

В.И.Шевцов, Ю.В.Шевцова

**ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО
КОМПЛЕКСНОМУ АНАЛИЗУ**

ЧАСТЬ 1

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Саратовский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского

Шевцов Владислав Иванович, Шевцова Юлия Владиславовна

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО КОМПЛЕКСНОМУ АНАЛИЗУ

Часть 1

Комплексные числа. Аналитические функции. Конформные отображения. Элементарные функции.

Учебно-методическое пособие
для студентов механико-математического факультета

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Комплексные числа	4
2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел	5
3. Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел	6
4. Извлечение корня.....	8
5. Кривые на комплексной плоскости	10
6. Уравнение окружности	12
7. Окрестности точек на комплексной плоскости	15
8. Области	15
9. Непрерывные функции	17
10. Непрерывность функции в области вплоть до границы	18
11. Дифференцируемые функции. Условия Коши-Римана	19
12. Гармонические функции	20
13. Геометрический смысл производной	22
14. Однолистные функции.....	24
15. Конформные отображения	25
16. Соответствие границ при конформном отображении	27
17. Элементарные функции. Линейная функция	27
18. Дробно-линейная функция.....	28
19. Степенная функция.....	35
20. Функция $w = z^2$	36
21. Функция $w = \sqrt{z}$	37
22. Функция $w = z^\alpha$	38
23. Показательная функция.....	41
24. Логарифмическая функция.....	42
25. Функция Жуковского.....	44
26. Функция, обратная к функции Жуковского.....	49
27. Тригонометрические и гиперболические функции.....	51
28. Конформные отображения заданных областей.....	53
29. Приложение.....	61
Литература.....	63

1. Комплексные числа

Каждое комплексное число можно представить в виде $x + iy$, где x и y - произвольные действительные числа. Запись комплексного числа в виде $x + iy$ называется *алгебраической формой* комплексного числа. Во множестве комплексных чисел следующим образом определены понятие равенства и операции сложения и умножения:

1. $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$;
2. $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;
3. $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Из 3. следует, что $i^2 = i \cdot i = -1$.

Комплексное число $x + iy$ принято обозначать одной буквой z , т. е. $z = x + iy$. Число x называется *действительной частью*, а число y - *мнимой частью* комплексного числа $z = x + iy$. Для этих чисел приняты следующие обозначения:

$$x = \operatorname{Re}(x + iy) = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im}(x + iy) = \operatorname{Im} z.$$

Обозначения Re и Im являются сокращениями французских слов *Reel* (действительный) и *Imaginaire* (мнимый).

Комплексное число вида iy называется *чисто мнимым*. Комплексное число $x - iy$ называется *сопряженным* с комплексным числом $z = x + iy$ и обозначается \bar{z} :

$$\bar{z} = \overline{(x + iy)} = x - iy.$$

Очевидно, что $\overline{(\bar{z})} = z$. Из 1. вытекает, что равенство $z = \bar{z}$ имеет место в том и только в том случае, когда z - действительное число.

Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами:

1. коммутативности:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1;$$

2. ассоциативности:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3);$$

3. дистрибутивности:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Очевидно, что $|z| \geq 0$, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$.

Модуль действительного числа совпадает с абсолютной величиной этого числа. Справедливы следующие равенства: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $|z| = |\bar{z}|$.

Операция вычитания вводится как операция обратная сложению, а операция деления, как операция обратная умножению.

Операцию деления будем обозначать $z_1 : z_2$ или $\frac{z_1}{z_2}$.

Имеем $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$, $z_2 \neq 0$.

Пример 1. Найти сумму, произведение и частное комплексных чисел $z_1 = 1+i$ и $z_2 = 3+2i$.

Решение.

$$z_1 + z_2 = (1+i) + (3+2i) = 4+3i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1+i) \cdot (3+2i) = (3-2) + (2+3)i = 1+5i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{3+2i} = \frac{(1+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{5+i}{13} = \frac{5}{13} + \frac{1}{13}i. \quad \square$$

Упражнения.

1.1 Найти сумму, произведение и частное комплексных чисел z_1 и z_2 :

1) $z_1 = 2-i$, $z_2 = 3+2i$. 2) $z_1 = \frac{1+i}{1-i}$, $z_2 = 5+4i$. 3) $z_1 = \overline{1+5i}$, $z_2 = 4+3i$.

4) $z_1 = (3+i)^2$, $z_2 = 1-2i$.

1.2 Найти действительную и мнимую части следующих комплексных чисел:

1) $\frac{1}{1-i}$. 2) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$. 3) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3$. 4) $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$. 5) $\frac{\sqrt{+i^3}}{\sqrt{-i^3}}$.

2. Геометрическая интерпретация комплексного числа

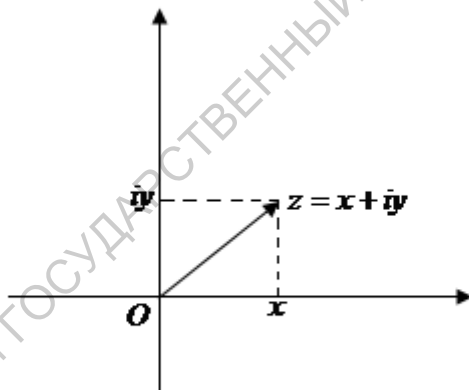


Рис.1

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой плоскости с координатами (x, y) , и эта точка обозначается той же буквой z (рис.1). Такое соответствие между комплексными числами и точками плоскости, очевидно, является взаимно однозначным. При этом действительные числа изображаются

точками оси абсцисс, а чисто мнимые точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат - *мнимой осью*. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

Комплексное число изображается также вектором с началом в точке O и концом в точке z (рис.1). Такое соответствие между комплексными числами и векторами комплексной плоскости с началом в точке O также является взаимно однозначным. Поэтому вектор, изображающий комплексное число обозначается той же буквой z .

Сфера Римана

Рассмотрим сферу S , касающуюся комплексной плоскости в точке O (рис. 2). Обозначим через P точку сферы, диаметрально противоположную точке O . Каждой точке z комплексной плоскости поставим в соответствие точку M , которая является точкой пересечения сферы S с отрезком, соединяющим точки z и P . Такое соответствие между точками плоскости и точками сферы S называется *стереографической проекцией*, а сфера S называется *сферой Римана*.

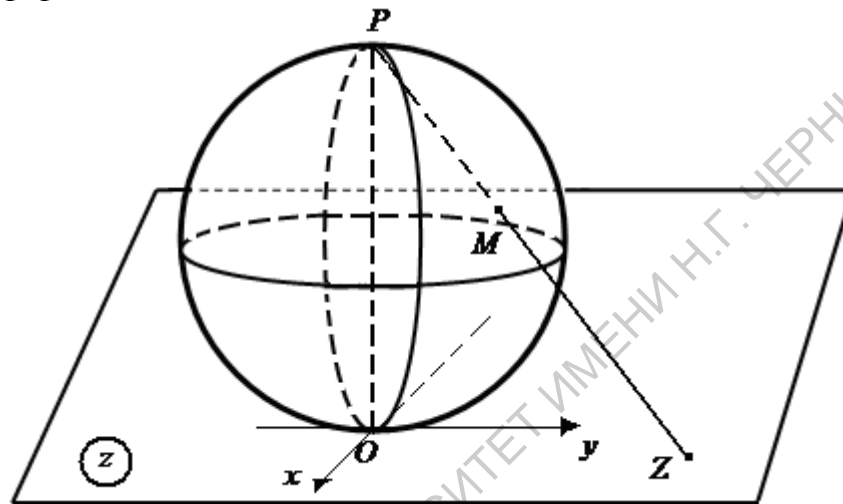


Рис.2

Стереографическая проекция обладает следующими свойствами:

- 1) окружности и прямые при стереографической проекции переходят в окружности;
- 2) угол между пересекающимися кривыми на плоскости равен углу между образами этих кривых на сфере Римана.

Присоединим к комплексной плоскости несобственный элемент, который будем называть *бесконечно удаленной точкой* и обозначать $z = \infty$ и поставим его в соответствие точке P . Комплексную плоскость, дополненную бесконечно удаленной точкой, называют *расширенной комплексной плоскостью*.

Упражнения.

2.1 Доказать, что величина $|z_1 - z_2|$ равна расстоянию между точками z_1 и z_2 на комплексной плоскости.

2.2 Дать геометрическое описание множеств всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим неравенствам:

- 1) $\operatorname{Re} z > 0$.
- 2) $\operatorname{Im} z \leq 1$.
- 3) $|\operatorname{Re} z| < 1$.
- 4) $|\operatorname{Im} z| < 1, 0 < \operatorname{Re} z < 1$.
- 5) $|z| \leq 1$.
- 6) $|z - i| > 1$.
- 7) $0 < |z + i| < 2$.
- 8) $1 < |z - 1| < 3$.
- 9) $0 < \arg z < \pi/4$.
- 10) $|\pi - \arg z| < \pi/4$.

2.3 Записать с помощью неравенств следующие множества точек комплексной плоскости:

- 1) полуплоскость, расположенная справа от мнимой оси;

- 2) первый квадрант;
- 3) полуплоскость, расположенная выше действительной оси и состоящая из точек, отстоящих от действительной оси на расстояние не меньше 2.
- 4) полоса, состоящая из точек, отстоящих от мнимой оси на расстояние, меньшее 1;
- 5) полукруг радиуса 1 (без окружности) с центром в точке $z = 0$, расположенной слева от мнимой оси.

3. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Положение точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости однозначно определяется не только декартовыми, но и полярными координатами r, φ (рис. 3)

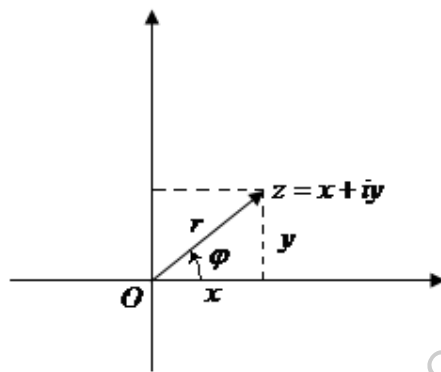


Рис.3

Из (3.1) вытекает, что если $z = x + iy$, то

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.3)$$

Запись комплексного числа в виде (3.2) называется *тригонометрической формой* комплексного числа. Число φ , определяемое из (3.3), называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\arg z$. Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно: если φ_0 - одно из значений аргумента комплексного числа z , то все значения аргумента этого числа находятся по формуле $\arg z = \varphi_0 + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Комплексное число $\cos \varphi + i \sin \varphi$ обозначается символом $e^{i\varphi}$, т.е. функция $e^{i\varphi}$ для любого действительного числа φ определяется *формулой Эйлера* $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Функция $e^{i\varphi}$ обладает обычными свойствами показательной функции, как если бы число i было действительным. Отметим основные из них:

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} ;$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} ;$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Любое комплексное число можно представить в виде

$$z = r e^{i\varphi}, r = |z|, \varphi = \arg z. \quad (3.4)$$

Запись комплексного числа в виде (3.4) называется *показательной формой* комплексного числа. Справедливы следующие формулы умножения и деления комплексных чисел, записанных в показательной форме

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (3.5)$$

Из этих формул следует, что $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. Если $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$, то $\varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1 \cdot z_2)$. Из (3.5) так же следует следующая формула возведения комплексного числа в степень

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (3.6)$$

При $r = 1$ эта формула называется *формулой Муавра*.

Пример 1. Вычислить $(-i\sqrt{3})^3 (i)^2$.

Решение.

$$(-i\sqrt{3})^3 (i)^2 = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3 \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 2^3 e^{-i\pi} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2^3 (-1)2i = -16i. \square$$

Упражнения.

3.1 Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел

1) i ; 2) -3 ; 3) $1+i^{123}$; 4) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\frac{1-i}{1+i}$; 6) $-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$; 7)

$(i)^8 (-i\sqrt{3})^6$; 8) $1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$.

3.2 Вычислить

1. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8$. 2. $(1-i\sqrt{3})^{10}$. 3. $\left(-\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^6$. 4. $(1+i\sqrt{3})^7 + (1-i\sqrt{3})^7$.

4. Извлечение корня

Рассмотрим уравнение

$$z^n = a, \quad (4.1)$$

где $a \neq 0$ - комплексное число, n - натуральное. Уравнение (4.1) при $a \neq 0$ имеет ровно n различных корней:

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} e^{i\frac{\alpha+2\pi k}{n}}, \alpha = \arg a, k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.2)$$

На комплексной плоскости эти точки расположены в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|a|}$ с центром в точке O (рис.4).

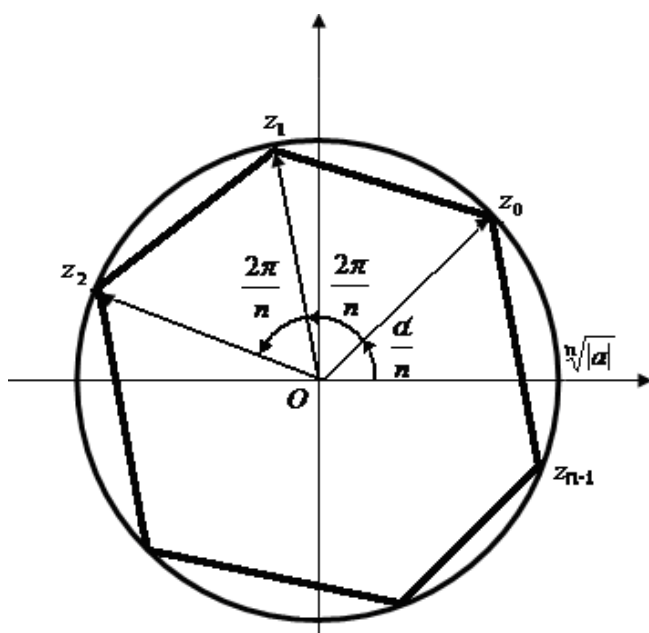


Рис.4

Комплексное число z называется корнем n -й степени из числа a (обозначается $\sqrt[n]{a}$), если $z^n = a$. Таким образом, при $a \neq 0$ имеется ровно n различных корней n -ой степени из числа a .

Пример. Найти все корни уравнения $z^4 = -16$.

Решение.

В данном примере $a = -16$, $|a| = 16$, $\arg a = \pi$. По формуле (4.2)

$$\text{имеем } z_k = 2e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \square$$

Упражнения.

4.1 Найти все решения следующих уравнений

1. $z^2 = i$.
2. $z^2 = 3 - 4i$.
3. $z^3 = -1$.
4. $z^6 = 64$.
5. $z^7 + 1 = 0$.
6. $z^8 = 1 + i$.
7. $\bar{z} = z^3$.
8. $|z| - z = 1 + 2i$.

4.2 Найти все комплексные числа $z = x + iy$, ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$), удовлетворяющие условию $|z| = 2i(z + 1)$.

4.3 Дано $\frac{1}{z} + z = \sqrt{3}$, где z - комплексное число. Найти z^{17} .

4.4 Число $x = \frac{1-i}{1+i}$ является корнем уравнения $2x^3 + a^2x^2 + 2a^2x + 2 - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Найти значение a и решить уравнение при найденном значении a .

4.5 Число $x = \frac{(1+i)^6}{8}$ является корнем уравнения $3x^3 - a^2x^2 + 3a^2x - 2 + a = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Найти значение a и решить уравнение при найденном значении a .

4.6 Записать в тригонометрической форме число $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^6$.

4.7 Найти все значения $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, для которых выполняется равенство $a^2 + (ab + 1) - 5 = ai - b^2 + bi$.

4.8 Найти модуль комплексного числа $z^3 + z^5$, если $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

4.9 Найти все комплексные числа z , удовлетворяющие условию $2z = |z| + 2i$.

4.10 Решить уравнение $z^6 + (8 - i)z^3 + (1 + i)^6 = 0$.

4.11 Изобразить на чертеже множество точек комплексной плоскости, для которых выполняется условие $|iz| = \left| z + \frac{8}{1+i} \right|$. Среди чисел, удовлетворяющих этому равенству, найти число с наименьшим модулем. Записать найденное число в тригонометрической форме.

5. Кривые на комплексной плоскости

Пусть функция $z = \sigma(t)$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$ и принимает комплексные значения. Эту комплекснозначную функцию можно представить в виде $\sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, где $\xi(t) = \operatorname{Re} \sigma(t)$, $\eta(t) = \operatorname{Im} \sigma(t)$ - действительные функции. Производная функции $\sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ определяется формулой $\sigma'(t) = \xi'(t) + i\eta'(t)$. Следовательно, производная $\sigma'(t)$ существует, если существуют производные $\xi'(t)$ и $\eta'(t)$. Нетрудно проверить, что если существуют производные $\sigma_1'(t)$ и $\sigma_2'(t)$, то существуют производные $(\sigma_1 \pm \sigma_2)' = \sigma_1' \pm \sigma_2'$, $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)' = \sigma_1' \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2'$, а если $\sigma_2(t) \neq 0$, то и $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)' = \frac{\sigma_1' \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2'}{\sigma_2^2}$.

Однако не все свойства дифференцируемых действительных функций переносятся на комплекснозначные функции. В частности для комплекснозначных функций теоремы Ролля и Лагранжа, вообще говоря, неверны.

Пример 1.

Функция $\sigma(t) = e^{it}$ дифференцируема на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$, $\sigma'(t) = (\cos t + i \sin t)' = i e^{it}$, $|\sigma'(t)| = 1$ при всех $t \in [-2\pi, 2\pi]$. Таким образом, $\sigma'(t)$ не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $[-2\pi, 2\pi]$, хотя $\sigma(0) = \sigma(2\pi) = 1$.
□

Пусть на конечном отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$ задана непрерывная комплекснозначная функция $z = \sigma(t)$. Тогда говорят, что задана *непрерывная кривая*

$$z = \sigma(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (5.1)$$

а уравнение (5.1) называется параметрическим уравнением этой кривой. При этом, если $z_1 = \sigma(t_1)$ и $z_2 = \sigma(t_2)$, где $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$, то говорят, что точка кривой z_2 следует за точкой z_1 . Таким образом, кривая (5.1) является *упорядоченным множеством точек комплексной плоскости*. Другими словами, кривая (5.1) всегда считается ориентированной в направлении возрастания параметра t . Направление движения точки z вдоль кривой (5.1), соответствующее возрастанию параметра t , называется *положительным*. Точка $a = \sigma(\alpha)$ называется *началом* (или *начальной точкой*) кривой, а точка $b = \sigma(\beta)$ - ее *концом*. Пусть кривая γ задана уравнением (5.1). Тогда на комплексной плоскости точки $z = \sigma(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$,

образуют некоторое множество $M(\gamma)$. Это множество отличается от самой кривой тем, что 1) кривая - упорядоченное множество точек, 2) различным точкам кривой может отвечать одна и та же точка плоскости: если при $t_1 \neq t_2$ $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$, то точки $z_1 = \sigma(t_1)$ и $z_2 = \sigma(t_2)$ являются различными точками на кривой γ , но как точки плоскости они совпадают. Такие точки называются точками *самопересечения* кривой (5.1). Исключением является совпадение начала и конца кривой: если $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$, то эта точка не считается точкой самопересечения кривой. Кривая, не имеющая точек самопересечения, называется *простой кривой*. Кривая, у которой совпадают начало и конец, называется *замкнутой*.

Пример 2.

Кривая $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, является полуокружностью $|z| = 1$, $\text{Im } z \geq 0$, ориентированной против часовой стрелки (рис.5).

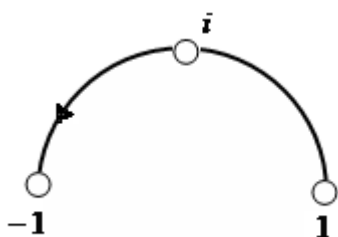


Рис.5

Пример 3.

Кривая $z = \cos t$, $-\pi \leq t \leq \pi$ является отрезком $[-1; 1]$ проходимым дважды: сначала от точки $z = -1$ к точке $z = 1$, а затем от точки $z = 1$ к точке $z = -1$ (рис.6). Это пример замкнутой кривой, у которой каждая точка интервала $[-1; 1]$ является точкой самопересечения. □

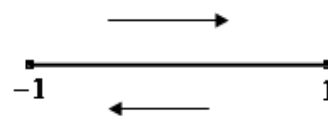


Рис.6

Замечание.

