Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского

И.А. Кузнецова, Н.В. Сергеева

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИЙ

Учебно-методическое пособие для студентов механико-математического факультета

Саратов
2015

УДК 519.83(075.8+0.72.8)
ББК 22.18.73
К89

Кузнецова, И.А.
К89 Руководство к решению задач по теории игр: учеб.-метод. пособие для студентов мех.-мат. фак./ И.А. Кузнецова, Н.В. Сергеева. 2015.– 38 с.

Пособие содержит подробные решения типовых задач по теории игр, необходимые теоретические сведения, задания для практических занятий и варианты контрольных работ для студентов заочного отделения.

Для студентов механико-математического факультета.

Рекомендуют к печати:
Кафедра теории функций и приближений
Саратовского государственного университета,
доктор физ.-мат. наук, профессор В.В. Розен

УДК 519.83(075.8+0.72.8)
ББК 22.18.73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В связи с тем, что в современном математическом образовании теории игр уделяется все большее внимание, а в самом курсе акцент делается на применение теории игр к решению практических задач, возникла необходимость в написании методического пособия, отвечающего возникшим требованиям. Настоящее пособие охватывает различные разделы теории игр, включая и нетрадиционные, такие, как принятие решения в условиях риска с возможностью проведения эксперимента и иерархические игры. По каждой теме приведены необходимые теоретические сведения, разобраны типовые примеры и дан набор задач, позволяющий как проводить практические занятия на дневном отделении, так и составлять варианты контрольных работ для заочников. Пособие предназначено для студентов механико-математического факультета, но может использоваться и на других факультетах при изучении таких курсов, как, например, «Методы оптимизации в экономике».

1. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА

Пусть $X = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$ – множество стратегий игрока, $Y = \{1, \ldots, j, \ldots, m\}$ - множество состояний природы, $A = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ – матрица выигрыша. Рассмотрим следующие способы оценки стратегий, задающие критерий для их сравнения.

Критерий Лапласа:

$$L(i) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Данный критерий основан на гипотезе равновозможности всех состояний природы. В качестве оценки стратегии берется соответствующий ей средний выигрыш.

Критерий Вальда:

$$V(i) = \min_{1 \le j \le m} a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Этот критерий основан на гипотезе крайней осторожности. Игрок при выборе стратегии рассчитывает на наихудший возможный вариант.

Критерий Гурвица (с показателем $\alpha \in [0, 1]$):

$$G_{\alpha}(i) = \alpha \min_{1 \le j \le m} a_{ij} + (1 - \alpha) \max_{1 \le j \le m} a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь предполагается, что наихудший вариант реализуется с вероятностью α, а наилучший – с вероятностью $1 - \alpha$.

Критерий математического ожидания (с априорным распределением $\overline{y}_0 = \left(y_1^0, \ldots, y_j^0, \ldots, y_m^0\right)$):

$$M_{\overline{y}_0}(i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

В данном случае предполагается, что известно априорное распределение вероятностей $\overline{y}_0$ на множестве состояний природы. Оценкой стратегии является математическое ожидание выигрыша при данном предположении.

Оптимальной в смысле выбранного критерия считается оценка, максимизирующая данный критерий.

Пример 1.1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 5 & 5 & 25 \\ 5 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти стратегии игроков, оптимальные в смысле критериев Лапласа, Вальда, Гурвица (при $\alpha = 0.2$) и математического ожидания (при $\overline{y}_0 = (0.6; 0.1; 0.2; 0.1)$).

Решение.

Подсчитаем оценку каждой стратегии по критерию Лапласа.

$$L(1) = \frac{1}{4}(10 + 11 + 12 + 13) = \frac{46}{4} = 11.5;$$
$$L(2) = \frac{1}{4}(5 + 5 + 5 + 25) = \frac{40}{4} = 10;$$
$$L(3) = \frac{1}{4}(5 + 20 + 20 + 20) = \frac{65}{4} = 16.25;$$
$$L(4) = \frac{1}{4}(20 + 5 + 5 + 5) = \frac{35}{4} = 8.75.$$

Максимум достигается на <u>третьей</u> стратегии, которая и является оптимальной в данном случае.

Подсчитаем оценку каждой стратегии по критерию Вальда.

$$V(1) = \min(10, 11, 12, 13) = 10;$$
$$V(2) = \min(5, 5, 5, 25) = 5;$$
$$V(3) = \min(5, 20, 20, 20) = 5;$$
$$V(4) = \min(20, 5, 5, 5) = 5.$$

Здесь оптимальной является <u>первая</u> стратегия игрока.

Подсчитаем оценку каждой стратегии по критерию Гурвица.

$$G_{0.2}(1) = 0.2 \cdot \min(10, 11, 12, 13) + (1 - 0.2) \cdot \max(10, 11, 12, 13) =$$
$$= 0.2 \cdot 10 + 0.8 \cdot 13 = 12.4;$$
$$G_{0.2}(2) = 0.2 \cdot 5 + 0.8 \cdot 25 = 21;$$
$$G_{0.2}(3) = 0.2 \cdot 5 + 0.8 \cdot 20 = 17;$$
$$G_{0.2}(4) = 0.2 \cdot 5 + 0.8 \cdot 20 = 17.$$

В этом случае оптимальной является <u>вторая</u> стратегия игрока.

Подсчитаем оценку каждой стратегии по критерию математического ожидания.

$$M_{\overline{y}_0}(1) = 0.6 \cdot 10 + 0.1 \cdot 11 + 0.2 \cdot 12 + 0.1 \cdot 13 = 10.8;$$
$$M_{\overline{y}_0}(2) = 0.6 \cdot 5 + 0.1 \cdot 15 + 0.2 \cdot 5 + 0.1 \cdot 25 = 7;$$
$$M_{\overline{y}_0}(3) = 0.6 \cdot 5 + 0.1 \cdot 20 + 0.2 \cdot 20 + 0.1 \cdot 20 = 11;$$
$$M_{\overline{y}_0}(4) = 0.6 \cdot 20 + 0.1 \cdot 5 + 0.2 \cdot 5 + 0.1 \cdot 5 = 14.$$

В данном случае оптимальной является четвертая стратегия игрока.

Результаты решения данной задачи рекомендуется оформлять в виде следующей таблицы.

$i \setminus j$	1	2	3	4	$L(i)$	$V(i)$	$G_{0.2}(i)$	$M_{\overline{y}_0}(i)$
1	10	11	12	13	11.5	10	12.4	10.8
2	5	5	5	25	10	5	21	7
3	5	20	20	20	16.25	5	17	11
4	20	5	5	5	8.75	5	17	14

Замечание. Стратегии, оптимальные в смысле разных критериев, могут не совпадать, так как данные критерии основаны на разных гипотезах.

Задание 1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} s+5 & t+6 & u+7 & v+8 \\ t & v & s & u+20 \\ u & t+15 & v+15 & s+15 \\ u+15 & s & v & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти стратегии игрока, оптимальные в смысле критериев Лапласа, Вальда, Гурвица (при $\alpha = 0.1$) и математического ожидания (при $\overline{y}_0 = (0,7; 0.1; 0.1; 0.1)$).

Примечание. Здесь и в следующих заданиях s, t, u, v задает преподаватель.

2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ РИСКА С ВОЗМОЖНОСТЬЮ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

При принятии решения в условиях риска используется критерий математического ожидания. Это оправдано, когда принятие решения производится многократно в одинаковых условиях. Если же решение принимается только один раз, и его последствия существенны для принимающего решение, то имеет смысл проведение эксперимента, позволяющего уточнить состояние природы. При этом следует учитывать стоимость такого эксперимента. Поскольку пересчет вероятностей в зависимости от результата эксперимента можно производить по формуле Байеса, то такой подход к принятию решений в условиях риска с возможностью проведения эксперимента называется байесовским. Проиллюстрируем данный подход на следующем примере [6].

Пример 2.1. Бурение нефтяной скважины.

