точка минимума $f(0) = 0$; $b)$ $x = 0 -$ точка минимума $f(0) = 0$; $c)$ $x = \dfrac{11}{4} -$ точка максимума $f\left(\dfrac{11}{4}\right) = \dfrac{13}{4}$.

3. $y_{наим} = 2;$ $y_{наиб} = 66.$ 4. $V = \dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi l^3.$ 5. $R = H = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}.$

6. $a)$ выпукла на всем интервале $(-\infty, +\infty)$; $b)$ выпукла в интервале $(-\infty, 4)$, вогнута в интервале $(4, +\infty)$, $x = 4 -$ точка перегиба, $f(4) = -125$; $c)$ выпукла в интервале $(-\infty, 1)$, вогнута в интервале $(1, +\infty)$, $x = 1 -$ точка перегиба, $f(1) = 0$.

7. $a)$ $y = 0 -$ горизонтальная асимптота; $b)$ $x = -4 -$ вертикальная асимптота, $y = 1 -$ горизонтальная асимптота; $c)$ $y = x - 6 -$ наклонная асимптота.

2.9. Общее исследование функции и построение эскиза графика функции по характерным точкам

Приобретенные навыки в определении интервалов монотонности функции, экстремума функции, интервалов выпуклости и вогнутости графика функции, его точек перегиба и асимптот позволяют провести полное исследование функции и построить эскиз графика функции, который, хотя и не будет отличаться большой точностью, но все же даст возможность усмотреть характерные свойства и особенности исследуемой функции.

Для полного исследования функции $y = f(x)$ необходимо:

1) найти область существования функции;

2) исследовать функцию на четность и нечетность;

3) найти точки пересечения графика функции с осями координат;

4) исследовать функцию на непрерывность;

5) найти асимптоты кривой $y = f(x)$;

6) найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы;

7) найти интервалы выпуклости и вогнутости функции и точки ее перегиба.

Для большей точности эскиза графика можно построить еще и отдельные точки графика. Получаемые данные полезно сразу наносить на чертеж.

Примеры.

1. Исследовать функцию и построить эскиз графика $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение.

Для построения эскиза графика функции воспользуемся планом полного исследования функции.

1) Функция существует при всех значениях $x \neq -1$. Значит, $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2) Исследуем вопрос о наличии центра симметрии и оси симметрии. Проверим для этого выполняются ли равенства $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что ни одно из этих равенств не выполняется, так что функция не является четной или нечетной и ни центра, ни оси симметрии график функции не имеет.

3) Найдем точки пересечения графика функции с осью Ox $(y = 0)$:

$\dfrac{x^3}{2(x+1)^2} = 0; \Rightarrow x^3 = 0; \Rightarrow x = 0$. Получаем точку $(0, 0)$.

Найдем точки пересечения графика функции с осью Oy $(x=0)$: $y=\dfrac{0^3}{2(0+1)^2}$; $\Rightarrow y=0$. Получаем точку $(0,0)$.

4) Функция непрерывна при всех значениях x, кроме $x=-1$. Так как $\lim\limits_{x\to -1\pm 0}\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty$, то точка $x=-1$, является точкой разрыва II рода.

5) Найдем вертикальные асимптоты. Так как $\lim\limits_{x\to -1} y=\infty$, то $x=-1$ является вертикальной асимптотой графика.

Найдем горизонтальные асимптоты.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\pm\infty,$$

а это означает, что горизонтальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\cdot 2(x+1)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3+2x^2+x}=\frac{1}{2}.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}\cdot x\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$$

Наклонная асимптота одна: $y=\dfrac{1}{2}x-1$.

6) Определяем интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы.

Находим первую производную: $y'=\dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$. Определяем критические точки.

$$y'=0;\Rightarrow\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}=0;\Rightarrow x_1=-3;\ x_2=0.$$

Кроме этого, при $x=-1$ первая производная не существует. Критические точки разделяют область существования функции на интервалы: $(-\infty,\,-3)$; $(-3,\,-1)$; $(-1,\,0)$; $(0,\,+\infty)$.