Две кривые $z = \sigma_1(t)$, $\alpha_1 \leq t \leq \beta_1$ и $z = \sigma_2(\tau)$, $\alpha_2 \leq \tau \leq \beta_2$, считаются *совпадающими*, если существует действительная функция $t = s(\tau)$, непрерывная и монотонно возрастающая на отрезке $\alpha_2 \leq \tau \leq \beta_2$ такая, что $s(\alpha_2) = \alpha_1$, $s(\beta_2) = \beta_1$ и $\sigma_1[s(\tau)] = \sigma_2(\tau)$ при $\alpha_2 \leq \tau \leq \beta_2$.

Кривая называется *гладкой*, если ее уравнение можно записать в виде (5.1), где функция $\sigma(t)$ имеет на отрезке непрерывную и отличную от нуля производную $\sigma'(t) \neq 0$, причем, если кривая замкнутая, то должно выполняться равенство $\sigma'(\alpha) = \sigma'(\beta)$. Кривая называется *кусочно гладкой*, если ее можно разбить на конечное число гладких кривых.

Введем понятие неограниченной кривой. Пусть на луче $t \geq \alpha$ задана непрерывная комплекснозначная функция $z = \sigma(t)$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = \infty$. Тогда говорят, что задана неограниченная кривая

$$z = \sigma(t), \quad \alpha \leq t \leq \infty, \quad (5.2)$$

а уравнения (5.2) называются параметрическими уравнениями этой кривой. Неограниченная кривая - кусочно гладкая, если для каждого конечного $\beta > \alpha$

кривая $z = \sigma(t), \alpha \leq t \leq \beta$ является кусочно гладкой. Аналогично определяются неограниченные кривые в случае, когда параметр t пробегает полуось $-\infty < t \leq a$ или всю числовую ось.

Упражнения.

5.1 Выяснить какие кривые определяются следующими параметрическими уравнениями:

- 1) $z = a + (b - a)t, 0 \leq t \leq 1$; 2) $z = t + it^2, 0 \leq t < \infty$; 3) $z = 2e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}, 0 \leq t \leq 2\pi$;
 4) $z = \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$; 5) $z = t + \frac{i}{t}, 1 \leq t < \infty$; 6) $z = 1 + e^{-it}, 0 \leq t \leq 2\pi$;
 7) $z = \begin{cases} e^{\pi it}, & 0 \leq t < 1 \\ t - 2, & 1 \leq t \leq 3 \end{cases}$; 8) $z = 1 + i \cos^2 t, 0 \leq t \leq 2\pi$; 9) $z = i \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

6. Уравнение окружности

Рассмотрим окружность с центром в точке z_0 радиуса R . Уравнения этой окружности на комплексной плоскости записываются в видах:

- 1) $|z - z_0| = R \Leftrightarrow |z|^2 - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + |z_0|^2 = R^2$;
 2) $z(t) = z_0 + Re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. (6.1)

Определение. Точки z_1 и z_2 называются *симметричными относительно окружности* (6.1), если они лежат на одном луче, выходящем из центра окружности (6.1) и произведение расстояний от этих точек до центра окружности равно квадрату радиуса окружности (6.1) (рис.7).

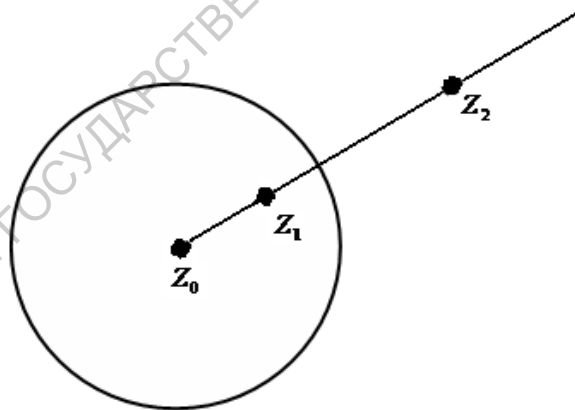


Рис.7

Точки z_1 и z_2 симметричны относительно окружности (6.1) тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$z_2 - z_0 = \frac{R^2}{z_1 - z_0}. \quad (6.2)$$

Формула (6.2) позволяет по заданной точке z_1 находить точку z_2 , симметричную с ней относительно окружности.

Замечание. Точкой симметричной с центром окружности принимается точка $z_2 = \infty$.

Уравнение

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = k, \quad k > 0, z_1 \neq z_2 \quad (6.3)$$

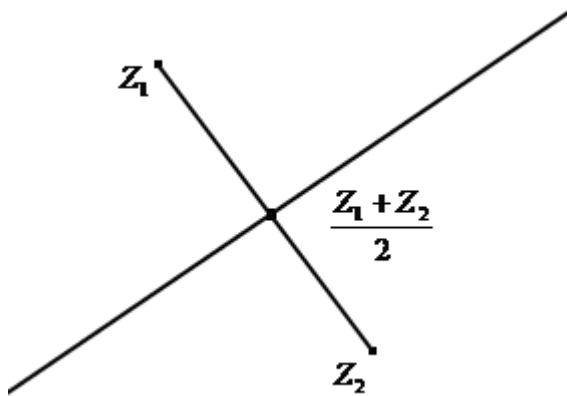


Рис.8

является:

- 1) при $k = 1$ уравнением прямой, причем z_1 и z_2 - симметричные точки относительно этой прямой (рис.8);
- 2) при $k \neq 1$ это уравнение окружности с центром в точке z_0 радиуса R , где

$$z_0 = \frac{z_1 - z_2 k^2}{1 - k^2}, \quad (6.4)$$

$$R = \frac{k}{|1 - k^2|} |z_1 - z_2|, \quad (6.5)$$

причем z_1 и z_2 - симметричные точки относительно этой окружности.

Справедливо и обратное утверждение, т. е. уравнение окружности (6.1) можно записать в виде (4).

Пример 1. Записать уравнение окружности $|z - 1| = 1$ в виде (6.3).

Решение.

Возьмем две точки симметричные относительно этой окружности: $z_1 = \frac{3}{2}$,

$z_2 = 3$. Находим k из формулы (6.4): $k = \frac{1}{2}$. Получаем уравнение $\left| \frac{z - 3/2}{z - 3} \right| = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Найти точки, симметричные одновременно относительно прямой $\operatorname{Re} z = 0$ и окружности $|z - 2| = 1$.

Решение.

Точки, симметричные относительно прямой $\operatorname{Re} z = 0$ и окружности $|z - 2| = 1$, должны лежать на общем перпендикуляре к прямой и окружности, т.е. на действительной оси. Обозначим эти точки через z_1 и z_2 . Из симметрии относительно прямой $\operatorname{Re} z = 0$ следует, то эти точки $\pm a$, где $a > 0$. Из симметрии относительно окружности $|z - 2| = 1$ получаем $(2 - a)(2 + a) = 1$, откуда $a = \sqrt{3}$. Точки $z_1 = \sqrt{3}$ и $z_2 = -\sqrt{3}$ симметричны одновременно относительно данной прямой и данной окружности.

Пример 3. Найти две точки a и b , симметричные одновременно относительно окружности $|z + 1| = 9$ и относительно окружности $|z + 6| = 16$.

Решение.

Искомые точки лежат на общем перпендикуляре к окружностям, т.е. на действительной оси, поэтому a и b - действительные числа. Из симметрии относительно данных окружностей получаем

$$(a + 1)(b + 1) = 81$$

$$(a + 6)(b + 6) = 256 .$$

Решая эту систему, находим

$$a = 2, b = 26.$$

Пример 4. Пусть γ – окружность $|z - z_0| = R$, точки z_1 и z_2 симметричны относительно этой окружности. Доказать, что уравнение окружности γ можно представить в виде:

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \frac{|z_1 - z_0|}{R}. \quad (6.6)$$

Решение.

Обозначим $z_1 - z_0 = \rho e^{i\alpha}$, где $\rho = |z_1 - z_0|$, $\alpha = \arg(z_1 - z_0)$. Так как точка z_2 симметрична с точкой z_1 относительно окружности γ , то формуле (6.2):

$$z_2 - z_0 = \frac{R^2}{z_1 - z_0} = \frac{R^2}{\rho e^{-i\alpha}} = \frac{R^2}{\rho} e^{i\alpha}.$$

Так как уравнение окружности $\gamma: z - z_0 = R e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$, имеем

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \left| \frac{(z - z_0) - (z_1 - z_0)}{(z - z_0) - (z_2 - z_0)} \right| = \frac{|R e^{it} - \rho e^{i\alpha}|}{\left| R e^{it} - \frac{R^2}{\rho} e^{i\alpha} \right|} = \frac{\rho |R - \rho e^{i(\alpha-t)}|}{R |R - \rho e^{i(t-\alpha)}|} = \frac{\rho}{R} = \frac{|z_1 - z_0|}{R}$$

Равенство (6.6) доказано.

Замечание. Уравнение окружности γ можно записать также в виде

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \frac{R}{|z_2 - z_0|}, \quad (6.7)$$

т.к. точки z_1 и z_2 симметричны относительно окружности. \square

Упражнения.

6.1 Найти центр и радиус окружности

1) $\left| \frac{z}{z-2} \right| = 3$; 2) $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 2$.

6.2 Записать уравнение окружности в виде (6.3)

1) $|z-2|=1$; 2) $|z+1|=2$.

6.3 Найти точки, симметричные одновременно относительно данной прямой и окружности

1) $\operatorname{Im} z = 2, |z| = 1$; 2) $\operatorname{Im} z = -2, |z| = 1$; 3) $\operatorname{Im} z = 0, |z-1-i| = \frac{1}{2}$; 4) $\operatorname{Re} z = 4, |z-1| = 1$;

5) $\operatorname{Im} z = 0, |z-2i| = \frac{1}{2}$.

6.4 Найти две точки, симметричные одновременно относительно данных окружностей

1) $|z-3|=9, |z-8|=16$ (ответ: $z_1 = 0, z_2 = -24$); 2) $|z|=1, |z-3|=1$.

7. Окрестности точек на комплексной плоскости

Определение. δ -окрестностью конечной точки z_0 комплексной плоскости называется множество точек z , удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$.

Эти точки заполняют круг с центром в точке z_0 и радиусом δ (рис.9).

В дальнейшем δ -окрестность точки z_0 будем обозначать следующим образом $O_\delta(z_0)$.

Определение. Под δ -окрестностью бесконечно удаленной точки понимается множество точек z , удовлетворяющих неравенству $|z| > \delta$.

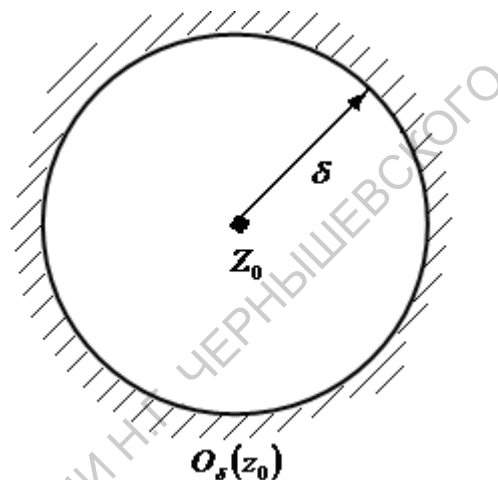


Рис.9

Эти точки заполняют внешность круга с центром в нуле и радиусом δ (рис.10).

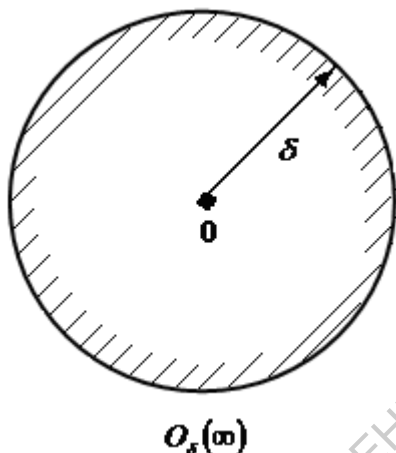


Рис.10

На сфере Римана δ -окрестность бесконечно удаленной точки - это внутренность круга, содержащего точку ∞ .

В дальнейшем δ -окрестность бесконечно удаленной точки будем обозначать следующим образом $O_\delta(\infty)$.

8. Области

Определение. Множество точек расширенной комплексной плоскости называется *областью*, если это множество 1) открытое, т. е. для каждой точки, принадлежащей D , существует окрестность этой точки, принадлежащая D , 2) связное, т. е. любые две точки, принадлежащие D , можно соединить непрерывной кривой, быть может, неограниченной, все точки которой принадлежат D .

Граничной точкой области D называется точка, в любой окрестности которой есть точки, принадлежащие D , и точки, не принадлежащие D . Множество граничных точек области называется *границей* этой области. Область D , дополненная всеми своими граничными точками называется *замыканием* области и обозначается \bar{D} .

Пример 1.

Границей области $0 < |z - a| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, является точка $z = a$ и окружность $|z - a| = \varepsilon$ (рис.11).

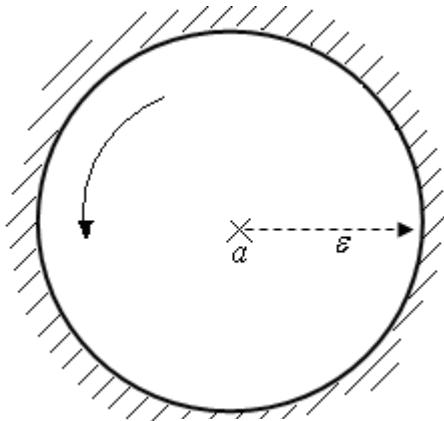


Рис.11

Пример 2.

Область $D: |z| < 1, 0 < \arg z < 2\pi$ будем изображать, как указано на рис 12.

Граничная кривая Γ этой области состоит из следующих частей: отрезок $[0, 1]$, проходимый от точки $z=1$ до точки $z=0$ - нижний берег разреза; отрезок $[1, 0]$, проходимый от точки $z=0$ до точки $z=1$ - верхний берег разреза; окружность $|z|=1$, проходимая против часовой стрелки один раз.

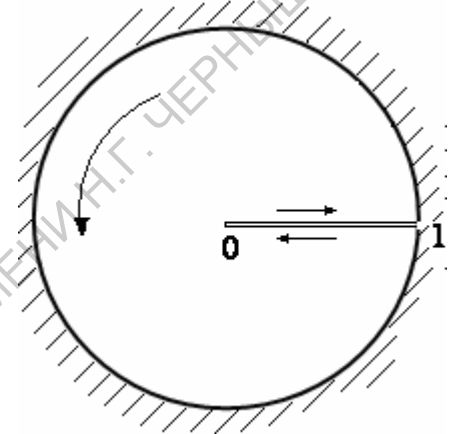


Рис.12

Пример 3.

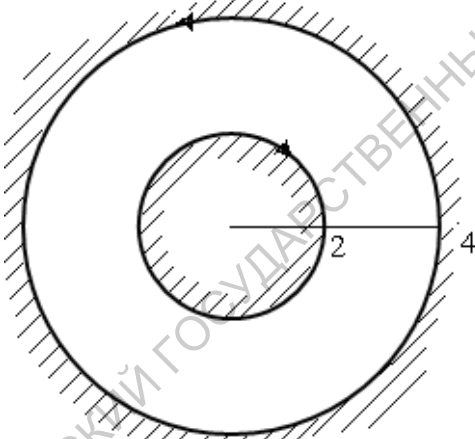


Рис.13

Граница Γ области $2 < |z| < 4$ состоит из двух кривых $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 - окружность $|z|=4$, ориентированна против часовой стрелки, Γ_2 - окружность $|z|=2$, ориентированная по часовой стрелке (рис.13). □

В дальнейшем границу области D будем обозначать ∂D .

Область называется *ограниченной*, если существует такой круг K , что $D \subset K$.

Область на комплексной плоскости называется *односвязной*, если любую замкнутую непрерывную кривую можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в области D .

Примеры односвязных областей приведены на рис. 9, рис.12, рис.14, неодсвязных - на рис. 11, рис.13, рис.15.

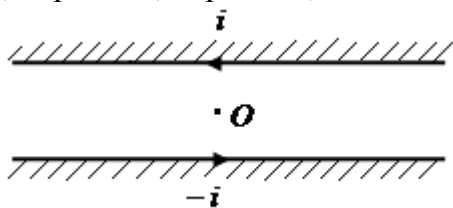


Рис.14

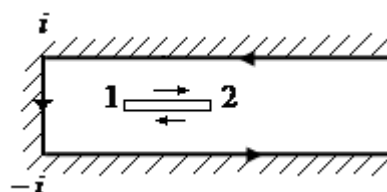


Рис.15

Определение односвязной области такое же и на расширенной комплексной плоскости, только непрерывную деформацию в точку $z = \infty$ нужно рассматривать на сфере Римана.

Пример 4.

Следующие области на расширенной комплексной плоскости являются односвязными: 1) $|z| > 1$, 2) вся расширенная комплексная плоскость, 3) $z \neq a$ - вся расширенная комплексная плоскость с выколотой точкой a . Следующие области не односвязные: 1) вся расширенная комплексная плоскость с выколотыми точками 1 и i , 2) $1 < |z| < \infty$. □

Отметим, что если граница односвязной области D содержит две точки, то границей области D является некоторая кривая, проходящая через эти точки.

В дальнейшем при задании областей вводятся следующие обозначения сокращающие запись.

1. Символом $[a; b]$, где a и b - конечные комплексные числа, обозначается прямолинейный отрезок, соединяющий точки a и b .
2. Символом $[a; +\infty]$, где a - действительное число, обозначается луч $a \leq z < +\infty$, а символом $[-\infty; a]$ луч $-\infty < z \leq a$.

Пример 5.

Запись $D: z \notin [i; -i]$ означает, что область D - это вся комплексная плоскость с разрезом по отрезку, соединяющему точки $-i$ и i .

Запись $D: |z+1| > 1, z \notin [0; +\infty]$ означает, что область D - внешность круга с центром в точке -1 и радиуса 1 с разрезом по положительной части действительной оси. □

9. Непрерывные функции

Пусть на множестве E комплексной плоскости z определена комплекснозначная функция $w = f(z)$, т. е. каждой точке $z = x + iy \in E$ поставлено в соответствие комплексное число $w = u + iv \in E'$, где E' - множество ее значений. Эту функцию можно представить в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Таким образом, комплекснозначную функцию комплексного переменного можно рассматривать как пару действительных функций двух действительных переменных.

Условимся откладывать значения z на одной комплексной плоскости, а значения w - на другой. Тогда функцию комплексного переменного можно геометрически представлять как некоторое отображение множества точек E плоскости z на множество точек E' плоскости w .

Пример 1.

Пусть функция $w = iz$ рассматривается в области $D: \operatorname{Re} z > 0$. Множество значений функции $w = iz$ в области D есть область $D_1: \operatorname{Im} w > 0$.

Следовательно, $w = iz$ является отображением области D комплексной плоскости z на область D_1 , комплексной плоскости w (рис. 16).

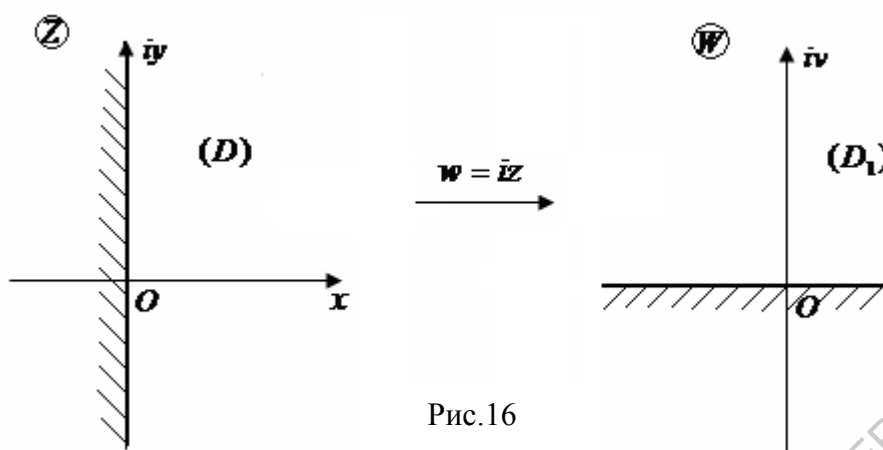


Рис.16

Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $a \in E$, $a = \alpha + i\beta$, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (α, β) .