Руководитель поисковой группы должен принять решение: бурить нефтяную скважину или нет. Скважина может оказаться «сухой» (С), то есть без нефти, «маломощной» (М), то есть с малым содержанием нефти и «богатой» (Б), то есть с большим содержанием нефти. Стратегиями руководителя является: x_1 – бурить, x_2 – не бурить. Таблица прибылей (в тысячах долларов) задается следующем матрицей:

$x \setminus y$	С	М	Б
x_1	-70	50	200
x_2	0	0	0

Кроме того, руководителю группы известно распределение вероятностей на множестве состояний природы, то есть вектор $\overline{y}_0 = (0.5, 0.3, 0.2)$.

Применяя критерий математического ожидания, получим:

$$M_{\overline{y}_0}(x_1) = (-70) \cdot 0.5 + 50 \cdot 0.3 + 200 \cdot 0.2 = 20,$$
$$M_{\overline{y}_0}(x_2) = 0 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.2 = 0,$$

то есть оптимальной стратегией является x_1 – бурить. Но поскольку решение здесь принимается только один раз и его последствия связаны с большими материальными затратами, руководитель считает целесообразным до принятия основного решения о бурении скважины провести эксперимент (сейсморазведку) с целью определить тип структуры грунта в данной местности. Структура грунта может быть открытой либо замкнутой. Кроме того, руководитель имеет таблицу результатов подобных экспериментов, проведенных в данной местности.

Состояния скважины	Типы грунта		Всего
	открытый	замкнутый	
С	45	5	50
М	11	19	30
Б	4	16	20
Всего	60	40	100

Теперь руководитель должен принять сложное уже решение: а) проводить ли эксперимент (его стоимость 10 тысяч долларов); б) если проводить, то как в дальнейшем поступать в зависимости от результатов этого эксперимента.

Опишем методику нахождения сложного решения по шагам.

1. Строим дерево анализа сложных альтернатив (рис. 1). Ветви дерева соответствуют логическим возможностям: α – отказ от эксперимента, β – проведение эксперимента, x_1 – бурить, x_2 – не бурить. С, М, Б – возможные состояния природы, откр. и замкн. – возможные результаты эксперимента.

Вершины дерева можно рассматривать как позиции игры с природой. Позиции, в которых ход делает игрок, помечены прямоугольниками, а в которых ход делает природа – кружками.

2. Для каждой ветви, являющейся ходом природы (то есть исходящей из позиции, помеченной кружком), поставляется вероятность этого хода. При этом при отказе от эксперимента используется данное распределение вероятностей на множестве состояний природы, а при проведении эксперимента для подсчета условных вероятностей используется таблица результатов эксперимента. Таким образом имеем:

$$P\,(\text{С}) = 0.5, \quad P\,(\text{М}) = 0.3, \quad P\,(\text{Б}) = 0.2,$$

$$P_{\text{откр}}\,(\text{С}) = \frac{45}{60}, \quad P_{\text{откр}}\,(\text{М}) = \frac{11}{60}, \quad P_{\text{откр}}\,(\text{Б}) = \frac{4}{60},$$

$$P_{\text{замк}}\,(\text{С}) = \frac{5}{40}, \quad P_{\text{замк}}\,(\text{М}) = \frac{19}{40}, \quad P_{\text{замк}}\,(\text{Б}) = \frac{16}{40},$$

$$P\,(\text{откр}) = \frac{60}{100} = 0.6, \quad P\,(\text{замк}) = \frac{40}{100} = 0.4.$$

3. Производим оценку всех позиций дерева, спускаясь от конечных позиций к началу. Конечные позиции оцениваются согласно таблице прибылей. При переходе к позиции следующего уровня применяем «операцию усреднения» (то есть подсчет соответствующего математического ожидания) для позиций природы и «операцию максимизации» для позиций игрока. При этом помечаем знаком ∞ тот ход, который приносит

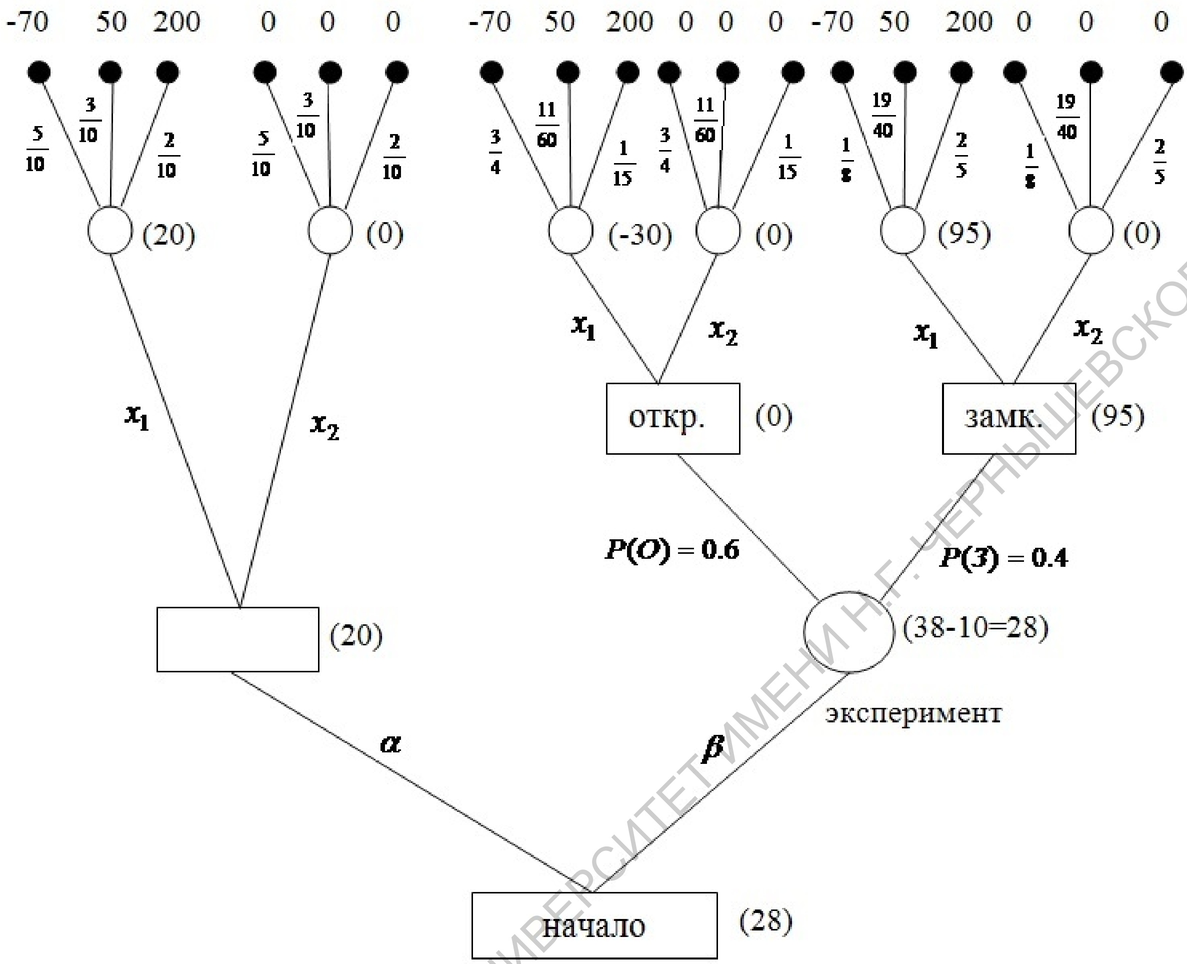

Рис. 1.

в данной позиции максимальную прибыль. Для позиции, соответствующей проведению эксперимента, вычитаем его стоимость. Таким образом, имеем:

$$(-70)\cdot 0.5 + 50\cdot 0.3 + 200\cdot 0.2 = 20;$$
$$0\cdot 0.5 + 0\cdot 0.3 + 0\cdot 0.2 = 0;$$
$$\max(20,0) = 20;$$
$$(-70)\cdot\frac{45}{60} + 50\cdot\frac{11}{60} + 200\cdot\frac{4}{60} = -30;$$
$$0\cdot\frac{45}{60} + 0\cdot\frac{11}{60} + 0\cdot\frac{4}{60} = 0;$$
$$\max(-30,0) = 0$$
$$(-70)\cdot\frac{5}{40} + 50\cdot\frac{19}{40} + 200\cdot\frac{16}{40} = 95;$$
$$0\cdot\frac{5}{40} + 0\cdot\frac{19}{40} + 0\cdot\frac{16}{40} = 0;$$
$$\max(95,0) = 95;$$

$$0 \cdot 0.6 + 95 \cdot 0.4 = 38;$$
$$38 - 10 = 28;$$
$$\max(20, 28) = 28.$$

Таким образом, результат исследования следующий. Целесообразным является решение – эксперимент (сейсморазведку) проводить. Если она покажет, что структура грунта открытая, то бурить не нужно, если, что закрытая – нужно. При этом ожидаемая прибыль равна 28 тысяч долларов.

