

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО

О.Е. ГЛУХОВА, И.Н. САЛИЙ

**ЗАДАЧИ ПО МЕТОДАМ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ**

*Учебное пособие для студентов, обучающихся
по специальности «радиофизика и электроника»,
и направления «радиофизика»*

САРАТОВ, 2010

Предисловие авторов*

Методы вычислительной математики – дисциплина, занимающая обязательную позицию в образовательных стандартах негуманитарных специальностей и направлений. Теоретический курс обычно сопровождается практическими и семинарскими занятиями. Большая доля часов учебных планов при этом отводится на самостоятельную работу обучающихся. По ряду специальностей и направлений предусмотрена также летняя вычислительная практика студентов.

Подобная многоплановость возможного применения настоящего учебного пособия обусловила не только его структуру, но и структуру самих заданий. Авторы отказались от общепринятой сквозной нумерации формул, рисунков, таблиц, от размещения перечня рекомендованной литературы в конце книги; но каждому численному методу предпослали его алгоритмическое описание. Благодаря этому задания приобрели автономный характер, что облегчает либо их адресное распределение с учетом индивидуального уровня подготовки студентов, либо придание им формы своеобразного экзаменационного билета. Кроме того, увеличение количества заданий не потребует каких-либо изменений в ранее созданном тексте.

Вторая особенность заданий – чисто математическая формулировка задачи (например, «*вычислить интеграл методом трапеций*») наполнена некоторым физическим содержанием. Авторы понимают, что основным «потребителем» задач являются студенты младших семестров, прослушавшие, в лучшем случае, лишь некоторые разделы курса общей физики. Тем не менее, физическую оболочку математическим методам, изучение основ которой планомерно состоится на старших курсах, авторы строили сознательно, искренне надеясь пробудить у студентов интерес и, возможно, желание заняться научной работой.

*Глухова Ольга Евгеньевна, доктор физико-математических наук, доцент кафедры радиотехники и электродинамики Саратовского государственного университета;

Салий Игорь Николаевич, заведующий кафедрой радиотехники и электродинамики Саратовского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

Задание № 1.

Разработать алгоритм и вычислительную программу *линейного сглаживания* данных эксперимента по трем и пяти точкам.

Теоретические основы методов линейного сглаживания.

Пусть $\{y_i\}$ – дискретное ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) множество величин, найденных экспериментально, а $\{\bar{y}_i\}$ – их «сглаженные» значения. Нахождение последних осуществляется *методами линейного сглаживания*.

Основу метода линейного сглаживания по трем точкам составляют следующие расчетные соотношения:

$$\bar{y}_0 = \frac{5y_0 + 2y_1 - y_2}{6}; \quad \bar{y}_i = \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1}}{3}, \quad 1 \leq i \leq N-1$$
$$\bar{y}_N = \frac{5y_N + 2y_{N-1} - y_{N-2}}{6}.$$

Метод линейного сглаживания по пяти точкам реализуется формулами:

$$\bar{y}_0 = \frac{3y_0 + 2y_1 + y_2 - y_4}{5}, \quad \bar{y}_1 = \frac{4y_0 + 3y_1 + 2y_2 + y_3}{10}$$
$$\bar{y}_i = \frac{y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}}{5}, \quad (2 \leq i \leq N-2),$$
$$\bar{y}_{N-1} = \frac{y_{N-3} + 2y_{N-2} + 3y_{N-1} + 4y_N}{10}, \quad \bar{y}_N = \frac{3y_N + 2y_{N-1} + y_{N-2} - y_{N-4}}{5}$$

Пояснения к заданию.

С помощью разработанной программы:

1. Выполнить сглаживание по трем и пяти точкам экспериментальных данных, приведенных табл. 1.

Таблица 1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	0,90	2,12	2,92	4,15	4,90	6,10	6,92	8,15	9,05	9,80

Кривые сглаживания вместе с точками экспериментальных значений разместить на одном графике, отложив по оси абсцисс номера точек.

2. Построить зависимости энергии взаимодействия нанокластеров от расстояния r между ними в виде двух графиков. На одном графике должны быть представлены точки экспериментальных данных и кривая сглаживания по трем точкам; на другом - точки экспериментальных данных и кривая

сглаживания по пяти точкам. Исходные данные для расчетов содержатся в табл.2.

Таблица 2

$r, \text{Å}$	4,58	4,60	4,62	4,64	4,66	4,68	4,70
Энергия, эВ	-0.00011	-0.01269	-0.05280	-0.13442	-0.44417	-0.67062	-1.20653
$r, \text{Å}$	4,72	4,74	4,76	4,78	4,80	4,82	4,84
Энергия, эВ	-1.48986	-1.76701	-2.02707	-2.26058	-2.45975	-2.61857	-2.73298
$r, \text{Å}$	4,86	4,88	4,90	4,92	4,94	4,96	4,98
Энергия, эВ	-2.81158	-2.87458	-2.92571	-2.96833	-2.92571	-3.00162	-3.02550

Литература

Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. Серия «Прикладная математика для ВТУЗов» – М.: «Высшая школа», 2008. – 480 с.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: «Наука», 1973. – 831 с.

Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

<http://www.digitland.ru>

Задание № 2.

Разработать вычислительную программу *нелинейного сглаживания* экспериментальных данных по семи точкам.

Теоретические основы метода нелинейного сглаживания..

Пусть $\{y_i\}$ – дискретное ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) множество величин, найденных экспериментально, а $\{\bar{y}_i\}$ – их «сглаженные» значения.

Нелинейное сглаживание по семи точкам обеспечивает усреднение на основе применения полинома третьей степени и реализуется следующими формулами:

$$\bar{y}_0 = \frac{39y_0 + 8y_1 - 4(y_2 + y_3 - y_4) + y_5 - 2y_6}{42},$$

$$\bar{y}_1 = \frac{8y_0 + 19y_1 + 16y_2 + 6y_3 - 4y_4 - 7y_5 + 4y_6}{42},$$

$$\bar{y}_2 = \frac{-4y_0 + 16y_1 + 19y_2 + 12y_3 + 2y_4 - 4y_5 + y_6}{42},$$

$$\bar{y}_i = \frac{7y_i + 6(y_{i+1} + y_{i-1}) + 3(y_{i+2} + y_{i-2}) - 2(y_{i+3} + y_{i-3})}{21}, \quad 3 \leq i \leq N-3,$$

$$\bar{y}_{N-2} = \frac{y_{N-6} - 4y_{N-5} + 2y_{N-4} + 12y_{N-3} + 19y_{N-2} + 16y_{N-1} - 4y_N}{42},$$

$$\bar{y}_{N-1} = \frac{4y_{N-6} - 7y_{N-5} - 4y_{N-4} + 6y_{N-3} + 16y_{N-2} + 19y_{N-1} + 8y_N}{42},$$

$$\bar{y}_N = \frac{-2y_{N-6} + 4y_{N-5} + y_{N-4} - 4y_{N-3} - 4y_{N-2} + 8y_{N-1} + 39y_N}{42}.$$

Пояснения к заданию.

С помощью разработанной программы:

1. Выполнить сглаживание по семи точкам экспериментальных данных, приведенных табл. 1.

Таблица 1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	0,70	1,08	1,39	1,64	1,76	1,99	2,04	2,22	2,28	2,42

Кривую сглаживания вместе с точками экспериментальных значений разместить на одном графике, отложив по оси абсцисс номера точек.

2. Построить на одном графике две зависимости энергии взаимодействия двух углеродных нанообъектов от расстояния r между ними: одна – на основе экспериментальных данных, другая – на основе результатов сглаживания экспериментальных значений по семи точкам.

Исходные данные для расчетов содержатся в табл. 2.

Таблица 2

$r, \text{Å}$	4,90	4,92	4,94	4,96	4,98	5,00
Энергия, эВ	-2.81158	-2.87458	-2.92571	-2.96833	-3.00163	-3.02550
$r, \text{Å}$	5,02	5,04	5,06	5,08	5,10	5,12
Энергия, эВ	-3.04284	-3.04817	-3.01465	-2.93996	-2.82838	-2.68532
$r, \text{Å}$	5,14	5,16	5,18	5,20	5,22	5,24
Энергия, эВ	-2.51571	-2.32334	-2.11071	-1.87922	-1.62934	-1.36087
$r, \text{Å}$	5,26	5,28	5,30	5,32		
Энергия, эВ	-1.07312	-0.75977	-0.41218	-0.03063		

Литература

Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ. – М. «Наука», 1987. – 240 с.

Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М. «Нолидж», 2000. – 1296 с.

Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. Серия «Прикладная математика для ВТУЗов» – М.: «Высшая школа», 2008. – 480 с.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: «Наука», 1973. – 831 с.

Рено Н.Н. Алгоритмы численных методов: методическое пособие для вузов. – М.: «Книжный дом Университет», 2007. – 24 с.

Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

<http://www.digitland.ru>

<http://ru.wikipedia.org>

Задание № 3.

Разработать программу расчета амплитудно-частотной характеристики СВЧ фильтра, представляющего собой n каскадно соединенных отрезков регулярных линий передачи различных длин и волновых сопротивлений.

Пояснения к заданию.

Фильтры нижних (ФНЧ) и верхних (ФВЧ) частот, полосно-пропускающие (ППФ) и полосно-заграждающие (ПЗФ) как устройства частотной селекции на сверхвысоких частотах (СВЧ) часто конструктивно реализуются в виде каскадного соединения отрезков регулярных линий передачи. Структурная схема фильтра показана на рис. 1.

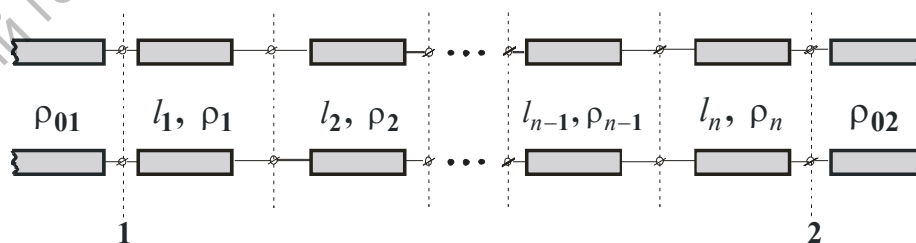


Рис. 1.

Между клеммными плоскостями 1 и 2, к которым подходят подводящие линии с волновыми сопротивлениями ρ_{01} и ρ_{02} , включены n звеньев. Каждое

k -е звено есть отрезок регулярной линии длиной l_k и волновым сопротивлением ρ_k ($k = 1, 2, \dots, n$); эквивалентной схемой звена является четырехполосник. Итак, структура, заключенная между клеммными плоскостями 1 и 2, представляет собой каскадное соединение n четырехполосников.

Элементы классической ненормированной матрицы передачи k -го четырехполосника $[\mathbf{a}_k]$ вычисляются по формулам:

$$[\mathbf{a}_k] = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & i\rho_k \sin \theta_k \\ i \frac{\sin \theta_k}{\rho_k} & \cos \theta_k \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где ρ_k - волновое сопротивление k -ого отрезка; $i = \sqrt{-1}$;

$$\theta_k = 2\pi \frac{l_k}{\lambda_0} \frac{f}{f_0};$$

f - частота; f_0 - нормирующий множитель, или "центральная частота диапазона". В качестве f_0 обычно выбирают граничные частоты для ФНЧ и ФВЧ, а для ФПП и ФПЗ – центральную частоту полосы пропускания или заграждения соответственно (частоте f_0 соответствует длина волны λ_0).

Схема расчета амплитудно-частотной характеристики.

1. По формуле

$$[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1] \times [\mathbf{a}_2] \times \dots \times [\mathbf{a}_{n-1}] \times [\mathbf{a}_n], \quad (2)$$

где $[\mathbf{a}_k]$ определяются соотношением (1), рассчитываются элементы матрицы передачи каскадного соединения n звеньев, то есть рассчитываются элементы матрицы передачи участка цепи, заключенного между клеммными плоскостями 1 и 2.

2. По формуле

$$L = 20 \lg \left(\frac{1}{2} \left| \sqrt{\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}} a_{11} + \frac{a_{12}}{\sqrt{\rho_{01} \rho_{02}}} + a_{21} \sqrt{\rho_{01} \rho_{02}} + a_{22} \sqrt{\frac{\rho_{01}}{\rho_{02}}} \right| \right), \text{ дБ}$$

вычисляется амплитудно-частотная характеристика (вносимое затухание) как функция частотного параметра f/f_0 .

Входными данными программы расчета фильтра являются численные значения:

1. количества звеньев структуры n ;
2. волновых сопротивлений подводящих линий ρ_{01} и ρ_{02} ;
3. волновых сопротивлений звеньев ρ_k ;

4. относительных длин звеньев l_k/λ_0 ;
5. границ частотного диапазона f_{\min} и f_{\max} таких, что $f_{\min} \leq f/f_0 \leq f_{\max}$;
6. шага разбиения частотного диапазона Δf .

Рекомендуются следующие значения входных данных: $n = 9$; $l_k/\lambda_0 = 0,0974$ для $k = 1,2,\dots,9$; $\rho_{01} = \rho_{02} = 50$, Ом; $f_{\min} = 0,5$; $f_{\max} = 5$; $\Delta f = 0,1$; значения ρ_k и содержатся в приводимой таблице

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ρ_k , Ом	37,60	76,70	25,25	96,80	23	96,8	25,25	76,70	37,60

Результаты расчета оформить в виде графика $L = F(f/f_0)$.

Дополнение. Центральным звеном программы является подпрограмма перемножения матриц в соответствии с формулой (2). Правило перемножения матриц заключается в следующем.

Пусть матрица $[A]$ имеет размерность $p \times q$, а матрица $[B]$ – размерность $q \times s$. Если $[C] = [A] \times [B]$, то элементы c_{kj} матрицы вычисляются по формуле:

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^q a_{ij} \cdot b_{ij}$$

в которой $j = 1,2,\dots,s$; $k = 1,2,\dots,p$. Очевидно, что $[C]$ имеет размерность $p \times s$.

Литература

Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М. «Нолидж», 2000. – 1296 с.

Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. Серия «Прикладная математика для ВТУЗов» – М.: «Высшая школа», 2008. – 480 с.

Рено Н.Н. Алгоритмы численных методов: методическое пособие для вузов. – М.: «Книжный дом Университет», 2007. – 24 с.

Справочник по элементам полосковой техники /Мазепова О.И., Мещанов В.П., Прохорова Н.И. и др. М.: Изд-во "Связь". 1979. С. 336.

Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

<http://www.digitland.ru>

Задание № 4.

Разработать программу расчета скорости изменения энергии взаимодействия углеродного тубулярного нанозмиттера с адсорбирующимися на нем молекулами C_2 .

Теоретические основы численного дифференцирования.

Расчет скорости реализуется применением методов численного дифференцирования.

Численное дифференцирование заключается в замене заданной таблично функции $y(x)$ интерполяционным полиномом $P(x)$, производные которого вычисляются аналитически.

Пусть имеется множество значений функции $\{y_k(x_k)\}$, заданных в равноотстоящих с шагом h точках (узлах) x_k ($k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$), а x_0 – узел, ближайший к точке x , в которой вычисляется производная; примем также $p = (x - x_0)/h$.

Формулы для вычисления производной функции в точке, не совпадающей ни с одним из узлов, имеют следующий вид.

1. Известны три узла и значения функции в них:

$$y'(x_0 + ph)_3 = \frac{1}{h}(y_{-1}(p - 0.5) - 2py_0 + (p + 0.5)y_1).$$

2. Известны четыре узла и значения функции в них:

$$y'(x_0 + ph)_4 = \frac{1}{h} \left(-\frac{3p^2 - 6p + 2}{6} y_{-1} + \frac{3p^2 - 4p - 1}{2} y_0 - \frac{3p^2 - 2p - 2}{2} y_1 + \frac{3p^2 - 1}{6} y_2 \right).$$

3. Известны пять узлов и значения функции в них:

$$y'(x_0 + ph)_5 = \frac{1}{h} \left(\frac{2p^3 - 3p^2 - p + 1}{6} y_{-2} - \frac{4p^3 - 3p^2 - 8p + 4}{6} y_{-1} + \frac{2p^3 - 5p}{2} y_0 - \frac{4p^3 + 3p^2 - 8p - 4}{6} y_1 + \frac{2p^3 + 3p^2 - p - 1}{12} y_2 \right).$$

Тестовые задания.

1) Вычислить значение производной функции $y(x)$, заданной таблично, в точке $x = 0.5$.

x_i	-1	0	1
y_i	1/3	1	3

2) Вычислить значение производной функции $y(x)$, заданной таблично, в точке $x = 2.5$.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	8.8	16.3	24.6	36.5	48.4

3) Найти производную $y(x)$ в точке $x = 0.51$ при $x_0 = 0.5$, $h = 0.02$ и значениях функции $y_{-2} = 0.35889029$, $y_{-1} = 0.35553253$, $y_0 = 0.35206533$, $y_1 = 0.34849251$, $y_2 = 0.342818$.

Пояснения к заданию.

Во время работы автоэмиссионного наноэмиттера, которым является, в частности, углеродная нанотрубка, молекулы буферного газа (N_2 , O_2 , C_2) адсорбируются на эмиттере, что приводит со временем к ухудшению эмиссионных свойств самого эмиттера. Адсорбирование молекул происходит вследствие Ван-дер-ваальсового взаимодействия, энергия которого описывается потенциалами Леннарда-Джонса, Бэкингема, Морзе и т.п. На рис. 1 показано взаимное расположение молекулы C_2 и нанотрубки-эмиттера. Расстояние от молекулы отсчитывается до поверхности эмиттера.

