

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
Факультет нелинейных процессов

*Б.С. Дмитриев, Ю.И. Левин, Ю.П. Шараевский*

**Поля движущихся зарядов. Законы  
преобразования электрических и магнитных полей  
(*релятивистская трактовка*)**

Учебное пособие

Саратов – 2015

УДК 530.12(075.8)

**Д 53 Дмитриев Б.С., Левин Ю.И., Шараевский Ю.П.**

Поля движущихся зарядов. Законы преобразования электрических и магнитных полей (релятивистская трактовка). Учебное пособие.

В пособии рассмотрены электрические и магнитные поля движущихся зарядов на основе фундаментальных понятий сохранения электрического заряда, его инвариантности и аппарата специальной теории относительности. Такой подход позволяет физически ясно получить законы преобразования электрических и магнитных полей в инерциальных системах отсчёта.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся на факультете нелинейных процессов СГУ, а также окажется полезным широкому кругу учащихся и преподавателей, интересующихся этой проблемой.

Рекомендуют к публикации  
кафедры нелинейной физики и физики открытых систем  
факультета нелинейных процессов СГУ

## Содержание

Введение	3
1. Поле движущегося заряда. Преобразование электрического поля	7
2. О природе магнитной силы	16
3. Преобразование электромагнитных полей	24
Литература	30

**Уравнения Максвелла. Инвариантность заряда. Поле движущегося заряда. Релятивистская природа магнитной силы. Особенности релятивистского движения заряда в электромагнитных полях. Тормозное и черенковское излучения. Преобразования и относительность полей. Опыт Роуланда. Инварианты поля. Электромагнитный импульс движущегося заряда.**

## **Введение**

Классическая теория электромагнитных явлений выросла на основе обобщения опытов и открытий Эрстеда, Фарадея, Ампера и сформулирована в 60-х годах 19 века Дж.Максвеллом в виде нескольких фундаментальных уравнений. Специальная теория относительности берет свои истоки именно в электромагнетизме – напомним, что великая работа Эйнштейна в 1905 г. называлась «Об электродинамике движущихся тел». Задолго до формулировки принципа относительности, по которому любая полная физическая теория должна быть релятивистски инвариантной, уже существовала одна такая теория – теория электромагнетизма Максвелла. Электромагнитные явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета, уравнения Максвелла не меняют своей формы (очень изящной и простой) при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, иначе, мы говорим, что они релятивистски инварианты. При переходе к новой инерциальной системе отсчета необходимо использовать преобразования Лоренца не только для пространственных координат и времени, но также для векторов электрического и магнитного полей, плотностей тока и заряда, что, как раз, и представляет теперь для нас основной вопрос исследования. Уравнения Максвелла связывают величины, характеризующие электромагнитное поле (напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  и магнитную индукцию  $\mathbf{B}$ ), с его источниками, то есть с распределением в пространстве электрических зарядов и токов.

Представим эти уравнения (1) в интегральной и дифференциальной

формах в отдельной таблице с краткими комментариями.

Таблица

**Уравнения Максвелла (для полей в вакууме) (1)**

I	$\int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = q/\epsilon_0$ $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$
II	$\int_l \mathbf{E} dl = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$ $\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
III	$\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$
IV	$\int_l \mathbf{B} dl = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}$ $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Это уравнение обычно называют теоремой Гаусса – Остроградского. Поток поля  $\mathbf{E}$  через любую замкнутую поверхность  $S$  определяется электрическим зарядом, находящимся внутри этой поверхности. Скалярная функция  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  выражает локальное соотношение, то есть в каждой точке, между  $\mathbf{E}$  и плотностью заряда  $\rho$ , этот закон справедлив всегда как в динамических, так и в статических полях. Уравнение I эквивалентно закону взаимодействия зарядов – закону Кулона. Линейность уравнения отражает справедливость принципа суперпозиций.

Уравнение II является математической формулировкой закона электромагнитной индукции Фарадея. Циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  вдоль замкнутого контура  $l$  (ЭДС индукции) определяется скоростью изменения потока вектора магнитного поля  $\mathbf{B}$  через поверхность  $S$ , ограниченную данным контуром. Уравнение указывает на изменяющееся магнитное поле как на один из возможных источников электрического поля, помимо зарядов (уравнение I). Условие  $\operatorname{rot} \mathbf{E} \neq 0$  означает, что электрическое поле, возбуждаемое переменным магнитным полем, – не потенциальное (которое порождается неподвижными зарядами), а вихревое.

Поток поля  $\mathbf{B}$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$  всегда равен нулю. Это означает, что линии  $\mathbf{B}$  не имеют источников, нет магнитных зарядов. Источниками магнитного поля являются токи. Поля, дивергенция которых всюду равна нулю, являются вихревыми. Уравнение III справедливо для постоянных и переменных полей. Принцип суперпозиций справедлив и для поля  $\mathbf{B}$ .

Величина  $\epsilon_0 d\mathbf{E} dt$  была введена и названа Максвеллом плотностью тока смещения,  $\mathbf{j}$  – плотность тока проводимости. Полный ток, равный сумме этих токов, всегда является замкнутым. Магнитные поля возбуждаются либо движущимися электрическими зарядами (то есть токами), либо переменными электрическими полями.

$\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,

$\mu_0$  – магнитная постоянная,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м,

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1.$$

В вакууме электрическое поле  $\mathbf{E}$  и магнитное поле  $\mathbf{B}$  определяют силы, действующие со стороны поля на заряды и токи (то есть движущиеся заряды). Существует важный общий принцип, позволяющий изучать действие электромагнитных сил. Экспериментально установлено, что полная сила, действующая на отдельный заряд  $q$  в полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  (независимо от того, сколько есть еще зарядов и как они движутся) зависит от положения этого заряда и его скорости  $\mathbf{V}$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{V}\mathbf{B}], \quad (2)$$

где векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  не зависят от  $\mathbf{V}$ . Обратим внимание, что формулу (2) можно считать определением электрического и магнитного полей в данной точке пространства – действие электрического поля  $\mathbf{E}$  совсем не зависит от  $\mathbf{V}$ , а с вектором  $\mathbf{B}$  связана та часть силы, действующей на движущийся заряд, которая пропорциональна его скорости. Учитывая (2) и выводы релятивистской динамики, найдем релятивистское уравнение движения заряда

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\mathbf{V}}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} \right) = q\mathbf{E} + q\mathbf{V}\mathbf{B}. \quad (3)$$

Отметим еще одно важное обстоятельство, которое играет определяющую роль при изучении полей движущихся зарядов. Речь идет о релятивистской инвариантности электрического заряда – заряд частицы  $q$  есть инвариантная скалярная величина, не зависящая от системы отсчета. Это знаменательный и фундаментальный факт, подтвержденный исчерпывающими экспериментальными доказательствами. В качестве примера можно сослаться на точную электрическую нейтральность различных атомов и молекул. Например, прямые измерения доказывают, что в молекуле водорода заряды электрона и протона равны с точностью до  $10^{-20}$ . Мы приходим к выводу, что электрический заряд отдельной частицы не зависит от состояния движения. Если считать, что выражение (2) дает величину силы  $\mathbf{F}$  в инерциальной системе  $K$ , то требование релятивистской инвариантности позволяет представить силу  $\mathbf{F}'$  в системе  $K'$  в следующем виде

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}' + q[\mathbf{V}'\mathbf{B}'], \quad (4)$$

где  $\mathbf{V}'$  – скорость заряда в системе  $K'$ , а  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$  – поля в этой же системе.

Нужно обратить внимание, что релятивистская инвариантность заряда

не эквивалентна сохранению заряда, математически выражаемому уравнением

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Оно называется также уравнением непрерывности. Это уравнение выражает фундаментальный закон сохранения заряда: любой поток заряда из замкнутой области в какой-либо системе отсчета сопровождается уменьшением заряда, в этой области. А инвариантность заряда означает, что величина заряда в выделенной области (в данный момент времени!) одинакова при измерении из любой инерциальной системы отсчета. Уравнение непрерывности не включено в число фундаментальных уравнений электромагнитного поля (1), поскольку является следствием этих уравнений. Действительно, достаточно взять дивергенцию от обеих частей уравнения IV системы (1) и учесть, что дивергенция ротора всегда равна нулю

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 = \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \operatorname{div} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right),$$

откуда

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

Воспользуемся уравнением I системы (1), тогда получим уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению различных физических картин преобразования электромагнитных полей на основе фундаментального физического факта – инвариантности заряда и преобразований Лоренца.

## 1. Поле движущегося заряда. Преобразование электрического поля. Электрическая сила

Как уже отмечалось, нам необходимо найти законы преобразования полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Что это значит? Пусть мы знаем векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в одной инерциальной системе. Задача, которую надо решить, – как они выглядят в другой системе, движущейся относительно первой.

Сначала начнем рассмотрение с электрических полей, образованных довольно простыми конфигурациями зарядов. Рассмотрим в системе отсчета  $K$  поле между двумя неподвижными, параллельными, однородно заряженными слоями с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Для удобства эти слои выберем в форме квадрата со стороной  $l$  и с расстоянием между ними  $d$  (рис. 1, а). Слои расположены параллельно плоскости  $xy$ . Если  $l \gg d$ , то поле между пластинами можно считать однородным и равным  $E_z = \sigma/\epsilon_0$ . Пусть другая инерциальная система  $K'$  движется по отношению к  $K$  налево со скоростью  $V$ . Для наблюдателя в системе  $K'$  заряженные пластины уже не квадраты, поскольку в направлении  $x'$  происходит лоренцево сокращение, длина слоя в направлении  $x'$  равна  $l' = l(1 - V^2/c^2)^{1/2}$ . Но поскольку полный заряд инвариантен, поэтому плотность заряда в  $K'$  возрастет и будет равна  $\sigma' = \sigma(1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ . Поэтому в системе  $K'$  поле между движущимися слоями будет равно

$$E'_z = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = \gamma \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \gamma E_z,$$

$\beta = V/c$ ,  $\gamma = 1/(1 - \beta^2)^{1/2}$  (рис. 1, б). Обратим внимание, что направления  $z$  и  $z'$  эквивалентны, так как они оба перпендикулярны к скорости  $V$ , поля  $E_z$  и  $E_{z'}$

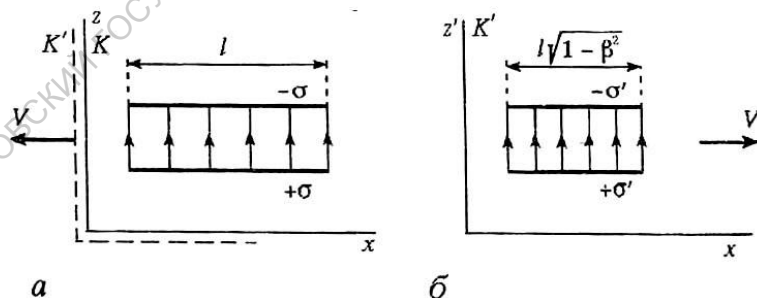


Рис. 1

можно назвать поперечными к направлению движения, обозначим их  $E_{\perp}$ . Для поперечных компонент поля мы нашли  $E'_{\perp} = \gamma E_{\perp}$ .

Обратимся теперь к продольной компоненте поля, то есть составляющей поля, параллельной  $V$ . Для этого расположим заряженные слои перпендикулярно к оси  $x$  (рис. 2, а).

Поле  $E_x = \sigma/\epsilon_0$ . При переходе в систему  $K'$  поверхностная плотность заряда не меняется, так как лоренцево сокращение приводит только к уменьшению расстояния между слоями, которое не влияет на напряженность поля. В этом случае

$$E'_x = \sigma'/\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0 = E_x$$

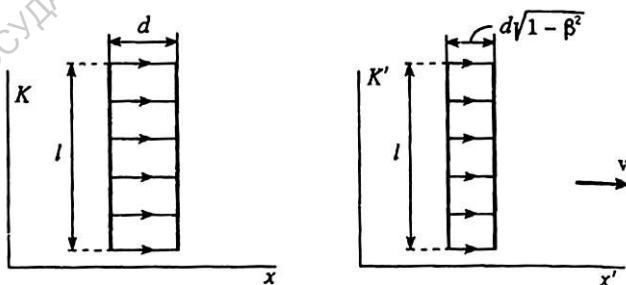
Обозначая продольную компоненту поля через  $E_{\parallel}$ , перепишем полученный результат  $E'_{\parallel} = E_{\parallel}$ .

В общем случае каким бы ни было направление поля  $E$  в системе  $K$ , его можно представить как суперпозицию продольной и поперечной компонент:  $E = E_{\parallel} + E_{\perp}$ . Наше рассмотрение показало, что

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad E'_{\perp} = \gamma E_{\perp}. \quad (4)$$

Уравнения (4) можно назвать законом преобразования электрического поля. Необходимо отметить, что полученный закон справедлив для полей, образованных зарядами, покоящимися в системе  $K$ . Для его использования необходимо находить такую инерциальную систему отсчета, в которой заряды неподвижны.

С помощью полученного результата рассмотрим задачу о нахождении поля (пока только электрического!) равномерно движущегося заряда. Пусть



а

б

Рис. 2



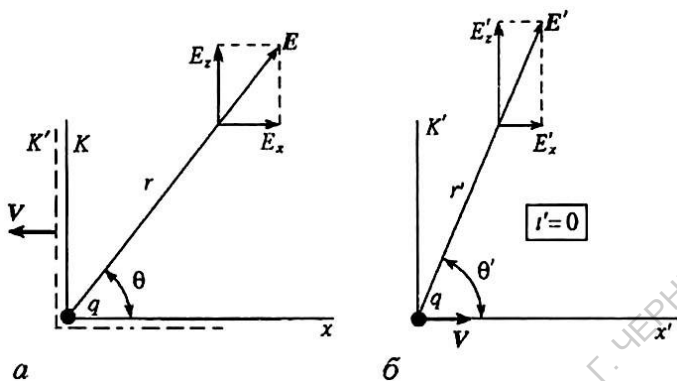


Рис. 3

точечный заряд  $q$  покоится в начале координат системы отсчета  $K$  (рис. 3,  $a$ ). В этой системе статическое электрическое поле в каждой точке пространства постоянно и направлено от заряда по радиусу к данной точке

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

В любой точке  $(x, z)$  для плоскости, показанной на рис. 3,  $a$ , его компоненты равны  $E_x = E \cos \theta$ ,  $E_z = E \sin \theta$ . Очевидно,  $r = (x^2 + z^2)^{1/2}$ ,  $\cos \theta = x/r$ ,  $\sin \theta = z/r$ , поэтому

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + z^2)^{3/2}}, \\ E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(x^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть опять система  $K'$  движется со скоростью  $V$  в отрицательном направлении оси  $x$ , тогда связь между координатами и временем по преобразованиям Лоренца такова:

$$x = \gamma(x' - \beta ct'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma(t' - \beta x'/c),$$

в начальный момент времени  $t = t' = 0$  начала обеих систем отсчета совпадают. Согласно преобразованию полей (4),  $E'_z = \gamma E_z$  и  $E'_x = E_x$ . Используя соотношения (5) и преобразования Лоренца для определенного

момента времени  $t' = 0$ , когда заряд  $q$  проходит через начало координат системы  $K'$  (рис. 3, б), имеем

$$E'_x = E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma x'}{\sqrt{(\gamma x')^2 + z'^2}^{\frac{3}{2}}},$$

$$E'_z = \gamma E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma z'}{\sqrt{(\gamma x')^2 + z'^2}^{\frac{3}{2}}}.$$

Из этих уравнений видно, что  $E'_z/E'_x = z'/x' = \text{tg } \theta'$ , где  $\theta'$  – угол между направлением движения заряда и радиусом-вектором, проведенным из мгновенного положения  $\mathbf{r}' = 0$  заряда в точку наблюдения. Это означает, что направление  $\mathbf{E}'$  совпадает с направлением  $\mathbf{r}'$  (см. рис. 3, б), то есть электрическое поле заряда радиально и направлено, подчеркнем еще раз, вдоль линии, проходящей через мгновенное положение заряда. Создается впечатление, что силовые линии расходятся от заряда так же, как и в стационарном случае. Но, конечно же, поле не может быть тем же самым, здесь есть нечто интересное, на что мы и обратим внимание.

Сначала вычислим величину  $E'^2$ :

$$\begin{aligned} E'^2 &= E_x'^2 + E_z'^2 = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{q^2 \gamma^2 (x'^2 + z'^2)}{\sqrt{(\gamma x')^2 + z'^2}^3} = \\ &= \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{q^2 \gamma^2 (x'^2 + z'^2)}{\gamma^4 \sqrt{z'^2 + z'^2 - \beta^2 z'^2}^3} = \\ &= \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{q^2 (1 - \beta^2)^2}{\sqrt{(x'^2 + z'^2) - \beta^2 z'^2 / (x'^2 + z'^2)}^3} = \\ &= \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{q^2}{\sqrt{(x'^2 + z'^2) - \beta^2 (z'/r')^2}^3} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{q^2}{\sqrt{(x'^2 + z'^2) - \beta^2 \sin^2 \theta'}^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

откуда

$$E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta'}^{\frac{3}{2}}}. \quad (6)$$

Чтобы еще раз обратить внимание на важное утверждение, что электрическое поле равномерно движущегося заряда в данный момент времени направлено радиально от мгновенного положения заряда, представим (6) в векторном виде

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}'}{r'^3} \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta'}^{\frac{3}{2}}}.$$

Электрическое поле движущегося заряда имеет принципиальное отличие от поля неподвижного заряда, которое является в пространстве сферически-симметричным (рис. 4, *a*). Для подвижного заряда поле под прямым углом к направлению движения ( $\theta' = \pi/2$ ) оказывается сильнее, чем поле в направлении движения ( $\theta' = 0$ ) при одинаковом расстоянии  $r'$  от заряда. В самом деле, согласно формуле (6):

при  $\theta' = 0$ ,

$$E'_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} (1 - \beta^2),$$

при  $\theta' = \pi/2$ ,

$$E'_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}},$$

что дает  $E'_{\perp} > E'_{\parallel}$ .

Если, как это принято, напряженность поля характеризовать плотностью силовых линий, то линии поля движущегося заряда как бы «сплюсываются» по направлению движения, то есть стремятся сконцентрироваться в диск, перпендикулярный к направлению движения (рис. 4, *б*). При увеличении скорости заряда поле  $E_{\parallel}$  падает, а  $E_{\perp}$  возрастает.

Если частица движется со скоростью, близкой к скорости света, то поле перед частицей сильно уменьшается, а поле сбоку резко возрастает. Картина электрического поля движущегося заряда можно придать следующее наглядное толкование. Предположим, мы нарисовали на листе бумаги силовые линии покоящегося заряда (см. рис. 4, *a*), а затем эту картину начали двигать с большой скоростью  $V$ . Благодаря лоренцеву сокращению рисунок

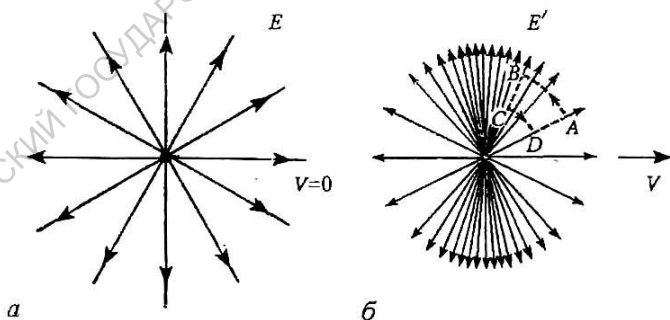


Рис. 4

сожмется – линии сожмутся по бокам, а перед зарядом и позади него получится разрежение (см.рис. 4, б). Конечно, это только красивая идея сокращающейся картинки.

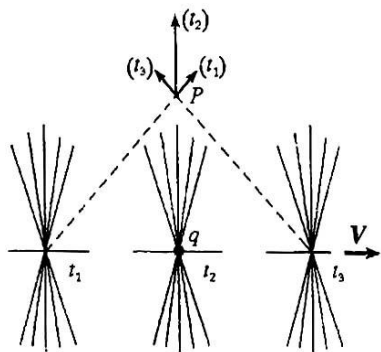


Рис. 5

Поле, создаваемое движущимся зарядом, не является электростатическим, оно не может быть образовано каким-либо стационарным распределением зарядов. Критерий потенциальности электростатического поля требует равенства нулю циркуляции вектора  $\mathbf{E}$  по любому замкнутому контуру:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

Подсчитаем циркуляцию поля  $\mathbf{E}'$  по замкнутому пути  $ABCD$  (см.рис. 4, б), состоящему из двух дуг окружностей  $AB$  и  $CD$  и двух радиальных участков  $BC$  и  $DA$ .

На элементах окружностей  $\int_{AB} \mathbf{E}' d\mathbf{l} = \int_{CD} \mathbf{E}' d\mathbf{l} = 0$ , так как  $\mathbf{E}' \perp d\mathbf{l}$ . На радиальных участках поле вдоль  $BC$  сильнее, чем вдоль  $DA$ , так что

$$\int_{BC} \mathbf{E}' d\mathbf{l} > \int_{DA} \mathbf{E}' d\mathbf{l}.$$

Таким образом,  $\oint \mathbf{E}' d\mathbf{l} \neq 0$ , то есть поле  $\mathbf{E}'$  – не электростатическое.

Конфигурация поля заряда, движущегося равномерно и прямолинейно, показанная на рис. 4, б, с течением времени не изменяется, но она характеризует поле в определенный момент времени. Это поле наблюдается в системе отсчета, в которой заряд движется вдоль оси  $x'$  с постоянной скоростью. Но с течением времени меняется положение этой конфигурации относительно неподвижной системы отсчета, то есть неизменная конфигурация поля движется вместе с зарядом. На рис. 5 показаны картины поля движущегося заряда для трех моментов времени 1,2,3, разделенных равными временными интервалами. Здесь же показано поле  $\mathbf{E}'$  в определенной точке  $P$  в эти моменты времени. Хотя конфигурация поля заряда неизменна, в каждой пространственной точке поле  $\mathbf{E}'$  со временем изменяется.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Мы уже упоминали, что пока рассматривается только электрическое поле движущегося

Полученный закон преобразования электрического поля (4) позволяет ответить еще на один вопрос: чему равна сила, действующая на движущийся заряд в электрическом поле? Из электростатики хорошо известно, что сила, действующая на неподвижный заряд, равна  $qE$ , где  $E$  – поле в системе отсчета, где заряд покоится. Для ответа на поставленный вопрос будем считать, что в системе отсчета  $K$  имеется статическое поле  $E$ , в некоторой точке и в некоторый момент времени мы наблюдаем частицу с зарядом  $q$ , движущуюся со скоростью  $V$  вдоль оси  $x$ . В системе «покоя частицы» (будем считать ее системой  $K'$ ), где она неподвижна, силу найти просто – достаточно по закону преобразования поля определить  $E'$  и учесть  $F' = qE'$ . Однако нас интересует сила  $F$  в системе  $K$ . Следовательно, необходимо еще воспользоваться законом преобразования сил:

$$F_{\parallel} = F'_{\parallel}, \quad F_{\perp} = \frac{1}{\gamma} F'_{\perp}.$$

Представим поле  $E$  системы  $K$  через продольные и поперечные компоненты:  $E = E_{\parallel} + E_{\perp}$ . Соответствующие компоненты поля  $E'$  в системе  $K'$  обозначим  $E'_{\parallel}$ ,  $E'_{\perp}$ . Теперь запишем силы в системе  $K'$

$$F'_{\parallel} = qE'_{\parallel} = qE_{\parallel}, \quad F'_{\perp} = qE'_{\perp} = q\gamma E_{\perp},$$

и по закону преобразования сил найдем их значения в системе  $K$ :

$$F_{\parallel} = F'_{\parallel} = qE_{\parallel}, \quad F_{\perp} = \frac{1}{\gamma} F'_{\perp} = \frac{1}{\gamma} q\gamma E_{\perp} = qE_{\perp},$$

Итак, в системе  $K$ ,  $F_{\parallel} = qE_{\parallel}$ ,  $F_{\perp} = qE_{\perp}$ . Смысл этих соотношений прост: сила, действующая на заряженную частицу в процессе ее движения, в системе  $K$  равна  $F = qE$  независимо от скорости частицы. Этот результат фактически содержится в уравнении (2). Эксперименты в широких пределах подтверждают этот вывод – для электронов до скоростей, настолько близких к скорости света, что параметр  $\gamma = 10^4$ .

Используем теперь полученное соотношение  $F = qE$  и релятивистское уравнение движения для анализа релятивистских особенностей при движении заряженной частицы в однородном электрическом поле. Рассмотрим два характерных частных случая – движение в продольном и поперечном полях. Пусть частица с зарядом  $q$  и массой покоя  $M$  ускоряется из состояния покоя электрическим полем  $E$ . Для таких условий уравнение движения имеет вид

---

заряда. Наряду с ним, в каждой точке будет существовать и магнитное поле, связанное с электрическим. Обсуждение этого будет проведено позже.

$$\frac{dP}{dt} = qE.$$

Для релятивистского импульса получаем  $P = qEt$ .  
 Напишем уравнение движения в виде

$$M \frac{d}{dt} \frac{V}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} = qE,$$

$$Md \left( \frac{V}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} \right) = qEdt.$$

Интегрируя последнее уравнение по времени (при начальной нулевой скорости), получим

$$\frac{MV}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} = qEt.$$

После возведения в квадрат обеих частей равенства и перестановок найдем

$$V = \frac{qEt / M}{(1 + (qEt / Mc)^2)^{1/2}}.$$

Зависимость скорости заряженной частицы от времени приведена на рис. 6. При больших промежутках времени ( $t \gg Mc/qE$ ) имеем ультрарелятивистский предел – скорость  $V$  фактически равна  $c$ . (Пунктиром на рисунке показана линия, соответствующая расчетам по классической механике.) Полная релятивистская энергия (здесь мы обозначим ее символом  $E_{\text{эп}}$ , чтобы не путать с напряженностью поля) связана с импульсом соотношением

$$E_{\text{эп}}^2 = P^2 c^2 + M^2 c^4.$$

В ультрарелятивистском случае импульс настолько велик, что

$$E_{\text{эп}}^2 \approx P^2 c^2 = (qEct)^2$$

Таким образом,  $E_{\text{эп}} \approx qEct$ ,  $P = qEt$ . В этом заключается характерная релятивистская особенность рассматриваемой задачи: импульс и энергия со временем продолжают возрастать, хотя скорость практически установилась.

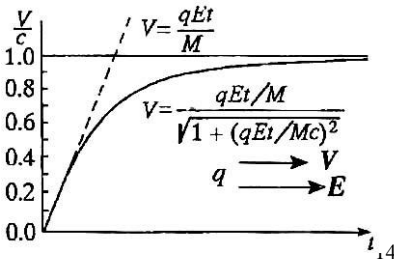


Рис. 6

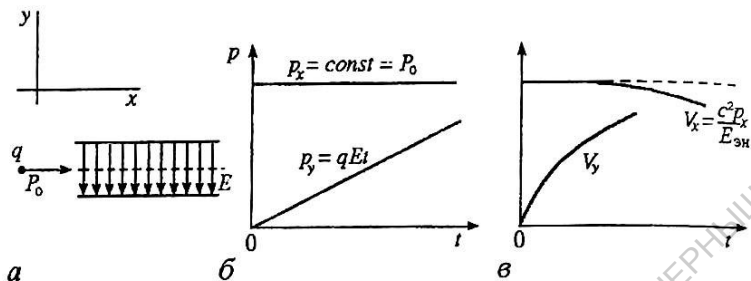


Рис. 7

А теперь пусть эта частица, двигавшаяся вдоль оси  $x$  с большим импульсом  $P_0$ , входит в область поперечного электрического поля  $E$  (рис. 7, а).

Требуется найти изменение со временем составляющих скорости  $V_x$  и  $V_y$ . На частицу действует только сила  $F_y = qE$ . Поэтому имеем уравнения движения вдоль осей  $x$  и  $y$ :

$$\frac{dP_x}{dt} = 0, \quad \frac{dP_y}{dt} = qE,$$

откуда  $P_x = \text{const} = P_0$ ,  $P_y = qEt$  (рис. 7, б).

Найдем полный импульс частицы

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \sqrt{P_0^2 + (qEt)^2}.$$

Известно соотношение  $V = \frac{c^2}{E_{\text{эн}}} P$ .

Энергию определяем следующим образом:

$$E_{\text{эн}} = \sqrt{M^2 c^4 + P_0^2 + (qEt)^2 c^2} = \sqrt{E_{\text{нач}}^2 + (qEtc)^2},$$

где  $E_{\text{нач}}^2 = P_0^2 c^2 + M^2 c^4$  – начальная энергия покоя и движения. Теперь выразим составляющие скорости

$$V_x = \frac{P_x c^2}{E_{\text{эн}}} = \frac{P_0 c^2}{\sqrt{E_{\text{нач}}^2 + (qEtc)^2}}, \quad V_y = \frac{P_y c^2}{E_{\text{эн}}} = \frac{qEtc^2}{\sqrt{E_{\text{нач}}^2 + (qEtc)^2}}.$$

Их изменение показано на рис. 7, в. Отметим характерные релятивистские особенности: скорость  $V_x$  уменьшается с ростом  $t$ , если область поперечного поля безгранична, то  $V_x \rightarrow 0$ . Классическая механика предсказывает,

разумеется, постоянство  $V_x$ . Изменение  $V_y$  соответствует изменению скорости  $V$  в продольном поле, в пределе  $V_y \rightarrow c$ . Подчеркнем, что в этих примерах увеличение импульса и энергии получено за счет работы, совершаемой над зарядом только электрическим полем.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО



## 2. О природе магнитной силы

Взаимодействие неподвижных зарядов полностью описывается законом Кулона. Для описания взаимодействия движущихся зарядов этого закона уже недостаточно. Разнообразные опыты показывают, что при движении зарядов возникают новые силы, которые называются магнитными. Магнитная сила имеет ряд удивительных свойств: зависит от скорости заряда; в данной точке пространства как направление, так и величина силы зависят от направления движения частицы; в любой момент времени эта сила всегда перпендикулярна вектору скорости, поэтому она не производит работы над движущимся зарядом, а только меняет направление его скорости. Все эти необычные свойства магнитной силы  $F_M$  описываются введением магнитного поля  $\mathbf{B}$ , которое позволяет записать ее в простом виде  $F_M = q[\mathbf{VB}]$ . Магнитную силу легко продемонстрировать, наблюдая взаимодействие двух параллельных проводов с токами, влияние тока в проводнике на магнитную стрелку компаса или действие такого тока на пролетающую рядом заряженную частицу и т.п.

Современная теория позволяет понять природу магнитного взаимодействия на основе теории относительности, инвариантности заряда и закона Кулона. Это можно показать на конкретном примере взаимодействия прямого тока  $I$  и движущегося заряда  $+q$  со скоростью  $V$  параллельно проводу (рис. 8, а). На рисунке показано направление магнитной силы, наблюдаемое в опыте. Систему отсчета, в которой показан рис. 8, а будем называть лабораторной системой (ЛС)К. Для детального изучения такого взаимодействия обратимся к атомному представлению тока в проводе (рис. 8, б). В обычном проводнике электрические токи возникают за счет движения электронов проводимости, а соответствующие положительные заряды остаются неподвижными в кристаллической решетке.

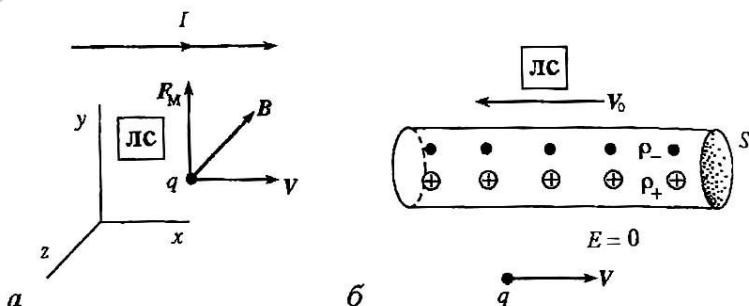


Рис. 8

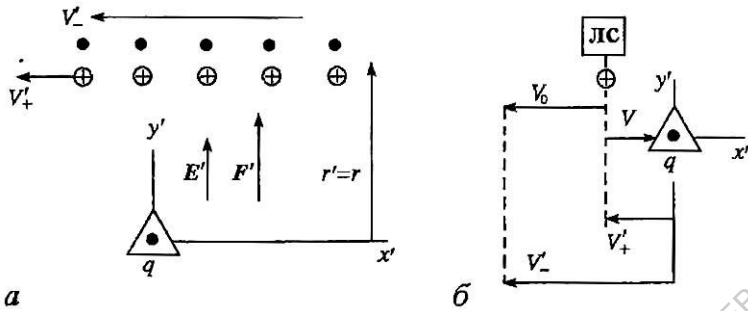


Рис. 9

Для наглядности мы представили обе группы зарядов слегка разделенными. На самом деле заряды так многочисленны и расположены так близко, что дискретностью можно пренебречь. Провод, по которому протекает ток, нейтрален, поэтому вне провода электрического поля нет. Объемную плотность электронов проводимости в лабораторной системе обозначим  $\rho_-$  – (их скорость  $V_0$ ), положительных зарядов  $\rho_+$ . Условие нейтральности означает

$|\rho_-| = |\rho_+| = \rho$ . Ток  $I$  можно представить в виде  $I = \rho V_0 S$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения провода. Обратим внимание, что  $\rho$  – плотность положительных зарядов и электронов в лабораторной системе. В этой системе электроны движутся со скоростью  $V_0$ , то есть вдоль оси  $x$  испытывают лоренцево сокращение в  $(1 - V_0^2/c^2)^{1/2}$  раз, что делает это распределение в этой системе более плотным. В их «собственной» системе (где электроны находятся в покое) их плотность будет меньше и равна  $\rho/\gamma_0$ , где введены обозначения  $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$ ,  $\beta_0 = V_0/c$ . Это требование релятивистской инвариантности заряда (вспомните рассуждения с плотностью зарядов на конденсаторе).

Теперь обратимся к тому, что происходит в другой инерциальной системе  $K'$ , где частица  $q$  покоится. В «системе частицы»  $q$  обе цепочки положительных и отрицательных зарядов будут двигаться вдоль отрицательного направления оси  $x'$ , но с различными скоростями, их абсолютные значения обозначим соответственно  $V'_+$  и  $V'_-$  (рис. 9, а). Для нахождения их значений мы должны применять релятивистский закон сложения скоростей. Для пояснения сути дела приведем диаграмму скоростей в разных системах отсчета (рис. 9, б). По формулам сложения скоростей найдем

$$V'_+ = V, \quad V'_- = \frac{V_0 + V}{1 + V_0 V / c^2}.$$

Введем коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  с соответствующими индексами

$$\beta'_+ = \frac{V'_+}{c} = \beta, \quad \gamma'_+ = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}},$$

$$\beta'_- = \frac{V'_-}{c} = \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0 \beta}, \quad \gamma'_- = \frac{1}{(1 - \beta'^2)^{1/2}}.$$

Уже понятно, что оба распределения зарядов в «системе частицы» испытывают разные лоренцевы сокращения, поэтому в этой системе имеется результирующая плотность зарядов  $\rho' \neq 0$  – такова разгадка проблемы. Нам остается ее только найти. Плотность положительных зарядов  $\rho'_+$  найдем, зная плотность в их системе покоя  $\rho$  и коэффициент «сжатия» в системе частицы  $\gamma'_+$ :  $\rho'_+ = \rho \gamma'_+$ . Для электронов мы нашли плотность в их собственной системе  $\rho / \gamma_0$ , а коэффициент «сжатия»  $\gamma'_-$ , поэтому

$$\rho'_- = \frac{\rho}{\gamma_0} \gamma'_-.$$

Найдем полную плотность заряда  $\rho'$ :

$$\rho' = \rho'_+ - \rho'_- = \rho \gamma'_+ - \frac{\rho}{\gamma_0} \gamma'_- = \rho \left( \gamma'_+ - \frac{\gamma'_-}{\gamma_0} \right).$$

Определим

$$\left( \gamma'_+ - \frac{\gamma'_-}{\gamma_0} \right) = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} - \left( -\beta_0^2 \right)^{1/2} \left( 1 - \left( \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0 \beta} \right)^2 \right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} - \frac{1 + \beta_0 \beta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = -\frac{\beta_0 \beta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = -\beta_0 \beta \gamma.$$

Таким образом,

$$\rho' = -\rho \beta_0 \beta \gamma,$$

то есть в системе покоя частицы  $q$  провод с током эквивалентен отрицательному линейному электрическому заряду с линейной плотностью

(то есть величиной заряда на единицу длины)  $\rho'S$ . Из электростатики известно, что радиальное электрическое поле  $E'$ , (рис. 9, а), создаваемое таким распределением, равно

$$E' = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r'} \rho'S = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 r'} \rho\beta_0\beta\gamma S.$$

Следовательно, на положительный заряд  $q$  действует электрическая сила  $F'_y$ , направленная в положительном направлении оси  $y'$

$$F'_y = q |E'| = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r'} \rho\beta_0\beta\gamma S.$$

По правилу преобразования сил  $F_y = \frac{1}{\gamma} F'_y$ , поэтому

$$F_y = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \rho\beta_0\beta S,$$

где учтено  $r = r'$ . Таким образом, в лабораторной системе на движущийся заряд со скоростью  $V$  действует сила вдоль оси  $y$ , которая как раз и является магнитной силой  $F_m$  (см. рис. 8, а). Выходит, мы получаем одинаковый физический результат, независимо от того, анализируем ли мы движение летящей частицы рядом с током в системе покоя провода или в системе покоя частицы  $q$ . В первом случае сила «чисто» магнитная, во втором – «чисто» электрическая. Если бы мы выбрали еще одну систему отсчета, мы бы нашли другое соотношение электрических и магнитных полей. Электрические и магнитные силы составляют части одного физического явления – электромагнитного взаимодействия частиц. Разделение такого взаимодействия на электрическую и магнитную силу зависит от системы отсчета, в которой мы рассматриваем это взаимодействие. Если мы говорим, что соотношение (2) фактически является определением полей, то полученное выражение для магнитной силы определяет магнитное поле прямого тока в лабораторной системе. Вернемся к выражению для  $F_y$ , переписывая его в виде

$$F_m = F_y = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{V V_0}{c^2} \rho S. \quad (7)$$

Величина  $\rho V_0 S = I$ , так что

$$F_m = qV \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}.$$

В соответствии с (2) магнитное поле прямого тока равно

$$B = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}.$$

Обычно его представляют в несколько иной форме, используя  $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$ ,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Направление вектора  $\mathbf{B}$  в соответствии с определением (2)  $\mathbf{F}_m = q[\mathbf{VB}]$  показано на рис. 8, а.

Уравнение (7) является точным, оно получено без всяких ограничений. Множитель  $VV_0/c^2$  является признаком релятивистского эффекта рассмотренного магнитного взаимодействия. Если бы мы проанализировали взаимодействие между двумя параллельными проводниками с одинаковым током, то «релятивистская поправка» была бы равна  $V_0^2/c^2$ . Средние скорости электронов вдоль провода составляют всего 0.1 мм/с, то есть  $V_0^2/c^2 \approx 10^{-25}$ . Поэтому кажется странным, что магнитные силы достаточно велики, чтобы увидеть, например, взаимодействие двух проводов с током. В атомных явлениях, где во взаимодействии элементарных частиц участвует полная электромагнитная сила (2), магнитные эффекты действительно малы по сравнению с электрическими взаимодействиями. Они слабее как раз на квадрат отношения скорости движения частицы к скорости света. При взаимодействии же макроскопических предметов (например, проводников с током) «обычные» электрические силы исчезают в результате идеального баланса положительных и отрицательных зарядов. Этот баланс более точен, чем найденное отношение  $10^{-25}$ , и поэтому «релятивистская добавка», которую мы называем магнитной силой, – это единственный эффект и он является преобладающим. В отличие от механики после открытия принципа относительности законы электромагнетизма не пришлось «подправлять» – они уже были правильны с точностью до  $V^2/c^2$ .

Мы провели рассмотрение для частного случая частицы  $q$ , движущейся параллельно проводу с током. Конечно, аналогичные рассуждения можно провести и для общего случая, однако, математические выкладки становятся довольно громоздкими. Если бы для анализа каждой новой системы движущихся зарядов приходилось бы совершать «утомительные» переходы из одной системы отсчета в другую, то такой метод исследования был бы громоздким и малопродуктивным. Поэтому магнитное поле произвольного движения зарядов (тока) обычно рассчитывают по закону Био–Савара–Лапласа или другими математическими приемами. Важно, что если известно магнитное поле  $\mathbf{B}$ , то магнитная сила находится очень просто, как  $q[\mathbf{VB}]$ .

Рассмотрим важную практическую задачу о движении заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле  $\mathbf{B}$ . Уравнение движения для этого случая

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = q[\mathbf{VB}], \quad \mathbf{P} = \frac{M\mathbf{V}}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}.$$

В частном случае, если скорость перпендикулярна магнитному полю (то есть заряд не имеет скорости вдоль поля), частица совершает движение по окружности, так как сила все время направлена перпендикулярно скорости (и полю). Таким образом, постоянное магнитное поле не влияет на величину скорости и импульса частицы, следовательно, множитель  $M/(1-V^2/c^2)^{1/2}$  постоянен. Перепишем уравнение движения

$$\frac{M}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = q[\mathbf{VB}].$$

При движении по окружности радиуса  $R$  с угловой скоростью  $\omega_c$  (ее называют циклотронной частотой) центростремительное ускорение  $|d\mathbf{V}/dt| = \omega_c^2 R$  и  $V = \omega_c R$ , откуда

$$\frac{M}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} \omega_c^2 R = q\omega_c RB$$

и

$$\omega_c = \frac{qB(1 - V^2/c^2)^{1/2}}{M} = \frac{qB}{M\gamma}.$$

Из этого соотношения виден характерный релятивистский эффект – с ростом скорости частиц циклотронная частота уменьшается. Нерелятивистская частота характеризуется постоянным значением  $qB/M$ .

Значения  $\omega_c$ , предсказываемое релятивистской теорией, нашли полное экспериментальное подтверждение, в частности для электронов практически до скорости света. Из приведенных формул можно получить выражение для импульса

$$P = qBR,$$

которое лежит в основе простого метода измерения релятивистского импульса.

Этот метод широко используется при анализе треков заряженных частиц в пузырьковых камерах.

Одним из наиболее ярких релятивистских эффектов, возникающим при вращении релятивистской частицы в магнитном поле, является синхротронное (магнитотормозное) излучение электромагнитных волн. «Тормозящим» элементом служит магнитное поле, искривляющее траекторию частицы; возникающее при этом ускорение является причиной

электромагнитного излучения. Описанное излучение можно увидеть как «настоящий» свет. Синхротронное излучение наиболее существенно для легких частиц, например, электронов. Весьма интересно, что такое излучение возникает и во Вселенной – релятивистские электроны, входящие в состав космических лучей, дают это излучение в космических магнитных полях. Оно наблюдается как нетепловое радио- и оптическое излучение. Существует еще один подобный интересный релятивистский эффект, связанный с излучением быстродвижущейся частицы. Это явление называется тормозным излучением и возникает при прохождении электронов высоких энергий через среду. Под действием электрического поля атомного ядра вещества траектория электрона изгибается, появляется ускорение и возникает мощное излучение в направлении движения электрона, которое концентрируется в пределах узкого конуса. Этот эффект используется на практике для получения интенсивных пучков фотонов, или гамма-квантов, высокой энергии на электронных ускорителях.

Обсуждая релятивистские эффекты излучения заряженных частиц необходимо остановиться на весьма важном как с принципиальной, так и с прикладной точек зрения излучении равномерно (!) движущегося заряда. Этот эффект был открыт П.А. Черенковым в 1934 г. в то время аспирантом С.И. Вавилова и получил название – излучение Черенкова–Вавилова<sup>2</sup>. Это излучение возникает при равномерном движении заряженной частицы в среде со скоростью света в этой среде  $c/n$ , где  $n > 1$  – показатель преломления материальной среды. Природа этого эффекта не является тормозным излучением, еще в 1904 г. Зоммерфельд показал, что при движении электрона со скоростью, превышающей скорость света, он должен излучать электромагнитные волны. После создания теории относительности по понятным причинам эта теория была отвергнута. Однако в материальной среде необходимое условие можно осуществить. При движении в среде электрон своим полем возбуждает атомы и молекулы среды, которые становятся центрами излучения когерентных электромагнитных волн, которые будут интерферировать между собой. Электромагнитное поле, движущееся со скоростью  $c/n$ , как бы отстает от электрона, имеющего скорость  $V$ . Электрон подобен снаряду, летящему со скоростью, превышающей скорость звука. Излучение наблюдается в виде конуса, ось которого совпадает с направлением движения частицы. Особенности черенковского излучения можно получить и на основе квантовых

---

<sup>2</sup> Черенков П.Д., Тамм И.Е., Франк И.М. получили Нобелевскую премию в 1958 г. за открытие и объяснение этого эффекта.

представлений из релятивистских законов сохранения энергии и импульса. Пусть импульс электрона равен  $p$ , в некоторой точке пути он излучает фотон с импульсом  $p_0$ . Известно, что энергию электрона до излучения можно выразить через импульс и массу покоя электрона  $m$  как  $E = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}$ , после излучения соответственно  $((p')^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}$ , где  $p'$  – импульс электрона после излучения фотона с энергией  $h\nu$ . Запишем законы сохранения:

$$\begin{aligned} \left( (p')^2 c^2 + m^2 c^4 \right)^{1/2} &= \left( p^2 c^2 + m^2 c^4 \right)^{1/2} + h\nu, \\ p &= p_0 + p'. \end{aligned}$$

Введем угол  $\theta$  между направлением движения электрона и излученного фотона, тогда сохранение импульса можно представить в скалярной форме:

$$\left( p' \right)^2 = p_0^2 + p^2 - 2 p_0 p \cos \theta.$$

Перепишем законы сохранения в таком виде:

$$\begin{aligned} \left( p^2 c^2 + m^2 c^4 \right)^{1/2} - h\nu &= \left( p' \right)^2 c^2 + m^2 c^4 \left. \right)^{1/2}, \\ \left( p' \right)^2 &= p_0^2 + p^2 - 2 p_0 p \cos \theta. \end{aligned}$$

Возведем оба соотношения в квадрат и исключим из них  $p'$ , получим

$$2 p_0 p c^2 \cos \theta = p_0^2 c^2 - \left( h\nu \right)^2 + 2 h\nu \left( p^2 c^2 + m^2 c^4 \right)^{1/2},$$

или

$$2 p_0 p c^2 \cos \theta = p_0^2 c^2 - \left( h\nu \right)^2 + 2 h\nu E,$$

откуда находим

$$\cos \theta = \frac{h\nu E}{p_0 p c^2} + \frac{p_0}{2 p} - \frac{\left( h\nu \right)^2}{2 p_0 p c^2} = \frac{h\nu E}{p_0 p c^2} + \frac{p_0}{2 p} \left[ 1 - \frac{\left( h\nu \right)^2}{p_0^2 c^2} \right].$$

Подставив сюда полученное ранее выражение для импульса частицы  $p = VE/c^2$ , и учитывая, что в материальной среде импульс фотона равен

$$p_0 = \frac{h\nu}{c} n, \quad \text{получим:} \quad \cos \theta = \frac{c}{Vn} + \frac{h\nu n c}{2VE} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Оценки показывают, что для электрона и видимого света второй член пренебрежимо мал, так что условие излучения имеет вид

$$\cos \theta = \frac{c}{Vn},$$

что совпадает с результатом «классического» волнового подхода по исследованию интерференционной картины. Это было подтверждено в опытах Черенкова с электронами различных скоростей, летящих в жидкостях



с разными показателями преломления. Угол  $\theta$  определяет то направление, в котором интенсивность излучения максимальна. В дальнейшем было показано, что подобное излучение вызывается также протонами, мезонами и другими быстро движущимися заряженными частицами.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

### 3. Преобразование полей

Мы выяснили, что сила, действующая на движущуюся заряженную частицу, дается величинами полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в точке нахождения заряда. Важно подчеркнуть еще раз, что выражение для силы (2) не изменится, если источник полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  движется. В результате движения изменяются как раз значения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Наше описание всегда относится только к полям, взятым в некоторой инерциальной системе отсчета. Значения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в некоторой пространственно-временной точке в одной системе отсчета должны однозначно определять компоненты поля, наблюдаемые в любой другой системе отсчета в той же пространственно-временной точке. Теперь нам хотелось бы найти общие законы релятивистского преобразования полей.

Ранее мы уже выяснили, как изменяются компоненты электрического поля. В частности, обнаружили для продольной компоненты поля (то есть в направлении движения системы отсчета)  $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$ . Легко показать, что это справедливо и для продольной компоненты поля  $\mathbf{B}$ . Пусть такое поле создано однослойным соленоидом, намотанным вдоль оси  $x$  в системе отсчета  $K$ . В этом случае, как известно  $B_x = \mu_0 In$ , где  $n$  – число витков провода на единицу длины соленоида,  $I = dq/dt$  – сила тока в проводе. Пусть система отсчета  $K'$  движется равномерно и прямолинейно в положительном направлении оси  $x$ . В системе  $K'$  соленоид испытывает лоренцево сокращение, поэтому число витков  $n'$  в этой системе увеличивается. А вот сила тока в этой системе  $I' = dq/dt'$  уменьшается, так как с точки зрения наблюдателя  $K'$  вследствие замедления времени  $dt' > dt$ . Растяжение времени как раз полностью компенсирует сокращение длины, то есть  $B'_x = B_x$ , или  $B'_{\parallel} = B_{\parallel}$ . Для иллюстрации изменения поперечных компонент поля  $\mathbf{B}$  нужны другие источники поля.

При исследовании компонент поля  $\mathbf{E}$  мы убедились в простоте для анализа источника однородного поля в виде плоского конденсатора. Такой своеобразный аналог имеется и для образования однородного магнитного поля. На рис. 10 приведены системы образования статических электрических и магнитных полей. На рис. 10, *а* показаны поля, образованные плоскими слоями с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , простирающимися в бесконечность. На рис. 10, *б* показано магнитное поле плоского неограниченного листа с током. Ток течет в направлении оси  $x$  (из страницы) и характеризуется поверхностной плотностью тока  $J$  (ток, переносимый лентой единичной длины, размерность  $[J] = \text{А/м}$ ). Поле, образованное таким листом с током, равно  $B = \mu_0 J/2$ . Два листа с равными и противоположно

направленными поверхностными токами дают поле  $B = \mu_0 J$  (рис. 10, в). Если взять лист с распределенным по его поверхности зарядом, то двигаясь

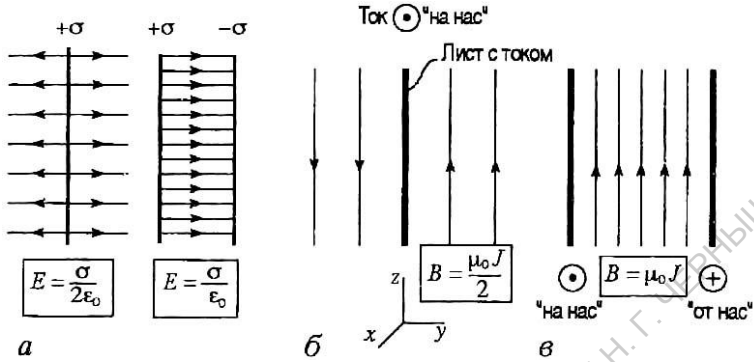


Рис. 10

параллельно самому себе этот лист образует поверхностный ток. Представим теперь два параллельных неограниченных плоских листа с равными поверхностными зарядами, но противоположных знаков, как это изображено на рис. 11, а. В системе отсчета  $K$  поверхностная плотность зарядов равна  $\sigma$  и оба листа движутся в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $V_0$ , так что мы имеем два листа с током, как на рис. 10, в. В этой системе поверхностная плотность тока равна  $J_x = \sigma V_0$ , поэтому  $B_z = \mu_0 V_0 \sigma$ . Постоянное электрическое поле  $E_y = \sigma / \epsilon_0$ . Инерциальная система  $K'$  движется относительно  $K$  со скоростью  $V$  в положительном направлении оси  $x$ . В этой системе скорость заряженных листов найдем по релятивистскому закону сложения скоростей:

$$V'_0 = \frac{V_0 - V}{1 - V_0 V / c^2} = c \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta}.$$

Повторяя рассуждения предыдущего примера (п. 2), мы получим для плотности поверхностных зарядов в их собственной системе значение  $\sigma / \gamma_0$ , а плотность в системе  $K'$

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\gamma_0} \gamma'_0,$$

где

$$\gamma'_0 = \frac{1}{\left(1 - \frac{v_0'^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta}\right)^{1/2}} = \frac{1 - \beta_0 \beta}{\left(1 - \beta_0^2\right)\left(1 - \beta^2\right)^{1/2}} = \gamma_0 \gamma \left(1 - \beta_0 \beta\right)$$

Источником поля в системе  $K'$  являются плоские слои с плотностью заряда

$$\sigma = \sigma \gamma \left(1 - \beta_0 \beta\right)$$

и поверхностной плотностью тока

$$J'_x = \sigma' V'_0 = \sigma \gamma \left(v_0 - V\right)$$

Эти поля, очевидно, равны

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \gamma \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \beta_0 \beta \right) = \gamma \left( E_y - \mu_0 c^2 \sigma \frac{V_0 V}{c^2} \right) = \gamma \left( E_y - V \mu_0 \sigma V_0 \right) = \gamma \left( E_y - V B_z \right)$$

$$B'_z = \mu_0 J'_x = \mu_0 \sigma \gamma \left( v_0 - V \right) = \gamma \left( \mu_0 \sigma V_0 - \mu_0 \sigma V \right) = \gamma \left( B_z - \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \sigma V \right) = \gamma \left( B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right)$$

Итак, мы имели в системе  $K$  поперечные поля  $E_y$  и  $B_z$ , а в системе  $K'$  нашли:

$$E'_y = \gamma E_y - VB_z$$

$$B'_z = \gamma B_z - V/c^2 E_y$$

Если бы рассмотрели в системе  $K$  компоненты  $E_z$  и  $B_y$ , то в системе  $K'$  получили бы

$$E'_z = \gamma E_z - VB_y$$

$$B'_y = \gamma B_y - V/c^2 E_z$$

Таким образом, мы приходим к **общим законам преобразования электрических и магнитных полей**

$E'_x = E_x,$ $E'_y = \gamma E_y - VB_z$ $E'_z = \gamma E_z + VB_y$	$B'_x = B_x,$ $B'_y = \gamma B_y + (V/c^2)E_z$ $B'_z = \gamma B_z - (V/c^2)E_y$	(8)
---------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------	-----

Как обычно,  $\beta = V/c$ ,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

Уравнения преобразования (8) можно представить в другой форме для продольных и поперечных компонент

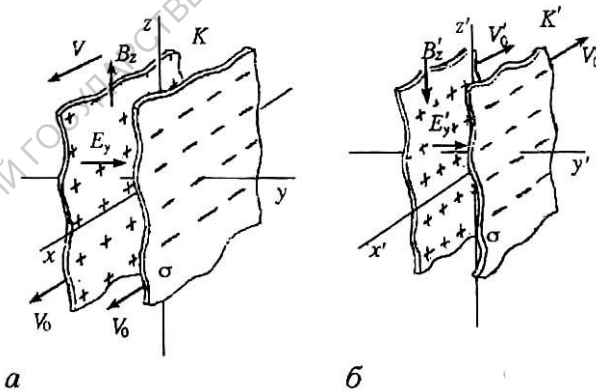


Рис. 11

$E'_{\parallel} = E_{\parallel},$ $E'_{\perp} = \gamma \left( \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \right)_{\perp}.$	$B'_{\parallel} = B_{\parallel},$ $B'_{\perp} = \gamma \left( \mathbf{B} - \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{E}}{c^2} \right)_{\perp}.$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Таким образом, электрические и магнитные поля, как и большинство физических величин, относительны, то есть их свойства различны в разных системах отсчета. В частности, электрическое или магнитное поле может быть равно нулю в одной системе отсчета и в то же время присутствовать в другой.

Предположим, что в системе отсчета  $K$  магнитное поле отсутствует. Тогда в соответствии с законом преобразования (8) компоненты поля в «штрихованной» системе равны

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma E_y, \quad E'_z = \gamma E_z,$$

$$B'_x = 0, \quad B'_y = \gamma(V/c^2)E_z, \quad B'_z = -\gamma(V/c^2)E_y.$$

Это означает, что в любой точке этой системы между электрическим и магнитным полями существует определенная связь, а именно:

$$B'_x = 0, \quad B'_y = (V/c^2)E'_z, \quad B'_z = -(V/c^2)E'_y.$$

Вспомнив, что  $\mathbf{V} = -\mathbf{V}'$ , где  $\mathbf{V}'$  – скорость «нештрихованной» системы, наблюдаемая из «штрихованной», получим

$$B'_x = 0, \quad B'_y = -\frac{V'E'_z}{c^2}, \quad B'_z = \frac{V'E'_y}{c^2}$$

или, в более общем виде

$$\mathbf{B}' = \frac{\mathbf{V}' \times \mathbf{E}'}{c^2} \quad (\text{для случая } \mathbf{B} = 0).$$

В системе  $K'$  магнитные и электрические поля взаимно перпендикулярны. Преобразования поля позволяют по-другому решить задачи, которыми мы занимались прежде, например о полях движущегося заряда (см. рис. 3, 4). В «штрихованной» системе отсчета, где заряд движется со скоростью  $\mathbf{V}'$ , помимо электрического поля  $\mathbf{E}'$  свойства которого мы уже выяснили, должно быть и магнитное поле  $\mathbf{B}'$ , перпендикулярное к  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{V}'$ . Линии магнитного поля – окружности, расположенные вокруг направления движения (рис. 12). Аналогичное рассмотрение показывает, что если в системе  $K$  поле  $\mathbf{E}$

отсутствует, то в другой системе отсчета

$$E' = - [V'B'].$$

Этому условию отвечает рассмотренная задача о взаимодействии тока с движущимися зарядами (см. рис. 8). Наблюдаемые поля в обеих системах отсчета показаны на рис. 13.

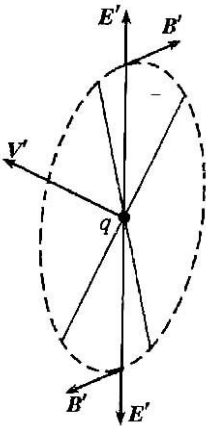


Рис. 12

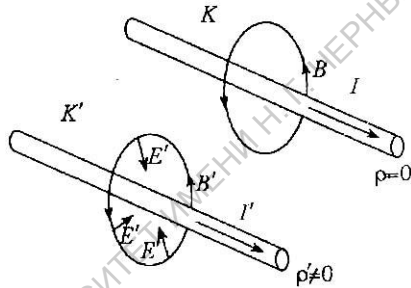


Рис. 13

Обычно при решении задач желательно выбрать такую систему отсчета, в которой электромагнитное поле было бы наиболее простым. Не следует однако думать, что обязательно существует такая система, где поле сведется либо к электрическому, либо к магнитному (например, плоская электромагнитная волна, для которой  $E = cB$  и  $E \perp B$ , во всех инерциальных системах остается плоской волной).

Не следует думать, что такая логичная электромагнитная теория Максвелла сразу же после появления завоевала признание. Даже после убедительных опытов Генриха Герца с электромагнитными волнами (1888 г.) известный Уильям Томсон (лорд Кельвин), автор хрестоматийной теперь формулы для периода колебаний контура (1853 г.), на лекции в 1904 г. говорит, что «так называемая электромагнитная теория света до сих пор нами в чем не помогла». Тем не менее, к началу 20-го столетия электромагнитная теория фактически была уже всеми признана. Однако 100 лет тому назад совершенно не было очевидным, что ток в проводе и движущееся заряженное тело являются принципиально одинаковыми

источниками магнитного поля. И хотя Фарадей высказывал эту мысль еще в 1838 г., однако доказать это на опыте не смог. Впервые факт появления магнитного поля при движении электростатически заряженного листа (вспомним смысл рис. 11) был продемонстрирован американским физиком Генри Роуландом в 1876 г. Это был остроумный и тонкий эксперимент. Статья, в которой он описал этот опыт, называлась «О магнитном действии переноса электричества». Схема опыта состояла в следующем: эбонитовый диск диаметром 21 см позолоченный с обеих сторон вращался вокруг вертикальной оси со скоростью 61 оборот в секунду. По обеим сторонам диска располагались позолоченные стеклянные пластины. Эбонитовый диск был соединен с электрической батареей с помощью острия, направленного на него, внешние пластины заземлялись. Образованный таким образом конденсатор позволял работать с большими зарядами. В изолированной стеклянной трубке над верхним стеклянным диском была подвешена чувствительная аstaticкая магнитная стрелка, регистрирующая по отклонению возникающее магнитное поле. Опыт показал, что отклонение стрелки пропорционально величине заряда и меняется на обратное при смене направления вращения диска или при изменении знака заряда. Магнитное поле составляло примерно  $10^{-5}$  величины поля Земли (!) – даже для современной аппаратуры чрезвычайно затруднительный опыт. Подобные работы были продолжены и другими учеными. Наиболее тщательные количественные исследования были проведены русским ученым Эйхенвальдом в 1904 г.

Векторы электрического и магнитного полей не являются инвариантными величинами. Однако из них можно составить инвариантные величины, остающиеся неизменными при преобразованиях от одной инерциальной системы отсчета к другой. С помощью формул (8) прямым вычислением можно проверить, что эти инварианты имеют вид

$$E^2 - c^2 B^2 = \text{const},$$

$$EB = \text{const}.$$

Векторы  $E$  и  $B$  образуют еще одну величину, играющую важную роль в теории электромагнитного

поля. Это соотношение получается из закона сохранения электромагнитной энергии и выражает вектор плотности потока электромагнитной энергии

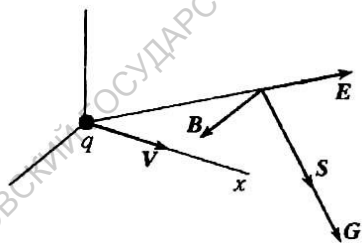


Рис. 14



$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \text{вектор Пойнтинга.}$$

Модуль вектора  $\mathbf{S}$  равен энергии, переносимой за единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению распространения электромагнитной энергии, которое определяется вектором  $\mathbf{S}$ . С потоком энергии связан и поток электромагнитного импульса, объемная плотность которого равна

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}.$$

Обратимся еще раз к полям равномерно движущегося заряда и покажем векторы  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{G}$  (рис. 14). Электрическое поле симметрично относительно оси  $x$ , поэтому поперечные компоненты импульса дадут в сумме нуль, и полученный в результате импульс будет параллелен скорости  $\mathbf{V}$ . Таким образом, с равномерно движущимся зарядом всегда связан перенос энергии и импульса электромагнитного поля, который, как показывает анализ, пропорционален  $\mathbf{V}$ .

### Литература

1. Парселл Э. Берклеевский курс физики. Т. 2. Изд.: Лань, 2005.
2. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М: Высшая школа, 1983.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 6. Электродинамика. Изд. Эдиториал, УРСС, 2013.
4. Дмитриев Б.С. Относительность – время, пространство, поля. Изд. ГосУНЦ «Колледж». Саратов, 1996.

## Содержание

Введение	3
4. Поле движущегося заряда. Преобразование электрического поля	7
5. О природе магнитной силы	16
6. Преобразование электромагнитных полей	24
Литература	30