Задание 2. Для задачи о бурении нефтяной скважины построить дерево анализа сложных альтернатив, найти сложное решение и подсчитать ожидаемую прибыль, если таблица прибылей задается матрицей

	С	М	Б
x_1	$-10(t+5)$	$10(u+s+2)$	$100(v+1)$
x_2	0	0	0

таблица результатов эксперимента – матрицей

Состояния скважины	Типы грунта		Всего
	открытый	замкнутый	
С	$38+t$	$7-t$	45
М	$10+s$	$20-s$	30
Б	$7-u$	$18+u$	25
Всего	$55+s+t-u$	$45+u-s-t$	100

а стоимость эксперимента равна $5v$ тысяч долларов.

3. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Антагонистическая игра – это система $\Gamma = (X, Y, F)$, где X – множество стратегий первого игрока, Y - множество стратегий второго игрока, $F(x, y)$ – функция выигрыша. Первый игрок стремится максимизировать функцию F, а второй игрок -– минимизировать эту функцию. Будем считать, что множества X и Y компактны, а функция $F(x, y)$ – непрерывна. Нижняя цена игры обозначается $\underline{v}$ и определяется равенством

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y).$$

Верхняя цена игры обозначается $\overline{v}$ и определяется равенством

$$\overline{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y).$$

Справедливо неравенство $\underline{v} \le \overline{v}$. Если выполняется равенство $\underline{v} = \overline{v}$, то их общее значение обозначается v и называется ценой игры. В этом случае существует седловая точка, то есть пара стратегий (x_0, y_0), удовлетворяющая условию

$$\forall x \in X \qquad \forall y \in Y \qquad F(x, y_0) \le F(x_0, y_0) \le F(x_0, y),$$

где x_0 – оптимальная стратегия первого игрока, а y_0 – оптимальная стратегия второго игрока. Оптимальную стратегию первого игрока x_0 можно находить из условия

$$\min_{y \in Y} F(x_0, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = v,$$

а оптимальную стратегию второго игрока y_0 – из условия

$$\max_{x \in X} F(x, y_0) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y) = v.$$

Пример 3.1. Пусть $\Gamma = (X, Y, F)$ – антагонистическая игра,

$$X = Y = [-4, 1], \qquad F(x, y) = 5x^3 + y + 10.$$

Найти

$$\varphi(x) = \min_{y \in Y} F(x, y),$$
$$\psi(y) = \max_{x \in X} F(x, y),$$
$$\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = \max_{x \in X} \varphi(x_0),$$
$$\overline{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y) = \min_{y \in Y} \psi(y_0),$$

и седловые точки (если они есть).

Решение.

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) = \min_{y\in[-4,1]} \left(5x^3 + y + 10\right) = 5x^3 - 4 + 10 = 5x^3 + 6;\\
&\underline{v} = \max_{x\in[-4,1]} \left(5x^3 + 6\right) = 5\cdot 1^3 + 6 = 11 = \varphi(1); \qquad x_0 = 1;\\
&\psi(y) = \max_{x\in[-4,1]} \left(5x^3 + y + 10\right) = 5\cdot 1^3 + y + 10 = y + 15;\\
&\overline{v} = \min_{y\in[-4,1]} (y + 15) = -4 + 15 = 11 = \psi(-4); \qquad y_0 = -4.
\end{aligned}$$

Поскольку $\underline{v} = \overline{v} = 11$, то $v = 11$ и пара стратегий $(1; -4)$ является седловой точкой. В самом деле, нужно проверить выполнение соотношения

$$\forall x \in [-4,1] \qquad \forall y \in [-4,1] \qquad 5\cdot x^3 - 4 + 10 \le 5\cdot 1^3 - 4 + 10 \le 5\cdot 1^3 + y + 10,$$

равносильного условию

$$\forall x \in [-4,1] \qquad \forall y \in [-4,1] \qquad 5\cdot x^3 + 6 \le 11 \le y + 15.$$

Получили верное утверждение.

Задание 3. Пусть $\Gamma = (X, Y, F)$ – антагонистическая игра, где $X = Y = [-u, v]$, $F(x,y) = sx^{2v-1} + y^{2t-1} + u$.

Найти

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) = \min_{y\in Y} F(x,y),\\
&\psi(y) = \max_{x\in X} F(x,y),\\
&\underline{v} = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} F(x,y) = \max_{x\in X} \varphi(x_0),\\
&\overline{v} = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} F(x,y) = \min_{y\in Y} \psi(y_0)
\end{aligned}$$

и седловые точки (x_0, y_0) (если они есть).

4. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Антагонистическая игра называется матричной, если множества стратегий игроков конечны. В этом случае можно положить

$$X = \{1, \ldots, n\}, \quad Y = \{1, \ldots, m\}, \quad F(i,j) = a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Таким образом, матричная игра полностью определяется матрицей $A = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Седловая точка матричной игры — это пара индексов (i_0, j_0), удовлетворяющая условию

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \forall j = 1, \ldots, m \qquad a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}.$$

Числа $\underline{v}$ и $\overline{v}$ подсчитываются по формулам

$$\underline{v} = \max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le m} a_{ij},$$

$$\overline{v} = \min_{1 \le j \le m} \max_{1 \le i \le n} a_{ij},$$

Если $\underline{v} = \overline{v} = v$, то оптимальные стратегии игроков i_0 и j_0 можно находить из равенств

$$\min_{1 \le j \le m} a_{i_0 j} = \max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le m} a_{ij} = v$$

и

$$\max_{1 \le i \le n} a_{ij_0} = \min_{1 \le j \le m} \max_{1 \le i \le n} a_{ij} = v.$$

Пример 4.1. Подсчитать $\underline{v}$, $\overline{v}$ и найти седловые точки (если они есть) для игр со следующими матрицами:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 16 & 24 & 19 & 16 \\ 16 & 19 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 16 & 19 \\ 4 & 24 & 11 & 11 \end{pmatrix}; \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 & 15 \\ 4 & 8 & 20 & 15 \\ 8 & 12 & 15 & 4 \\ 15 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix};$$

$$3)\ A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 6 & 14 & 21 \\ 2 & 21 & 2 & 18 & 10 \\ -2 & 10 & 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 6 & 14 & 14 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. Достроим к матрице A столбец из $\min\limits_{1 \le j \le 4} a_{ij}$ и строку из $\max\limits_{1 \le i \le 4} a_{ij}$. Получим:

$i \setminus j$	1	2	3	4	$\min\limits_{1\le j\le 4} a_{ij}$
1	16	24	19	16	16
2	16	19	11	7	7
3	7	7	16	19	7
4	4	24	11	11	4
$\max\limits_{1\le i\le 4} a_{ij}$	16	24	19	19	

Максимальный элемент достроенного столбца будет, по определению, нижней ценой игры. Таким образом, $\underline{v} = 16$. Минимальный элемент достроенной строки является, по определению, верхней ценой игры. Следовательно, $\overline{v} = 16$. Поскольку $\underline{v} = \overline{v} = 16$, то $v = 16$ и в игре существует седловая точка. Так как максимум в столбце из минимумов достигается в первой строке, то $i_0 = 1$. Так как минимум в строке достигается в первом столбце, то $j_0 = 1$. Следовательно $(1, 1)$ – седловая точка и выполняется условие $\forall i = 1, \ldots, 4 \quad \forall j = 1, \ldots, 4 \quad a_{i1} \le a_{11} \le a_{1j}$, то есть элемент $a_{11} = 16$ является минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце.

2. Аналогично предыдущей задаче получаем:

$i \setminus j$	1	2	3	4	$\min\limits_{1\le j\le 4} a_{ij}$
1	8	12	4	15	4
2	4	8	20	15	4
3	8	12	15	4	4
4	15	8	8	8	8
$\max\limits_{1\le i\le 4} a_{ij}$	15	12	20	15	

Имеем: $\underline{v} = 8 \; \overline{v} = 12 \; \underline{v} \le \overline{v}$, седловой точки нет.