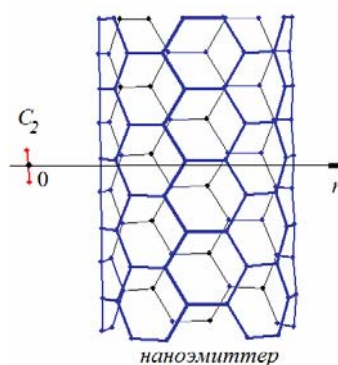


Рис. 1. Наноэмиттер и молекула C_2

Входными данными программы являются массив значений r и массив величин энергии взаимодействия, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

$r, \text{Å}$	4,62	4,64	4,66	4,68	4,70	4,72	4,74	4,76	4,78
$\mathcal{E}, \text{эВ}$	-0.053	-0.134	-0.263	-0.444	-0.671	-0.929	-1.206	-1.490	-1.767
$r, \text{Å}$	4,80	4,82	4,84	4,86	4,88	4,90	4,92	4,94	4,96
$\mathcal{E}, \text{эВ}$	-2.027	-2.260	-2.460	-2.618	-2.733	-2.812	-2.874	-2.926	-2.968
$r, \text{Å}$	4,98	5,00	5,02	5,04	5,06	5,08	5,10	5,12	5,14
$\mathcal{E}, \text{эВ}$	-3.002	-3.025	-3.043	-3.048	-3.015	-2.940	-2.828	-2.685	-2.516
$r, \text{Å}$	5,16	5,18	5,20	5,22	5,24	5,26	5,28	5,30	5,32
$\mathcal{E}, \text{эВ}$	-2.323	-2.111	-1.879	-1.629	-1.361	-1.073	-0.760	-0.412	-0.031

Рассчитать с помощью разработанной программы скорость изменения энергии в точках 4,61; 4,91; 5,01; 5,05; 5,09; 5,13; 5,17; 5,23; 5,27; 5,31. Построить графики энергии и скорости изменения энергии в зависимости от r .

Литература

Глухова О.Е. Атомная и электронная структуры свободного и инкапсулированного в замкнутую углеродную нанотрубку фуллерена C_{28} // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2007. – Т. 10. – №2. – С.65-70.

Глухова О.Е., Мещанов В.П., Салий И.Н. Функциональные наноустройства на базе углеродных гибридных соединений // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2007. – Т. 10. – № 2. – С.71-75.

Глухова О.Е., Сеницын Н.И., Торгашов Г.В. и др. Изучение влияния геометрических параметров на эмиссионные свойства углеродных нанотрубок с металлической проводимостью // Нанотехника. – 2007. № 1(9).– С.3-7.

Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М. «Нолидж», 2000. – 1296 с.

Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. Серия «Прикладная математика для ВТУЗов» – М.: «Высшая школа», 2008. – 480 с.

Рено Н.Н. Алгоритмы численных методов: методическое пособие для вузов. – М.: «Книжный дом Университет», 2007. – 24 с.

Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

<http://www.digitland.ru>

Задание № 5.

Разработать алгоритм и вычислительную программу расчета волнового сопротивления копланарной полосковой линии передачи, используя для вычисления определенного интеграла метод Гаусса.

Теоретические основы метода.

Вычисление определенного интеграла

$$J = \int_a^b f(x) dx$$

методом Гаусса обычно выполняется в два этапа. Вначале отрезок $[a, b]$ разбивается на N частей, и для *каждого* i -го элементарного отрезка $[a_i, b_i]$ вводится замена переменной интегрирования по формуле

$$x = \frac{b_i + a_i}{2} + \frac{b_i - a_i}{2} t.$$

Легко проверить, что новая переменная t изменяется в пределах $-1 \leq t \leq +1$.

Второй этап (собственно метод Гаусса) – вычисление определенного интеграла с пределами $[-1, 1]$; процедура вычисления основана на интерполяции подынтегральной функции полиномом Лагранжа:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i \cdot f(t_i).$$

Эта формула верна для полиномов не выше $(2n-1)$ -й степени. Для $n=3$ $A_1 = 5/9$, $t_1 = -\sqrt{1/3}$, $A_2 = 8/9$, $t_2 = 0$, $A_3 = 5/9$, $t_3 = \sqrt{1/3}$.

Функции для тестирования программы:

- 1) $f = 5 \sin x + 3$, $x \in [0; \pi/2]$; 2) $f = |\cos x|$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$;
- 3) $f = \operatorname{tg} x$, $x \in [0; \pi/4]$; 4) $f = 3x^3 + 5x - 7$, $x \in [0; 0,5]$;
- 5) $f = 1 + \exp(x + 0.5)$, $x \in [0; 2]$; 6) $f = \sqrt{2x + 1}$, $x \in [0; 1]$.

Пояснения к заданию.

Эскиз копланарной полосковой линии передачи показан на рис. 1.

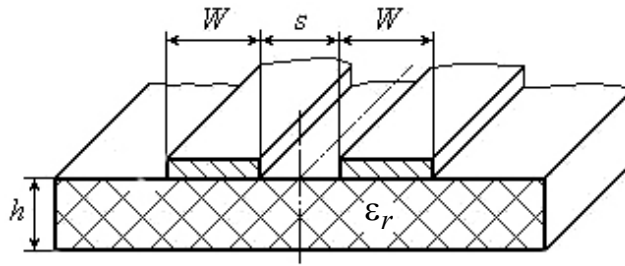


Рис. 1.

Волновое сопротивление определяется формулой:

$$Z = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{reff}}} \frac{K(k)}{K(k')},$$

в которой

$$k = \frac{\tilde{s}}{\tilde{s} + 2\tilde{W}}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad \tilde{s} = \frac{s}{h}, \quad \tilde{W} = \frac{W}{h}.$$

Эффективная диэлектрическая проницаемость подложки ϵ_{reff} равна

$$\epsilon_{reff} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} \left\{ \operatorname{tg} \left[0,775 \ln \left(\frac{1}{\tilde{W}} \right) + 1,75 \right] + k\tilde{W} [0,04 - 0,7k + 0,01(1 - 0,1\epsilon_r)(0,25 + k)] \right\}$$

Полный эллиптический интеграл первого рода $K(x)$ вычисляется по формуле:

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - x \cdot \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta.$$

Входными параметрами программы должны быть ширина токнесущего проводника \tilde{W} , расстояние между проводниками \tilde{s} и относительная диэлектрическая проницаемость подложки ϵ_r .

Рекомендуется найти волновое сопротивление копланарной линии передачи для следующих численных значений входных параметров: $\tilde{W} = 0,5$, $\tilde{s} = 1$, $\epsilon_r = 10$.

Примечание. Для отладки программы полезно воспользоваться следующими аппроксимациями отношения $K(k)/K(k')$:

$$\frac{K(k)}{K(k')} = \left[\frac{1}{\pi} \ln \left(2 \frac{1 + \sqrt{k'}}{1 - \sqrt{k'}} \right) \right]^{-1} \quad \text{для } 0 \leq k \leq 0,7;$$

$$\frac{K(k)}{K(k')} = \frac{1}{\pi} \ln \left(2 \frac{1 + \sqrt{k'}}{1 - \sqrt{k'}} \right) \quad \text{для } 0,7 \leq k \leq 1.$$

Погрешность этих аппроксимаций составляет 8×10^{-6} .

Литература

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельников Г.М. Численные методы. М., Наука. 1987.

Гупта К., Гардж Р., Чадха К.. Машинное проектирование СВЧ устройств: Пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1987 – 432 с.

Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М. «Нолидж», 2000. – 1296 с.

Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. Серия «Прикладная математика для ВТУЗов» – М.: «Высшая школа», 2008. – 480 с.

Рено Н.Н. Алгоритмы численных методов: методическое пособие для вузов. – М.: «Книжный дом Университет», 2007. – 24 с.

Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

<http://www.digitland.ru>

Задание № 6.

Разработать алгоритм и вычислительную программу расчета коэффициента передачи отрезка экспоненциальной нерегулярной линии передачи. Использовать в программе для вычисления определенного интеграла метод прямоугольников и метод трапеций. Сравнение точности вычислений интеграла этими двумя методами провести путем сопоставления результатов расчета с точными значениями коэффициента передачи.

Теоретические основы численного интегрирования.

Численное интегрирование применяется, если нахождение первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ сложно или невозможно. Оно заключается в интерполяции $f(x)$ на отрезке $x \in [a, b]$ подходящим полиномом, для которого определенный интеграл вычисляется по формулам численного интегрирования. Обычно отрезок $[a, b]$ разбивается на t частей, к каждой из которых применяется соответствующая формула. Таким способом получают составные, или сложные, формулы численного интегрирования.