В каждом из этих интервалов производная функции сохраняет знак. Легко убедиться, что последовательность знаков первой производной имеет вид: $+,-,+,+$.

Следовательно, в интервале $(-\infty,\,-3)$ функция возрастает, в интервале $(-3,\,-1)$ – убывает, в интервалах $(-1,\,0)$ и $(0,\,+\infty)$ функция возрастает.

При $x=-3$ функция имеет максимум и $f(-3)=-\frac{27}{8}$. Точка $x=-1$ не является точкой экстремума, так как не входит в область определения функции.

7) Определим интервалы выпуклости и вогнутости функции и точки ее перегиба.

Находим вторую производную: $y''=\frac{3x}{(x+1)^4}$. Определяем критические точки второго рода.

$y''=0;\ \Rightarrow \frac{3x}{(x+1)^4}=0;\ \Rightarrow x=0$.

Кроме этого, при $x=-1$ вторая производная не существует. Критические точки разделяют область существования функции на интервалы: $(-\infty,\ -1);\ (-1,\ 0);\ (0,\ +\infty)$.

В каждом из этих интервалов вторая производная функции сохраняет знак. Легко убедиться, что последовательность знаков второй производной имеет вид: $-, -, +$.

Следовательно, в интервалах $(-\infty,\ -1)$ и $(-1,\ 0)$ – кривая выпукла, в интервале $(0,\ +\infty)$ кривая вогнута.

Таким образом, при $x=0$ вторая производная равна нулю, а при переходе через эту точку меняет знак. Это указывает на то, что при $x=0$, имеет точку перегиба. Координаты точки перегиба $(0,\ 0)$.

Все полученные данные наносим на чертеж и получаем эскиз графика (рис. 2.1).

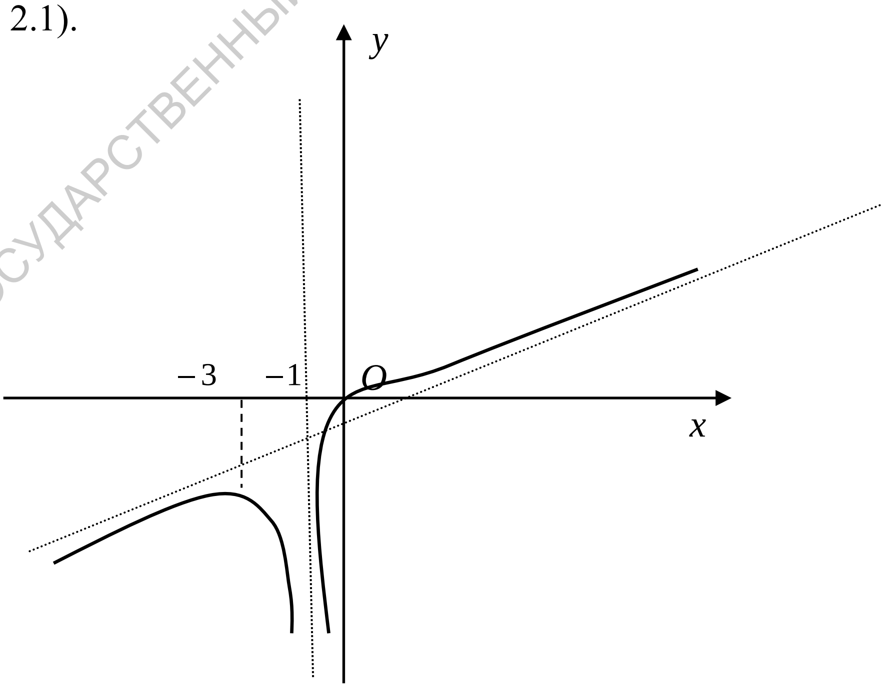

Рис. 2.1

2. Исследовать функцию и построить эскиз графика $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

Решение.

1) Функция существует при всех значениях x. Значит, $D(f)=(-\infty,\ +\infty)$.