3. Достраиваем матрицу, получаем:

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	$\min\limits_{1\le j\le 4} a_{ij}$
1	6	10	6	14	21	6
2	2	21	2	18	10	2
3	-2	10	2	6	10	-2
4	6	10	6	14	14	6
$\max\limits_{1\le i\le 4} a_{ij}$	6	21	6	18	21	

Здесь $\underline{v} = 6$, $\overline{v} = 6$, следовательно $v = 6$ и седловая точка существует. Поскольку $i_0 \in \{1, 4\}$, $j_0 \in \{1, 3\}$, то в игре существует четыре седловых точки: $(1, 1)\,; \quad (1, 3)\,; \quad (4, 1)\,; \quad (4, 3)$.

Задание 4. Подсчитать $\underline{v}$, $\overline{v}$ и найти седловые точки (если они есть) для игр со следующими матрицами:

$$1)\quad A=\begin{pmatrix} t+12 & v+20 & u+15 & t+12\\ t+12 & u+15 & v+7 & u+3\\ u+3 & u+3 & t+12 & u+15\\ s & v+20 & v+7 & v+7 \end{pmatrix};$$

$$2)\quad A=\begin{pmatrix} v+4 & t+8 & s & u+11\\ s & v+4 & v+16 & u+11\\ v+4 & t+8 & u+11 & s\\ u+11 & v+4 & v+4 & v+4 \end{pmatrix};$$

$$3)\quad A=\begin{pmatrix} u+2 & v+6 & u+2 & t+10 & v+17\\ t-2 & v+17 & t-2 & u+14 & v+6\\ s-6 & v+6 & t-2 & u+2 & v+6\\ u+2 & v+6 & u+2 & t+10 & u+10 \end{pmatrix}.$$

5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

Матричная игра (со смешанными стратегиями) — это система $\Gamma = (X, Y, F)$. Здесь X – множество векторов $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условиям

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

Y – множество векторов $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_m)$, удовлетворяющих условиям

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \sum_{j=1}^{m} y_j = 1,$$

функция $F(\overline{x}, \overline{y})$ определяется формулой

$$F(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j,$$

где $(a_{ij}) = A$ – данная матрица размерности $n \times m$. В данном случае i-й чистой стратегии первого игрока соответствует n-мерный вектор $\overline{e}_i = \left(0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0\right)$, j-й чистой стратегии второго игрока соответствует m- мерный вектор $\overline{f}_j = \left(0, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots, 0\right)$. Оптимальные смешанные стратегии игроков $\overline{x}_0$ и $\overline{y}_0$ находятся из условий

$$\min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^0 = \max_{\overline{x}} \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i,$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^0 = \min_{\overline{y}} \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_j.$$

Пусть матрица A матричной игры имеет размерность 2×2, то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда, в случае отсутствия у данной матрицы седловой точки, оптимальные смешанные стратегии игроков можно записать в виде $\overline{x}_0 = (x_0, 1 - x_0)$, $\overline{y}_0 = (y_0, 1 - y_0)$, где $0 < x_0 < 1$, $0 < y_0 < 1$. Числа x_0 и y_0 можно находить по формулам

$$x_0 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad y_0 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Цена игры v определяется равенством $v = F(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$.

Пример 5.1. Найти оптимальные стратегии игроков и вычислить ее цену в игре с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -20 & 30 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}.$$

Решение.

В данной игре $\underline{v} = -20$, $\overline{v} = 10$, $\underline{v} < \overline{v}$, следовательно, седловой точки матрицы не существует. Тогда имеем:

$$x_0 = \frac{-20-10}{-20-20-30-10} = \frac{3}{8}, \quad y_0 = \frac{-20-30}{-20-30-30-10} = \frac{5}{8},$$

$$x_0 = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right), \quad y_0 = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right),$$

$$F(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = -20 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} + 30 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} + 10 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} - 20 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = -1.25.$$

Пусть матрица A матричной игры имеет размерность $2 \times m$. Тогда ее можно записать в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_j & \dots a_m \\ b_1 & \dots & b_j & \dots b_m \end{pmatrix}.$$

Каждую смешанную стратегию первого игрока $\overline{x}$ можно задать таким образом: $\overline{x} = (x, 1-x)$, $0 \le x \le 1$. Оптимальная стратегия первого игрока $\overline{x}_0 = (x_0, 1-x_0)$ определяется из условия

$$\min_{1 \le j \le m} (x_0 a_j + (1-x_0) b_j) = \max_{0 \le x \le 1} \min_{1 \le j \le m} (x a_j + (1-x) b_j).$$

При решении игр $2 \times m$ при $m > 2$ бывает полезно пользоваться следующим правилом доминирования: если j_0-й столбец матрицы доминирует выпуклую комбинацию некоторых других столбцов, т.е.

$$\forall i = 1, \dots, n \quad a_{ij_0} \ge \sum_{k=1}^{l} \lambda_k a_{ij_k}, \quad \lambda_k \ge 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad \sum_{k=1}^{l} \lambda_k = 1,$$

то при решении игры j_0-й столбец может быть вычеркнут из матрицы. При этом оптимальная стратегия первого игрока и цена игры не изменится, а оптимальная стратегия $\overline{y}_0$ исходной игры получается из оптимальной стратегии $\overline{y}_0'$ игры с вычеркнутым столбцом следующим образом: если

$$\overline{y}_0' = \left(y_1^0, \ldots, y_{j_0-1}, y_{j_0+1}, \ldots, y_m^0\right),$$

то

$$\overline{y}_0 = \left(y_1^0, \ldots, y_{j_0-1}, 0, y_{j_0+1}, \ldots, y_m^0\right).$$

Аналогично при решении игр $n \times 2$ можно вычеркнуть строку, которая доминируется выпуклой комбинацией некоторых других строк.

Значение x_0 удобно определять графически. Для этого введем обозначения

$$\varphi_j(x) = a_j x + b_j(1-x), \quad j = 1, \ldots, m, \quad \varphi(x) = \min_{1 \le j \le m} \varphi_j(x).$$

Здесь $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$ – линейные функции, $\varphi(x)$ – вогнутая функция, x_0 – точка достижения максимума функции $\varphi(x)$. Построив график данных функций (рис. 2), получим:

если $x_0 = 0$ или $x_0 = 1$, то для второго игрока оптимальной будет чистая стратегия, соответствующая функции $y = \varphi_{j_0}(x)$, график которой проходит через точку $(0, \varphi(0))$ или $(1, \varphi(1))$ и имеет соответственно наибольший отрицательный или наибольший положительный наклон среди всех прямых, проходящих через эту точку;

если существует отрезок $[x_1^*, x_2^*] \subset (0,1)$ такой, что при всех $x^* \in [x_1^*, x_2^*]$ выполняется равенство

$$\varphi(x^*) = \max_{0 \le x \le 1} \varphi(x),$$

то оптимальной для первого игрока будет каждая смешанная стратегия $\overline{x}^* = (x^*, 1 - x^*)$, где $x^* \in [x_1^*, x_2^*]$. Оптимальной для второго игрока в данном случае является чистая стратегия $\overline{f}_{j_0}$ такая, что график функции $y = \varphi_{j_0}(x)$ проходит через точки $(x_1^*, \varphi(x_1^*))$ и $(x_2^*, \varphi(x_2^*))$ параллельно оси абсцисс;

если максимум функции $\varphi(x)$ достигается во внутренней точке x_0 и нет прямой, проходящей через точку $(x_0, \varphi(x_0))$ параллельно оси абсцисс, то оптимальная смешанная стратегия второго игрока имеет вид

$$\overline{y}_0 = \Big(0, \ldots, \underset{j_1}{y_0}, \ldots, 1 - \underset{j_2}{y_0}, \ldots, 0\Big),$$

график функции $y = \varphi_{j_1}(x)$ проходит через точку $(x_0, \varphi(x_0))$ и имеет наибольший положительный наклон среди всех прямых, проходящих через эту точку; график функции $y = \varphi_{j_2}(x)$ проходит через точку

$(x_0, \varphi(x_0))$ и имеет наибольший отрицательный наклон среди всех прямых, проходящих через эту точку; число $0 \le y_0 \le 1$ выбирается таким образом, чтобы график функции $y = y_0 \varphi_{j_1}(x) + (1 - y_0)\varphi_{j_2}(x)$ был параллелен оси абсцисс. Цена игры подсчитывается по формуле $v = \varphi(x_0)$ или $v = F(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$.