Метод прямоугольников является простейшим методом численного интегрирования, при котором функция $f(x)$ заменяется интерполяционным многочленом нулевого порядка. Для повышения точности интегрирования

отрезок $[a, b]$ разбивается на m участков и формула прямоугольника применяется к каждому отрезку. При этом на каждом участке разбиения $f(x_i)$ постоянна, а при переходе к следующему фрагменту отрезка $[a, b]$ изменяется скачком. Обобщенная формула вычисления интеграла I методом прямоугольников имеет вид:

$$I \cong \frac{b-a}{m} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i).$$

Метод трапеций заключается в линейной аппроксимации $f(x)$ на каждом участке разбиения отрезка $[a, b]$; длина участка $h = (b - a)/m$. Нетрудно показать, что обобщенная формула метода трапеций имеет вид:

$$I \cong \frac{b-a}{m} \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + \frac{f(x_m)}{2} \right).$$

Функции для тестирования программы:

- 1) $f = 5 \sin x + 3, x \in [0; \pi/2]$; 2) $f = |\cos x|, x \in [-\pi/2; \pi/2]$;
- 3) $f = \tan x, x \in [0; \pi/4]$; 4) $f = 3x^3 + 5x - 7, x \in [0; 0,5]$;
- 5) $f = 1 + \exp(x + 0.5), x \in [0; 2]$; 6) $f = \sqrt{2x+1}, x \in [0; 1]$.

Пояснения к заданию.

Нерегулярной линией передачи (НЛП) называют линию, волновое сопротивление которой изменяется в направлении распространения электромагнитной волны. На рис. 1,а показана конфигурация токнесущего проводника отрезка НЛП длиной l и функцией волнового сопротивления $\rho(z)$;

ρ_{01} и ρ_{02} - волновые сопротивления подводящих линий.

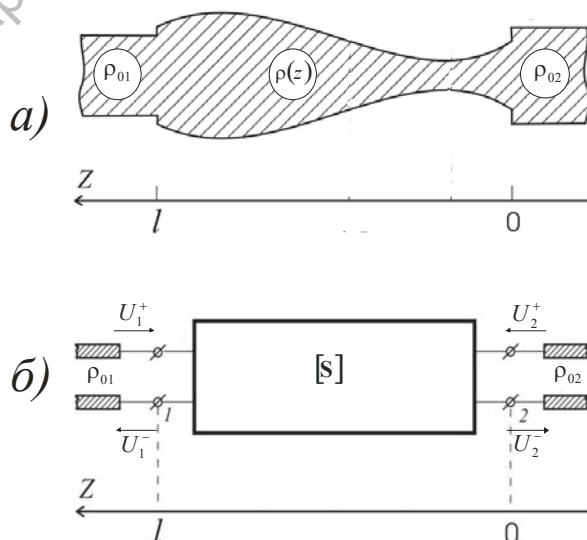


Рис. 1. Отрезок НЛП (а) и замещающий его четырехполюсник (б)

Между волнами U_1^+ , U_2^+ , приходящими к четырехполюснику, и волнами U_1^- , U_2^- , рассеянными на его клеммных плоскостях, существуют следующие линейные связи:

$$\begin{aligned} U_1^- &= S_{11}U_1^+ + S_{12}U_2^+ \\ U_2^- &= S_{21}U_1^+ + S_{22}U_2^+ \end{aligned} \quad (1)$$

где S_{jk} ($j, k = 1, 2$) суть элементы матрицы рассеяния $[S]$.

Физическое содержание элементов S_{jk} устанавливается при помощи режимов поочередного согласования НЛП "справа" или "слева" (по рис. 1,б). Например, если $U_2^+ = 0$, что соответствует согласованию четырехполюсника (см. рис.1,б) "справа", то, как следует из (1), $S_{11} = U_1^-/U_1^+$ является коэффициентом отражения со стороны входа (клеммная плоскость 1, или $z = l$), а $S_{21} = U_2^-/U_1^+$ - коэффициентом передачи энергии. Физическое содержание других элементов выясняется аналогично.

Специфическая особенность НЛП характеризуется, в частности тем, что элементы матрицы рассеяния являются функциями пространственной координаты z . Так, для экспоненциальной линии передачи, волновое сопротивление которой изменяется по закону

$$\rho(\zeta) = \rho(0)\exp(2a\zeta) \quad (2)$$

где $\zeta = z/l$ - безразмерная пространственная координата ($0 \leq \zeta \leq 1$); $a = \ln \sqrt{R}$, $R = \sqrt{\rho(1)/\rho(0)}$.

В теории НЛП также применяется характеристическая функция ("функция местных отражений"), определяемая формулой

$$N(\zeta) = \frac{1}{2\rho(\zeta)} \frac{d\rho(\zeta)}{d\zeta}.$$

Между элементами $S_{11}(\zeta)$ и $S_{21}(\zeta)$ матрицы рассеяния НЛП существует связь вида:

$$S_{21}(1) = \exp\left(\int_0^1 (N(\zeta)S_{11}(\zeta) - i\theta) d\zeta\right), \quad (3)$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\theta = 2\pi l/\lambda$ - частотная переменная, называемая *электрической длиной отрезка линии*, λ - длина волны в линии.

Необходимо составить программу расчета $\text{mod } S_{21}(\theta)$ - частотной характеристики экспоненциальной линии передачи, для которой

$$S_{11}(\theta, \zeta) = -\frac{a \operatorname{sh}\left(\zeta\sqrt{a^2 - \theta^2}\right)}{\sqrt{a^2 - \theta^2} \operatorname{ch}\left(\zeta\sqrt{a^2 - \theta^2}\right) + i\theta \operatorname{sh}\left(\zeta\sqrt{a^2 - \theta^2}\right)}$$

Вычисление интеграла в (3) выполнить методами прямоугольников и трапеций.

Входными данными программы расчета $\operatorname{mod} S_{21}(\theta)$ являются численные значения:

1. m - количества разбиений отрезка $[0, 1]$ оси $0 \leq \zeta \leq 1$;
2. $\rho(1)$ и $\rho(0)$ - волновых сопротивлений в концевых точках отрезка экспоненциальной линии;
3. границ частотного диапазона θ_{\min} и θ_{\max} таких, что $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$;
4. шага $\Delta\theta$ разбиения частотного диапазона.

Результаты численного расчета $\operatorname{mod} S_{21}(\theta)$ сопоставить с вычисленными по точной формуле:

$$S_{21}(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 - \theta^2}}{\sqrt{a^2 - \theta^2} \operatorname{ch}\left(\sqrt{a^2 - \theta^2}\right) + i\theta \operatorname{sh}\left(\sqrt{a^2 - \theta^2}\right)}. \quad (4)$$

Рекомендуются следующие численные значения входных параметров: $\rho(1) = 200, \text{ Ом}$; $\rho(0) = 50, \text{ Ом}$; $\theta_{\min} = 0$; $\theta_{\max} = 3\pi$; $\Delta\theta = 0,01\pi$; значение m установить в результате численного эксперимента.

Результаты задания представить в виде графика $\operatorname{mod} S_{21} = f(\theta)$, содержащего результаты, полученные с применением численного интегрирования (3) методами прямоугольников и трапеций и по формуле (4).

Литература.

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельников Г.М. Численные методы. М., Наука. 1987.

Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. Серия «Прикладная математика для ВТУЗов» – М.: «Высшая школа», 2008. – 480 с.

Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., Наука. 1975.

Рено Н.Н. Алгоритмы численных методов: методическое пособие для вузов. – М.: «Книжный дом Университет», 2007. – 24 с.

Салий И.Н. Нерегулярные линии передачи: Учебное пособие для вузов. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. – 88 с.

Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

<http://www.digitland.ru>

Задание № 7.

Разработать программу расчета электрических цепей постоянного тока с помощью законов Кирхгофа. Для решения системы линейных уравнений использовать метод Гаусса, или метод последовательного исключения неизвестных.

Теоретические основы метода.

Системы вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

решаются аналитическими методами и численно, или итерационно. Число итераций зависит от заданной погрешности вычислений.

Метод Гаусса, или метод последовательного исключения неизвестных, основан на приведении матрицы коэффициентов a_{ij} к треугольному виду. Исходными данными являются массив коэффициентов $A(I, J)$ и массив $B(I)$. Процесс сведения матрицы к треугольному виду можно представить в виде «лестницы» из следующих этапов:

1) прямой ход исключения переменных. Этот этап проводится преобразованием коэффициентов a_{ij} по формулам

$$a_{ji} = \frac{-a_{ji}}{a_{ii}}; \quad a_{jk} = a_{jk} + a_{ji} \cdot a_{ik}; \quad b_j = b_j + a_{ji} \cdot b_i,$$

в которых $i = 1, 2, \dots, n-1$; $j = i+1, i+2, \dots, n$; $k = i+1, i+2, \dots, n$. В результате вычисляется последний n -й корень

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

2) обратный ход (нахождение корней в порядке $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$). На этом этапе проводятся вычисления

$$h = b_i, \quad h = h - x_j \cdot a_{jj}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 2, 1, \quad j = i+1, i+2, \dots, n,$$

которые приводят к формуле для вычисления корней

$$x_i = \frac{h}{a_{ii}}.$$

Итогом вычислений является массив корней $X(I)$.