Функция $f(z)$ называется *непрерывной на множестве* E , если она непрерывна в каждой точке этого множества. Сумма, разность и произведение непрерывных функций $f(z)$ и $g(z)$ является непрерывной функцией, а частное двух непрерывных функций $f(z)$ и $g(z)$ является непрерывной функцией в тех точках, в которых знаменатель $g(z)$ не равен нулю.

10. Непрерывность функции в области вплоть до границы

Пусть a и b - внутренние или граничные точки области D . *Расстоянием между точками* a и b по области D называется величина

$$\rho_D(a, b) = \inf_{\gamma} l(\gamma),$$

где $l(\gamma)$ - длина кривой γ , а нижняя грань берется по всем кривым γ , соединяющим точки a и b , и лежащим в области D .

Ясно, что $\rho_D(a, b) \geq |a - b|$ и $\rho_D(a, b) = |a - b|$, если отрезок $[a; b]$ принадлежит области D . Если a и b - различные точки граничной кривой области D , то $\rho_D(a, b) > 0$ даже в том случае, когда a и b совпадают как точки плоскости.

Рассмотрим ограниченную область D , граница которой Γ состоит из конечного числа замкнутых кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Пусть функция $f(z)$ определена в области D и на каждой граничной кривой $\Gamma_k, k = \overline{1, n}$.

Определение. Функция $f(z)$ называется непрерывной в области D вплоть до ее границы Γ , если для каждой точки a , принадлежащей области D или границе Γ , имеет место равенство

$$\lim_{\rho_D(z, a) \rightarrow 0} f(z) = f(a).$$

Если граница области D состоит из простых замкнутых кривых, то непрерывность функции в области D вплоть до границы Γ равносильна непрерывности этой функции в \bar{D} . Но если граничная кривая области D не является простой, то из непрерывности функции в области D вплоть до границы, вообще говоря, не следует непрерывности этой функции в \bar{D} .

Пример 1.

Рассмотрим функцию $f(z) = \sqrt{z} = r^{1/2} e^{i\frac{\varphi}{2}}$, где $z = re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$, доопределенную в каждой граничной точке a по формуле $f(a) = \lim_{\rho_D(z,a) \rightarrow 0} f(z)$.

Эта функция $f(z)$ является непрерывной в области D вплоть до границы. В частности, если точка $z = x > 0$ принадлежит верхнему берегу разреза, то

$$\lim_{\rho_D(z,a) \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow x, \text{Im } z > 0} f(z) = \sqrt{x}.$$

Аналогично, для точки $z = x > 0$, принадлежащей нижнему берегу разреза, имеем $\lim_{z \rightarrow x, \text{Im } z < 0} f(z) = -\sqrt{x}$. Следовательно, функция $f(z)$ не является

непрерывной в \bar{D} – эту функцию нельзя «склеить» вдоль разреза так, чтобы она осталась непрерывной. \square

11. Дифференцируемые функции. Условия Коши-Римана

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0 . Если существует предел отношения $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ при $z \rightarrow z_0$, то этот предел называется *производной функции в точке z_0* и обозначается $f'(z_0)$, а функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в точке z_0* .

Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы

- 1) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x_0, y_0) ;
- 2) в точке (x_0, y_0) выполнялись условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (11.1)$$

Для производной $f'(z)$ справедлива формула

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (11.2)$$

Пример 1.

Функция $e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$ дифференцируема во всей комплексной плоскости, так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

По формуле (11.2) находим $(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$.

Пример 2.

Рассмотрим функцию $f(z) = x^2 - y^2 - 2i xy$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y, \frac{\partial v}{\partial y} = -2x.$$

Условия (11.1) выполняются только при $x = y = a$. Следовательно, данная функция дифференцируема только в одной точке. \square

Пусть $z = r e^{i\varphi}$, тогда $f(z) = u(r, \varphi) + i v(r, \varphi)$. Условия Коши-Римана в полярных координатах имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad (11.3)$$

Следовательно,

$$f'(z) = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right). \quad (11.4)$$

Пример 3.

Пусть D - плоскость с разрезом вдоль положительной действительной полуоси

1) функция $\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}$, где $z = r e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$, удовлетворяет условиям (11.3) и поэтому дифференцируема в D .

По формулам (11.4) находим $\left(\sqrt{z} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$.

2) функция $\ln z = \ln r + i\varphi$, ($z = r e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$) удовлетворяет условиям (11.3) и $\left(\ln z \right)' = \frac{1}{z}$. \square

Формулы дифференцирования функций комплексной переменной аналогичны соответствующим формулам дифференцирования функций действительной переменной.

Заданная в области D однозначная функция $f(z)$ называется *аналитической* или *регулярной*, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Подчеркнем, что определение аналитической функции в области D , которое дается в данном пособии, предполагает обязательную однозначность функции в области D .

12. Гармонические функции

Действительная функция $u(x, y)$, имеющая в области D непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (12.1)$$

называется *гармонической* в области D , а уравнение (12.1) называется *уравнением Лапласа*.

Действительная и мнимая части аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в области D , являются гармоническими в этой области. Гармонические функции, связанные между собой условиями Коши Римана, называются *сопряженными гармоническими функциями*. Таким образом, действительная и мнимая части аналитической в области функции являются сопряженными гармоническими в этой области.

Обратно, если в области D даны две сопряженные гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, то функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ - аналитическая в области D . Для всякой функции, гармонической в односвязной области D , можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию, которая определяется с точностью до произвольного слагаемого. Следовательно, если задана в односвязной области D гармоническая функция $u(x, y)$, то можно найти с точностью до постоянного слагаемого, аналитическую в области D функцию $f(z) = u + iv$, то есть восстановить аналитическую функцию по заданной ее действительной (или мнимой) части.

Пример 1. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = y^3 - 3x^2y.$$

Функция $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ является гармонической во всей комплексной плоскости. Имеем $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy$, откуда

$$v = -3xy^2 + g(x). \quad (*)$$

Из условий Коши-Римана находим $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 3x^2$.

С другой стороны, в силу (*), находим $\frac{\partial v}{\partial x} = -3y^2 + g'(x)$.

Следовательно $g'(x) = 3x^2$, откуда $g(x) = x^3 + C$, где C - действительная постоянная, и из (*) получаем $v = -3xy^2 + x^3 + C$.

Искомая функция: $f(z) = u + iv = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2) + iC = i(z^3 + C)$. □

Упражнения.

12.1 Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Положим

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(x + iy).$$

Доказать справедливость формул:

- 1) $f'(z_0) = v'_y(x_0, y_0) - iu'_y(x_0, y_0)$; 2) $f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) - iu'_y(x_0, y_0)$;
- 3) $f'(z_0) = v'_y(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0)$;
- 4) $|f'(z_0)|^2 = u_x'^2 + u_y'^2 = u_x'^2 + v_x'^2 = u_y'^2 + v_y'^2 = v_x'^2 + v_y'^2$.

12.2 Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области D и ее производная равна нулю во всех точках этой области. Доказать, что $f(z) \equiv \text{const}$.

12.3 Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области D . Доказать, что если одна из функций

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy), \quad \rho(x, y) = |f(x + iy)|$$

сохраняет в области D постоянное значение, то и $f(z) \equiv \operatorname{const}$.

12.4 Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области D и

$$A \operatorname{Re} f(z) + B \operatorname{Im} f(z) + C \equiv 0,$$

где A, B, C – некоторые действительные постоянные, причем $A^2 + B^2 \neq 0$.

Доказать, что $f(z) \equiv \operatorname{const}$.

12.5 Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной функции:

1) $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2, \quad f(0) = 0;$

2) $\operatorname{Im} f(z) = 2e^x \sin y, \quad f(0) = 0;$

3) $\operatorname{Re} f(z) = 2xy + 3, \quad f(0) = 3;$

4) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + xy, \quad f(0) = 0;$

5) $\operatorname{Im} f(z) = xy, \quad f(0) = 1;$

6) $\operatorname{Re} f(z) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, \quad f(0) = 0;$

7) $\operatorname{Re} f(z) = e^x(x \cos y - y \sin y), \quad f(0) = 0.$

13. Геометрический смысл производной

1. Сохранение угла между кривыми.

Пусть функция $w = f(z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0 и пусть $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим гладкую кривую γ , проходящую через точку z_0 (рис.17).

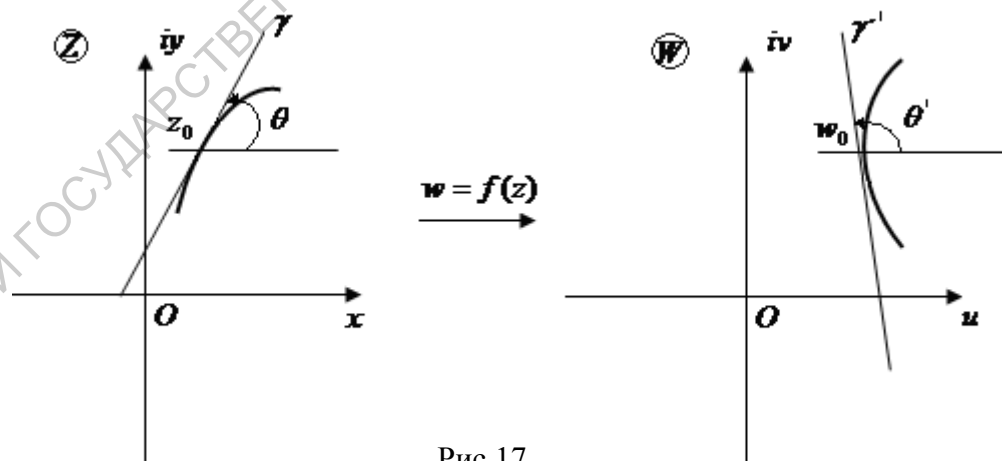


Рис.17

Обозначим через θ угол, образуемый касательной к кривой γ в точке z_0 . Пусть γ' – образ кривой γ при отображении $w = f(z)$, а точка w_0 образ точки z_0 при этом отображении. Так как $f'(z_0) \neq 0$, то кривая имеет касательную в точке w_0 . Обозначим через θ' угол, образуемый касательной к кривой γ' в точке w_0 . Тогда

$$\theta' - \theta = \arg f'(z_0). \quad (13.1)$$

Величина $\alpha = \theta' - \theta$ называется *углом поворота* кривой γ в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Из формулы (13.1) следует, что если $f'(z_0) \neq 0$, то угол поворота в точке z_0 не зависит от кривой γ и равен $\alpha = \arg f'(z_0)$.

Таким образом, отображение $w = f(z)$, где $f(z)$ - дифференцируемая в окрестности точки z_0 функция и $f'(z_0) \neq 0$, сохраняет углы между кривыми, проходящими через точку z_0 , не только по величине, но и по направлению отсчета.

2. Постоянство растяжений.

Пусть функция $w = f(z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0 и пусть $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим произвольную точку z кривой γ , расположенную достаточно близко к точке z_0 (рис. 18).

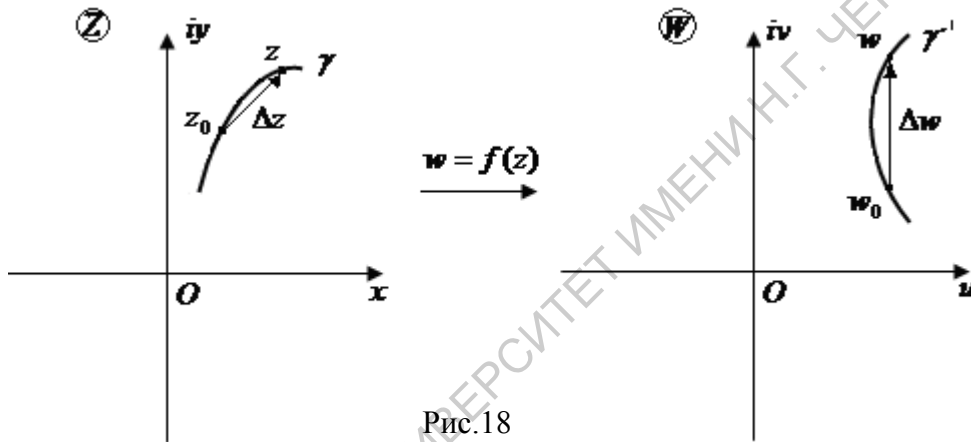


Рис.18

Обозначим $\Delta z = z - z_0, \Delta w = f(z) - f(z_0)$. Из определения производной следует, что

$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) + \varepsilon(\Delta z)$, где $\varepsilon(\Delta z) \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$, откуда получаем

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = |f'(z_0)|,$$

или

$$|\Delta w| = |f'(z_0)| |\Delta z| + o(|\Delta z|). \quad (13.2)$$

Пусть $|z - z_0| = |\Delta z| = \rho$, где ρ достаточно мало, тогда из (13.2) находим, что окружность $|z - z_0| = \rho$ переходит при отображении $w = f(z)$ в кривую, которая мало отличается от окружности $|w - w_0| = \rho |f'(z_0)|$.

Величина $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = k$ называется *коэффициентом линейного*

растяжения кривой γ в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Следовательно, коэффициент линейного растяжения в точке z_0 не зависит от вида и направления кривой γ и равен $k = |f'(z_0)|$.

Пример 1. Найдем угол поворота α и коэффициент линейного растяжения k при отображении $w = f(z)$ в точке z_0 .

1) Пусть $f(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, где $\text{Im } z_0 = y_0 > 0$. Тогда $f'(z) = \frac{z - \bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^2}$,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2i \text{Im } z_0} = -\frac{i}{2y_0}, \quad \alpha = \arg f'(z_0) = -\frac{\pi}{2}, \quad k = \frac{1}{2y_0}.$$

2) Пусть $f(z) = \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$, где $|z_0| < 1$. Тогда $f'(z) = \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{(1 - z_0\bar{z}_0)^2}$,

$$f'(z_0) = \frac{1}{1 - |z_0|^2} > 0, \quad \alpha = \arg f'(z_0) = 0, \quad k = \frac{1}{1 - |z_0|^2}. \square$$

Упражнения.

13.1 Найти множества всех тех точек z_0 , в которых коэффициент линейного растяжения при следующих отображениях равен единице:

1) $w = z^2$. 2) $w = z^3$. 3) $w = z^2 - 2z$. 4) $w = \frac{1}{z}$. 5) $w = \frac{1+iz}{1-iz}$.

6) $w = \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc \neq 0, c \neq 0$.

13.2 Найти множества всех тех точек z_0 , в которых угол поворота при следующих отображениях равен нулю:

1) $w = iz^2$. 2) $w = -z^3$. 3) $w = z^2 - 2z$. 4) $w = \frac{i}{z}$. 5) $w = \frac{1+iz}{1-iz}$.

6) $w = \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc = 1, c \neq 0$.

14. Однолистные функции

Пусть на множестве E расширенной комплексной плоскости z определена функция $w = f(z)$ и E' - множество ее значений на плоскости w .

Определение 1. Функция $w = f(z)$ называется *однолистной* на множестве E , если она в различных точках множества E принимает различные значения.

Отображение $w = f(z)$, осуществляемое однолистной функцией, является взаимнооднозначным и называется *однолистным*.

Из определения однолиственности следует, что если функция однолистка на множестве E и $E_1 \subset E$, то эта функция однолистка на множестве E_1 .

Суперпозиция (результат последовательного выполнения) однолистных отображений есть однолистное отображение.

Если отображение $w = f(z): E \rightarrow E'$ является однолистным, то каждой точке $w \in E'$ ставится в соответствие одна и только одна точка $z \in E$ такая, что $f(z) = w$. Тем самым на множестве E' определена функция $z = h(w)$, обратная к функции $f(z)$. Справедливы равенства

$$f \llbracket (w) \rrbracket \exists w, w \in E', h \llbracket f(z) \rrbracket \exists z, z \in E.$$

Если функция $w = f(z)$ аналитическая в области D и однолистка в этой области, то $f'(z) \neq 0$ в каждой точке этой области. Условие $f'(z) \neq 0$ в области D необходимое для однолистности аналитической функции в D . Однако, это условие не является достаточным для однолистности функции в области D .

Пример 1.

Пусть $w = f(z) = z^2, D: 1 < |z| < 2$. Имеем в кольце $D: 1 < |z| < 2, f'(z) = 2z \neq 0$. Однако функция $w = z^2$ не является однолистной в D , т.к. функция принимает одинаковые значения в точках области D , симметричных относительно точки $z = 0$. □

Функция, обратная к однолистной аналитической функции является аналитической и однолистной.

15. Конформные отображения

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0 .

Определение 1. Отображение $w = f(z)$ называется *конформным в точке* z_0 , если оно сохраняет углы между кривыми и обладает свойством постоянства растяжений в точке z_0 .

Определение 2. Отображение $w = f(z)$ называется *конформным в области* D , если оно является конформным в каждой точке этой области.

Если функция $f(z)$ аналитическая в области D , однолистка в этой области, то отображение $w = f(z)$ является конформным.

Для областей расширенной комплексной плоскости введем следующее

Определение 3. Отображение $w = f(z)$ области D расширенной комплексной плоскости z на область G расширенной комплексной плоскости w называется *конформным*, если

- 1) это отображение однолистно в области D ;
- 2) функция $f(z)$ аналитическая в области D , за исключением, быть может, одной точки, в которой эта функция имеет полюс первого порядка.

Функция $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс первого порядка, если она представима в некоторой окрестности точки z_0 в виде

$$f(z) = \frac{a}{z - z_0} + \psi(z), a \neq 0, 0 < |z - z_0| < \delta,$$

где $\psi(z)$ - аналитическая функция в круге $|z - z_0| < \delta$.

Функция $f(z)$ имеет в точке $z = \infty$ полюс первого порядка, если функция

$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ имеет в точке $z = 0$ полюс первого порядка.

Определение 4. Углом между кривыми γ_1, γ_2 , проходящими через точку $z = \infty$, называется угол между образами этих кривых при отображении $\xi = \frac{1}{z}$ в точке $\xi = 0$.

Пример 1.

Пусть лучи γ_1, γ_2 выходят из точки $z = 0$. Тогда угол между этими лучами в точке $z = \infty$ равен углу между этими лучами в точке $z = 0$, взятому с противоположным знаком.

Действительно, пусть γ_1 - луч $\arg z = \varphi_1$, γ_2 - луч $\arg z = \varphi_2$. Тогда угол между γ_1 и γ_2 в точке $z = 0$ равен $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. образом луча γ_1 при отображении $\xi = \frac{1}{z}$ является луч $\tilde{\gamma}_1: \arg \xi = -\varphi_1$, а луча γ_2 - луч $\tilde{\gamma}_2: \arg \xi = -\varphi_2$ и поэтому угол между $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ в точке $\xi = 0$ равен $(-\varphi_2) - (-\varphi_1) = -\alpha$. Следовательно, по определению, угол между γ_1, γ_2 в точке $z = \infty$ равен $-\alpha$. □

► При конформном отображении области D расширенной комплексной плоскости сохраняются углы между кривыми в каждой точке этой области.

Фундаментальной теоремой теории конформных отображений является

Теорема Римана.

Пусть D односвязная область расширенной комплексной плоскости, граница которой состоит более чем из одной точки. Тогда

- 1) существует функция $w = f(z)$, которая конформно отображает область D на круг $|w| < 1$;
- 2) эта функция единственна, если выполняются условия $f(z_0) = w_0, \arg f'(z_0) = \alpha$.

Здесь z_0, w_0 заданные точки ($z_0 \in D, |w_0| < 1$), α - заданное действительное число.

Исключительными являются следующие области:

- 1) вся расширенная комплексная плоскость;
- 2) вся расширенная комплексная плоскость с одной выколотой точкой.

Из теоремы Римана вытекает

Теорема

Пусть границы односвязных областей D и G состоят более чем из одной точки. Тогда существует единственная функция $w = f(z)$, которая конформно отображает область D на область G так, что

$$f(z_0) = w_0, \arg f'(z_0) = \alpha. \quad (15.1)$$

Где $z_0 \in D, w_0 \in G$, α - действительное число.

Условия (15.1) называются *нормировкой конформного отображения*. Эта нормировка содержит три произвольных действительных параметра. Вместо (15.1) можно задать другие условия, содержащие три независимых действительных параметра. Например,

1. Существует единственное конформное отображение $w = f(z)$ области D на область G , удовлетворяющее условиям $f(z_0) = w_0, f(z_1) = w_1$, где z_0, w_0 - внутренние, а z_1, w_1 - граничные точки областей D и G соответственно.
2. Существует единственное конформное отображение $w = f(z)$ области D на область G , удовлетворяющее условиям $f(z_k) = w_k, k = 1, 2, 3$, где z_1, z_2, z_3 - различные граничные точки области D , а w_1, w_2, w_3 - различные граничные точки области G , занумерованные в порядке положительной ориентации граничных кривых областей D и G соответственно.

16. Соответствие границ при конформном отображении

Пусть D и G ограниченные односвязные области, границами которых являются простые замкнутые кусочно гладкие кривые Γ и $\tilde{\Gamma}$ соответственно. Тогда имеет место

Теорема (принцип соответствия границ)

Если функция $w = f(z)$ конформно отображает область D на область G , то

1. функцию $f(z)$ можно непрерывно продолжить на замыкание области D , т. е. можно доопределить $f(z)$ на Γ так, что получится непрерывная в \bar{D} функция,
2. эта функция отображает взаимно однозначно кривую Γ на кривую $\tilde{\Gamma}$ с сохранением ориентации.

Эта теорема справедлива и для областей расширенной комплексной плоскости с кусочно гладкими границами.

Элементарные функции.

17. Линейная функция

Функция вида

$$w = f(z) = az + b, \quad (17.1)$$

где a и b - комплексные постоянные ($a \neq 0$) называется *линейной*.

Линейная функция аналитическая и однолистная во всей комплексной плоскости. Преобразование (17.1) есть суперпозиция преобразований:

$$\xi = |a|z, \tau = \xi e^{i \arg a}, w = \tau + b.$$

Преобразование $w = az + b$ можно осуществить, выполняя в указанном порядке следующие преобразования:

- 1) подобное растяжение плоскости z в $|a|$ раз (центр подобия – в точке $z = 0$);
- 2) поворот плоскости ξ вокруг точки $\xi = 0$ на угол $\alpha = \arg a$;
- 3) параллельный перенос (сдвиг) плоскости τ на вектор b .

18. Дробно-линейная функция

Функция

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (18.1)$$

где a, b, c, d - комплексные числа, называется *дробно-линейной*. Отображение, осуществляемое функцией (18.1), называется *дробно-линейным*. Условие $ad - bc \neq 0$ означает, что $w \neq const$. В формуле (18.1) предполагается, что если $c \neq 0$, то $w(\infty) = \frac{a}{c}$, $w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$, а если $c = 0$, то $w(\infty) = \infty$. Таким образом дробно-линейная функция определена во всей расширенной комплексной плоскости. В частности при $c = 0$ функция (18.1) является *линейной*.

Отметим основные свойства дробно-линейных отображений.

1. Дробно-линейная функция конформно отображает расширенную комплексную плоскость на расширенную комплексную плоскость.
2. Совокупность дробно-линейных отображений образует группу, т. е. а) суперпозиция (произведение) дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением; б) отображение обратное к дробно-линейному также является дробно-линейным.
3. Круговое свойство: при дробно-линейном отображении образом любой окружности или прямой является окружность или прямая.
4. Свойство сохранения симметричных точек: при дробно-линейном отображении пара точек, симметричных относительно окружности или прямой, переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности или прямой.
5. Существует единственное дробно-линейное отображение, при котором три различные точки z_1, z_2, z_3 переходят в три различные точки w_1, w_2, w_3 . Это отображение определяется формулой

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \quad (18.2)$$

Если в уравнении $z_i = \infty$ или $w_i = \infty$, то разности, в которых фигурируют z_i или w_i , нужно заменить на единицу.

Рассмотрим примеры дробно-линейных отображений.

Пример 1.

Всякое дробно-линейное отображение, переводящее точку z_1 в точку $w = 0$, а точку z_2 - в точку $w = \infty$, имеет вид

$$w = A \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad (18.3)$$

где A - некоторое комплексное число.

Пример 2.

Докажем, что дробно-линейное отображение полуплоскости $\text{Im } z > 0$ на круг $|w| < 1$ имеет вид

$$w = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} e^{i\alpha}, \quad (18.4)$$

где $\text{Im } z_0 > 0$, α - действительное число.

Доказательство.

Пусть дробно-линейная функция $w = w(z)$ отображает полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на круг $|w| < 1$ так, что $w(z_0) = 0$ ($\text{Im } z_0 > 0$). Тогда в силу сохранения симметричных точек $w(\bar{z}_0) = \infty$ и по формуле (18.3)

$$w = A \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}. \quad (18.5)$$

Покажем, что $|A| = 1$. Так как точки действительной оси переходят в точки единичной окружности, т.е. $|w| = 1$ при действительных $z = x$, то из (18.5)

$$1 = \left| A \frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0} \right| = |A| \frac{|x - z_0|}{|x - \bar{z}_0|} = |A| \quad (|x - z_0| = |x - \bar{z}_0|).$$

Следовательно, $A = e^{i\alpha}$. \square

Замечание 1.

При отображении (4) угол поворота кривых в точке z_0 равен $\alpha - \frac{\pi}{2}$, т. к.

$$\arg w'(z_0) = \arg \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z_0 - \bar{z}_0)^2} e^{i\alpha} = \arg \left(-i \frac{1}{2 \text{Im } z_0} e^{i\alpha} \right) = \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad \text{Im } z_0 > 0.$$

Пример 3.

Дробно-линейное отображение круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ имеет вид

$$w = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} e^{i\alpha}, \quad (18.6)$$

где $|z_0| < 1$, α - действительное число.

Доказательство.

Пусть дробно-линейная функция $w = w(z)$ отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, что $w(z_0) = 0$, $|z_0| < 1$. Тогда в силу свойства сохранения симметричных точек $w\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right) = \infty$ (точки z_0 и $\frac{1}{\bar{z}_0}$ - симметричные относительно окружности $|z| = 1$) и по формуле (3)

$$w = A \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}. \quad (18.7)$$

Покажем, что $|A| = 1$. Так как точки единичной окружности, переходят в точки единичной окружности, т. е. $|w| = 1$ при $z = e^{i\varphi}$, то из (18.7)

$$1 = |A| \frac{|e^{i\varphi} - z_0|}{|1 - \bar{z}_0 e^{i\varphi}|} = |A| \frac{|e^{i\varphi} - z_0|}{|e^{i\varphi}||e^{-i\varphi} - \bar{z}_0|} = |A|,$$

т.к. $|e^{i\varphi} - z_0| = |\overline{e^{i\varphi} - z_0}| = |e^{-i\varphi} - \bar{z}_0|$.

Следовательно, $A = e^{i\alpha}$ и из (18.7) получаем формулу (18.6). □

Замечание 2.

При отображении (18.6) угол поворота кривых в точке z_0 равен α , так как из (18.6) имеем

$$\arg w'(z_0) = \arg \frac{1}{1 - |z_0|^2} e^{i\alpha} = \alpha.$$

Пример 4.

Конформное отображение $w = w(z)$ круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$, удовлетворяющее условиям $w(z_0) = w_0$ ($|w_0| < 1$), $\arg w'(z_0) = \alpha$, определяется формулой

$$\frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w} = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} e^{i\alpha}. \quad (18.8)$$

Доказательство.

Функция $\xi = g(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} e^{i\alpha}$ отображает $|z| < 1$ на круг $|\xi| < 1$ так, что

$g(z_0) = 0$, $\arg g'(z_0) = \alpha$ (пример 3). Функция $\xi = h(w) = \frac{w - w_0}{1 - w\bar{w}_0}$ отображает

круг $|w| < 1$ на тот же круг $|\xi| < 1$ так, что $h(w_0) = 0$, $\arg h'(w_0) = 0$.

Следовательно, функция $w = w(z)$, определяемая формулой (18.8), отображает $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, что $w(z_0) = w_0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$.

Пример 5. Конформное отображение $w = w(z)$ полуплоскости $\text{Im } z > 0$ на полуплоскость $\text{Im } w > 0$, удовлетворяющее условиям $w(z_0) = w_0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$, определяется формулой

$$\frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0} = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} e^{i\alpha}. \quad (18.9)$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству формулы (18.8).

Пример 6. Конформное отображение $w = w(z)$ полуплоскости $\text{Im } z > 0$ на круг $|w| < 1$, удовлетворяющее условиям $w(z_0) = w_0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$, где $\text{Im } z_0 > 0$, $|w_0| < 1$, α - действительное число, определяется формулой

$$\frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w} = i \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} e^{i\alpha}. \quad (18.10)$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству формулы (18.8).

Пример 7. Дробно-линейное отображение полуплоскости $\text{Im } z > 0$ на полуплоскость $\text{Im } w > 0$ имеет вид

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (18.11)$$

где a, b, c, d - действительные числа, $ad - bc > 0$.

Доказательство.

Пусть дробно-линейная функция отображает полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на полуплоскость $\text{Im } w > 0$. Рассмотрим три различные граничные точки z_1, z_2, z_3 границы области $\text{Im } z > 0$, т. е. z_k - различные действительные числа. Образы этих точек являются граничными точками области $\text{Im } w > 0$, т. е. $w(z_k) = w_k$ - действительные числа. Тогда функция $w = w(z)$ определяется формулой (18.2), откуда получаем формулу (18.11), где a, b, c, d - действительные числа. Покажем, что $ad - bc > 0$. В силу принципа соответствия границ конформное отображение $w = w(z)$ переводит действительную ось $\text{Im } z = 0$ в действительную ось $\text{Im } w = 0$ с сохранением ориентации. Следовательно, при действительных x имеем $\arg w'(x) = 0$, т. е. $w'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} > 0$, откуда $ad - bc > 0$.

Пример 8. Найти дробно-линейную функцию, удовлетворяющую условиям: $w(i) = 0$, $w(\infty) = i$, $w(-i) = 1$.

Решение.

По формуле (18.2) находим $\frac{w}{w-i} \cdot \frac{1-i}{1-0} = \frac{z-i}{1} \cdot \frac{1}{-i-i}$,

$$\frac{w}{w-i} \cdot = \frac{z-i}{2(-1-i)},$$

$$w = \frac{z-i}{1-2i-iz}.$$

Пример 9. Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на круг $|w| < 1$, удовлетворяющую условиям $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = 0$.

Решение.

По формуле (18.4) находим:

$$w(z) = \frac{z-i}{z+i} e^{i\alpha}.$$

Имеем $\arg w'(i) = \alpha - \frac{\pi}{2}$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и искомая функция $w(z) = i \frac{z-i}{z+i}$.

Пример 10. Найти образ области $D: \Re z < 1$ при отображении $w = \frac{z}{z-2}$.

Решение.

Граница области – прямая $l: \operatorname{Re} z = 1$. Найдем образ l_1 прямой l при отображении $w = \frac{z}{z-2}$. Так как точки $z = 0$ и $z = 2$ симметричны относительно прямой l , то уравнение $l_1: |w| = \left| \frac{z}{z-2} \right| = 1$, т.е. l_1 – окружность $|w| = 1$.

Поскольку данная дробно-линейная функция точку $z = 0$, принадлежащую области D , переводит в точку $w = 0$, то образ D – единичный круг $|w| < 1$.

Пример 11. Найти образ области $D: |z| < 2$ при отображении $w = \frac{2}{z-1}$.

Решение.

Граница области D состоит из двух окружностей: окружности $\gamma_1: |z| = 1$ и окружности $\gamma_2: |z| = 2$. Найдем образы окружностей γ_1, γ_2 . Обозначим их через γ_1^* и γ_2^* соответственно. В силу кругового свойства образ окружности γ_1 – прямая, т.к. точка $z = 1$ лежит на γ_1 . Имеем $w(i) = \frac{2}{i-1} = -1-i$, $w(-i) = -1+i$. Следовательно γ_1^* – прямая: $\operatorname{Re} w = -1$. Находим γ_2^* . В силу кругового свойства γ_2^* – окружность. Имеем $z = \frac{2+w}{w}$, поэтому уравнение окружности γ_2^* имеет вид: $\left| \frac{w+2}{w} \right| = 2$. По формулам (6.4), (6.5) находим центр и радиус окружности: $w_0 = \frac{-2-0 \cdot 4}{1-4} = \frac{2}{3}$, $R = \frac{2|-2-0|}{|1-4|} = \frac{4}{3}$. Следовательно, образ области D есть область D_1 , граница которой состоит из прямой $\operatorname{Re} w = -1$ и окружности $\left| w - \frac{2}{3} \right| = \frac{4}{3}$, т.е. $D_1: \operatorname{Re} w > -1, \left| w - \frac{2}{3} \right| > \frac{4}{3}$.

Пример 12. Найти образ полуплоскости $D: \operatorname{Re} z > 1$ при отображении $w = \frac{z}{z-3}$.

Решение.

Граница области D – прямая $l: \operatorname{Re} z = 1$. В силу кругового свойства образ прямой l – окружность γ при отображении $w = \frac{z}{z-3}$. Уравнение прямой l запишем в виде: $\left| \frac{z}{z-2} \right| = 1$. т.к. точки $z = 0$ и $z = 2$ симметричны относительно этой прямой. Имеем $z = \frac{3w}{w-1}$. Поэтому $\frac{z}{z-2} = \frac{3w}{w+2}$. Следовательно, уравнение окружности γ при данном отображении имеет вид

$\left| \frac{w}{w+2} \right| = \frac{1}{3}$. По формулам (6.4), (6.5) находим центр и радиус окружности γ :

$$w_0 = \frac{0 - (-2) \cdot \frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4}, \quad R = \frac{\frac{1}{3} |0+2|}{\left| 1 - \frac{1}{9} \right|} = \frac{3}{4}. \quad \text{Т.е. уравнение } \gamma: \left| w - \frac{1}{4} \right| = \frac{3}{4}.$$

Функция $w = \frac{z}{z-3}$ точку $z = 4$, принадлежащую области D , преобразует в точку $w = 4$. Эта точка лежит во внешности круга $\left| w - \frac{1}{4} \right| > \frac{3}{4}$. Поэтому образ

$$D: \left| w - \frac{1}{4} \right| > \frac{3}{4}.$$

Пример 13. Найти образ области $D: 0 < \operatorname{Re} z < 1$ при отображении $w = \frac{z-1}{z-2}$.

Решение.

Граница области D состоит из прямых $l_1: \operatorname{Re} z = 0$ и $l_2: \operatorname{Re} z = 1$. Обозначим образы прямых l_1 и l_2 при отображении $w = \frac{z-1}{z-2}$ через l_1^* и l_2^* соответственно. В силу кругового свойства l_1^* и l_2^* — окружности. Так как $w(\infty) = 1$, а прямые l_1 и l_2 параллельны, то окружности l_1^* и l_2^* касаются друг друга в точке $w = 1$. Уравнение прямой l_1 можно записать в виде $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 1$, поскольку точки $z = 1$ и $z = -1$ симметричны относительно прямой l_1 . Из условия имеем $z = \frac{2w-1}{w-1}$, поэтому уравнение l_1^* имеет вид $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = \left| \frac{3w-2}{w} \right| = 1$,

откуда $\left| \frac{w - \frac{2}{3}}{w} \right| = \frac{1}{3}$. По формулам (6.4), (6.5) находим центр w_0 окружности l_1^*

и радиус R . Имеем $w_0 = \frac{\frac{2}{3} - 0 \cdot \frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$, $R = \frac{\frac{1}{3} \left| \frac{2}{3} - 0 \right|}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4}$. Следовательно, l_1^* —

окружность $\left| w - \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{4}$. Найдем уравнение окружности l_2^* . Уравнение

прямой l_2 запишем в виде $\left| \frac{z-2}{z} \right| = 1$, т.к. точки $z = 2$ и $z = 0$ симметричны

относительно прямой l_2 . Таким образом, уравнение l_2^* имеет вид

$\left| \frac{z-2}{z} \right| = \left| \frac{1}{2w-1} \right| = 1$, т.е. $\left| w - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$. Следовательно, образ области D является

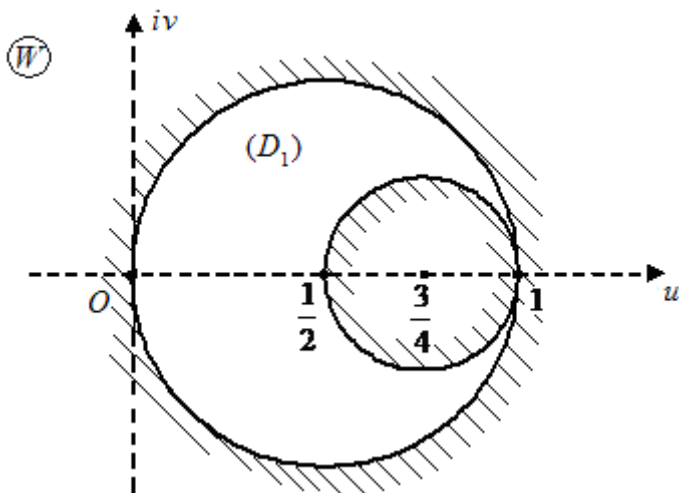


Рис.19

областью, граница которой состоит из окружностей $\left|w - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4}$, $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, т.е. область $D_1: \left\{ \left|w - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}, \left|w - \frac{3}{4}\right| > \frac{1}{4} \right\}$ (рис.19). \square

Упражнения.

18.1 Найти образ круга $|z - 1| < 2$ при следующих отображениях:

- 1) $w = 1 - 2iz$; 2) $w = \frac{2iz}{z+3}$; 3) $w = \frac{z+1}{z-2}$; 4) $w = \frac{z-1}{2z-6}$.

18.2 Найти образ полуплоскости $\operatorname{Re} z < 1$ при следующих отображениях:

- 1) $w = (1+i)z+1$; 2) $w = \frac{z}{z-1+i}$; 3) $w = \frac{z}{z-2}$; 4) $w = \frac{4z}{z+1}$; 5) $w = \frac{z-3+i}{z+1+i}$.

18.3 Отыскать дробно-линейные функции $w(z)$, удовлетворяющие условиям:

- 1) $w(0) = 4$, $w(1+i) = 2+2i$, $w(2i) = 0$;
 2) $w(0) = 0$, $w(1+i) = 2+2i$, $w(2i) = 4$;
 3) $w(0) = 0$, $w(1+i) = \infty$, $w(2i) = 2i$.

18.4 Отыскать дробно-линейные функции $w(z)$, удовлетворяющие условиям:

- 1) $w(i) = 2$, $w(\infty) = 1+i$, $w(-i) = 0$;
 2) $w(i) = 0$, $w(\infty) = 1$, $w(-i) = \infty$;
 3) $w(i) = -2$, $w(\infty) = 2i$, $w(-i) = 2$.

18.5 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую область D на область D_1 и удовлетворяющую указанным условиям:

- 1) $D: |z| < 1$, $D_1: |w| < 1$, $w(1) = 1$, $w(i) = \frac{3i-4}{5}$, $w(-1) = -1$;
 2) $D: |z| < 1$, $D_1: |w| < 1$, $w(i) = i$, $w\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{4i}{5}$;
 3) $D: |z| < 1$, $D_1: |w| < 1$, $w\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$;
 4) $D: \operatorname{Re} z > 0$, $D_1: |w| < 1$, $w(0) = i$, $w(-1) = 1$, $w(\infty) = -1$;
 5) $D: \operatorname{Re} z > 0$, $D_1: |w| < 1$, $w(0) = -i$, $w(2i) = \frac{i}{3}$;
 6) $D: \operatorname{Re} z > 0$, $D_1: |w| < 1$, $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = \pi$;

- 7) $D: \operatorname{Re} z > 0, D_1: \operatorname{Re} w > 0, w(-1) = 0, w(0) = 2, w(1) = \infty;$
 8) $D: \operatorname{Re} z > 0, D_1: \operatorname{Re} w > 0, w(-1) = -2, w(-2+i) = 1+3i;$
 9) $D: \operatorname{Re} z > 0, D_1: |\operatorname{Im} w| > 0, w(+i) = i, \arg w'(+i) = \frac{\pi}{2};$
 10) $D: |z-1-i| < 2, D_1: |w| < 1, w(0) = 0, \arg w'(0) = \frac{\pi}{2};$
 11) $D: \operatorname{Re} z > -1, D_1: |w| < 1, w(0) = 0, \arg w'(0) = \pi.$

18.6 Найти область D в плоскости z , которая при отображении $w = \frac{z}{1-z}$ преобразуется в область D_1 :

- 1) $D_1: |w| < 2$; 2) $D_1: \left\{ |w| < \frac{1}{2} \right\}$; 3) $D_1: |w| < 1$; 4) $D_1: \operatorname{Re} w > 1$;
 5) $D_1: \operatorname{Re} w < -1$.

19. Степенная функция $w = z^n$

Функция вида

$$w = z^n \quad (19.1)$$

называется *степенной*.

Функция z^n аналитическая во всей комплексной плоскости. Если в плоскостях z и w ввести полярные координаты $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, то соотношение (19.1) можно переписать в виде двух равенств

$$\rho = r^n, \theta = n\varphi. \quad (19.2)$$

Из (19.2) следует, что отображение, осуществляемое функцией (19.1) сводится к повороту каждого вектора $z \neq 0$ на угол $(n-1)\arg z$ и растяжению его в $|z|^{n-1}$ раз.

Для однолистности отображения $w = z^n$ в некоторой области D необходимо и достаточно, чтобы D не содержала никаких двух точек z_1 и z_2 , связанных соотношениями

$$|z_1| = |z_2|, \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2k\pi}{n} \quad (k \neq 0 - \text{целое}).$$

Этому условию удовлетворяют, например, секторы

$$\frac{2k\pi}{n} < \varphi < (k+1)\frac{2\pi}{n}, (k = 0, 1, \dots),$$

каждый из которых преобразуется в плоскость w с исключенной положительной полуосью.

Рассмотрим случай $n = 2$, т.е. функцию $w = z^2$.

20. Функция $w = z^2$

Функция $w = z^2$ однолистка в области D в том и только в том случае, когда эта область не содержит ни одной пары точек симметричных относительно точки $z = 0$. В частности, функция $w = z^2$ однолистка в верхней полуплоскости. Рассмотрим луч $\arg z = \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$). При отображении $w = z^2$ этот луч переходит в луч $\arg w = 2\alpha$. Будем вращать этот луч, тогда луч $\arg w = 2\alpha$, являющийся образом луча $\arg z = \alpha$, будет поворачиваться против часовой стрелки. Если луч на плоскости z опишет верхнюю полуплоскость, то его образ опишет всю плоскость w . При этом лучи $\arg z = 0$ и $\arg z = \pi$ перейдут соответственно в лучи $\arg w = 0$ и $\arg w = 2\pi$. Геометрически эти лучи совпадают с положительной действительной полуосью на плоскости w . Для того чтобы отображение было взаимно-однозначным не только внутри области $\text{Im } w > 0$, но и на ее границе, проведем в плоскости z «разрез» по положительной части действительной оси и будем считать, что луч $\arg z = 0$ отображается в верхний, а луч $\arg z = \pi$ - на нижний берег этого разреза.

Функция $w = z^2$ является однолистной и в нижней полуплоскости и отображает эту область на плоскость с разрезом по положительной действительной оси. При этом отображении лучи $\arg z = \pi$ и $\arg z = 2\pi$ переходят соответственно в верхний и нижний берега разреза.

1. *Образы лучей $\arg z = \alpha$ и дуг окружностей $|z| = \rho$.*

Линии $\arg z = \text{const}$ и $|z| = \text{const}$ образуют координатную сетку на плоскости z (полярные координаты).

Функция $w = z^2$ взаимно-однозначно переводит:

а) луч $\arg z = \alpha$ в луч $\arg w = 2\alpha$;

б) дугу окружности $|z| = \rho$, $\alpha \leq \arg z \leq \beta$, где $\beta - \alpha < \pi$ в дугу окружности $|w| = \rho^2$, $2\alpha \leq \arg w \leq 2\beta$.

Пример 1. Функция $w = z^2$ конформно отображает кольцевой сектор S : $\rho_1 < |z| < \rho_2$, $0 < \arg z < \alpha \leq \pi$, где $0 \leq \rho_1 < \rho_2 < +\infty$, на кольцевой сектор \tilde{S} : $\rho_1^2 < |w| < \rho_2^2$, $0 < \arg w < 2\alpha$. □

2. *Образы прямых $\text{Re } z = C$, $\text{Im } z = C$.*

Функция $w = u + iv = z^2$ взаимно-однозначно переводит:

а) прямую $\text{Re } z = C$ в параболу

$$v^2 = 2p \left(\frac{p}{2} - u \right), \quad (*)$$

$$p = 2C^2, w = u + iv.$$

б) прямую $\text{Im } z = C$ в параболу

$$v^2 = 2p\left(u + \frac{p}{2}\right). \quad (**)$$

Действительно:

$$w = u + iv = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

т.е. $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

Если $\operatorname{Re} z = x = C$, $-\infty < y < +\infty$, то $u = C^2 - y^2$, $v = 2Cy$.

Откуда вытекает формула (*).

Аналогично, при $\operatorname{Im} z = y = C$ получается формула (**).

Если $C = 0$, то $p = 0$, и парабола вырождается в луч $\left\langle -\infty; 0 \right\rangle$, проходимый дважды. Аналогично получаем, что прямая $\operatorname{Im} z = 0$ переходит в луч $\left[0; +\infty \right)$, проходимый дважды.

Отметим, что любая парабола вида (*) пересекается с параболой вида (**) под прямым углом в силу свойства сохранения углов при конформном отображении.

Пример 2.

Найти образ области $D: \left\{ \operatorname{Im} z > \frac{1}{\sqrt{2}}, \operatorname{Re} z > 0 \right\}$ при отображении $w = z^2$.

Решение.

Функция $w = z^2$ отображает луч

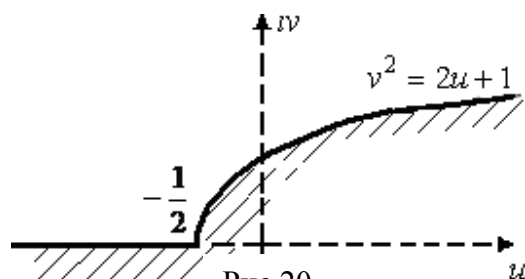
$l: z = iy$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq y < +\infty$ в луч $l^*: \left[-\infty; -\frac{1}{2} \right]$.

Луч $l_2: z = x + i\frac{1}{\sqrt{2}}$, $0 \leq x < +\infty$ данная

функция переводит в дугу параболы

$$v^2 = 2u + 1, v \geq 0, w = u + iv, w(1+i) = 2i.$$

Поэтому образ области D при отображении $w = z^2$ есть область $D_1: v^2 > 2u + 1, v > 0$ (рис.20). \square



21. Функция $w = \sqrt{z}$

Функция $w = \sqrt{z}$ является обратной к функции $w = z^2$. Эта функция является двузначной.

Пример 1.

Пусть D – плоскость с разрезом по лучу $\left[0; +\infty \right)$. В этой области рассмотрим две аналитические функции: $f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$, где $z = re^{i\varphi}$, $0 < r < \infty, 0 < \varphi < 2\pi$ и $f_2(z) = -f_1(z)$. Функция $w = f_1(z)$ удовлетворяет условию $f_1^2(z) = z$, т.е. является решением уравнения $w^2 = z$ в области D . Аналогично, функция $f_2(z)$ в области D удовлетворяет условию $f_2^2(z) = z$. Функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ называются *регулярными ветвями* двузначной

функции \sqrt{z} . Функция $f_1(z)$ конформно отображает область D на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$, а функция $f_2(z)$ - на нижнюю полуплоскость. Нередко обе эти ветви обозначают одним и тем же символом \sqrt{z} . Для того, чтобы определить, какая из двух возможных ветвей двузначной функции \sqrt{z} рассматривается, достаточно указать а) либо значение функции в какой-нибудь внутренней точке D ; б) либо значение функции в граничной точке (на разрезе), но при этом должно быть указано, на каком берегу разреза берется точка – верхнем или нижнем.

Пример 2.

Пусть D - вся комплексная плоскость с разрезом по отрицательной части действительной оси. В этой области функция \sqrt{z} распадается на две регулярные ветви: $\tilde{f}_1(z) = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}, -\pi < \varphi < \pi$, $\tilde{f}_2(z) = -f_1(z), z = re^{i\varphi}$. Функция $w = \tilde{f}_1(z)$ конформно отображает область D на полуплоскость $\text{Re } w > 0$, а функция $w = \tilde{f}_2(z)$ - на полуплоскость $\text{Re } w < 0$.

Пример 3.

Пусть D - полуплоскость $\text{Im } z > 0$ с разрезом по отрезку $[ih; +\infty)$ ($h > 0$). Найдем конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость.

- 1) Функция $\xi = z^2$ конформно отображает область D на область D_1 - плоскость с разрезом по лучу $[h^2; +\infty)$;
- 2) Функция $\eta = \xi + h^2$ (сдвиг) конформно отображает область D_1 на область D_2 - плоскость η с разрезом по лучу $[0; +\infty)$;
- 3) Функция $w = \sqrt{\eta}$ (точнее, ее однозначная ветвь, принимающая положительные значения на верхнем берегу разреза) конформно отображает область D_2 на полуплоскость $\text{Im } w > 0$.

Следовательно, суперпозиция отображений 1)-3), т.е. функция $w = \sqrt{z^2 + h^2}$ конформно отображает область D на полуплоскость $\text{Im } w > 0$. \square

22. Функция $w = z^\alpha, \alpha > 0$.

Всюду в дальнейшем символом z^α обозначается следующая функция:

$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z},$$

определенная в секторе $0 < \arg z < 2\pi$.

Пример 1. Пусть S - угол $0 < \arg z < \beta \leq 2\pi$. Тогда функция $w = z^{\frac{\pi}{\beta}}$ конформно отображает угол S на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$. \square

Рассмотрим область D , ограниченную двумя дугами окружностей, пересекающимися в точках z_1 и z_2 под углом α (рис.21). Эта область называется *луночкой*.

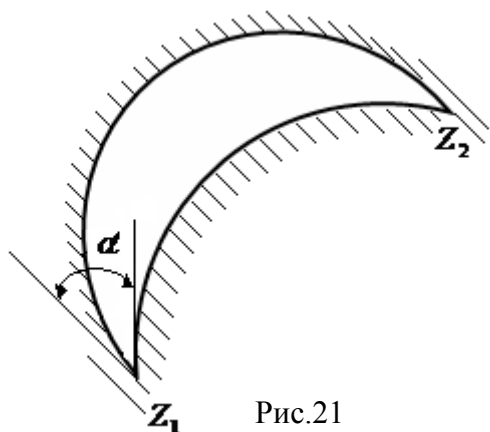


Рис.21

Покажем, что луночку D можно конформно отобразить на верхнюю полуплоскость с помощью дробно-линейной функции и степенной функции.

Применим дробно-линейное отображение $\xi = \frac{z - z_1}{z - z_2}$, при котором

$$\xi(z_1) = 0, \xi(z_2) = \infty.$$

Это отображение переводит дуги, ограничивающие D , в лучи, пересекающиеся в точке $\xi = 0$ под

углом α . Следовательно, образом луночки D является угол $\beta < \arg \xi < \beta + \alpha$, где β – некоторое число. Этот угол поворотом $\eta = \xi e^{-i\beta}$ отображается на

угол $0 < \arg \eta < \alpha$, который функция $w = \eta^{\frac{\pi}{\alpha}}$ отображает на полуплоскость

$\text{Im } w > 0$. Таким образом, функция $w = \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} e^{-i\beta} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}}$ конформно отображает луночку D на верхнюю полуплоскость.

Пример 2. Найти образ полосы $0 < \text{Im } z < 1$ при отображении $w = z^2$.

Решение.

Функция $w = z^2$ переводит прямую $\text{Im } z = 1$ в параболу $v^2 = 4u + 4$, ($w = u + iv$), а прямую $\text{Im } z = 0$ - в луч $[\frac{1}{2}; +\infty)$, проходимый дважды. Следовательно, образ полосы $0 < \text{Im } z < 1$ при отображении $w = z^2$ есть внутренность параболы $v^2 = 4u + 4$ с разрезом вдоль луча $[\frac{1}{2}; +\infty)$ (рис.22).

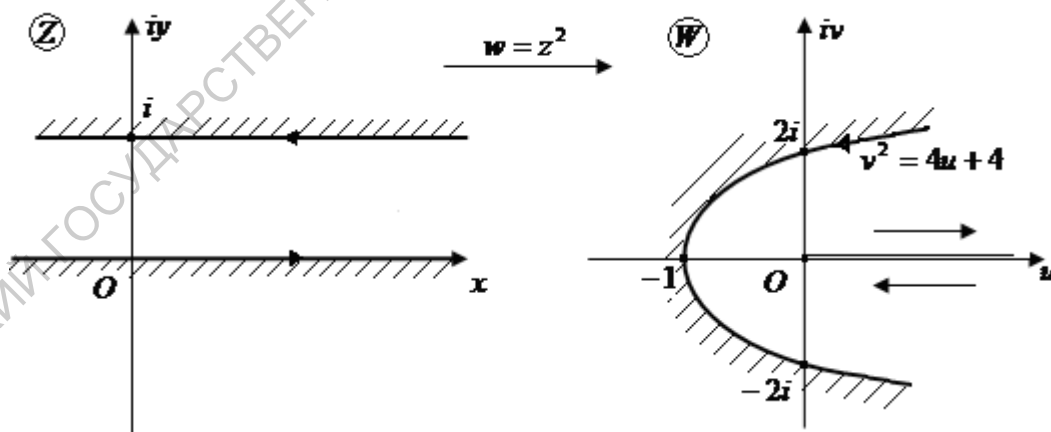


Рис.22

Пример 3.

Найти конформное отображение области $D_1: \text{Re } z > 2, \text{Im } z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$.

Решение.

Функция $\xi = \sqrt{z}$, $\sqrt{2i} = 1+i$ конформно отображает область D_1 на область $D: \left\{ \operatorname{Im} \xi > \frac{1}{\sqrt{2}}, \operatorname{Re} \xi > 0 \right\}$ (см. пример 2 из п.20). Линейное преобразование $\eta = \xi - \frac{i}{\sqrt{2}}$ отображает область D на сектор $0 < \arg \eta < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, функция $w = \eta^2$ осуществляет искомое отображение. Таким образом, $w = \left(\sqrt{z} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2$, $\sqrt{2i} = 1+i$.

Пример 4.

Найти конформное отображение луночки $D: |z-1| < 1, |z-i| < 1$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Решение.

Точки пересечения окружностей $|z-1|=1, |z-i|=1 \rightarrow z_1=0, z_2=1+i$. Дуги окружностей, ограничивающих луночку D , обозначим через γ_1 и γ_2 . Пусть γ_1 дуга окружности $|z-1|=1$, γ_2 дуга окружности $|z-i|=1$. Дробно-линейная функция $\xi = -\frac{z-z_1}{z-z_2} = -\frac{z}{z-1-i}$ переводит отрезок $[1+i, \infty)$ в положительную

часть действительной оси, т.к. $\xi\left(\frac{1+i}{2}\right) = 1, \xi(0) = 0, \xi(\infty) = \infty$. Дуга γ_1 образует в точке $z=0$ угол $\frac{\pi}{4}$ с отрезком $[1+i, \infty)$. В силу конформности отображения

образ дуги γ_1 при отображении $\xi = -\frac{z}{z-1-i}$ является лучом $\arg \xi = \frac{\pi}{4}$.

Аналогично убеждаемся, что образ γ_2 есть луч $\arg \xi = -\frac{\pi}{4}$. Таким образом,

дробно-линейная функция отображает луночку D на сектор $-\frac{\pi}{4} < \arg \xi < \frac{\pi}{4}$.

Поэтому функция $w = \left(e^{i\frac{\pi}{4}\xi} \right)^2$ отображает луночку D на верхнюю

полуплоскость. Искомая функция - $w = i \left(\frac{z}{z-1-i} \right)^2$. \square

Упражнения.

22.1 Найти образы при отображении $w = z^2$ следующих линий:

- 1) $\arg z = \alpha, (-\pi < \alpha \leq \pi)$; 2) $\operatorname{Re} z = a (a > 0)$; 3) $\operatorname{Im} z = a (a > 0)$; 4) $|z| = \rho, |\arg z| < \frac{\pi}{4}$.

22.2 Найти образы при отображении $w = z^2$ следующих областей:

- 1) $\operatorname{Im} z > 0$; 2) $\operatorname{Re} z > 0$; 3) $\pi < \arg z < \frac{3\pi}{2}$;

4) $|z| < 1, \frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$; 5) $\operatorname{Im} z < -1$;

6) $\operatorname{Re} z > 1$; 7) $|z| < 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$; 7) $|z| > \frac{1}{2}, \operatorname{Re} z > 0$.

22.3 Найти образы следующих областей D при отображении регулярной ветвью функции $w = \sqrt{z}$, выделяемой ее значением в указываемой точке:

1) $D: \operatorname{Re} z > 0, \sqrt{z}|_{z=i} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; 2) $D: \operatorname{Re} z > 0, \sqrt{z}|_{z=1} = 1$;

3) $D: z \notin [0; +\infty), \sqrt{z}|_{z=-1} = -i$; 4) $D: z \notin (-\infty; +1], \sqrt{z}|_{z=4} = 2$;

5) $D: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0, \sqrt{z}|_{z=i} = -\frac{1+i}{2}$; 6) $D: \left\{ |z| > 1, \frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4} \right\}, \sqrt{z}|_{z=-1} = i$;

7) $D: \operatorname{Re} z > 0, (\operatorname{Im} z)^2 > 4\operatorname{Re} z + 4, \sqrt{z}|_{z=-1} = i$.

22.4 Найти функцию, конформно отображающую область D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$:

1) $D: |z| < 1, |z-1| < 1$; 2) $D: \left\{ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\}$;

3) $D: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$; 4) $D: |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0$;

5) $D: \left\{ |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}$; 6) $D: \left\{ |z| > 2, 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\}$;

7) $D: |z| < 2, \operatorname{Im} z > 1$; 8) $D: |z| < 1, |z+i| < 1$;

9) $D: |z| < 1, |z+i| > 1$; 10) $D: |z| > 1, |z+i| < 1$.

23. Показательная функция

Показательная функция $w = e^z$ для любого комплексного числа $z = x + iy$ определяется следующим образом

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (23.1)$$

Функция $w = e^z$ аналитическая во всей комплексной плоскости, ее производная $(e^z)' = e^z$. Для функции e^z сохраняется основное свойство показательной функции: $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. Показательная функция ни для какого комплексного $z = x + iy$ не обращается в нуль. В самом деле, $|e^z| = e^x > 0$. Так как производная показательной функции всюду отлична от нуля, то это отображение конформно во всех точках конечной плоскости z .

Для однолиственности отображения (23.1) в области D необходимо и достаточно, чтобы область D не содержала никакой пары различных точек, удовлетворяющих условию $z_1 - z_2 = 2k\pi i, (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$. В частности, отображение $w = e^z$ является однолистным в горизонтальной полосе $a < \operatorname{Im} z < b, 0 < b - a \leq 2\pi$. При отображении $w = e^z$ прямая $z = x + ic$ (c -

фиксировано, $-\infty < x < +\infty$) переходит в линию $w = e^x e^{ic}$, т.е. в луч $\arg w = c$. Прямая $z = c_1 + iy$, параллельная мнимой оси, переходит в окружность $|w| = |e^{c_1 + iy}| = e^{c_1}$, радиуса $R = e^{c_1}$. Следовательно, показательная функция конформно отображает полосу ширины $h \leq 2\pi$, параллельную действительной оси, на угол раствора h с вершиной в начале координат. Поэтому, к показательной функции прибегают каждый раз, когда нужно конформно отобразить некоторую прямолинейную полосу на внутренность угла.

Если прямая плоскости z не является параллельной какой-либо оси координат, то образ ее в плоскости будет уже не прямой и окружностью, а логарифмической спиралью.

Пример 1. Найти образ прямоугольника $0 < \operatorname{Re} z < \pi, 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$ при отображении $w = e^z$.

Решение.

В данной области показательная функция однолистна. Из приведенных свойств показательной функции вытекает, что функция $w = e^z$ конформно отображает прямоугольник на кольцевой сектор $1 < |w| < e^\pi, 0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$.

Пример 2. Найти образ полосы $D: 0 < \operatorname{Im} z < \pi$ при отображении $w = e^z$.

Решение.

В области D показательная функция однолистна. Прямая $\operatorname{Im} z = 0$ переводится в луч $\arg w = 0$, а прямая $z = \pi i + x, -\infty < x < +\infty$ переводится в луч $\arg w = \pi$. Таким образом, функция $w = e^z$ конформно отображает область D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, т.к. $w\left(i\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Пример 3. Найти образ области $D: 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0$ при отображении $w = e^z$.

Решение.

Функция $w = e^z$ отображает отрезок $[0; \pi i]$ в полуокружность $|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi$. Луч $\arg z = 0$ отображается этой функцией в луч $[1; +\infty)$, а луч $z = \pi i + x, x \geq 0$ отображается в луч $[-\infty; -1]$. Поэтому образ области D при отображении $w = e^z$ есть область $D_1: |w| > 1, \operatorname{Im} z > 0$. □

24. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция в комплексной плоскости вводится как функция, обратная к показательной. Рассмотрим уравнение относительно w :

$$e^w = z. \quad (*)$$

Пусть $z = r e^{i\varphi}$, $w = u + iv$. Тогда из уравнения (*) имеем $u = \ln r$, $v = \varphi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$). Следовательно,

$$w = \ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),$$

где $\arg z$ – фиксированное значение аргумента числа z , k – целое.

Однозначную непрерывную ветвь логарифма можно выделить в области D , если в этой области функция $\arg z$ допускает выделение однозначной непрерывной ветви. Как в случае \sqrt{z} в качестве области возьмем плоскость с разрезом $[-1; +\infty)$. В этой области функция $\varphi = \arg z$ допускает выделение однозначных непрерывных ветвей. Пусть $\varphi = \arg z$ – непрерывная ветвь в области D , такая, что $0 < \varphi < 2\pi$. Тогда

$$w = \ln z = \ln|z| + i \arg z,$$

где $0 < \arg z < 2\pi$.

Для выделения в области D регулярной ветви логарифма достаточно указать значение аргумента, заданного в какой-то внутренней точке области D или на ее границе, т.е. на верхнем или нижнем берегу разреза $(0; +\infty)$.

Пример 1.

Функция $w = \ln z$ конформно отображает сектор $0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi$ на полосу $0 < \operatorname{Im} w < \alpha$. Здесь $w = \ln z = \ln|z| + i \arg z$, $0 < \arg z < \alpha$.

Пример 2.

Пусть D – плоскость с разрезом по отрицательной части действительной оси. Найти образ области D при отображении

$$w = \ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

Решение.

Данная ветвь логарифмической функции в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси переводит верхний берег разреза в прямую $\operatorname{Im} w = \pi$, а нижний берег этого разреза в прямую $\operatorname{Im} w = -\pi$. Следовательно, образ области D при данном отображении – полоса $-\pi < \operatorname{Im} w < \pi$. □

Упражнения.

24.1 Найти образ E области D при отображении $w = e^z$:

- 1) $D: \pi < \operatorname{Im} z < 2\pi$; 2) $D: |\operatorname{Im} z| < \pi$; 3) $D: \pi < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z > 0$;
 4) $D: \left\{ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z > 0 \right\}$; 5) $D: \pi < \operatorname{Im} z < 2\pi, 0 < \operatorname{Re} z < 1$.

24.2 Найти образы следующих областей при отображении $w = \ln z$,

$$w(i) = \frac{\pi i}{2}:$$

- 1) $D: \operatorname{Re} z > 0$; 2) $D: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$; 3) $D: |z| < 1, z \notin [1; \infty)$;
 4) $D: z \notin (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

25. Функция Жуковского

Функция вида

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (25.1)$$

называется *функцией Жуковского*.

Эта функция аналитическая во всей комплексной плоскости за исключением точки $z = 0$. Функция Жуковского однолистная тогда и только тогда в области D , когда в этой области нет различных точек z_1 и z_2 , связанных равенством $z_1 z_2 = 1$.

Замечание 1.

Пусть \tilde{D} - область, состоящая из точек $\frac{1}{z}$, где $z \in D$. Тогда функция Жуковского однолистная в области D в том и только в том случае, когда области D и \tilde{D} не имеют общих точек. При отображении (25.1) образами областей D и \tilde{D} является одна и та же область, так как $w\left(\frac{1}{z}\right) = w(z)$.

Пример 1.

Функция Жуковского однолистка в следующих областях:

- 1) $|z| > 1$ - внешность единичного круга,
- 2) $|z| < 1$ - единичный круг,
- 3) $\text{Im } z > 0$ - верхняя полуплоскость,
- 4) $\text{Im } z < 0$ - нижняя полуплоскость.

Пример 2.

Докажем, что функция Жуковского однолистка в области $D: |z - ih| > \sqrt{1+h^2}$, где h - действительное число, $h > 0$. Точки пересечения

окружности $|z - ih| = \sqrt{1+h^2}$ с мнимой осью обозначим через ia и $-ib$, где $a = \sqrt{1+h^2} + h$, $b = \sqrt{1+h^2} - h$ (рис.23). Имеем $\frac{1}{ia} = -ib$.

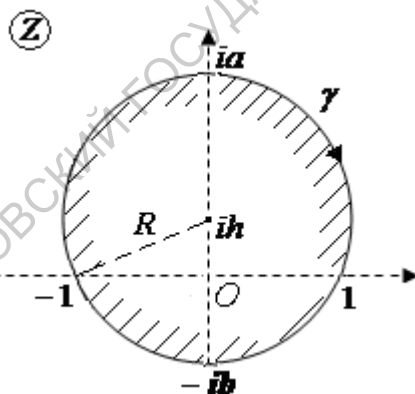


Рис.23

Рассмотрим отображение $w = \frac{1}{z}$, причем точки w будем изображать на той же плоскости z . При этом отображении точки $z = \pm 1$ остаются на месте, а точка $z = ia$ переходит в точку $z = -ib$, поэтому окружность переходит сама в себя. Кроме того, точка $z = \infty$ переходит в точку

$w = 0$, лежащую внутри этой окружности. Следовательно, внешность D данной окружности переходит во внутренность \tilde{D} этой окружности. Так как области D и \tilde{D} не имеют общих точек, то в силу замечания 1. функция Жуковского однолистка в D и области \tilde{D} . □

Образы окружностей и лучей.

Найдем образы окружностей $|z| = \rho$. Полагая в (25.1) $z = \rho e^{i\varphi}$, $w = u + iv$, получаем $u + iv = \frac{1}{2} \left(\rho e^{i\varphi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} \right)$, откуда

$$u = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi. \quad (25.2)$$

Рассмотрим окружность $|z| = \rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\rho \neq 1$. Из (25.2) следует, что при отображении функцией Жуковского образом окружности $z = \rho e^{i\varphi}$ является эллипс (25.2) с полуосями $a_\rho = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)$, $b_\rho = \frac{1}{2} \left| \rho - \frac{1}{\rho} \right|$ и с фокусами в точках $w = \pm 1$, так как $a_\rho^2 - b_\rho^2 = 1$. Исключая из уравнений (25.2) параметр φ при $\rho \neq 1$ уравнение этого эллипса можно записать в виде

$$\frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} = 1.$$

Отметим, что при замене ρ на $\frac{1}{\rho}$ ($\rho \neq 1$) эллипс остается тем же самым, но его ориентация меняется на противоположную. При $0 < \rho < 1$ эллипс изображен на рис.24.

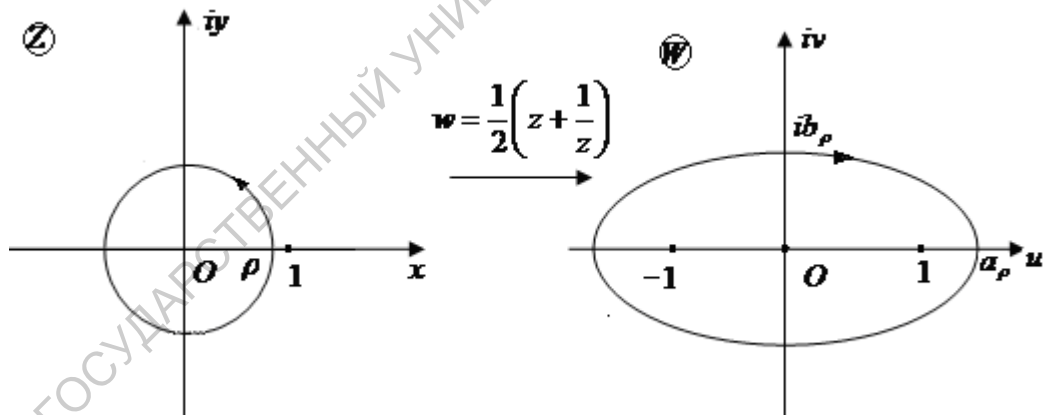


Рис. 24

При $\rho > 1$ эллипс изображен на рис.25.

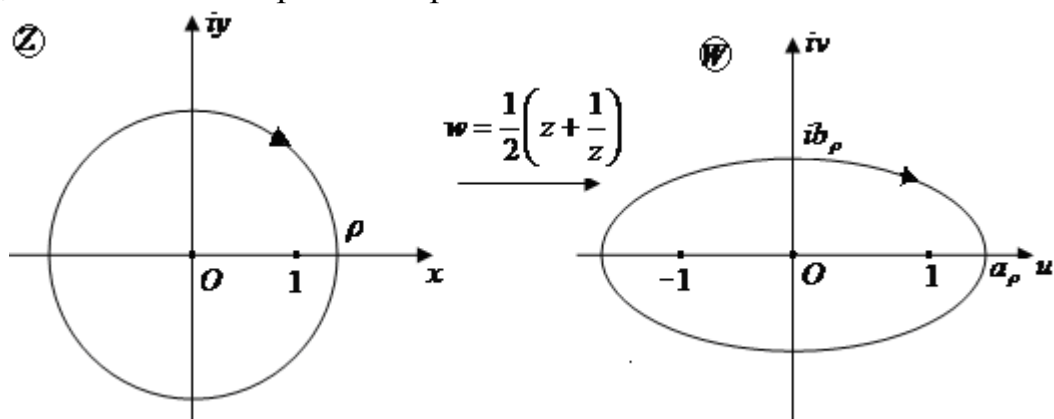


Рис. 25

При $\rho = 1$ эллипс вырождается в отрезок $[-1; 1]$, проходимый дважды, т. е. окружность $|z| = 1$ переходит в отрезок $[-1; 1]$ проходимый дважды.

Рассмотрим луч $z = r e^{i\alpha}$, $0 < r < \infty$ (α - фиксировано). При отображении функцией Жуковского образом этого луча является кривая (см. (25.2))

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \alpha, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \alpha. \quad (25.3)$$

Исключая из (25.3) параметр r , при $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ (k - целое), получаем

$$\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1. \quad (25.4)$$

Кривая (25.4) - гипербола с фокусами в точках ± 1 и асимптотами $v = \pm u \operatorname{tg} \alpha$.

Если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то кривая (25.3) является правой ветвью гиперболы (25.4), т. е. луч $z = r e^{i\alpha}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ переходит в правую ветвь гиперболы (ориентация показана на рис. 26).

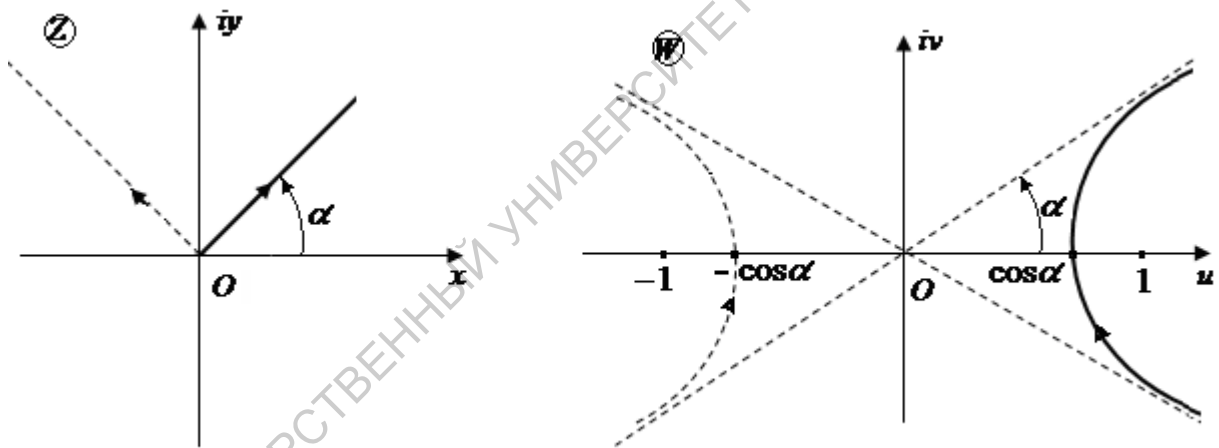


Рис. 26

При замене α на $\pi - \alpha$ получается левая ветвь той же гиперболы, поэтому луч $z = r e^{i\alpha}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ переходит в левую ветвь гиперболы (рис.26).

При замене в (25.3) α на $-\alpha$ получается та же ветвь гиперболы, но ориентация ее меняется на противоположную.

Рассмотрим лучи $z = r e^{i\alpha}$ при $\alpha = \frac{k\pi}{2}$. Из (25.3) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ имеем

$$u = 0, v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right), 0 < r < \infty$$

т. е. луч $\arg z = \frac{\pi}{2}$ переходит в мнимую ось $\operatorname{Re} w = 0$. Луч $\arg z = \frac{3\pi}{2}$ также переходит в мнимую ось. Луч $\arg z = 0$ переходит в луч $[-+\infty)$, проходимый

дважды. Аналогично, луч $\arg z = \pi$ переходит в луч $\leftarrow \infty; -1 \right]$, проходимый дважды.

Приведем примеры конформных отображений с помощью функции Жуковского, которые часто используются в практике конформных отображений.

Функция Жуковского $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ конформно отображает:

- 1) круг $|z| < 1$ на плоскость w с разрезом по отрезку $\left[1; 1 \right]$;
- 2) $|z| > 1$ на плоскость w с разрезом по отрезку $\left[-1; -1 \right]$;
- 3) верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на плоскость w с разрезами по лучам $\leftarrow \infty; -1 \right]$ и $\left[+\infty; \right]$;
- 4) нижнюю полуплоскость $\text{Im } z < 0$ на плоскость w с разрезами по лучам $\leftarrow \infty; -1 \right]$ и $\left[+\infty; \right]$;
- 5) область $\text{Im } z > 0, |z| > 1$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$;
- 6) полукруг $|z| < 1, \text{Im } z < 0$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$, полукруг $|z| < 1, \text{Im } z > 0$ на нижнюю полуплоскость $\text{Im } w < 0$;
- 7) сектор $\alpha < \arg z < \pi - \alpha$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ на внешность гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1, \quad w = u + iv \quad (\text{рис.27});$$

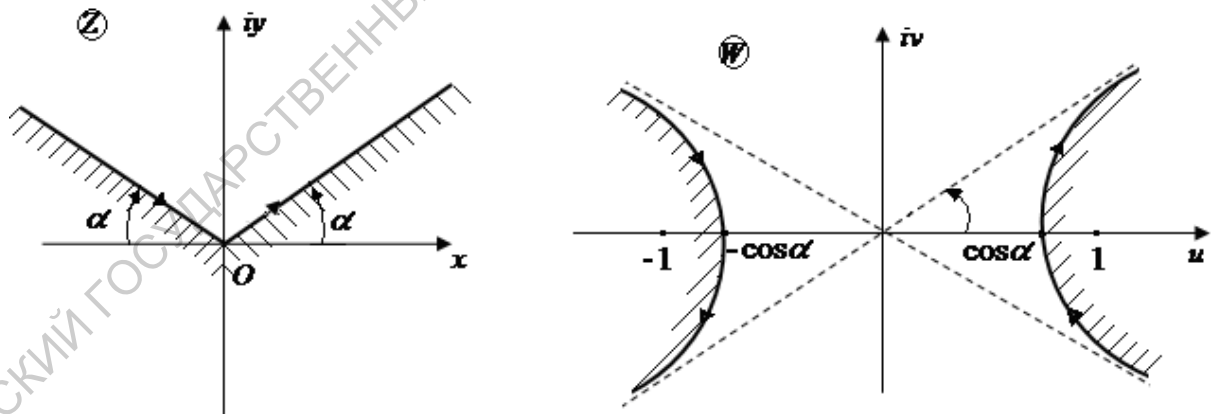


Рис.27

- 8) сектор $0 < \arg z < \alpha$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ на внутренность правой ветви

гиперболы $\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1$ с разрезом по лучу $\left[+\infty; \right]$ (рис.28);

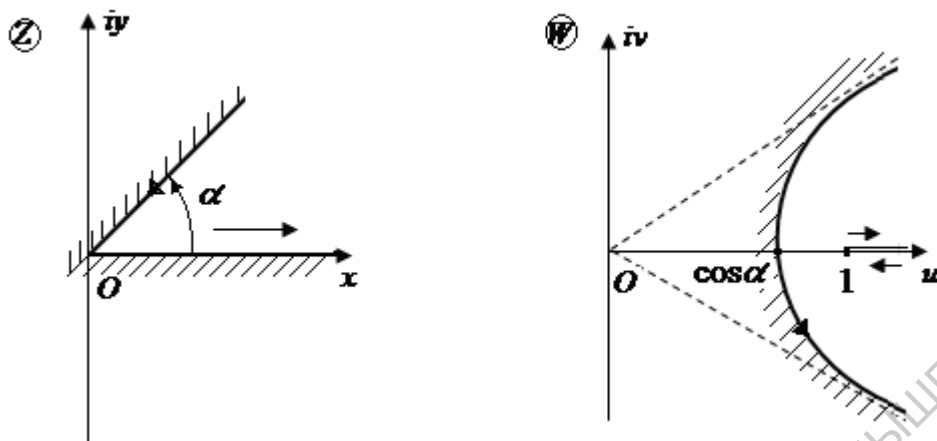


Рис.28

9) область $|z| > \rho > 1$ на внешность эллипса $\frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} = 1$,

$$a_\rho = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right), \quad b_\rho = \frac{1}{2} \left| \rho - \frac{1}{\rho} \right|;$$

Круг $|z| < \rho < 1$ - на внешность этого же эллипса.

10) область $-\alpha < \arg z < \alpha$, $|z| > 1$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ на область $\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} > 1$, $u \notin [\cos \alpha; 1]$ (рис.29).

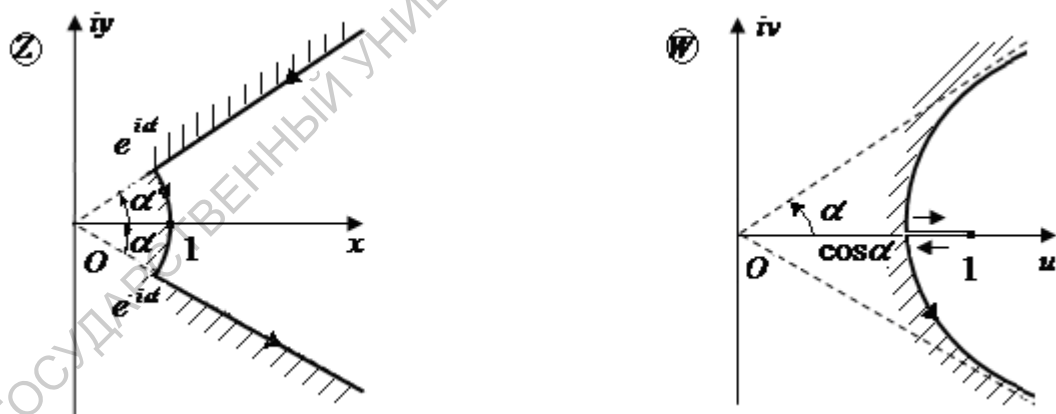


Рис.29

Заметим, что соотношение $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ можно записать в виде

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2. \quad \text{Поэтому функцию Жуковского можно рассматривать как}$$

суперпозицию функций

$$\xi = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2, \quad w = \frac{1+\xi}{1-\xi}.$$

Пример 3. Найти образ области $D: |z - ih| > \sqrt{1 + h^2}$ при отображении функцией Жуковского.

Решение.

Функция Жуковского однолистка в области D (см. пример 2). При отображении $\xi = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ окружность $\gamma: |z - ih| = \sqrt{1 + h^2}$ переходит в разрез по некоторому лучу $\tilde{\gamma}$, соединяющему точки $\xi_1 = 0, \xi_2 = \infty$. При отображении $w = \frac{1+\xi}{1-\xi}$ луч $\tilde{\gamma}$ переходит в дугу окружности γ' с концами в точках $w = \pm 1$. Точка ia при отображении функцией Жуковского переходит в точку $w = \frac{1}{2}\left(ia - \frac{i}{a}\right) = ih$, поэтому дуга γ' проходит через точку $w = ih$. Следовательно, функция Жуковского конформно отображает внешность окружности γ на внешность дуги окружности γ' с концами в точках $w = \pm 1$, проходящей через точку $w = ih$ (рис.30).

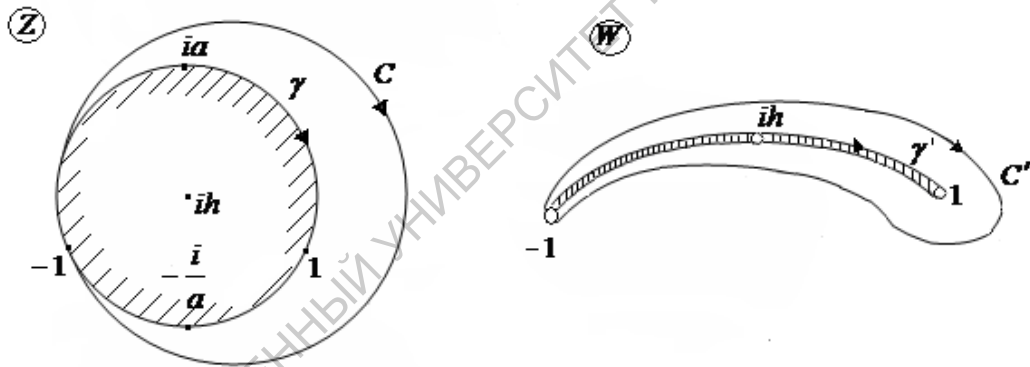


Рис. 30

Отметим, что при отображении функцией Жуковского окружность C , близкая к γ и касающаяся γ в точке $z = -1$, переходит в кривую C' , напоминающую профиль крыла самолета. Кривые вида C' (профили Жуковского) были использованы Н.Е.Жуковским для расчета подъемной силы крыла самолета.

26. Функция, обратная к функции Жуковского

Разрешая уравнение $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ относительно z , находим

$z = w + \sqrt{w^2 - 1}$, то есть функция

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad (26.1)$$

является обратной к функции Жуковского. Следовательно, отображения функцией (26.1) являются обратными к отображениям функцией Жуковского.

Пример 1.

Пусть D – плоскость с разрезом по отрезку $[1; 1^-]$. В этой области функция (26.1) распадается на две регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z)$, где $f_1(\infty) = \infty, f_2(\infty) = 0$. Функция $w = f_1(z)$ конформно отображает область D на внешность единичного круга, а $w = f_2(z)$ на круг $|w| < 1$.

Пример 2.

Пусть D – плоскость с разрезами по лучам $(-\infty; -1^-]$ и $[1; +\infty)$. В этой области функция (26.1) распадается на две регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z)$, где $f_1(0) = i, f_2(0) = -i$. Функция $w = f_1(z)$ конформно отображает область D на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$, а функция $w = f_2(z)$ – на нижнюю полуплоскость $\text{Im } w < 0$.

Пример 3.

В полуплоскости $\text{Im } z > 0$ функция (26.1) распадается на две регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z)$, где $f_1(0) = i, f_2(0) = -i$. Функция $w = f_1(z)$ конформно отображает полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на область $D_1: |w| > 1, \text{Im } w > 0$, а функция $w = f_2(z)$ – на область $D_2: |w| < 1, \text{Im } w < 0$.

Пример 4.

Пусть D – плоскость z с разрезом по дуге окружности, проходящем через точки $-1, ih, 1$ ($h > 0$). В этой области функция (26.1) распадается на регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z)$, где $f_1(\infty) = 0, f_2(\infty) = \infty$. Функция $w = f_1(z)$ конформно отображает D на круг $|w - ih| < \sqrt{1 + h^2}$, а функция $w = f_2(z)$ – на внешность круга $|z - ih| > \sqrt{1 + h^2}$. □

Упражнения.

26.1 Найти образы следующих линий при отображении функцией Жуковского:

- 1) $|z| = 1, \text{Im } z > 0$; 2) $|z| = 1, -\frac{3\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{4}$; 3) $|z| = 2$; 4) $|z| = \frac{1}{2}$; 5) $\arg z = \frac{\pi}{4}$;
 б) $\arg z = \frac{3\pi}{4}$.

26.2 Найти образы следующих областей при отображении функцией Жуковского:

- 1) $|z| > 2$; 2) $|z| < \frac{1}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}, z \notin [i; i^-]$;
 5) $|z| < 1, z \notin [1; 1^-]$; 6) $|z| > 1, z \notin [2; -1^-], z \notin [1; +\infty^-]$;
 7) $\text{Im } z > 0, z \notin \left\{ |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \pi \right\}$;

$$8) |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0, z \notin \left[-i; -\frac{i}{2}\right];$$

$$9) |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}; 10) |z| < 1, -\frac{3\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{4}.$$

26.3 Найти образы областей D при отображении функцией $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$:

$$1) D: z \notin [-\infty; -1], z \notin [1; +\infty], w(0) = i; 2) D: z \notin [1; 1], w(\infty) = 0;$$

$$3) D: \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} > 1 \right\}, a > 1, w(\infty) = 0;$$

$$4) D: \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1 - a^2} < 1 \right\}, 0 < a < 1, w(0) = i; 5) D: \operatorname{Im} z > 0, w(i) = i\sqrt{2+1}.$$

27. Тригонометрические и гиперболические функции

Функции $w = \cos z$ и $w = \sin z$ определяются в комплексной плоскости z следующим образом:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (27.1)$$

Так определенные функции: 1) для действительных $z = x$ совпадают с функциями $\cos x$ и $\sin x$; 2) всюду аналитичны; 3) подчиняются обычным формулам дифференцирования: $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$; 4) периодичны с действительным периодом 2π ; 5) $\cos z$ - четная функция, $\sin z$ - нечетная функция; 6) подчиняются обычным тригонометрическим соотношениям: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin 2z = 2\sin z \cos z$ и т.п.

Изучим отображение, осуществляемое функцией $w = \cos z$. Имеем

$$\xi = iz, \eta = e^\xi, w = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right). \quad (27.2)$$

Таким образом, отображение $w = \cos z$ можно рассматривать как суперпозицию уже изученных отображений (27.2).

Функция $w = \cos z$ в комплексной плоскости неограниченна, например, на лучах $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$ принимает сколь угодно большие значения. Рассмотрим примеры конформных отображений функцией $w = \cos z$.

Пример 1. Найти образ полосы $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ при отображении $w = \cos z$.

Решение.

Преобразование $\xi = iz$ переводит данную полосу в полосу $D_1: 0 < \operatorname{Im} z < \pi$. Показательная функция $\eta = e^\xi$ в области D_1 - однолиственная и отображает область D_1 на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \eta > 0$. Функция Жуковского $w = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right)$ отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \eta > 0$ на

комплексную плоскость w с разрезами по лучам $[\infty; -1]$ и $[+\infty]$. Таким образом, функция $w = \cos z$ отображает полосу $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ на плоскость w с разрезами по лучам $[\infty; -1]$ и $[+\infty]$.

Пример 2. Функция $w = \cos z$ конформно отображает полуполосу $-\pi < \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. В результате последовательного выполнения отображений (27.2) убеждаемся в справедливости этого отображения. \square

Отображение, реализуемое функцией $w = \sin z$, сводится к рассмотренному, в силу соотношения $\sin z = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$.

Отображение $w = \sin z$ можно представить как суперпозицию отображений

$$\xi = iz, \eta = e^\xi, \zeta = -i\eta, w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right). \quad (27.3)$$

Пример 3. Функция $w = \sin z$ конформно отображает полуполосу $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Решение.

В самом деле, выполняя сначала отображение $\xi = z - \frac{\pi}{2}$ (сдвиг), а затем отображение $w = \cos \xi$ (см. пример 2), получаем отображение функцией $w = \sin z$ данной полуполосы на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются формулами:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}.$$

Отображение $w = \operatorname{tg} z$ можно рассматривать как суперпозицию отображений

$$\xi = 2iz, \eta = e^\xi, w = -i \frac{\eta - 1}{\eta + 1}, \quad (27.4)$$

а отображение $w = \operatorname{ctg} z$ как суперпозицию отображений

$$\xi = 2iz, \eta = e^\xi, w = i \frac{\eta + 1}{\eta - 1}.$$

Пример 4. Функция $w = \operatorname{tg} z$ конформно отображает полосу $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$ на единичный круг $|w| < 1$. Выполняя последовательно отображения (27.4) получаем данное отображение. \square

Гиперболические функции в комплексной плоскости определяются равенствами

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Гиперболические функции просто выражаются через тригонометрические функции:

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \operatorname{sh} z = -i \sin iz, \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz.$$

Пример 5. Функция $w = \operatorname{ch} z$ конформно отображает полуполосу $\operatorname{Re} z > 0$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Решение.

Действительно, так как $\operatorname{ch} z = \cos iz$, то, выполняя вначале отображение $\xi = iz$ (поворот вокруг точки $z = 0$ на угол $\frac{\pi}{2}$), а затем отображение $w = \cos \xi$ (см. пример 2), получаем данное отображение. □

Упражнения.

27.1 Найти образы следующих областей при отображениях указываемыми функциями:

- 1) $D: \left\{ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4} \right\}$, $w = \operatorname{th} z$; 2) $D: \left\{ 0 < \operatorname{Re} z < \pi \right\}$, $w = \operatorname{tg} z$;
- 3) $D: \left\{ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4} \right\}$, $w = \operatorname{ctg} z$; 4) $D: \left\{ 0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > 0 \right\}$, $w = \operatorname{tg} \pi z$;
- 5) $D: \left\{ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2} \right\}$, $w = \operatorname{ch} z$; 6) $D: \left\{ \operatorname{Re} z > 0, -1 < \operatorname{Im} z < 0 \right\}$, $w = \operatorname{ch} \pi z$;
- 7) $D: \left\{ \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < 1, z \notin \left[\frac{i}{2}, \frac{1+i}{2} \right] \right\}$, $w = \operatorname{ch} \pi z$;
- 8) $D: \left\{ |\operatorname{Im} z| < \pi, \operatorname{Re} z > 0 \right\}$, $w = \operatorname{sh} z$; 9) $D: \left\{ 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \operatorname{Im} z > 0 \right\}$, $w = \sin z$;
- 10) $D: \left\{ 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0 \right\}$, $w = \cos z$; 11) $D: \left\{ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} \right\}$, $w = \cos z$;
- 12) $D: \left\{ \frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{3\pi}{4} \right\}$, $w = \cos z$.

28. Конформные отображения заданных областей

Когда решается задача о нахождении конформного отображения одной области на другую, то поступают примерно так же, как при отыскании неопределенного интеграла: рассмотренные выше отображения играют ту же роль, что и табличные интегралы при интегрировании.

Приведем примеры нахождения конформных отображений $w = w(z)$ заданных областей D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Пример 1. D - плоскость z с разрезами по лучам $[-\infty; a]$ и $[b; +\infty)$, где $-\infty < a < b < +\infty$.

Решение.

Способ 1.

Функция $\xi = \frac{z-b}{z-a}$ отображает область D на плоскость ξ с разрезом по лучу $[\frac{b}{a}; +\infty)$. Функция $w = \sqrt{\xi}$, $\sqrt{-1} = i$, отображает плоскость ξ с разрезом $[\frac{b}{a}; +\infty)$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$. Следовательно, функция

$$w = \sqrt{\frac{z-b}{z-a}}, \quad w\left(\frac{a+b}{2}\right) = i$$

отображает область D на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$.

Способ 2.

Линейная функция $\xi = \left(z - \frac{a+b}{2}\right) \frac{2}{b-a}$ отображает область D на плоскость с разрезами по лучам $(-\infty; -1]$ и $[\frac{b}{a}; +\infty)$. Функция $w = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1}$, где $w|_{\xi=0} = i$ осуществляет искомое отображение (см. п. 26).

Пример 2. D - полуплоскость $\text{Im } z > 0$ с разрезом по дуге окружности $|z|=1$, $0 \leq \arg z \leq \alpha$, $0 < \alpha < \pi$.

Решение.

Функция Жуковского $\xi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ отображает область D на плоскость ξ с разрезами по лучам $(-\infty; -1]$ и $[\cos \alpha; +\infty)$. Далее см. пример 1.

Пример 3. D - полоса $0 < \text{Im } z < \pi$ с разрезом по отрезку $[id; id)$, где $0 < d < \pi$.

Решение.

Функция $\xi = e^z$ отображает область D на верхнюю полуплоскость $\text{Im } \xi > 0$ с разрезом по дуге окружности $|\xi|=1$, соединяющей точки 1 и e^{id} . Далее см. пример 2.

Пример 4. D - полоса $-\pi < \text{Im } z < \pi$ с разрезом по лучу $[\frac{a}{2}; +\infty)$, где a - действительное число.

Решение.

Функция $\xi = e^z$ отображает область D на плоскость с разрезами по лучам $(-\infty; 0]$ и $[\frac{a}{2}; +\infty)$. См. далее пример 1.

Пример 5. D - полуполоса $0 < \text{Im } z < \pi, \text{Re } z > 0$ с разрезом по отрезку $\left[\frac{\pi i}{2}; \alpha + \frac{\pi i}{2}\right]$, где $\alpha > 0$.

Решение.

Функция $\xi = \text{ch } z$ конформно отображает область D на полуплоскость $\text{Im } \xi > 0$ с разрезом по отрезку $[i, i \text{sh } \alpha)$. См. далее пример 3 из п. 21.

Пример 6. D - область $\text{Re } z > 0, |z-1| > 1$ с разрезом по отрезку $[3; 3)$.

Решение.

Функция $\xi = \frac{1}{z}$ конформно отображает область D на D_1 - полосу $0 < \operatorname{Re} \xi < \frac{1}{2}$ с разрезом по отрезку $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$. Линейная функция $\eta = \pi i(1 - 2\xi)$ отображает область D_1 на полосу $0 < \operatorname{Im} \eta < \pi$ с разрезом по отрезку $\left[0; \frac{\pi i}{3}\right]$.

См. далее пример 3.

Пример 7. D - полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по дуге $|z| = 1, \alpha \leq \arg z \leq \pi$, где $0 < \alpha < \pi$.

Решение.

Функция Жуковского $\xi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ отображает область D на плоскость ξ с разрезом по лучам $\left[\cos \alpha; +\infty\right)$ и $\left(-\infty; -\cos \alpha\right)$. См. далее пример 1. \square

Примеры конформных отображений заданных областей на единичный круг $|w| < 1$.

Пример 1. D - плоскость с разрезом по отрезку $\left[a; b\right)$, где $-\infty < a < b < +\infty$.

Решение.

Линейная функция $\xi = \left(z - \frac{a+b}{2}\right) \frac{2}{b-a}$ (сдвиг и растяжение) отображает область D на внешность отрезка $\left[1; 1\right)$. Функция $w = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1}$, где $w(\infty) = 0$ отображает внешность отрезка $\left[1; 1\right)$ на единичный круг $|w| < 1$.

Пример 2. D - плоскость с разрезом по дуге окружности, соединяющей точки $-1, i, 1$.

Решение.

Способ 1.

Функция $\xi = i \frac{z+1}{z-1}$ отображает область D на область D_1 - плоскость ξ с разрезом по положительной части действительной оси. Функция $\eta = \sqrt{\xi}$, $\eta(-1) = i$ конформно отображает область D_1 на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \eta > 0$. Далее, функция $w = \frac{\eta - i}{\eta + i}$ отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \eta > 0$ на единичный круг $|w| < 1$.

Способ 2.

Функция $\xi = z + \sqrt{z^2 - 1}$, $\xi(\infty) = 0$ отображает область D на круг $|\xi - i| < \sqrt{2}$.

Линейная функция $w = \frac{\xi - i}{\sqrt{2}}$ осуществляет искомое отображение.

Пример 3. D - круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $\left[1; a\right)$, где $-1 < a < 0$.

Решение.

Функция Жуковского $\xi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ отображает область D на внешность отрезка $\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right); 1\right]$. Далее см. пример 1.

Пример 4. D - область $|z| > 1$ с разрезами по отрезкам $[-1; -1]$ и $[b; b]$, где $-\infty < a < -1, 1 < b < +\infty$.

Решение.

Функция Жуковского отображает область D на внешность отрезка $[a'; b']$, где $a' = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right), b' = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$. Далее, см. пример 1.

Пример 5. D - круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[1; 1]$.

Решение.

Функция Жуковского $\xi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ отображает область D на область D_1 - плоскость ξ с разрезом по лучу $[1; +\infty)$. Функция $\eta = \sqrt{\xi + 1}, \eta|_{\xi=-5} = 2i$ отображает область D_1 на полуплоскость $\text{Im } \eta > 0$. Наконец, функция $w = \frac{\eta - i}{\eta + i}$ отображает полуплоскость $\text{Im } \eta > 0$ на круг $|w| < 1$. \square

Примеры конформных отображений неконцентрических колец на концентрические

Пример 1. Найти конформное отображение области $D - \text{Re } z > 0, |z - l| > R$, где $l > R > 0$ на концентрическое кольцо (рис.31).

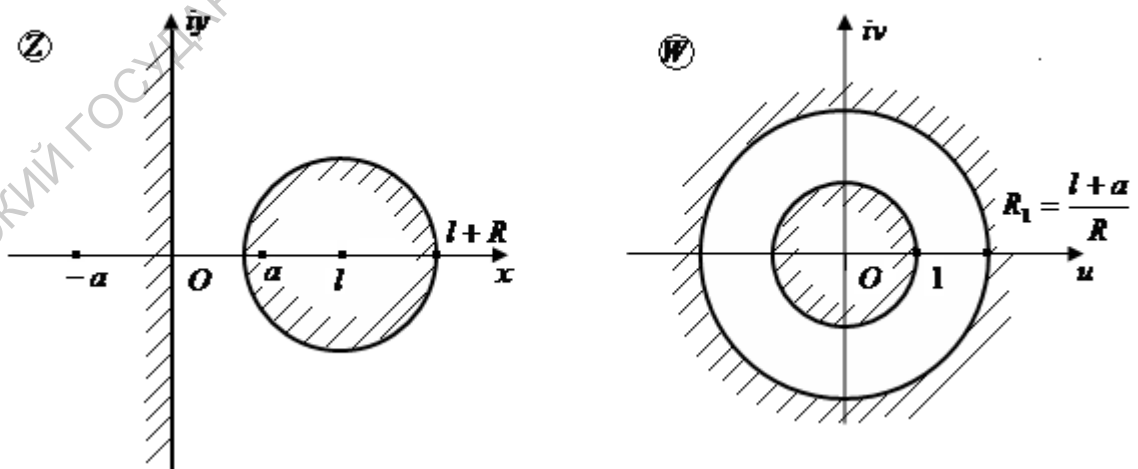


Рис.31

Решение.

Область D можно назвать *неконцентрическим кольцом* (прямая - окружность бесконечного радиуса). Для решения данной задачи находим две

точки, симметричные относительно прямой $L: \operatorname{Re} z = 0$ и относительно окружности $\gamma: |z - l| = R$. Точки $z_1 = -a$ и $z_2 = a$, где $a = \sqrt{l^2 - R^2}$, симметричны относительно прямой L и окружности γ (см. п.б) Рассмотрим отображение $w = \frac{z+a}{z-a}$. Так как точки $z_1 = -a$ и $z_2 = a$ симметричны относительно прямой L , то уравнение этой прямой можно записать в виде $\left| \frac{z+a}{z-a} \right| = 1$, поэтому образ прямой L при отображении $w = \frac{z+a}{z-a}$ есть окружность $|w| = 1$. Так как точки $z_1 = -a$ и $z_2 = a$ симметричны относительно окружности γ , то уравнение окружности γ можно записать в виде $\left| \frac{z+a}{z-a} \right| = \frac{a+l}{R}$ (см. (6.6)), поэтому образ окружности γ при данном дробно-линейном отображении есть окружность $|w| = \frac{a+l}{R}$. Имеем $\frac{a+l}{R} > 1$, т.к. $l > R, a > 0$. В силу соответствия границ функция $w = \frac{z+a}{z-a}$ конформно отображает область D на концентрическое кольцо $1 < |w| < \frac{a+l}{R}$, где $a = \sqrt{l^2 - R^2}$.

Пример 2. Пусть D - неконцентрическое кольцо $|z+1| > 9, |z+6| < 16$. Найдем конформное отображение области на концентрическое кольцо.

Решение.

Находим точки a и b , симметричные относительно окружности $|z+1| = 9$ и относительно окружности $|z+6| = 16$. Имеем $a = 2, b = 26$ (см. пример 3 из п.б). Как в примере 1 доказываем, что функция $w = \frac{z-2}{z-26}$ конформно отображает область D на концентрическое кольцо $\frac{1}{3} < |w| < \frac{1}{2}$. \square

Упражнения.

28.1 Найти конформное отображение следующих областей на кольцо $1 < |w| < R_1$:

- 1) $|z-3| > 9, |z-8| < 16$; 2) $|z| > 1, |z-3| > 1$; 3) $\operatorname{Re} z > 0, |z-2| > 1$;
- 4) $\operatorname{Re} z > 0, |z-5| > 4$.

28.2 Найти функции, осуществляющие конформные отображения областей, изображенных на рис 32 - 52 на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

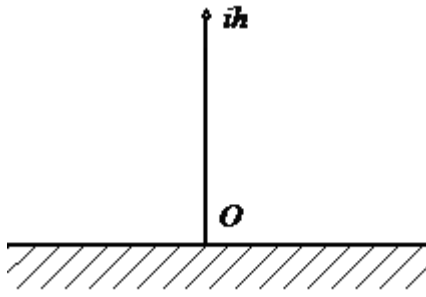


Рис.32

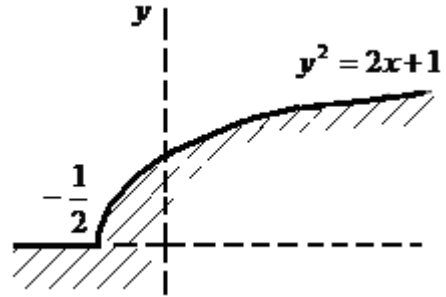


Рис.33

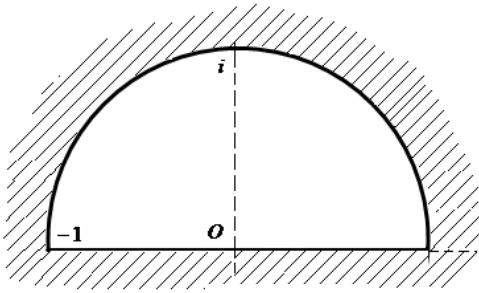


Рис.34

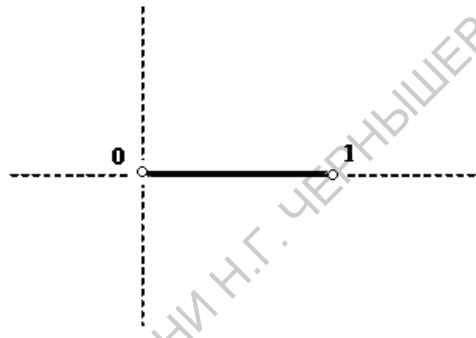


Рис.35

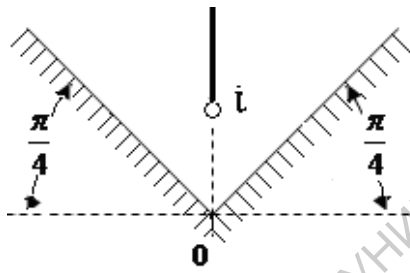


Рис.36

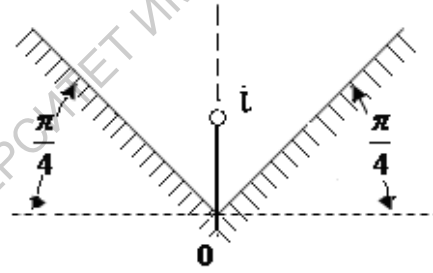


Рис.37

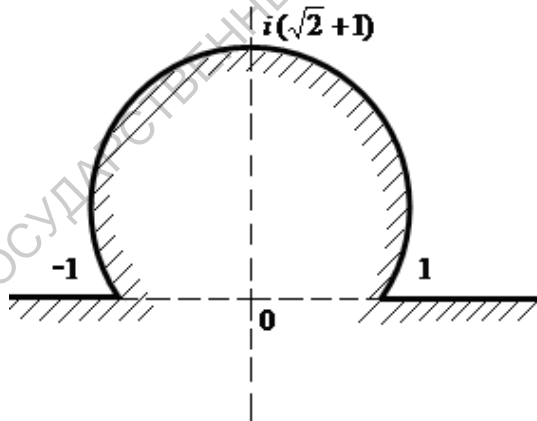


Рис. 38

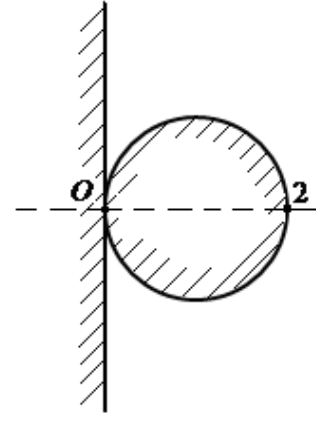


Рис.39

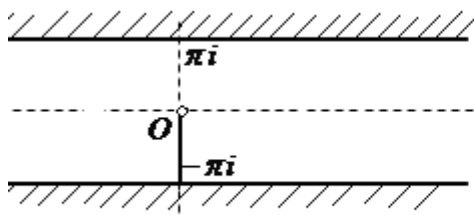


Рис. 40

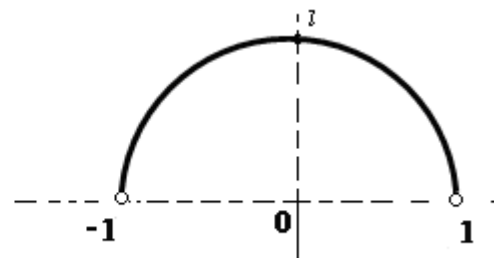


Рис.41

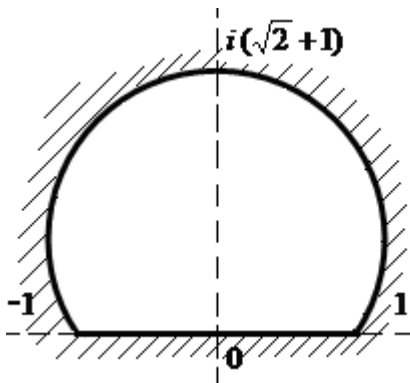


Рис. 42

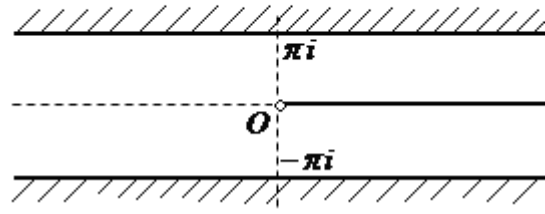


Рис. 43

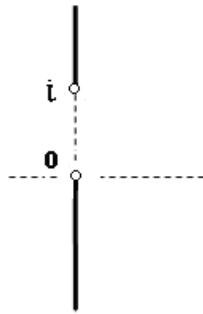


Рис. 44

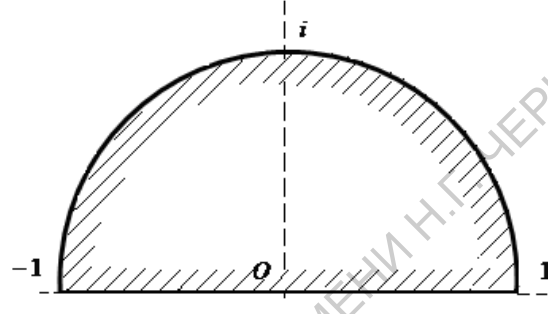


Рис. 45

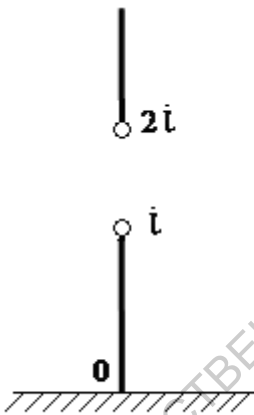


Рис. 46

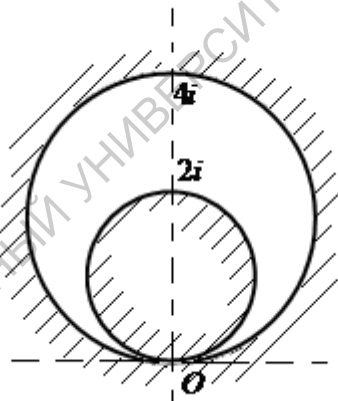


Рис. 47

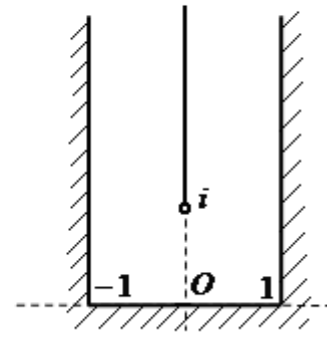


Рис. 48

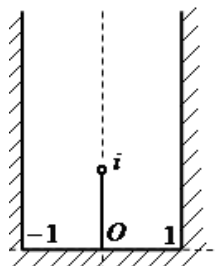


Рис. 49

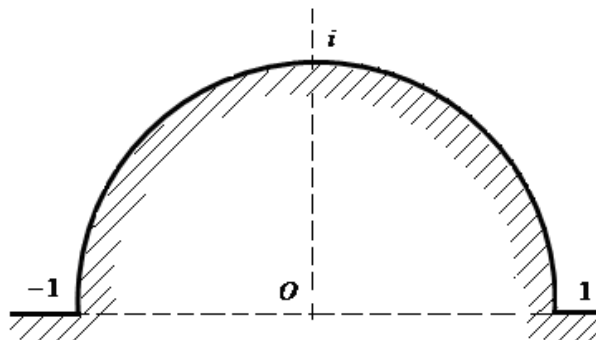


Рис. 50

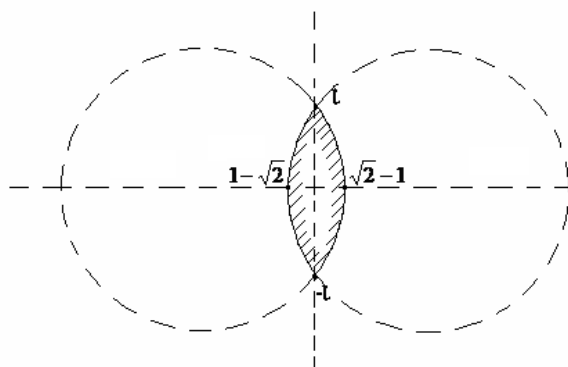


Рис. 51

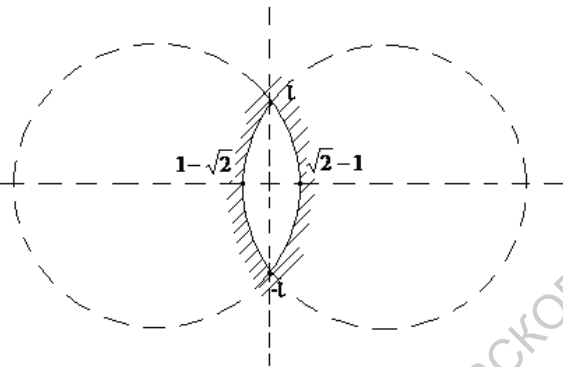


Рис. 52

28.3 Найти конформное отображение области D на круг $|w| < 1$

1) D - плоскость с разрезом по дуге окружности, соединяющей точки

$-1, i\sqrt{3}, 1$; 2) $D: \Re(1+i)z < 2$; 3) $D: \left\{ |z| < 1, \left| z - \frac{i}{2} \right| > \frac{1}{2} \right\}$;

4) $D: \left\{ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}, z \notin [i, \sqrt{2}i] \right\}$; 5) $D: |z-1| > 1, |z+1| > 1$;

6) $D: \Re z < 0, |z+1| > 1$; 7) $D: y^2 > 4(1-x), z = x+iy$;

8) $D: \left\{ \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3}, z \notin [i, 2i] \right\}$; 9) $D: a < \Re z < b, \Im z > 0, -\infty < a < b < +\infty$;

10) $D: |z| > 1, z \notin [2, \infty)$; 11) $D: |z| < 2, z \notin [2, \infty)$; 12) $D: |z| < 2, z \notin [2, -1]$.

28.4 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую угол $|\arg z| < \frac{\pi}{4}$ на круг $|w| < 1$ и удовлетворяющую условиям $w(1) = 0, \arg w'(1) = \pi$.

28.5 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую область

$$y^2 > 4(x+1) \quad (x = \Re z, y = \Im z)$$

на круг $|w| < 1$ и удовлетворяющую условиям $w(-4) = 0, \arg w'(-4) = 0$.

28.6 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую разрезанную по отрезку $[i, 2i]$ полуплоскость $\Im z > 0$, на круг $|w| < 1$ и удовлетворяющую

условиям $w\left(\frac{5i}{4}\right) = 0, w(i) = -i$.

28.7 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую полукруг $|z| < 1, \Im z > 0$ на круг $|w| < 1$ и удовлетворяющую условиям

$w\left(\frac{i}{2}\right) = 0, \arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = 0$.

Приложение
Образцы контрольных и самостоятельных работ.

Тема 1. Конформные отображения элементарными функциями.
Дробно-линейная функция.

1. Найти дробно-линейную функцию $w(z)$, удовлетворяющую условиям: $w(0) = 1, w(\infty) = 1 + i, w(-i) = 0$.

2. Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую область D на область D_1 и удовлетворяющую указанным условиям:

$$D: |z| < 1, D_1: |w| < 1, w(-i) = i, w\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

3. Найти образ полуплоскости $\operatorname{Re} z < 1$ при следующих отображениях:

1) $w = \frac{z}{1-z}$, 2) $w = \frac{z+1}{z-2}$.

Тема 2. Конформные отображения элементарными функциями.
Степенная функция.

1. Найти образы следующих линий при отображении $w = z^2$:

1) $\operatorname{Im} z = 2$, 2) $\operatorname{Re} z = 4$.

2. Найти образы следующих областей при отображении $w = z^2$:

1) $\operatorname{Re} z > 1$, 2) $|z| > 1, \operatorname{Re} z > 0$

3. Найти образ области D при данном отображении:

$$D: z \notin [1; \infty), w = \sqrt{\frac{z}{1-z}}, w(-1) = \frac{i\sqrt{2}}{2}.$$

Тема 3. Конформные отображения элементарными функциями.
Показательная функция.

1. Найти образы следующих областей при данных отображениях

1) $D: \left\{ | \operatorname{Im} z | < \frac{\pi}{4} \right\}, w = e^z$; 2) $D: \left\{ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}, \operatorname{Re} z > 0 \right\}, w = e^{2z}$;

3) $D: \left\{ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0 \right\}, w = e^{-iz}$.

2. Найти образы следующих областей при отображении $w = \ln z, w(i) = \frac{\pi i}{2}$

1) $D: \operatorname{Re} z > 0$; 2) $D: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$; 3) $D: |z| < 1, z \notin [1; \infty)$;

4) $D: z \notin [-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Тема 4. Конформные отображения элементарными функциями.
Функция Жуковского.

1. Найти образы следующих областей при отображении $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$:

- 1) $D: \left\{ |z| < \frac{1}{2} \right\}$; 2) $D: |z| > 2$; 3) $D: \left\{ |z| < 1, z \notin \left[-1; -\frac{1}{2} \right] \right\}$;
 4) $D: \left\{ \frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}, |z| > 1 \right\}$.

2. Найти образы следующих областей при отображении $w(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$:

- 1) $z \in [1; 1]$, $w(\infty) = 0$; 2) $z \in [\infty; 1]$, $z \in [+\infty;]$, $w(0) = i$.

Тема 5. Конформные отображения элементарными функциями. Тригонометрические и гиперболические функции.

1. Найти образы областей D при данных отображениях.

- 1) $D: 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0$, $w = \cos z$;
 2) $D: \left\{ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4} \right\}$, $w = \operatorname{tg} z$;
 3) $D: \left\{ |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4} \right\}$, $w = \operatorname{th} z$;
 4) $D: 0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $w = \operatorname{ch} z$.

Тема 6. Конформные отображения областей.

Работа №1

1. Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую угол $|\arg z| < \frac{\pi}{4}$ на круг $|w| < 1$ и удовлетворяющую условиям $w(1) = 0, \arg w'(1) = \frac{\pi}{2}$.
 2. Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую область $D: \operatorname{Im} z > 0, z \notin [i;] \notin l$, где $l: z = it, 3 \leq t < +\infty$, на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.
 3. Найти конформное отображение области $D: \left\{ |\arg z| < \frac{\pi}{4}, z \notin [+\infty;] \right\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Работа №2

1. Найти конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$:
- 1) $D: \left\{ \operatorname{Im} z > 0, z \notin \gamma, \gamma: \left\{ |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\} \right\}$;
 - 2) $D: z \notin [1;]$;
 - 3) $D: |z - i\sqrt{3}| < 2, \operatorname{Im} z > 0$.
2. Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую полукруг $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$ и удовлетворяющую условиям $w\left(\frac{i}{2}\right) = 0, w(1) = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волковыский Л. П., Лунц Г., Арамович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
2. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций.- М.: Наука, 1968.
3. Евграфов М. А. Аналитические функции.- М.: Наука, 1991.
4. Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. М.: ИЛ, 1963.
5. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. – М.: ИЛ, 1963.
6. Курант Р. Геометрическая теория функций комплексной переменной. Комкнига, 2008.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – С-Пб.: Лань, 2002.
8. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1.– С-Пб.: Лань, 2009.
9. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного.-М.: С-Пб.: Лань, 2009.
10. Сборник задач по теории аналитических функций/ Под редакцией Евграфова М. А.-М.: Наука, 1972.
11. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
12. Сидоров Ю. В. , Федорюк М. В. , Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1989.
13. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.3, ч.2– БХВ-Петербург, 2010.
14. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного. Т.1. М.: ИЛ, 1962.
15. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. - М.: Наука, 1985.- Ч. 1.