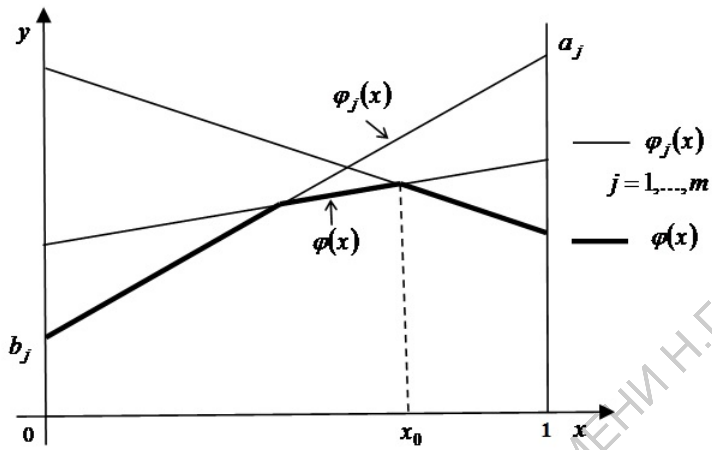

Рис. 2.

Теперь рассмотрим итеративный метод Брауна- Робинсон решения матричных игр. Пусть имеется бесконечный процесс разыгрывания партий матричной игры с матрицей $A = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1 \ldots, m$. На первом шаге чистые стратегии игроков i_1 и j_1 выбираются произвольно. Если произведено k повторений игры, в которых первый игрок выбрал чистые стратегии $i_1, \ldots, i_k$, а второй игрок – $j_1, \ldots, j_k$, то первый игрок выбирает на $(k+1)$-м шаге стратегию i_{k+1} из условия

$$\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} a_{i_{k+1} j_l} = \max_{1 \le i \le n} \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} a_{i j_l} \stackrel{df}{=} v_1(k),$$

а второй игрок – стратегию j_{k+1} из условия

$$\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} a_{i_l j_{k+1}} = \min_{1 \le j \le m} \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} a_{i_l j} \stackrel{df}{=} v_2(k).$$

Справедливо соотношение

$$\lim_{k \to \infty} v_1(k) = \lim_{k \to \infty} v_2(k) = v,$$

где v – цена данной матричной игры.

Пример 5.2. Решить графическим методом матричную игру с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 16 & -1 & 9 \\ 6 & 14 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выполнить поиск решения той же игры методом Брауна- Робинсон (5 итераций), предположив, что на первом шаге каждый игрок выбирает стратегию 1. На каждом шаге найти i_k, j_k, $v_1(k)$, $v_2(k)$.

Решение.

Поскольку второй столбец матрицы доминирует первый $(16 > 1; 14 > 6)$, то при решении игры второй столбец можно вычеркнуть из матрицы. В результате получаем матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определим функции

$$\varphi_1(x) = 1 \cdot x + 6 \cdot (1 - x) = 6 - 5x;$$
$$\varphi_3(x) = -1 \cdot x + 10 \cdot (1 - x) = 10 - 11x;$$
$$\varphi_4(x) = 9 \cdot x + 2 \cdot (1 - x) = 2 + 7x$$

(так как второй столбец вычеркнут, то функция $\varphi_2(x)$ пропущена).

Построим графики данных функций при $x \in [0, 1]$ (рис. 3).

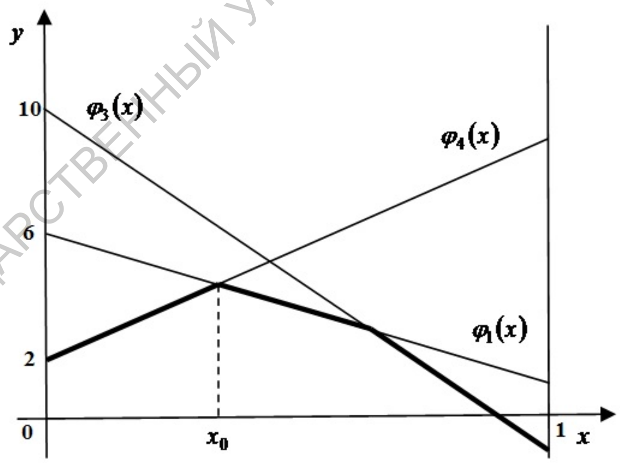

Рис. 3.

Имеем: $\varphi_1(0) = 6$, $\varphi_1(1) = 10$, $\varphi_3(0) = -1$, $\varphi_4(0) = 2$, $\varphi_4(1) = 9$. Графики функций $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_3(x)$, $y = \varphi_4(x)$ – это отрезки прямых, соединяющих точки $(0, \varphi_1(0))$ и $(1, \varphi_1(1))$; $(0, \varphi_3(0))$ и $(1, \varphi_3(1))$; $(0, \varphi_4(0))$ и $(1, \varphi_4(1))$ соответственно.

График функции $y = \varphi(x) = \min(\varphi_1(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x))$ – это зачерченная линия на рис. 2. Значение x_0 находится из условия $\varphi(x_0) =$

$\max\limits_{0\le x\le 1}\varphi(x)$. Из чертежа видно, что точка $(x_0, \varphi(x_0))$ является точкой пересечения графиков функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_4(x)$. Следовательно, для нахождения x_0 нужно решить уравнение $\varphi_1(x) = \varphi_4(x)$, то есть $6 - 5x = 2 + 7x$, откуда получаем $12x = 4$ и $x_0 = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$. Итак, оптимальной смешанной стратегией первого игрока является вектор $\overline{x}_0 = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$. Цена игры находится из равенства $v = \varphi(x_0)$. В данном случае $v = \varphi_1(x_0) = \varphi_4(x_0)$, то есть $v = 6 - 5\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{13}{3} = 4\dfrac{1}{3}$. Для нахождения оптимальных смешанной стратегии второго игрока составляем и преобразуем выражение

$$y_0\varphi_1(x) + (1-y_0)\varphi_4(x) = y_0(6-5x) + (1-y_0)(2+7x) =$$
$$= 6y_0 - 5xy_0 + 2 + 7x - 2y_0 - 7xy_0 = (7-12y_0) + 2 + 4y_0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при x в данном выражении, получаем равенство $7-12y_0 = 0$, откуда находим $y_0 = \dfrac{7}{12}$. Оптимальной смешанной стратегией второго игрока является вектор

$$\overline{y}_0 = \left(\frac{7}{12}, 0, 0, \frac{5}{12}\right); \quad v = 4\frac{1}{3}.$$

Теперь применим для решения данной игры метод Брауна- Робинсон. Имеем:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad i_1 = 1, \quad j_1 = 1.$$

Положим $k = 1$. Подсчитаем величины

$$v_1(1) = \max_{1\le i\le 2}\frac{1}{1}\sum_{l=1}^{1} a_{ij_l}, \qquad v_2(1) = \min_{1\le j\le 3}\frac{1}{1}\sum_{l=1}^{1} a_{i_l j}.$$

При $i = 1$

$$\frac{1}{1}\sum_{l=1}^{1} a_{1j_l} = a_{1j_1} = a_{11} = 1;$$

при $i = 2$

$$\frac{1}{1}\sum_{l=1}^{1} a_{2j_l} = a_{2j_1} = a_{21} = 6;$$

$$v_1(1) = \max(1, 6) = 6, \quad i_2 = 2$$

(поскольку максимум достигается при $i_2 = 2$).
При $j = 1$

$$\frac{1}{1}\sum_{l=1}^{1} a_{i_l 1} = a_{i_1 1} = a_{11} = 1;$$

при $j = 2$

$$\frac{1}{1}\sum_{l=1}^{1} a_{i_l 2} = a_{i_1 2} = a_{12} = -1;$$

при $j = 3$

$$\frac{1}{1}\sum_{l=1}^{1} a_{i_l 3} = a_{i_1 3} = a_{13} = 9;$$

$$v_2\,(1) = \min\,(1, -1, 9) = -1, \quad j_2 = 2$$

(поскольку минимум достигается при $j_2 = 2$).