В качестве тестовой задачи предлагается решить методом Гаусса следующие системы:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} 10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 10x_1 + x_2 - 3x_3 = 8, \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 7, \\ -x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} 8x_1 - 2x_2 = 6, \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_2 + 10x_3 - x_4 = 8, \\ -x_3 + 6x_4 = 5. \end{cases}$$

Пояснения к заданию.

Расчет электрической цепи постоянного тока заключается в формировании системы уравнений с помощью законов Кирхгофа и ее решении, что обеспечивает знание токов в ветвях цепи. Независимые уравнения составляются для узлов и контуров цепи. Полученная система уравнений может быть представлена в матричном виде:

$$[\mathbf{A}] \times [\mathbf{I}] - [\mathbf{B}] \times [\mathbf{\epsilon}] = 0,$$

где $[\mathbf{A}]$ – квадратная матрица коэффициентов при токах, $[\mathbf{I}]$ – матрица-столбец неизвестных токов, $[\mathbf{B}]$ – квадратная матрица известных коэффициентов при ЭДС, $[\mathbf{\epsilon}]$ – матрица-столбец известных значений ЭДС. Исходными данными программы должны быть: 1) количество неизвестных токов (число строк матрицы-столбца $[\mathbf{I}]$); 2) элементы матрицы $[\mathbf{A}]$, 3) элементы матрицы $[\mathbf{B}]$, 4) элементы матрицы $[\mathbf{\epsilon}]$. Итогом работы программы должен явиться столбец токов ветвей цепи.

Тестовая задача.

В качестве примера рассмотрим электрическую цепь, представленную на рис. 1. Для этой цепи можно составить три независимых уравнения (для узла X и два уравнения для контуров 1 и 2):

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_3 - I_4 &= 0, \\
 I_4 - I_1 - I_2 &= 0, \\
 R_4 \cdot I_4 + R_1 \cdot I_1 &= \varepsilon_1, \\
 R_3 \cdot I_3 - R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 &= \varepsilon_2 - \varepsilon_1.
 \end{aligned}$$

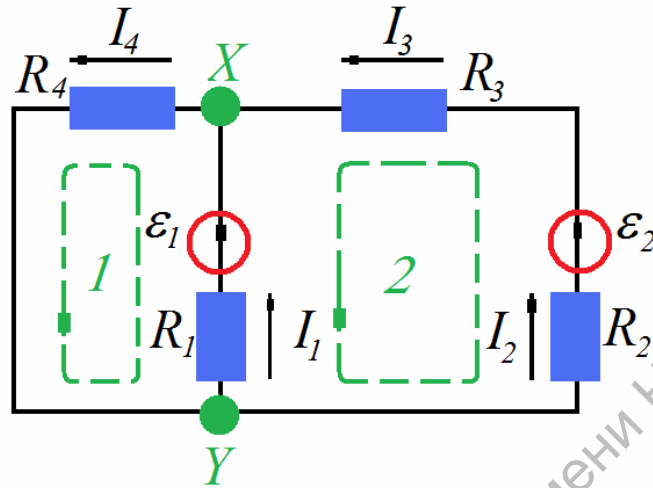
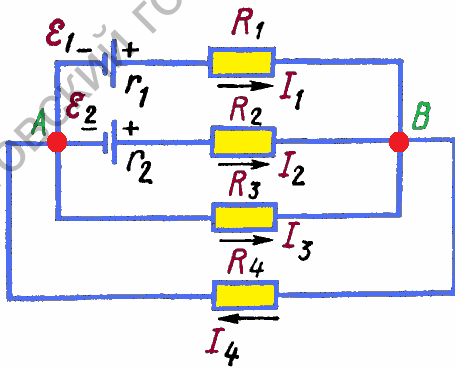


Рис. 1. Электрическая цепь

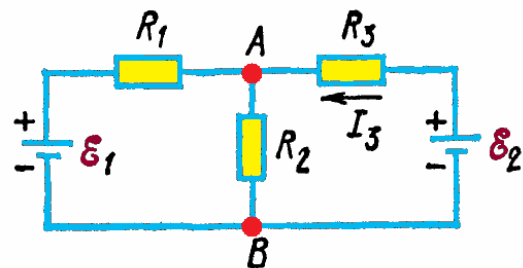
В итоге получим:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & 0 & R_4 \\ -R_1 & R_2 & R_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}.$$

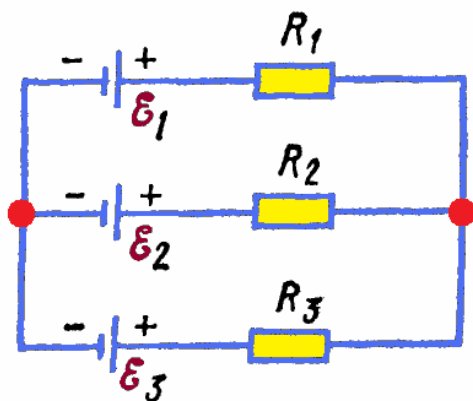
С помощью разработанной программы необходимо выполнить расчеты для электрических цепей, показанных на рис.2.



а) $R_1 = R_4 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = 4 \text{ Ом}$,
 $\varepsilon_1 = 10 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 4 \text{ В}$, сопротивлениями источников тока пренебречь;



б) $\varepsilon_1 = 4 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 3 \text{ В}$, внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь;



в) $\varepsilon_1 = 11$ В, $\varepsilon_2 = 4$ В, $\varepsilon_3 = 6$ В, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 2$ Ом, внутреннее сопротивление источников тока пренебрежительно мало.

Рис. 2. Электрические цепи постоянного тока

Литература

Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М. «Нолидж», 2000. – 1296 с.

Касаткин А.С., М.В. Немцов Электротехника: Учебное пособие для вузов. – М. «Высшая школа», 2003. – 542 с.

Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. Серия «Прикладная математика для ВТУЗов» – М.: «Высшая школа», 2008. – 480 с.

Рено Н.Н. Алгоритмы численных методов: методическое пособие для вузов. – М.: «Книжный дом Университет», 2007. – 24 с.

Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

<http://ru.wikipedia.org>

<http://www.digitland.ru>

Задание № 8.

Разработать программу расчета резонансных частот короткозамкнутого отрезка длинной линии, нагруженной на емкость, с применением метода простых итераций и метода Ньютона для решения трансцендентных уравнений.

Теоретические основы решения трансцендентных уравнений.

Решение трансцендентного уравнения вида $F(x) = 0$ состоит в поиске одного или всех корней \bar{x} на участке $[a, b]$ изменения x .

Метод простых итераций.

В рамках этого метода уравнение $F(x) = 0$ представляется в виде $x = f(x)$ и многократном применении формулы $x_{n+1} = f(x_n)$, пока выполняется условие

$|x_{n+1} - x_n| \geq \varepsilon$, где ε - заданная погрешность вычислений. Итерационный процесс сходится, то есть при $n \rightarrow \infty$ $x_n \rightarrow \bar{x}$, при соблюдении условия $f'(x) < 1$ на отрезке $[a, b]$.

Метод Ньютона.

Метод Ньютона, известный также как метод касательных, основан на замене $F(x)$ в точке нулевого приближения x_0 касательной, пересечение которой с осью x дает первое приближение x_1 , затем второе x_2 и т.д., как показано на рис. 1.

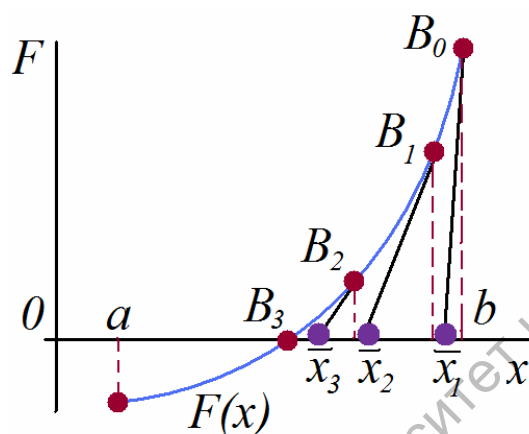


Рис. 1. Метод Ньютона

Итерационное приближение к корню \bar{x} можно описать формулой

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}.$$

Сам процесс осуществляется пока выполняется условие $|x_{n+1} - x_n| \geq \varepsilon$. В качестве x_0 выбирают конец отрезка $[a, b]$, на котором знаки $F(x_0)$ и $F''(x_0)$ совпадают.

Тестовые задания.