2) Так как не выполняются условия: $f(-x)=f(x)$ и $f(-x)=-f(x)$, то функция не является четной или нечетной и ни центра, ни оси симметрии график функции не имеет.

3) Существуют точки пересечения с осями координат:

с осью Ox: если $y=0$, то $x=0$;

с осью Oy: если $x=0$, то $y=1$.

4) Функция всюду определена и непрерывна.

5) Вертикальных асимптот функция не имеет. Найдем горизонтальные асимптоты.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{1-x^3}=\mp\infty,$$

а это означает, что горизонтальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}=-1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{1-x^3}+x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=0.$$

Наклонная асимптота одна: $y=-x$.

6) Определяем интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы.

Находим первую производную: $y'=\dfrac{-x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$. Определяем критические точки.

$$y'=0;\ \Rightarrow \frac{-x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}=0;\ \Rightarrow x=0.$$

Кроме этого, при $x=-1$ первая производная не существует. $y'<0$ при всех значениях x, следовательно, функция убывает на всей числовой оси и точек экстремума не имеет.

7) Определим интервалы выпуклости и вогнутости функции и точки ее перегиба.

Находим вторую производную: $y''=\dfrac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$. Определяем критические точки второго рода.

$$y'' = 0; \Rightarrow \frac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} = 0; \Rightarrow x = 0.$$

Кроме этого, при $x = 1$ вторая производная не существует. Критические точки разделяют область существования функции на интервалы: $(-\infty, 0)$; $(0, 1)$; $(1, +\infty)$.

В каждом из этих интервалов вторая производная функции сохраняет знак. Легко убедиться, что последовательность знаков второй производной имеет вид: $+, -, +$.

Следовательно, в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ кривая вогнута, в интервале $(0, 1)$ – кривая выпукла.

Таким образом, при $x = 0$ вторая производная равна нулю, а при переходе через эту точку меняет знак. Это указывает на то, что при $x = 0$, имеет точку перегиба. Координаты точки перегиба $(0, 1)$.

При $x = 1$ вторая производная не существует (функция в этой точке определена), а при переходе через эту точку меняет знак. Это указывает на то, что при $x = 1$, имеет точку перегиба. Координаты точки перегиба $(1, 0)$.

Все полученные данные наносим на чертеж и получаем эскиз графика (рис. 2.2).

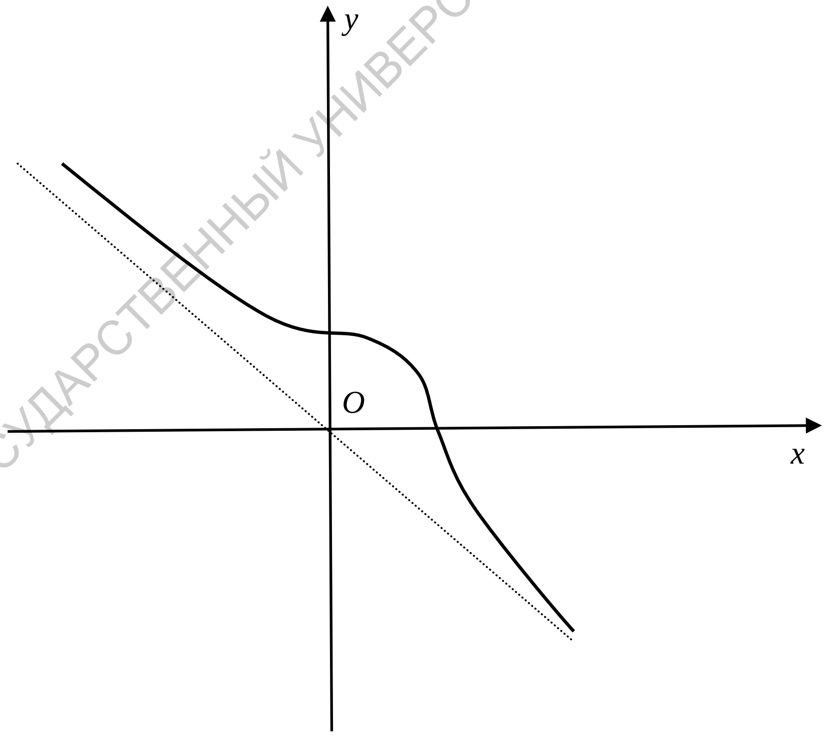

Рис. 2.2

3. Исследовать функцию и построить эскиз графика $y=\dfrac{e^x}{x}$.

Р е ш е н и е.

1) Функция существует при всех значениях x, кроме $x=0$. Значит, $D(f)=(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)$.

2) Так как $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, а $f(-x)=\dfrac{e^{-x}}{-x}$, то ни одно из равенств $f(-x)=f(x)$ и $f(-x)=-f(x)$ не имеет места. Тогда функция не является четной или нечетной и ни центра, ни оси симметрии график функции не имеет.

3) Точек пересечения с осями координат у функции нет.

4) Функция непрерывна на области определения, а в точке $x=0$ имеет разрыв II рода.

5) Найдем вертикальные асимптоты. Вертикальная асимптота имеет уравнение $x=0$ и, таким образом, ось Oy является вертикальной асимптотой кривой. При этом

$$\lim_{x\to-0} y=\lim_{x\to-0}\frac{e^x}{x}=-\infty; \qquad \lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to+0}\frac{e^x}{x}=+\infty.$$

Найдем горизонтальные асимптоты.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0,$$

а это означает, что горизонтальная асимптота имеет уравнение $y=0$.

Найдем наклонные асимптоты: $y=kx+b$.

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x\cdot x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty.$$

Таким образом, при $x\to+\infty$ наклонной асимптоты нет.

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x\cdot x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2}=0.$$

Таким образом, и при $x\to-\infty$ наклонной асимптоты нет.

6) Определяем интервалы монотонности функции.

Находим первую производную: $y'=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$. Определяем критические точки.

$$y'=0;\ \Rightarrow \frac{e^x(x-1)}{x^2}=0;\ \Rightarrow x=1.$$

Кроме этого, при $x=0$ первая производная не существует. Критические точки разделяют область существования функции на интервалы: $(-\infty,\ 0)$; $(0,\ 1)$; $(1,\ +\infty)$.

В каждом из этих интервалов производная функции сохраняет знак. Легко убедиться, что последовательность знаков первой производной имеет вид: $-, -, +$.

Следовательно, в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, 1)$ функция убывает, а в интервале $(1, +\infty)$ функция возрастает.

При $x = 1$ функция имеет минимума и $f(1) = e$.

7) Определим интервалы выпуклости и вогнутости функции и точки ее перегиба.

Находим вторую производную: $y'' = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$. Определяем критические точки второго рода.

$$y'' = 0; \Rightarrow \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} = 0; \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \ (e^x > 0).$$

Последнее уравнение не имеет действительных корней.

При $x = 0$ вторая производная не существует. Критические точки разделяют область существования функции на интервалы: $(-\infty, 0)$; $(0, +\infty)$.

В каждом из этих интервалов вторая производная функции сохраняет знак. Легко убедиться, что последовательность знаков второй производной имеет вид: $-, +$.

Следовательно, в интервалах $(-\infty, 0)$ кривая выпукла, в интервале $(0, +\infty)$ кривая вогнута.

Точка $x = 0$, при переходе через которую вторая производная поменяла знак, не является точкой перегиба, поскольку при $x = 0$ заданная функция не существует. Все полученные данные наносим на чертеж и получаем эскиз графика (рис. 2.3).

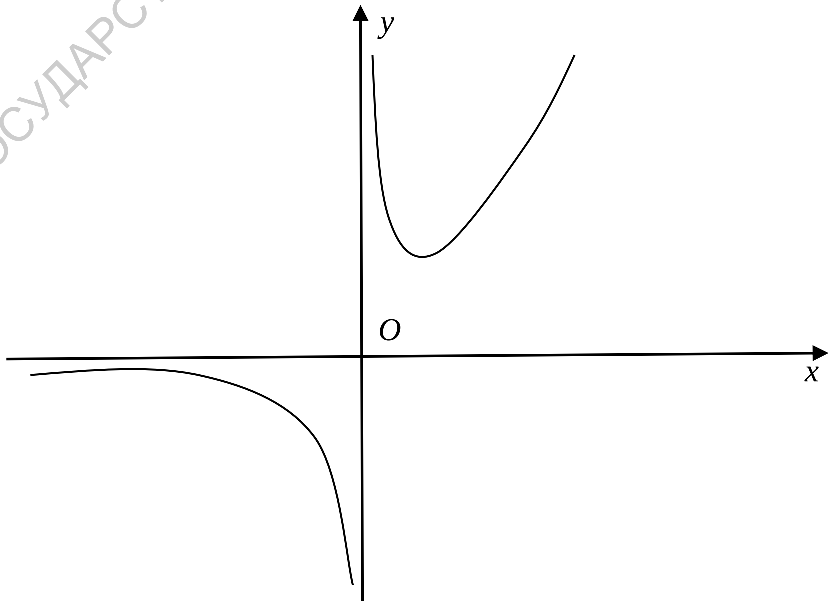

Рис. 2.3.

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я .
Исследовать функцию и построить эскиз графика.

1. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$. 2. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$. 3. $y=x\ln x$. 4. $y=(x-1)\sqrt{x}$.

5. $y=\dfrac{x^3}{x^2-2}$. 6. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 7. $y=3\sqrt[3]{x}-x$. 8. $y=x+e^{-x}$.

2.10. Приложения производной к задачам геометрии и механики

Если кривая задана уравнением $y=f(x)$, то $f'(x_0)=tg\alpha$, где $\alpha-$угол, образованный с положительным направлением оси Ox касательной к кривой в точке с абсциссой x_0.

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \qquad (2.32)$$

Нормалью к кривой $y=f(x)$ называется прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания.

Уравнение нормали к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \qquad (2.33)$$

Углом между двумя кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0,y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0. Этот угол находится по формуле

$$tg\varphi=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}. \qquad (2.34)$$

Если кривая задана уравнением $y=f(x)$, то ее кривизна K определяется по формуле:

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (2.35)$$

Радиусом кривизны называется величина, обратная кривизне: $R=\dfrac{1}{K}$.

Кривизна и радиус кривизны кривой, по определению – величины неотрицательные.

Координаты α и β центра кривизны линии в точке $M_1(x_1;\, y_1)$ вычисляются по формулам:

$$\alpha = x_1 - \frac{y'(x_1)(1+y'^2(x_1))}{y''(x_1)}, \qquad \beta = y_1 + \frac{1+y'^2(x_1)}{y''(x_1)}. \qquad (2.36)$$

Эволютой линии называется множество ее центров кривизны. Формулы для координат центра кривизны можно рассматривать как параметрические уравнения эволюты, где параметром является абсцисса x исходной линии.

Если при прямолинейном движении точки задан закон движения $s = s(t)$, то скорость движения в момент t_0 есть производная пути по времени: $v = s'(t_0)$.

Примеры.

1. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x = 1$?

Решение.

Найдем производную функции $f'(x) = \frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$. В точке $x = 1$ $f'(1) = 3$, т.е. $f'(1) = tg\alpha = 3$, откуда $\alpha = arctg\,3 \approx 71^\circ 34'$.■

2. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точке $M_0(1; -1)$.

Решение.

Из уравнения кривой найдем производную:

$$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0; \Rightarrow y' = -\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}.$$

Следовательно, $y'(M_0) = -\dfrac{1+(-1)^2}{2\cdot 1\cdot(-1) + 6\cdot(-1)^3} = \dfrac{1}{4}$.

Уравнение касательной

$y + 1 = \frac{1}{4}(x-1)$, или $x - 4y - 5 = 0$.

Уравнение нормали

$y + 1 = -4(x-1)$, или $4x + y - 3 = 0$.■

3. Найти угол между параболами $y = 8 - x^2$ и $y = x^2$.

Решение.

Решив совместно уравнения парабол, находим точки их пересечения $A(2; 4)$ и $B(-2; 4)$.

Продифференцируем функции парабол:

$f_1(x)=8-x^2; \Rightarrow f_1'(x)=-2x^2;$

$f_2(x)=x^2; \Rightarrow f_2'(x)=2x.$

Найдем угловые коэффициенты касательных к параболам в точке $A(2;4)$, т. е. при $x=2$: $k_1=f_1'(2)=-4;$ $k_2=f_2'(2)=4$. Следовательно, на основании (2.34), получим

$$tg\varphi_1=\frac{4+4}{1-16}=-\frac{8}{15}; \Rightarrow \varphi_1=arctg\left(-\frac{8}{15}\right).$$

Аналогично определяется угол между кривыми в точке B: $\varphi_2=arctg\left(\frac{8}{15}\right)$.■

4. Найти кривизну линии $y=-x^3$ в точке с абсциссой $x=\frac{1}{2}$.

Решение.

Имеем $y'=-3x^2;$ $y''=-6x$. При $x=\frac{1}{2}$ эти производные принимают значения: $y'=-\frac{3}{4};$ $y''=-3$ и по формуле (2.35)

$$K=\frac{|-3|}{\left(1+\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{192}{125}.■$$

5. Найти координаты центра кривизны линии $x^3+y^4=2$ в точке $M(1;1)$.

Решение.

Продифференцируем данное уравнение дважды.

$3x^2+4y^3y'=0;$

$6x+12y^2y'^2+4y^3y''=0.$

Так как $x=1;$ $y=1$, то из первого уравнения $y'=-\frac{3}{4}$, а из второго уравнения $y''=-\frac{51}{16}$. Тогда, подставляя полученные значения в (2.36), получим координаты центра кривизны линии

$$\alpha=1-\frac{-\frac{3}{4}(1+\frac{9}{16})}{-\frac{51}{16}}=\frac{43}{68}, \qquad \beta=1+\frac{1+\frac{9}{16}}{-\frac{51}{16}}=\frac{26}{51}.$$

Следовательно, $C\left(\frac{43}{68};\frac{26}{51}\right)$.■

6. Составить уравнение эволюты параболы $2y^2 = 2x+1$.

Решение.

Продифференцируем дважды уравнение параболы.

$4yy' = 2; \Rightarrow y' = \frac{1}{2y}$;

$4y'^2 + 4yy'' = 0; \Rightarrow y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{4y^3}$.

Определяем координаты центра кривизны.

$$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = y^2 - \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2y}\cdot\left(1+\frac{1}{4y^2}\right)}{\left(-\frac{1}{4y^3}\right)} = 3y^2;$$

$$\beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1+\frac{1}{4y^2}}{\left(-\frac{1}{4y^3}\right)} = y - 4y^3 - y = -4y^3.$$

Получаем уравнение эволюты в параметрической форме: $\begin{cases}\alpha = 3y^2,\\ \beta = -4y^3.\end{cases}$

Исключив параметр y, найдем уравнение эволюты в явной форме: $\beta^2 = \frac{16}{27}\alpha^3$.■

7. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s = \frac{t^5}{5} + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{8}$ (t – в секундах, s – в метрах). Определить скорость движения в конце второй секунды.

Решение.

Находим производную пути по времени: $\frac{ds}{dt} = t^4 + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi t}{8}$. При $t = 2$ имеем $\frac{ds}{dt} = 16 + \frac{1}{8}\sqrt{2} \approx 16{,}18$. Следовательно, $v = 16{,}18$ *м/с*.■

Список рекомендованной литературы

Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. СПб.: Питер, 2009.

Данко П.Е. , Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. В 2 ч.: Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.

Демидович В.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие. М.: Астрель, 2005.

Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3-е изд., испр. и доп. М.: Айрис-пресс, 2004.

Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. М.: Физ.-мат. лит., 2006.

Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Дмитрий Письменный. – 8-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009.

Щипачев В.С. Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов / Под ред. акад. А. Н. Тихонова. М.: Высшая школа, 1985.