Положим $k = 2$. Подсчитаем величины

$$v_1\,(2) = \max_{1\le i\le 2} \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} a_{ij_l}, \qquad v_2\,(2) = \min_{1\le j\le 3} \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} a_{i_l j}.$$

При $i = 1$

$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} a_{1j_l} = \frac{1}{2}\,(a_{1j_1} + a_{1j_2}) = \frac{1}{2}\,(a_{11} + a_{12}) = \frac{1}{2}\,(1 + (-1)) = 0;$$

при $i = 2$

$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} a_{2j_l} = \frac{1}{2}\,(a_{2j_1} + a_{2j_2}) = \frac{1}{2}\,(a_{21} + a_{22}) = \frac{1}{2}\,(6 + 10) = 8;$$

$$v_1\,(2) = \max\,(0, 8) = 8, \quad i_3 = 2.$$

При $j = 1$

$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} a_{i_l 1} = \frac{1}{2}\,(a_{i_1 1} + a_{i_2 1}) = \frac{1}{2}\,(a_{11} + a_{21}) = \frac{1}{2}\,(1 + 6) = \frac{7}{2} = 3.5;$$

при $j = 2$

$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} a_{i_l 2} = \frac{1}{2}\,(a_{i_1 2} + a_{i_2 2}) = \frac{1}{2}\,(a_{12} + a_{22}) = \frac{1}{2}\,(-1 + 10) = \frac{9}{2} = 4.5;$$

при $j = 3$

$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} a_{i_l 3} = \frac{1}{2}\left(a_{i_1 3} + a_{i_2 3}\right) = \frac{1}{2}\left(a_{13} + a_{23}\right) = \frac{1}{2}\left(9 + 2\right) = \frac{11}{2} = 5.5;$$

$$v_2\left(2\right) = \min\left(3.5, 4.5, 5.5\right) = 3.5, \quad j_3 = 1.$$

Положим $k = 3$. Подсчитаем величины

$$v_1\left(3\right) = \max_{1\le i\le 2} \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3} a_{ij_l}, \qquad v_2\left(3\right) = \min_{1\le j\le 3} \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3} a_{i_l j}.$$

При $i = 1$

$$\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3} a_{1j_l} = \frac{1}{3}\left(a_{11} + a_{12} + a_{11}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + (-1) + 1\right) = \frac{1}{3};$$

при $i = 2$

$$\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3} a_{2j_l} = \frac{1}{3}\left(a_{21} + a_{22} + a_{21}\right) = \frac{1}{3}\left(6 + 10 + 6\right) = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3};$$

$$v_1\left(3\right) = \max\left(\frac{1}{3}, 7\frac{1}{3}\right) = 7\frac{1}{3}, \quad i_4 = 2.$$

При $j = 1$

$$\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3} a_{i_l 1} = \frac{1}{3}\left(a_{11} + a_{21} + a_{21}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + 6 + 6\right) = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3};$$

при $j = 2$

$$\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3} a_{i_l 2} = \frac{1}{3}\left(a_{12} + a_{22} + a_{22}\right) = \frac{1}{3}\left(-1 + 10 + 10\right) = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3};$$

при $j = 3$

$$\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3} a_{i_l 3} = \frac{1}{3}\left(a_{13} + a_{23} + a_{23}\right) = \frac{1}{3}\left(9 + 2 + 2\right) = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3};$$

$$v_2\left(3\right) = \min\left(4\frac{1}{3}, 6\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3}\right) = 4\frac{1}{3}, \quad j_4 = 1$$

(если минимум достигается на нескольких стратегия, то выбирается любая из них, как правило та, которая имеет наименьший номер).

Положим $k = 4$. Подсчитаем величины

$$v_1(4) = \max_{1\le i\le 2} \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{4} a_{ij_l}, \qquad v_2(4) = \min_{1\le j\le 3} \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{4} a_{i_l j}.$$

При $i = 1$

$$\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{4} a_{1j_l} = \frac{1}{4}(a_{11} + a_{12} + a_{11} + a_{11}) = \frac{1}{3}(1 + (-1) + 1 + 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

при $i = 2$

$$\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{4} a_{2j_l} = \frac{1}{4}(a_{21} + a_{22} + a_{21} + a_{21}) = \frac{1}{4}(6 + 10 + 6 + 6) = \frac{28}{4} = 7;$$

$$v_1(4) = \max\left(\frac{1}{2}, 7\right) = 7, \quad i_5 = 2.$$

При $j = 1$

$$\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{4} a_{i_l 1} = \frac{1}{4}(a_{11} + a_{21} + a_{21} + a_{21}) = \frac{1}{4}(1 + 6 + 6 + 6) = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4};$$

при $j = 2$

$$\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{4} a_{i_l 2} = \frac{1}{4}(a_{12} + a_{22} + a_{22} + a_{22}) = \frac{1}{4}(-1 + 10 + 10 + 10) = \frac{29}{4} = 7\frac{1}{4};$$

при $j = 3$

$$\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{4} a_{i_l 3} = \frac{1}{4}(a_{13} + a_{23} + a_{23} + a_{23}) = \frac{1}{4}(9 + 2 + 2 + 2) = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4};$$

$$v_2(4) = \min\left(4\frac{3}{4}, 7\frac{1}{4}, 3\frac{1}{4}\right) = 3\frac{3}{4}, \quad j_5 = 3$$

Положим $k = 5$. Подсчитаем величины

$$v_5(4) = \max_{1\le i\le 2} \frac{1}{5}\sum_{l=1}^{5} a_{ij_l}, \qquad v_2(5) = \min_{1\le j\le 3} \frac{1}{5}\sum_{l=1}^{5} a_{i_l j}.$$

При $i = 1$

$$\frac{1}{5}\sum_{l=1}^{5} a_{1j_l} = \frac{1}{5}\left(a_{11} + a_{12} + a_{11} + a_{11} + a_{13}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + (-1) + 1 + 1 + 9\right) = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5};$$

при $i = 2$

$$\frac{1}{5}\sum_{l=1}^{5} a_{2j_l} = \frac{1}{5}\left(a_{21} + a_{22} + a_{21} + a_{21} + a_{23}\right) = \frac{1}{5}\left(6 + 10 + 6 + 6 + 2\right) = \frac{30}{5} = 6;$$

$$v_1(5) = \max\left(2\frac{1}{5}, 6\right) = 6, \quad i_6 = 2.$$

При $j = 1$

$$\frac{1}{5}\sum_{l=1}^{5} a_{i_l 1} = \frac{1}{5}\left(a_{11} + a_{21} + a_{21} + a_{21} + a_{21}\right) = \frac{1}{5}\left(1 + 6 + 6 + 6 + 6\right) = \frac{25}{5} = 5;$$

при $j = 2$

$$\frac{1}{5}\sum_{l=1}^{5} a_{i_l 2} = \frac{1}{5}\left(a_{12} + a_{22} + a_{22} + a_{22} + a_{22}\right) = \frac{1}{5}\left(-1 + 10 + 10 + 10 + 10\right) = \frac{39}{5} = 7\frac{4}{5};$$

при $j = 3$

$$\frac{1}{5}\sum_{l=1}^{5} a_{i_l 3} = \frac{1}{5}\left(a_{13} + a_{23} + a_{23} + a_{23} + a_{23}\right) = \frac{1}{5}\left(9 + 2 + 2 + 2 + 2\right) = \frac{17}{5} = 3\frac{2}{5};$$

$$v_2(5) = \min\left(5, 7\frac{4}{5}, 3\frac{2}{5}\right) = 3\frac{2}{5}, \quad j_6 = 3.$$

Итак, получили $v_1(5) = 6$, $v_2(5) = 3.4$. Цена данной игры, как мы подсчитали, ранее, равна $4\frac{1}{3}$. При шести повторениях игры первый игрок один раз применил первую стратегию и пять раз вторую, а второй игрок — три раза первую стратегию, один раз вторую и два раза третью. Таким образом, вектор частот применения чистых стратегий первым игроком равен

$$\overline{x}^6 = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right),$$

а вторым игроком —

$$\overline{y}^6 = \left(\frac{3}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}\right)$$

(здесь мы вернулись к исходной матрице A).

Нам известно, что $\overline{x}^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, а $\overline{y}^0 = \left(\frac{7}{12}, 0, 0, \frac{5}{12}\right)$.

Пример показывает, что ожидать от метода Брауна - Робинсон оценок, близких к истинным, можно лишь при большом числе итераций. Для этого требуется автоматизация процесса вычислений.

Задание 5.1. Найти оптимальные стратегии игроков и вычислить цену игры в играх со следующими матрицами:

$$1)\quad A = \begin{pmatrix} -5t & 4u \\ 6s & -3v \end{pmatrix};$$

$$2)\quad A = \begin{pmatrix} -10v & -15u & 4s \\ -2u & 3s & 5t \\ 6t & -4v & 20u \end{pmatrix}.$$

Задание 5.2. Решить графическим методом матричную игру с матрицей A

$$1)\quad A = \begin{pmatrix} u-3 & v+12 & t-5 & v+5 \\ t+2 & s+10 & u+6 & u-2 \end{pmatrix};$$

$$2)\quad A = \begin{pmatrix} u+s+t+5v+1 & v+s+t & s+t \\ s+t & u+s+t & u+s+t+5v \end{pmatrix};$$

Выполнить поиск решения игры 1) методом Брауна- Робинсон (5 итераций), предположив, что на первом шаге каждый игрок выбирает стратегию 1. На каждом шаге найти i_k, j_k, $v_1(k)$, $v_2(k)$.

6. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Биматричная игра (с чистыми стратегиями) – это система $\Gamma = (X, Y, F, G)$, где $X = \{1, \ldots, n\}$ – множество стратегий первого игрока, $Y = \{1, \ldots, m\}$ – множество стратегий второго игрока, F – функция выигрыша первого игрока, G – функция выигрыша второго игрока. Функции F и G можно задать с помощью матриц

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

следующим образом:

$$F(i, j) = a_{ij}, \quad G(i, j) = b_{ij}.$$

Пара стратегий (i_0, j_0), удовлетворяющая условиям

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad a_{i,j_0} \leq a_{i_0,j_0},$$

$$\forall i = j, \ldots, m \quad b_{i_0,j} \leq b_{i_0,j_0}.$$

называется ситуацией равновесия биматричной игры. Эти условия можно записать в виде

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad F(i, j_0) \leq F(i_0, j_0),$$

$$\forall i = j, \ldots, m \quad G(i_0, j) \leq G(i_0, j_0),$$

Биматричная игра со смешанными стратегиями – это система $\Gamma = (X, Y, F, G)$, где X – множество векторов $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условиям $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, Y – множество векторов $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_m)$, удовлетворяющих условиям $y_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$, $\sum\limits_{j=1}^{m} y_j = 1$, функции $F(\overline{x}, \overline{y})$ и $G(\overline{x}, \overline{y})$ определяются соответственно формулами

$$F(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j, \quad G(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_i y_j,$$

где $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – данные матрицы размерности $n \times m$.

Пара стратегий $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$, удовлетворяющая условиям

$$\forall \overline{x} \quad F(\overline{x}, \overline{y}_0) \leq F(\overline{x}_0, \overline{y}_0), \quad \forall \overline{y} \quad G(\overline{x}_0, \overline{y}) \leq F(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$$

называется ситуацией равновесия биматричной игры со смешанными стратегиями.

Если матрицы выигрышей имеют размерности 2×2, то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

и ситуаций равновесия в игре с чистыми стратегиями не существует, то ситуацию равновесия в смешанных стратегиях $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$, где $\overline{x}_0 = (x_0, 1 - x_0)$, $\overline{y}_0 = (y_0, 1 - y_0)$, $0 < x_0 < 1$, $0 < y_0 < 1$, можно находить с применением формул

$$x_0 = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}}, \quad y_0 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

а выигрыши игроков в данной ситуации равновесия равны $F(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ и $G(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$.

Пример 6.1. Найти ситуацию равновесия в чистых стратегиях (если они есть) в биматричной игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 10 & 10 \\ 6 & -6 & -3 \\ 18 & 14 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 14 \\ 2 & -3 & 10 \\ 14 & 22 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Если (i_0, j_0) – ситуация равновесия, то из определения вытекает, что элемент a_{i_0,j_0} является максимальным в своем столбце в матрице A, а элемент b_{i_0,j_0} – максимальным в своей строке в матрице B. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{22} & 10 & \boxed{10} \\ 6 & -6 & -3 \\ 18 & \boxed{14} & 6 \end{pmatrix}.$$

Максимальным в первом столбце является элемент $a_{11} = 22$, во втором – $a_{32} = 14$, в третьем – $a_{13} = 10$. Рассмотрим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 2 & \boxed{14} \\ 2 & -3 & \boxed{10} \\ 14 & \boxed{22} & 6 \end{pmatrix}.$$

Максимальным в первой строке является элемент $b_{13} = 14$, во второй – $b_{23} = 10$, в третьем – $b_{32} = 22$. Получаем, что элементы a_{13} и a_{32} являются максимальными элементами столбцов матрицы A, а элементы b_{13} и b_{32} – максимальными элементами строк матрицы B. Следовательно, пара стратегий $(1,3)$ и $(3,2)$ являются ситуациями равновесия данной биматричной игры.

Пример 6.2. Найти ситуацию равновесия в смешанных стратегиях и вычислить выигрыши игроков в ней, если

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Сначала нужно, находя максимальные элементы в столбцах матрицы A и в строках матрицы B, убедиться в отсутствии ситуации равновесия в чистых стратегиях. После этого имеем:

$$x_0=\frac{-2-3}{-3+(-2)-7-3}=\frac{1}{3}; \quad \overline{x}_0=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right);$$

$$y_0=\frac{4-(-2)}{5+4-(-2)-(-1)}=\frac{1}{2}; \quad \overline{y}_0=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);$$

$$F\left(\overline{x}_0,\overline{y}_0\right)=5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+(-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=1.5;$$

$$G\left(\overline{x}_0,\overline{y}_0\right)=(-3)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+7\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+(-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=1.$$

Задание 6.1. Найти чистые ситуации равновесия в биматричной игре с матрицами

$$A=\begin{pmatrix} v+18 & v+6 & v+6 \\ t+2 & s-10 & v-7 \\ t+14 & u+10 & t+2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} v+6 & u-2 & s+10 \\ u-2 & v-7 & v+6 \\ s+10 & v+18 & t+2 \end{pmatrix}.$$

Задание 6.2. Проверить существование ситуации равновесия в чистых стратегиях. В случае их отсутствия найти ситуации равновесия в смешанных стратегиях и вычислить выигрыши игроков в ней, если

$$A=\begin{pmatrix} 5s & u \\ t & v+4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} v & t+5 \\ 6u & s \end{pmatrix}.$$

7. ИГРЫ $_1\Gamma$ и $_{21}\Gamma$

Пусть $\Gamma = (X, Y, F, G)$ – игра с непротивоположными интересами.

Игрой $_1\Gamma$ называется система $_1\Gamma = \left(\Phi_1, Y, \tilde{F}, \tilde{G}\right)$, где

$$\Phi_1 = \{\varphi_1\}, \quad \varphi_1 : Y \to X,$$

$$\tilde{F}(\varphi_1, y) = F(\varphi_1(y), y),$$

$$\tilde{G}(\varphi_1, y) = G(\varphi_1(y), y).$$

Игрой $_{21}\Gamma$ называется система $_{21}\Gamma = \left(\Phi_1, \Psi_2, \tilde{\tilde{F}}, \tilde{\tilde{G}}\right)$, где

$$\Phi_1 = \{\varphi_1\}, \quad \varphi_1 : Y \to X,$$

$$\Psi_2 = \{\psi_2\}, \quad \psi_2 : \Phi_1 \to Y,$$

$$\tilde{\tilde{F}}(\varphi_1, \psi_2) = F(\varphi_1(\psi_2(\varphi_1)), \psi_2(\varphi_1)),$$

$$\tilde{\tilde{G}}(\varphi_1, \psi_2) = G(\varphi_1(\psi_2(\varphi_1)), \psi_2(\varphi_1)).$$

Введем следующие обозначения. Пусть Z – некоторое компактное множество, $\Phi(z)$ – функция, непрерывная на Z. Положим

$$\underset{z \in Z}{\mathrm{MAX}} \Phi(z) = \left\{z' : \Phi\left(z'\right) = \max_{z \in Z} \Phi(z)\right\},$$

$$\underset{z \in Z}{\mathrm{MIN}} \Phi(z) = \left\{z' : \Phi\left(z'\right) = \min_{z \in Z} \Phi(z)\right\}.$$

Справедливо следующее утверждение. Если исход (x_0, y_0) игры $\Gamma = (X, Y, F, G)$ удовлетворяет неравенствам $F(x_0, y_0) \geq L_1$, $G(x_0, y_0) \geq L_2$, где

$$L_1 = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y), \quad L_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y),$$

то существует такая ситуация равновесия $\left(\varphi_1^0, \psi_2^0\right)$ игры $_{21}\Gamma$, что $\psi_2^0\left(\varphi_1^0\right) = y_0$, $\varphi_1^0(y_0) = x_0$.

Данную ситуацию равновесия можно построить следующим образом. Определим отображение $\varphi_1^- : Y \to X$ условием

$$\forall y \in Y \varphi_1^- (y) \in \underset{x \in X}{\mathrm{MIN}} G(x,y)$$

и точку $y^- \in Y$ условием

$$y^- \in \underset{y \in Y}{\mathrm{MIN}} \max_{x \in X} F(x,y).$$

Отображения $\varphi_1^0 : Y \to X$ и $\psi_2^0 : \Phi_1 \to Y$ зададим формулами

$$\varphi_1^0(y) = \begin{cases} x_0, & y = y_0, \\ \varphi_1^-(y), & y \neq y_0, \end{cases} \qquad \psi_2^0(\varphi_1) = \begin{cases} y_0, & \varphi_1 = \varphi_1^0, \\ y^-, & \varphi_1 \neq \varphi_1^0. \end{cases}$$

Пара $\left(\varphi_1^0, \psi_2^0\right)$ и будет искомой ситуацией равновесия игры ${}_{21}\Gamma$, удовлетворяющей условиям $\psi_2^0\left(\varphi_1^0\right) = y_0$, $\varphi_1^0(y_0) = x_0$.

Задание 7. Для игры с непротивоположными интересами $\Gamma = (X,Y,F,G)$, где $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, функции F и G задаются матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 5+t & 4+u & 0 \\ 4+u & -1 & -s \\ 6+v & -3 & 4-v \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 4-u & -t & 5 \\ 7+v & 8+v & 6+v \\ -s & 0 & 5-u \end{pmatrix},$$

найти все исходы $\left(x', y'\right)$, удовлетворяющие условиям $F\left(x', y'\right) \geq L_1$, $G\left(x', y'\right) \geq L_2$, и построить ситуации равновесия $\left(\varphi_1^0, \psi_2^0\right)$ игры ${}_{21}\Gamma$, удовлетворяющие условиям $\psi_2^0\left(\varphi_1^0\right) = y'$, $\varphi_1^0\left(y'\right) = x'$.

8. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Пусть $\Gamma = (X, Y, F, G)$ – игра с непротивоположными интересами. В иерархических играх предполагается, что игроки неравноправны: первый игрок является «управляющим», а второй – «управляемым». Управляющий игрок, зная функцию выигрыша управляемого игрока, первым выбирает свою стратегию и сообщает ее второму игроку, который делает свой выбор так, чтобы максимизировать свою функцию выигрыша. Тогда наибольший гарантированный результат первого игрока в игре ${}_1\Gamma = \left(\Phi_1, Y, \tilde{F}, \tilde{G}\right)$ определяется равенством

$$\gamma = \max_{\varphi_1 \in \Phi_1} \min_{y \in M(\varphi_1)} F\left(\varphi_1\left(y\right), y\right),$$

где

$$M\left(\varphi_1\right) = \left\{ y' : G\left(\varphi_1\left(y'\right), y'\right) = \max_y G\left(\varphi_1\left(y\right), y\right) \right\}.$$

Для подсчета γ можно применять следующую формулу:

$$\gamma = \max\left(K, M\right),$$

где

$$K = \begin{cases} \max\limits_{(x,y)\in D} F\left(x, y\right), & D \neq \emptyset, \\ -\infty, & D = \emptyset, \end{cases}$$

$$D = \left\{(x, y) : G\left(x, y\right) > L_2\right\}, \quad L_2 = \max_y \min_x G\left(x, y\right),$$

$$M = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F\left(x, y\right),$$

$$E = \left\{ y' : \min_x G\left(x, y'\right) = \max_y \min_x G\left(x, y\right) \right\},$$

причем в случае $\gamma = K$ стратегия φ_1^0, гарантирующая результат K, определяется равенством

$$\varphi_1^0\left(y\right) = \begin{cases} x_0, & y = y_0, \\ \varphi_1^-\left(y\right), & y \neq y_0, \end{cases}$$

где $(x_0, y_0) \in D$, $F\left(x_0, y_0\right) = \max\limits_{(x,y)\in D} F\left(x, y\right)$,
при всех y $G\left(\varphi_1^-\left(y\right), y\right) = \min\limits_x G\left(x, y\right)$, а при $\gamma = M$ φ_1^0 находится из условия

$$\varphi_1^0(y) = \begin{cases} \varphi_1^+(y), & y \in E, \\ \varphi_1^-(y), & y \notin E, \end{cases}$$

при всех y $F\left(\varphi_1^+(y), y\right) = \max\limits_x F(x, y)$.

Задание 8. Вычислить

1) наибольший гарантированный результат управляющего игрока и найти его оптимальную стратегию в иерархической игре ${}_1\Gamma = \left(\Phi_1, Y, \tilde{F}, \tilde{G}\right)$, где $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, функции F и G задаются матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -3s & v & 2t & -u \\ t-1 & t & t & s \\ -2u & -u & -4u & 4t+2s \\ 2t+s & t-2 & t & v \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t & -2v & -v & -3v \\ -v & t+2 & u+s & -v \\ 3u & -2v & v+4 & 2t \\ -v & u+3 & t+4 & -5v \end{pmatrix},$$

2) наибольший гарантированный результат управляющего игрока и найти его оптимальную стратегию в иерархической игре ${}_1\Gamma = \left(\Phi_1, Y, \tilde{F}, \tilde{G}\right)$, где X, Y, G те же, что и в предыдущей задаче, функция F задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -3u & v & 2t & -s \\ t-1 & t & t & v \\ -2u & -u & -4u & 2t-v \\ 2t+s & t-2 & t & v \end{pmatrix}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Невежин, В.П. Теория игр. Примеры и задачи (Электронный ресурс): Учебное пособие/ Виктор Павлович Невевежин. – Москва: Изд-во «Форум»; Москва: ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М», 2014. - 128 с. - ISBN 978-5-91134-64-4: Б.ц.ЭБС ИНФРА-М

2. Салмина, Н.Ю. Теория игр (Электронный ресурс): Учебное пособие/ Салмина Н.Ю. – Томск: Эль Контент, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - 92 с. - ISBN 978-5-4332-0079-1: Б.ц. Книга находится в базовой версии ЭБС IPRboors

Дополнительная

3. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

4. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М., «Наука», 1971.

5. Шолпо И.А. Исследование операций. Теория игр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983.

6. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. М.: Высшая школа, 2002.

7. Кузнецова И.А. Сборник задач по исследованию операций с методическими указаниями. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1989.

8. Кузнецова И.А., Луньков А.Д, Харламов А.В. Теория игр. Учебноиетодич.пособие. Изд-во Саратовского ун-та, 2002.

9. Кузнецова И.А., Плешакова Н.В. Руководство к решению задач по теории игр. Учебно-методич.пособие. Изд-во Саратовского ун-та, 2004.

10. Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

11. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.

12. Харшаньи Дж., Зельтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх. СПб.: Экономическая школа, 2001.

Учебное издание

Кузнецова Ирина Александровна
Сергеева Надежда Викторовна

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЮ ОПЕРАЦИЙ

Учебно-методическое пособие для студентов механико-математического факультета