- 1) Вычислить корень уравнения $x = \sin x + 0.25$ на отрезке $[1.1; 1.2]$ обоими методами и сравнить точность нахождения корня и скорость.
- 2) Найти все корни уравнения $x^4 - 13x + 36 = 0$ на отрезке $[-4; 4]$ с точностью $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$.

Пояснения к заданию

Короткозамкнутый отрезок длинной линии волновым сопротивлением ρ и длиной l , нагруженной со стороны входа емкостью C , может служить в качестве резонатора на сверхвысоких частотах (см. рис. 12,а).

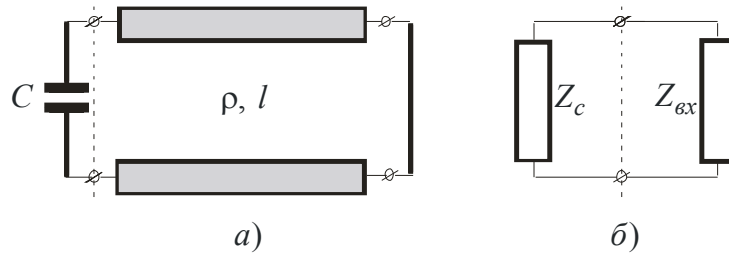


Рис. 2. Нагруженная длинная линия (а) и ее эквивалентная схема (б)

Полное сопротивление такого резонатора, как следует из его эквивалентной схемы (рис. 2,б), равно

$$Z = \frac{Z_c Z_{ex}}{Z_c + Z_{ex}}, \quad (1)$$

где $Z_c = \frac{1}{i\omega C}$; $Z_{ex} = i\rho\beta_0 \operatorname{tg} \beta_0 l$, $\beta_0 = 2\pi/\lambda$ - постоянная распространения волны в линии; $\rho = \sqrt{L_0/C_0}$, L_0 и C_0 - погонные индуктивность и емкость линии; $i = \sqrt{-1}$.

Условием, определяющим резонанс в линии, очевидно, будет равенство

$$Z_c + Z_{ex} = 0,$$

которое с учетом принятых обозначений приводит к трансцендентному уравнению

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{C}{C_l} \theta, \quad (2)$$

где $C_l = C_0 l$, $\theta = \beta_0 l$ - электрическая длина линии.

Необходимо методом простых итераций и методом Ньютона найти два первых корня уравнения (2) с точностью 0,001 и построить график их зависимости от отношения C/C_l , полагая, что C/C_l изменяется в пределах $0 \leq C/C_l \leq 10$ с шагом 0,5.

Литература

Гупта К., Гардж Р., Чадха К.. Машинное проектирование СВЧ устройств: Пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1987 – 432 с.

Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М. «Нолидж», 2000. – 1296 с.

Рено Н.Н. Алгоритмы численных методов: методическое пособие для вузов. – М.: «Книжный дом Университет», 2007. – 24 с.

Салий И.Н. Нерегулярные линии передачи: Учебное пособие для вузов. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. – 88 с.

Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

<http://www.digitland.ru>

Задание № 9.

Составить вычислительную программу расчета конструктивного параметра двухпроводной линии передачи, расположенной на расстоянии L от проводящей плоскости; проводники линии имеют равные диаметры D и расположены на расстоянии A друг от друга. Для решения нелинейного уравнения применить метод поразрядного приближения и его модификацию – метод подекадного приближения.

Теоретические основы метода.

Метод поразрядного приближения используется для поиска всех корней уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$; его реализацию составляют следующие этапы.

1. Задается шаг $c = h$, устанавливается начальное значение переменной $x = a$, индикатор (счетчик) принимается равным $k = 0$; вычисляется $W = \text{sgn}(f(x))$.

2. Значение переменной увеличивается на шаг: $x = x + c$, проверяется условие $x - c \geq b$. Если условие выполняется, вычисления прекращаются; в противном случае осуществляется переход к пункту 3.

3. Вычисляется значение функции в точке $x = x + c$ и проверяется условие $f(x)W/c > 0$. Если оно выполняется, то проводится переход к пункту 2, а иначе - к пункту 4.

4. На четвертом этапе принимается $c = -c/R$, где R – показатель разрядности (уменьшения шага c), и проверяется выполнение условия $|c| > \delta/R$,

где δ - заданная погрешность вычисления корня. Если это условие выполняется, переход осуществляется к пункту 5.

5. Счетчику присваивается число $k = k + 1$, считывается значение k -го корня $x_k = x$; принимаются $c = h$, $W = -W$, после чего осуществляется переход к пункту 2.

Уравнения для тестирования программы:

- 1) $5 \sin(x + 3) = 0, x \in [0; \pi]$; 2) $5 \operatorname{tg} x = 0, x \in [-2; \pi/4]$;
- 3) $1 - \exp(x + 0.5) = 0, x \in [-1; 2]$;
- 4) $\sqrt{2x + 1} = 0, x \in [-3; 1]$;
- 5) $2 - x - [\exp(20x) - 1] \cdot 10^{-7} = 0, x \in [0; 2], \delta = 0.0001$.

Пояснения к заданию.

Волновое сопротивление линии может быть рассчитано по формуле:

$$Z = \frac{120}{\sqrt{\varepsilon_r}} \left[\operatorname{arch} \frac{A}{D} - \ln \sqrt{1 + \left(\frac{A}{2L} \right)^2} \right] \text{ Ом},$$

где ε_r - относительная диэлектрическая проницаемость среды, в которой находятся проводники линии передачи.

Требуется найти такое расстояние между проводниками линии A , для которого волновое сопротивление принимало заданное значение Z_0 ; входными параметрами программы, помимо Z_0 , являются ε_r, D и L .

Рекомендуется для нахождения A решить нелинейное уравнение

$$|Z_0 - Z(A, D, L, \varepsilon_r)| = 0.$$

В качестве исходных данных следует принять, $Z_0 = 200 \text{ Ом}$, $D = 0,1 \text{ см}$, $L = 1,5 \text{ см}$, $\varepsilon_r = 1$. Расчет произвести с абсолютной погрешностью, не превышающей $\delta = 0,001$.

Примечание. Расчеты следует выполнить для различных значений показателя разрядности R , в том числе для $R = 10$, что соответствует методу подекадного приближения.

Литература

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельников Г.М. Численные методы. М., Наука. 1987.

Гупта К., Гардж Р., Чадха К. Машинное проектирование СВЧ устройств: Пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1987 – 432 с.

Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М. «Нолидж», 2000. – 1296 с.

Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. Серия «Прикладная математика для ВТУЗов» – М.: «Высшая школа», 2008. – 480 с.

Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М., Численные методы в экстремальных экстремальных задачах. М., Наука. 1975.

Рено Н.Н. Алгоритмы численных методов: методическое пособие для вузов. – М.: «Книжный дом Университет», 2007. – 24 с.

Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

<http://www.digitland.ru>

Задание № 10.

Составить вычислительную программу расчета конструктивного параметра линии передачи, представляющей собой два проводника разных диаметров D и X , расположенных в свободном пространстве на расстоянии A друг от друга. Для решения нелинейного уравнения применить метод поразрядного приближения и его модификацию – метод подекадного приближения.

Теоретические основы метода.

Метод подекадного приближения аналогичен методу поразрядного приближения при $R=10$ (где R – показатель разрядности, то есть уменьшения шага). Этот метод используется для поиска всех корней уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$ и может быть представлен в виде нескольких этапов.

1. На первом этапе задается шаг $c = h$, $x = a$, индикатор (счетчик) $k = 0$ и вычисляется $W = \text{sgn}(f(x))$.

2. На втором шаге задается значение переменно $x = x + c$ и проверяется условие $x - c \geq b$. Если оно выполняется, то вычисления прекращаются, в противном случае переход осуществляется к пункту 3.

3. На третьем этапе вычисляется значение функции в точке $x = x + c$ и проверяется условие $fW / c > 0$. Если оно выполняется, то проводится переход к пункту 2, а иначе к пункту 4.

4. На четвертом этапе задается $c = -c / R$ и проверяется выполнение условия $|c| > \varepsilon / R$, где ε - заданная погрешность вычисления корня. Если это условие выполняется, то переход осуществляется к пункту 5.

5. На пятом, последнем, этапе принимается $k = k + 1$, фиксируется k -й корень $x_k = x$; принимается $c = h$, $W = -W$, после чего осуществляется переход к пункту 2.

Уравнения для тестирования программы:

- 1) $5 \sin(x + 3) = 0$, $x \in [0; \pi]$; 2) $5 \operatorname{tg} x = 0$, $x \in [-2; \pi/4]$;
- 3) $1 - \exp(x + 0.5) = 0$, $x \in [-1; 2]$; 4) $\sqrt{2x + 1} = 0$, $x \in [-3; 1]$;
- 5) $2 - x - [\exp(20x) - 1] \cdot 10^{-7} = 0$, $x \in [0; 2]$, $\varepsilon = 0.0001$.

Пояснения к заданию.

Линия передачи представляет собой два проводника разных диаметров D и X , расположенных на расстоянии A друг от друга в свободном пространстве. Волновое сопротивление линии:

$$Z = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \operatorname{arch} \frac{4A^2 - D^2 - X^2}{2DX}$$

Требуется найти такое расстояние между проводниками линии A , для которого волновое сопротивление принимало заданное значение Z_0 ; входными параметрами программы, помимо Z_0 , являются ε_r , D и X .

Рекомендуется для нахождения A решить нелинейное уравнение

$$|Z_0 - Z(A, D, X, \varepsilon_r)| = 0.$$

В качестве исходных данных следует принять, $Z_0 = 300 \text{ Ом}$, $D = 0,1 \text{ см}$, $X = 0,05 \text{ см}$, $\varepsilon_r = 1$. Расчет произвести с абсолютной погрешностью, не превышающей $\delta = 0,001$.

Примечание. Расчеты следует выполнить для различных значений показателя разрядности R , в том числе для $R = 10$, что соответствует методу подекадного приближения.

Литература

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельников Г.М. Численные методы. М., Наука. 1987.

Гупта К., Гардж Р., Чадха К. Машинное проектирование СВЧ устройств: Пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1987 – 432 с.

Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М. «Нолидж», 2000. – 1296 с.

Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. Серия «Прикладная математика для ВТУЗов» – М.: «Высшая школа», 2008. – 480 с.

Б.Н.Пшеничный, Ю.М.Данилин, Численные методы в экстремальных задачах. М., Наука. 1975.

Рено Н.Н. Алгоритмы численных методов: методическое пособие для вузов. – М.: «Книжный дом Университет», 2007. – 24 с.

Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

<http://www.digitland.ru>

Задание № 11.

Разработать алгоритм и вычислительную программу решения уравнения вида $f(x)=0$ в задачах электротехники и электроники. Использовать в программе: а) метод деления пополам; б) метод хорд.

Теоретические основы методов.

Метод деления отрезка $[a, b]$ пополам можно представить в виде алгоритма следующим образом (при условии, что $f(a)>0$): 1) определить середину отрезка $x_c = (a + b)/2$ и значение функции в этой точке $f(x_c)$; 2) если $f(x_c)>0$, то задаем $a=x_c$, иначе $b=x_c$; 3) если $b - a > \varepsilon$ (ε - заданная точность вычислений), то возвращаемся к пункту 1, иначе заканчиваем вычисления.

Метод хорд. При использовании этого метода подразумевается, что корень \bar{x} находится внутри отрезка $[a, b]$. Метод хорд основывается на том, что каждое значение x_{n+1} определяется как точка пересечения оси абсцисс с хордой, проведенной через точки $f(a)$ и $f(b)$. Фиксируется та точка, в которой значения f и f' одинаковы. Если зафиксирован конец хорды a , то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a),$$

а если зафиксирован конец хорды b , то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n).$$

Если модуль разности превышает заданную точность, т.е. если $|x_{n+1} - x_n| > \varepsilon$, принимаем $b = x_{n+1}$, если фиксирован конец хорды a ; в противном случае принимаем $a = x_{n+1}$, и вычисления повторяются. Метод хорд демонстрируется на рис. 1.

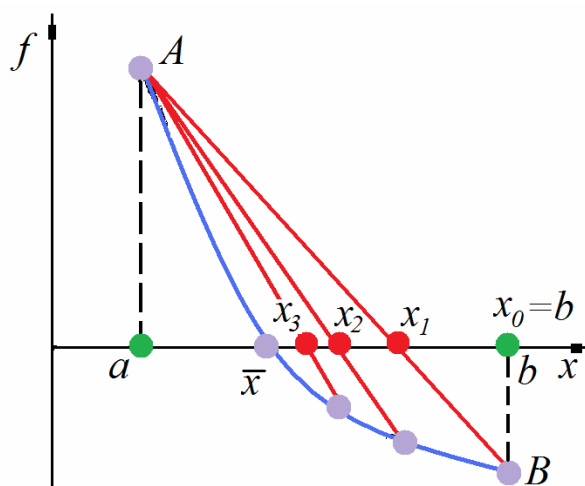


Рис. 1. Метод хорд

Уравнения для тестирования программы:

- 1) $5 \sin(x + 3) = 0, x \in [0; \pi]$; 2) $5 \tan x = 0, x \in [-2; \pi / 4]$;
- 3) $1 - \exp(x + 0.5) = 0, x \in [-1; 2]$; 4) $\sqrt{2x + 1} = 0, x \in [-3; 1]$;
- 5) $2 - x - 10^{-7} \cdot [\exp(20x) - 1] = 0, x \in [0; 2], \varepsilon = 0.0001$.

Дополнительное задание.

- 1) Найти напряжение на туннельном диоде путем решения уравнения

$$\frac{E - U}{R - I(U)} = 0,$$

где E – напряжение источника питания, R – сопротивление в его цепи. Ток определяется выражением вида

$$I \cong AU \exp(-\alpha U) + D[\exp(\beta U) - 1],$$

задающим N -образную вольтамперную характеристику туннельного диода. В качестве исходных данных рекомендуется принять: $A = 0,2718$; $D = 1 \cdot 10^{-8}$; $\alpha = 10$; $\beta = 20$; $E = 1, \text{В}$; $R = 125, \text{Ом}$. Границы отрезка $[a, b]$, и точность расчетов задаются самостоятельно.

Литература

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельников Г.М. Численные методы. М., Наука. 1987.

<http://ru.wikipedia.org>

Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М. «Нолидж», 2000. – 1296 с.

Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. Серия «Прикладная математика для ВТУЗов» – М.: «Высшая школа», 2008. – 480 с

Рено Н.Н. Алгоритмы численных методов: методическое пособие для вузов. – М.: «Книжный дом Университет», 2007. – 24 с.

Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

<http://www.digitland.ru>

Задание № 12.

Разработать алгоритм и вычислительную программу расчета методом золотого сечения конфигурации токонесущего проводника фильтра СВЧ, представляющего собой девять каскадно-соединенных отрезков регулярных микрополосковых линий передачи одинаковой длины и различных волновых сопротивлений.

Теоретические основы метода золотого сечения.

Этот метод основан на делении отрезка $[a, b]$ по правилу золотого сечения.

Метод реализуется выполнением нескольких этапов:

- 1) расчет коэффициента деления отрезка $k = (\sqrt{5} - 1)/2$;
- 2) вычисление абсциссы $x_1 = a + (1 - k) \cdot (b - a)$ и значения функции в этой точке $f(x_1)$;
- 3) вычисление абсциссы $x_2 = a + k \cdot (b - a)$ и значения функции в этой точке $f(x_2)$;
- 4) проверка выполнения условия $|x_2 - x_1| < \delta$, где δ - заданная погрешность вычисления. Если условие справедливо, то рассчитывается точка максимума $x_m = (x_1 + x_2)/2$ и максимум $f(x_m)$, и вычисления прекращаются. Если условие не выполняется, осуществляется переход к следующему пункту;
- 5) проверка выполнения условия $f(x_1) < f(x_2)$. Если условие справедливо, полагаем $a = x_1$, $x_1 = x_2$ и $f(x_1) = f(x_2)$, после чего осуществляется переход к пунктам 3 и 4;
- 6) проверка выполнения условия $f(x_1) \geq f(x_2)$. Если условие справедливо, то полагаем $b = x_2$, $x_2 = x_1$, $f(x_2) = f(x_1)$, после чего проводится переход к пунктам 2 и 4.

Функции для тестирования программы:

- 1) Найти максимум функции $F(x) = 0.1x^3 - 2x^2 + 10x$ для $a=2$, $b = 5$, $\delta = 0.001$. Исследовать влияние числа δ на решение.

2) Найти максимум функции $F(x) = 20 \cos x + 10$ для $a=-1, b = 1, \delta = 0.001$.

Исследовать влияние числа δ на решение.

3) Найти максимум функции $F(x) = -\exp(|x|) + 3$ для $a=-1, b = 2, \delta = 0.001$.

Исследовать влияние числа δ на решение.

Пояснения к заданию.

Структурная схема фильтра показана на рис. 1.

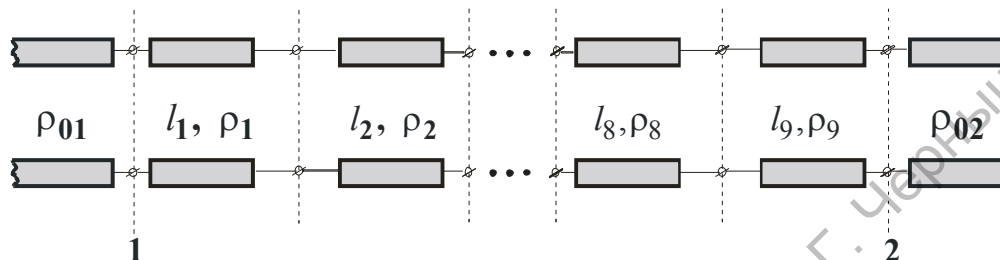


Рис. 1.

Между клеммными плоскостями 1 и 2, к которым подходят подводящие линии с волновыми сопротивлениями ρ_{01} и ρ_{02} , включены 9 звеньев. Каждое k -е звено есть отрезок регулярной линии длиной l_k и волновым сопротивлением ρ_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Подводящие линии, как и звенья фильтра, выполнены в микрополосковом исполнении. Эскиз отрезка такой линии показан на рис. 2.

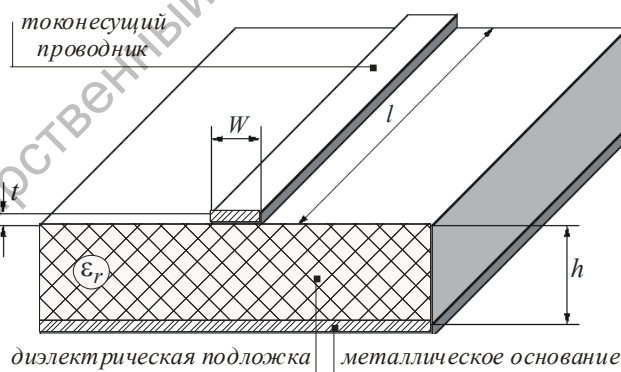


Рис. 2

Связь между значением волнового сопротивления ρ и параметрами микрополосковой линии – шириной токонесущего проводника W , толщиной h и относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_r подложки, определяется формулой (справедливой для $t = 0$):

$$\rho(W, h, \epsilon_r) = \frac{120}{\sqrt{2(\epsilon_r + 1)}} \left[\ln \left(\frac{4h}{W} + \sqrt{\left(\frac{4h}{W} \right)^2 + 2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left(\ln \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\epsilon_r} \ln \frac{4}{\pi} \right) \right].$$

Необходимо составить программу расчета относительной ширины W/h токонесущего проводника для заданных волнового сопротивления и диэлектрической проницаемости подложки.

Входными данными программы являются численные значения: $\rho_{01}, \rho_{02}, \rho_k, l_k, \varepsilon_r$.

Численные расчеты выполнить, приняв $\varepsilon_r = 9,7$; значения волновых сопротивлений подводящих линий и звеньев структуры показаны на рис. 3.

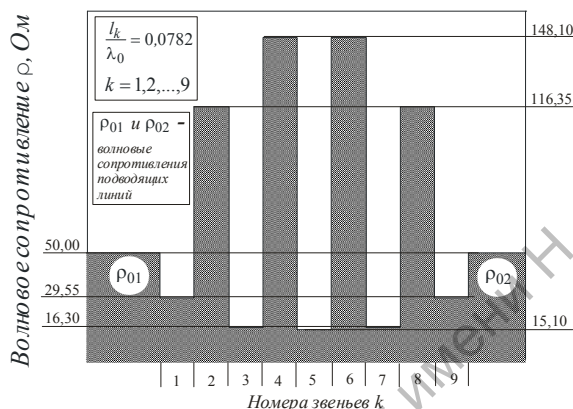


Рис. 3.

Результаты расчета представить в виде эскиза токонесущего проводника.

Литература

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельников Г.М. Численные методы. М., Наука. 1987.

Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М. «Нолидж», 2000. – 1296 с.

Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. Серия «Прикладная математика для ВТУЗов» – М.: «Высшая школа», 2008. – 480 с.

Справочник по элементам полосковой техники /Мазепова О.И., Мещанов В.П., Прохорова Н.И. и др. М.: Изд-во "Связь". 1979. С. 336.

Рено Н.Н. Алгоритмы численных методов: методическое пособие для вузов. – М.: «Книжный дом Университет», 2007. – 24 с.

Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

<http://qucs.sourceforge.net/tech/>

<http://ru.wikipedia.org>

<http://www.digitland.ru>

Задание № 13.

Разработать программу формирования матрицы связности физического объекта, заданного конечным количеством точек N , их пространственными координатами x_k, y_k, z_k ($k = 1, 2, \dots, N$) и численным значением параметра связности R_{\max} .

Пояснения и дополнительная информация.

Точку j ($j = 1, 2, \dots, N$) будем полагать связанной с точкой k ($k = 1, 2, \dots, N$), если расстояние между ними $r_{jk} < R_{\max}$ – заданного параметра связности и, кроме того, $j < k$. Последнее означает, что связь между двумя точками учитывается только один раз: в направлении $j \rightarrow k$.

Матрица связности \mathbf{B}_N имеет размерность $N \times N$. В p -ой строке содержится информация, характеризующая связь p -ой точки с остальными: численное значение элемента $(\mathbf{B}_N)_{p1}$ равно количеству имеющихся связей точки p ; численные значения элементов $(\mathbf{B}_N)_{pk}$ ($k \geq 2$) совпадают с номерами тех точек, которые связаны с точкой p . Остальные элементы p -ой строки равны нулю. Важно, что элементы $(\mathbf{B}_N)_{pk}$, начиная с $k \geq 2$, располагаются в строке в порядке возрастания их численных значений. Пример матрицы связности объекта, заданного пятью точками, приведен на рис. 1: отрезки линии соединяют точки, между которыми имеется связь.

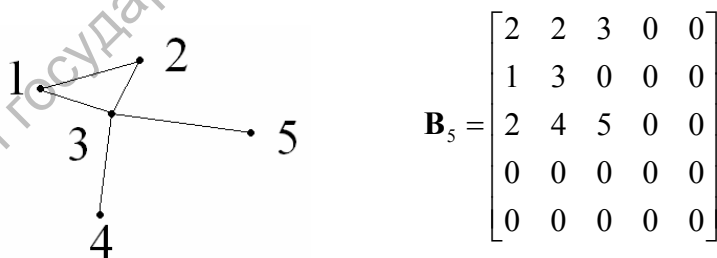


Рис. 1. Конфигурация объекта, заданного пятью точками, и его матрица связности

Входной файл программы должен содержать следующую информацию: численное значение количества точек N (первая строка); пространственные координаты точек x_k, y_k, z_k ($k = 1, 2, \dots, N$), располагаемые построчно в порядке

возрастания номера точек; численное значение параметра связности R_{\max} (последняя строка). Пример структуры входного файла содержится в табл. 1.

Таблица 1

3 (количество точек)			
x_1	y_1	z_1	}
x_2	y_2	z_2	
x_3	y_3	z_3	
(массив координат)			
R_{\max}			

Структура выходного файла построчно следующая: N , $(\mathbf{V}_N)_{pk}$, $\{x_k, y_k, z_k\}$; R_{\max} .

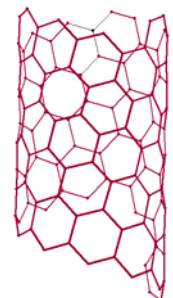
В процессе разработки программы необходимо предусмотреть возможность графического представления конфигурации объекта в виде точек, соединенных линиями связи.

Рекомендация. Для отладки программы целесообразно воспользоваться данными, приведенными в таблице 2.

Таблица 2

Входной файл	Выходной файл	Конфигурация объекта
9	9	
1,23 0 0,01	1 2 0 0 0 0 0 0 0	
2,46 0,71 -0,02	2 3 5 0 0 0 0 0 0	
3,69 0 -0,02	0 0 0 0 0 0 0 0 0	
1,23 2,84 9	2 5 7 0 0 0 0 0 0	
2,46 2,13 -0,02	1 6 0 0 0 0 0 0 0	
3,69 2,84 0	1 9 0 0 0 0 0 0 0	
1,23 4,26 0,01	1 8 0 0 0 0 0 0 0	
2,46 4,97 0,01	1 9 0 0 0 0 0 0 0	
3,69 4,26 0,01	0 0 0 0 0 0 0 0 0	
1,45	1,23 0 0,01	
	2,46 0,71 -0,02	
	3,69 0 -0,02	
	1,23 2,84 -0,02	
	2,46 2,13 -0,02	
	3,69 2,84 0	
	1,23 4,26 0,01	
	2,46 4,97 0,01	
	3,69 4,26 0,01	
	1,45	

Примечание. В качестве практической значимости



вычислительной программы, которую предлагается составить, приведем пример конфигурации *углеродного нанокластера – киральной нанотрубки (3,8)*, насчитывающей 121 атом. (Термин «киральная нанотрубка» означает, что конфигурация атомного каркаса содержит винтовую ось). Вид нанотрубки представлен на рис. 2.

Рис. 2

Литература.

Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М. «Нолидж», 2000. – 1296 с.

Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

<http://www.digitland.ru>

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского