В.И.Шевцов, Ю.В.Шевцова

# ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО КОМПЛЕКСНОМУ АНАЛИЗУ

## ЧАСТЬ 2

Шевцов Владислав Иванович, Шевцова Юлия Владиславовна

# ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО КОМПЛЕКСНОМУ АНАЛИЗУ

## Часть 2
## Интегрирование функций комплексного переменного. Ряды Тейлора и Лорана. Вычеты и их приложения.

Учебно-методическое пособие
для студентов механико-математического факультета

## ОГЛАВЛЕНИЕ

## 1. Интегрирование функций комплексного переменного

Пусть $\gamma$ - кусочно-гладкая кривая и функция $f(z)$ непрерывна на $\gamma$. *Интегралом* от функции $f(z)$ *вдоль кривой* $\gamma$ называется

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{a}^{b} f\left[z(t)\right]z'(t)\,dt\,, \tag{1.1}$$

где $z = z(t),\ a \le t \le b$ - параметрическое уравнение кривой $\gamma$. В правой части (1.1) интеграл от комплексной функции $f\left[z(t)\right]z'(t) = g_1(t) + i\,g_2(t)$ действительного аргумента $t$ понимается как $\int_a^b g_1(t)\,dt + i\int_a^b g_2(t)\,dt$.

Пример 1. Пусть $\gamma$ – окружность, $z(t) = a + r\,e^{it}$, $t \in \left[0, 2\pi\right]$ и $f(z) = (z-a)^n$, где $n = 0, \pm 1, \ldots$ - произвольное целое число. Имеем $z'(t) = i\,re^{it}$, $f\left[z(t)\right] = r^n e^{int}$ и по формуле (1.1)

$$\int_{\gamma} (z-a)^n\,dz = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)}dt\,.$$

Если $n \ne -1$, то

$$\int_{\gamma} (z-a)^n\,dz = r^{n+1} i\,\frac{e^{i2\pi(n+1)} - 1}{n+1} = 0\,,$$

а при $n = -1$

$$\int_{\gamma} (z-a)^{-1}\,dz = 2\pi\,i\,.$$

Перечислим **основные свойства** интеграла от комплексных функций:

1. (линейность интеграла) $\int_{\gamma}\left[af(z) + bg(z)\right]dz = a\int_{\gamma} f(z)\,dz + b\int_{\gamma} g(z)\,dz$,

где $a$ и $b$ - любые комплексные числа.

2. При изменении ориентации кривой интеграл меняет знак: $\int_{\gamma} f(z)\,dz = -\int_{\gamma^{-1}} f(z)\,dz$.

3. $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$.

4. Пусть функция $f(z)$ непрерывна на кривой $\gamma$. Тогда имеет место оценка

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le \int_{\gamma} \left|f(z)\right|\left|dz\right| \tag{1.2}$$

где $\left|dz\right| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds$ – элемент длины дуги $\gamma$.

Из неравенства (1.2) вытекает оценка

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le M\, l(\gamma)\,,$$

где $M = \max\limits_{z\in\gamma}\left|f(z)\right|$, $l(\gamma)$ - длина кривой.

Замечание. Если положить $f = u + iv$ и $dz = z'(t)dt = dx + i\,dy$, то интеграл (1.1) можно переписать в виде суммы двух криволинейных интегралов 2-го рода:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma} udx - vdy + i\int_{\gamma} vdx + udy\,.\blacksquare$$

**Упражнения.**

**1.1** Вычислить интегралы по заданным кривым

1) $\int\limits_{\gamma}\frac{z}{\bar z}dz$, $\gamma = \left\{|z| = 1, 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

2) $\int\limits_{\gamma} z\sin z\,dz$, где $\gamma$ - прямолинейный отрезок, соединяющий точки 0 и $i$.

3) $\int\limits_{\gamma}(z-z_0)^n\,dz$, где $n$ – целое число, $\gamma = \left\{|z-z_0| = R, \operatorname{Im}(z-z_0) > 0\right\}$ с обходом против часовой стрелки.

4) $\int\limits_{\gamma}\bar z|z|\,dz$, где $\gamma$ - верхняя полуокружность $|z| = 1$ с обходом против часовой стрелки.

5) $\int\limits_{\gamma}|z|\,dz$, когда кривая $\gamma$ является:

a) прямолинейным отрезком, идущим из точки $z = i$ в точку $z = -i$;
b) полуокружностью $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \ge 0$, идущей из точки $z = -i$ в точку $z = i$.

6) $\int\limits_{|z|=1}|z-1|\,|dz|$.

## 2. Интегральная теорема Коши.

1. Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в конечной односвязной области $D$. Если $C$ - замкнутая кусочно-гладкая кривая, лежащая в области $D$, то

$$\int_{C} f(z)\,dz = 0\,. \tag{2.1}$$

2. Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в ограниченной конечносвязной области $D$, граница которой $\partial D$ состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых (обходимых в таком направлении, чтобы область оставалась слева). Если функция $f(z)$ непрерывна вплоть до границы области $D$, то

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0\,. \tag{2.2}$$

## Интегральная формула Коши

Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в ограниченной области $D$ и непрерывна вплоть до ее границы $\partial D$, состоящей из конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \notin \overline{D} \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z), & z \in D \\ 0, & z \notin \overline{D} \end{cases}, \quad n \in N. \tag{2.4}$$

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{|z|=4}\frac{z^2}{z-2i}dz$, где интегрирование по окружности $|z| = 4$ ведется против часовой стрелки.

Решение.

Применяя формулу (2.3), где $f(z) = z^2$, получим $I = 2\pi i\, f(2i) = 2\pi i\,(2i)^2 = -8\pi i.$

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{|z-2|=3}\frac{e^z}{z^3(z-1)}dz$, где интегрирование по окружности ведется против часовой стрелки.

Решение.

В силу того, что внутри контура интегрирования знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точках $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$, рассмотрим многосвязную область $D$, ограниченную окружностью $\Gamma = \{|z-2| = 3\}$ и внутренними контурами $\gamma_1 = \{|z| = \rho\}$ и $\gamma_2 = \{|z-1| = \rho\}$, $\left(0 < \rho < \frac{1}{2}\right)$. Тогда в области $D$ функция $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}$ аналитическая и непрерывная вплоть до границы $\partial D$. По формуле (2.4) можем записать

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz - \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0,$$

где интегрирование по окружностям ведется против часовой стрелки. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{e^z}{z^3(z-1)}dz = \int\limits_{\gamma_1}\frac{e^z}{z^3(z-1)}dz + \int\limits_{\gamma_2}\frac{e^z}{z^3(z-1)}dz = J_1 + J_2.$$

Применяя соответственно формулы (2.4) и (2.3), находим

$$J_1 = \int\limits_{\gamma_1}\frac{e^z(z-1)^{-1}}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)''\Bigg|_{z=0} = \pi i\frac{e^z(z^2-4z+5)}{(z-1)^3}\Bigg|_{z=0} = -5\pi i$$

и

$$J_2 = \int\limits_{\gamma_2} \frac{e^z z^{-3}}{z-1} dz = 2\pi i \frac{e^z}{z^3}\Bigg|_{z=1} = 2\pi i e .$$

Таким образом $J = \pi i (2e - 5)$ ▪

**Упражнения.**

**2.1** С помощью интегральной формулы Коши вычислить интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки)

1) $\int\limits_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i} dz$. 2) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+1} dz$. 3) $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz$. 4) $\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2} dz$.

5) $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^2} dz$. 6) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^2} dz$.

7) $\int\limits_{\partial D} \frac{e^z}{z(1-z)^2} dz \quad \left(D: а)|z| < \frac{1}{2},\ б)|z| < \frac{3}{2}, в)|z-1| < \frac{1}{2}\right)$. 8) $\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{2z-i} dz$.

9) $\int\limits_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)} dz \quad \left(|a| < r < |b|,\ n = 1,2,\ldots\right)$. 10) $\int\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+2z} dz$.

## 3. Ряд Тейлора

Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z - z_0| < R$, однозначно представима в этом круге своим *рядом Тейлора*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n , \qquad (3.1)$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,\ \ 0 < r < R,\ n = 0,1,\ldots \qquad (3.2)$$

Если $z_0 = 0$, то ряд Тейлора называется рядом Маклорена.

Непосредственным вычислением производных от элементарных функций $e^z$, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ в точке $z_0 = 0$ получаются следующие сходящиеся во всей плоскости разложения

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (3.3)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad (3.4)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \qquad (3.5)$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad (3.6)$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \qquad (3.7)$$

Отметим разложения:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \ |z| < 1, \qquad (3.8)$$

$$\operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \ |z| < 1, \qquad (3.9)$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \ |z| < 1. \qquad (3.10)$$

Заметим далее, что для нахождения коэффициентов ряда (3.1) формулы (3.2) обычно не используются. Часто коэффициенты ряда Тейлора находят, используя известные разложения (в частности, формулы (3.3)-(3.10)) и применяя различные искусственные приемы.

Пример 1. Ряд

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \ |z| < 1$$

получается дифференцированием ряда (3.10).

Пример 2. Для нахождения ряда Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ рациональной функции

$$f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(z^2+4)}$$

представим ее в виде

$$f(z) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{z^2+4}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{4(1+z^2/4)}\right),$$

Откуда в силу формулы (3.10) получим ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5}\left(1 + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right) z^{2n},$$

сходящийся в круге $|z| < 1$.▪

Приведем некоторые **приемы разложения** в степенной ряд.

1. Арифметические операции над степенными рядами

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$, аналитические в окрестности точки $z_0 = a$, представляются рядами

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{3.11}$$

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n, \tag{3.12}$$

где ряды (3.11) и (3.12) сходятся в круге $|z-a|<R$. Тогда имеют место разложения

$$Bf(z)=\sum_{n=0}^{\infty} Bc_n (z-a)^n,\ B=const, \tag{3.13}$$

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} (c_n \pm d_n)(z-a)^n, \tag{3.14}$$

$$f(z)g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k}\right)(z-a)^n. \tag{3.15}$$

Ряды (3.13)-(3.15) сходятся в круге $|z-a|<R$.

Пример 3. Чтобы разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$ функцию $e^z \cos z$ можно перемножить ряды (3.3) и (3.5). Однако, для эффективного вычисления коэффициентов разложения удобнее использовать формулу

$$e^z \cos z = e^z\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{(1+i)z}+e^{(1-i)z}\right).$$

Так как $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, то в силу (3.3) получаем разложение

$$e^z \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n/2}e^{i\pi n/4}+2^{n/2}e^{-i\pi n/4}}{2(n!)}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n/2}}{n!}\cos\frac{\pi n}{4}z^n,$$

сходящееся во всей плоскости. ▪

2. Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим задачу об отыскании коэффициентов ряда Тейлора в окрестности $z_0=a$ функции $f(z)$, равной отношению двух аналитических функций $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$, ряды Тейлора которых известны ($h(a)\neq 0$). Если $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n$, $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$, то приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях разности $z-a$ в равенстве $f(z)h(z)=g(z)$, получаем уравнения вида $c_0 b_n + c_1 b_{n-1}+\ldots+c_n b_0 = d_n$, из которых можно последовательно найти $c_0, c_1, c_2$ и т.д.

Пример 4. С помощью метода неопределенных коэффициентов найти первые три отличные от нуля члена разложения функции $f(z)=\operatorname{tg} z$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$.

Решение.

Вычисляя, последовательно находим
$c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{3}, c_4 = 0, c_5 = \frac{2}{15}$.

Таким образом, имеем $f(z) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15} z^5 + \dots$ ▪

**Упражнения.**

**3.1** С помощью метода неопределенных коэффициентов найти первые три отличные от нуля члена разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$:

1) $f(z) = \frac{z}{\cos^2 z}$, 2) $f(z) = \frac{z+1}{\operatorname{ch} z}$, 3) $f(z) = \frac{z^2+1}{\operatorname{ch}^2 z}$, 4) $f(z) = \frac{2z+1}{\ln(1+z)+2}$ $(\ln 1 = 0)$,

5) $f(z) = \frac{z}{e^z + 2}$.

3. Умножение рациональной функции на подходящий множитель.

В некоторых случаях рациональную функцию можно упростить при помощи умножения числителя и знаменателя на подходящий множитель.

Пример 5. Разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z) = \frac{z}{1 - z + z^2}$.

Решение.

Имеем $f(z) = \frac{(1+z)z}{(1+z)(1-z+z^2)} = \frac{(1+z)z}{1+z^3}$. Тогда

$$f(z) = (z^2 + z)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(z^{3n+2} + z^{3n+1}\right). \ ▪$$

**Упражнения.**

**3.2** Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ следующие рациональные функции:

1) $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$, 2) $f(z) = \frac{2z-1}{4z^2 - 2z + 1}$, 3) $f(z) = \frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}$,

4) $f(z) = \frac{1}{(1-z^4)(1+z+z^2+z^3)}$.

4. Разложение рациональной функции на сумму дробей.

При разложении рациональных функций в ряд Тейлора разлагаемую функцию бывает полезно представить в виде суммы более простых дробей (полное разложение на простейшие дроби необязательно). Этот метод применялся в примере 2.

**Упражнения.**

**3.3** Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ следующие рациональные функции:

1) $\dfrac{1}{(1+z)^2}$. 2) $\dfrac{1}{(1-z^2)^2}$. 3) $\dfrac{1}{(1+z^3)^2}$. 4) $\dfrac{1}{(1-z^6)^3}$. 5) $\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$.

6) $\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$. 7) $\dfrac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}$. 8) $\dfrac{z^3}{(z^2+1)(z-1)}$. 9) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$.

5. Представление функции в виде комбинации показательных функций.

При разложении в ряд Тейлора комбинации из показательных и тригонометрических функций часто полезно преобразовать разлагаемую функцию в комбинации только показательных функций. Этот метод применялся в примере 3.

**Упражнения.**

**3.4** Разложить следующие функции в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$:

1) $\sin^2 z$. 2) $\cos^2 z$. 3) $\sin^4 z + \cos^4 z$. 4) $\cos^2 z + \operatorname{ch}^2 z$. 5) $e^z \sin z$. 6) $(\operatorname{ch} z)(\cos z)$.

## 4. Нули аналитической функции

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в окрестности точки $z_0$. Точка $z = z_0$ называется *нулем кратности (или порядка)* $m$, если

$$f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0, \ldots,\ \ f^{(m-1)}(z_0) = 0,\ f^{(m)}(z_0) \neq 0. \qquad (4.1)$$

Если $m = 1$, то нуль называется простым; если $m > 1$, то нуль называется кратным.

Если функция $f(z)$ имеет в точке $z = z_0$ нуль кратности $m$, то функция $f(z)$ в некоторой окрестности точки $z_0$ представима в виде $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$, где функция $h(z)$ аналитическая и $h(z_0) \neq 0$. Справедливо и обратное утверждение.

Пример 1. Функция $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$ имеет в точках $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ простые нули.

Пример 2. Функция $f(z) = (e^z + 1)^3$ имеет нули кратности 3 в точках $z_k = (2k+1)\pi i$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

Функция $f(z)$ в точке $z = \infty$ имеет нуль кратности (или порядка) $m$, если функция $\varphi(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ имеет в точке $z = 0$ нуль кратности $m$.

Пример 3. Функция $f(z)=\sin^2\frac{1}{z}$ имеет в точке $z=\infty$ нуль второго порядка. ▪

**Упражнения.**

**4.1** Найти все нули данных функций и определить их порядки

1) $f(z)=z\sin z$. 2) $f(z)=(1-e^z)(z^2-4)^2$ 3) $f(z)=(z^2-\pi^2)\sin z$.

4) $f(z)=\cos^3 z$. 5) $f(z)=\cos z^3$. 6) $f(z)=z\sin z^3$.

**4.2** Определить порядки нулей данных функций в точке $z=\infty$

1) $f(z)=z\sin^3\frac{1}{z}$. 2) $f(z)=\frac{z^2}{z^3+1}$. 3) $f(z)=\operatorname{sh}\frac{1}{z^2}$. 4) $f(z)=\frac{1}{z^2+1}e^{\frac{1}{z}}$.

## 5. Ряд Лорана. Теорема Лорана

*Рядом Лорана по степеням* $z-z_0$ называется ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n. \tag{5.1}$$

Этот ряд называется сходящимся в точке $z$, если сходятся ряды

$$\sum_{n=-\infty}^{0} c_n(z-z_0)^n,\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|}=r<R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}},$$

то областью сходимости ряда (1) является кольцо

$$0\le r<|z-z_0|<R\le\infty. \tag{5.2}$$

В кольце (5.2) сумма ряда Лорана является аналитической функцией.

Пример 1. Найти область сходимости и сумму ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n}.$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2}=r,R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=3.$$

Отсюда заключаем, что областью сходимости ряда является кольцо $\frac{1}{2}<|z-1|<3$. Находим сумму ряда в этом кольце

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(z-1)^{n+1}}=\frac{\frac{1}{z-1}}{1-\frac{1}{2(z-1)}}=\frac{2z-2}{2z-3},$$

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n}=\frac{\frac{z-1}{3}}{1-\frac{z-1}{3}}=\frac{z-1}{4-z}.$$

Таким образом суммой данного ряда является функция

$$f(z)=\frac{2z-2}{2z-3}+\frac{z-1}{4-z}.\blacksquare$$

Справедлива **теорема Лорана:**
Если функция $f(z)$ аналитическая в кольце $0\le r<|z-a|<R\le\infty$, то в этом кольце она единственным образом представима в виде ряда Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n, \qquad (5.3)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,\ \ n=0,\pm1,\ldots, \qquad (5.4)$$

где $r<\rho<R$.

Вычисление контурных интегралов (5.4), как правило, затруднительно. Поэтому, для разложения функции в ряды Лорана используются искусственные приемы.

Пример 1. Разложим в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)(z+2)}$ в кольце $1<|z|<2$. В этом кольце функцию $f(z)$ представим в виде суммы простых дробей $f(z)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{z+2}\right)$. Если $|z|>1$, то

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

Если $|z|<2$, то в круге $|z|<2$ имеет место разложение

$$\frac{1}{z+2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3\cdot 2^{n+1}},\ \ 1<|z|<2.$$

Пример 2. Найдем разложение в ряд Лорана функции $f(z)=e^{\frac{2z+1}{z}}$ в кольце $0<|z|<\infty$.

Имеем $f(z)=e^2e^{\frac{1}{z}}=e^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}z^{-n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^2}{n!}z^{-n}$.$\blacksquare$

**Упражнения.**

**5.1** Данную функцию разложить в ряд Лорана либо в указанном кольце, либо в окрестности указанной точки. В последнем случае надлежит определить область, в которой разложение имеет место:

1) $\dfrac{1}{z-2}$ в окрестности точек $z=0$ и $z=\infty$.

2) $\dfrac{1}{(z-a)^2}$, $(a\neq 0)$ в окрестности точек $z=0$ и $z=\infty$.

3) $\dfrac{1}{z(1-z)}$ в окрестности точек $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$.

4) $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(0<|a|<|b|)$ в окрестности точек $z=0$, $z=a$, $z=\infty$ и в кольце $|a|<|z|<|b|$.

5) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ в окрестности точки $z=2$ и в кольце $1<|z|<2$.

6) $z^3e^{\frac{z+1}{z}}$ в окрестности точек $z=0$ и $z=\infty$.

7) $\sin\dfrac{z}{1-z}$ в окрестности точек $z=1$.

**5.2** Выяснить, допускают ли указанные функции разложение в ряд Лорана в окрестности данной точки:

1) $\cos\dfrac{1}{z}$, $z=0$. 2) $\cos\dfrac{1}{z}$, $z=\infty$. 3) $\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{z-1}}$, $z=1$. 4) $\operatorname{ctg} z$, $z=\infty$. 5) $\dfrac{z^2}{\sin\dfrac{1}{z}}$, $z=0$.

6) $\operatorname{th}\dfrac{1}{z}$, $z=0$.

**5.3** Следующие функции разложить в ряд Лорана по степеням $z$ в кольце $1<|z|<2$:

1) $\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$. 2) $\dfrac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}$. 3) $\dfrac{z}{(z^2+1)(z+2)}$. 4) $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$.

5) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$. 6) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$.

## 6. Главная и правильная части ряда Лорана

*Рядом Лорана в окрестности точки* $z_0$ называется ряд

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{6.1}$$

сходящийся в кольце $0<|z-z_0|<R$.

*Главной частью ряда* в окрестности точки $z = z_0$ называется ряд по отрицательным степеням $z - z_0$, т.е. ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{1} c_n (z - z_0)^n . \qquad (6.2)$$

*Правильной частью ряда Лорана* в окрестности точки $z = z_0$ называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n . \qquad (6.3)$$

*Рядом Лорана для функции* $f(z)$ *в окрестности точки* $z = \infty$ называется ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n , \qquad (6.4)$$

сходящийся в кольце $R < |z| < \infty$. При этом *главной частью ряда Лорана* называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, а *правильной частью ряда Лорана* называется ряд $\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$.

Задача об отыскании главной части ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки $z = z_0$ решается теми же методами, что и общая задача о разложении функции в ряд Лорана. Однако ввиду того, что приходится отыскивать меньшее число коэффициентов, эта задача обычно решается проще.

Пример 1. Найти главную часть ряда Лорана в окрестности точки $z = 0$ для функции $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2 z}$.

Решение.

Имеем

$$\sin^2 z = z^2 \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots\right)^2 = z^2 h(z), \text{ тогда}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 h(z)} = \frac{1}{z^2}\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\right) = \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z} + a_2 + \dots$$

Значит, главная часть ряда Лорана в окрестности точки $z = 0$ для данной функции равна $\dfrac{1}{z^2}$, так как $a_0 = 1,\ a_1 = 0$.

Пример 2. Найти главную часть ряда Лорана в окрестности точки $z = \infty$ для функции $f(z) = z\cos\left(\dfrac{z+1}{z}\right)$.

Решение.

Имеем

$$f(z) = z\cos\left(1+\frac{1}{z}\right) = z\cos 1\cos\frac{1}{z} - z\sin 1\sin\frac{1}{z} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 1}{(2n)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n} -$$

$$-z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin 1}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1},$$

$0 < |z| < \infty$. Таким образом, главная часть ряда Лорана в окрестности точки $z = \infty$ равна $z\cos 1$.

Пример 3. Главная часть ряда Лорана для функции $f(z) = \dfrac{z^6}{(z^2+1)(z^2-4)}$ в окрестности точки $z = \infty$ равна $z^2$, так как $f(z) = z^2 + 3 + g(z)$, где $g(z)$ рациональная функция, для которой точка $z = \infty$ является нулем.

Пример 4. Для нахождения главной части $f_1(z)$ ряда Лорана функции $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ в окрестности точки $z = i$ представим эту функцию в виде $f(z) = \dfrac{1}{z-i}g(z)$, где $g(z) = \dfrac{1}{z+i} = \dfrac{1}{2i} + a(z-i) + \ldots$

Следовательно, $f_1(z) = \dfrac{1}{2i}\dfrac{1}{z-i}$.▪

**Упражнения.**

**6.1** Найти главную часть ряда Лорана в окрестности точки $z = z_0$ для следующих функций

1) $\dfrac{z}{(z+2)^2}$ $(z_0 = -2)$. 2) $\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$ $(z_0 = 0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots)$. 3) $\dfrac{z-1}{\sin^2 z}$ $(z_0 = 0)$.

4) $\dfrac{e^{iz}}{z^2+b^2}$ $(z_0 = ib,\ b > 0)$. 5) $\dfrac{(z^2+1)^2}{z^2+b^2}$ $(z_0 = \infty)$. 6) $\dfrac{ze^{iz}}{(z^2+b^2)^2}$ $(z_0 = ib,\ b > 0)$.

7) $\dfrac{z}{(z^2+b^2)^2}$ $(z_0 = ib)$. 8) $\operatorname{ctg}\pi z$ $(z_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. 9) $\dfrac{1}{\sin \pi z}$ $(z_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

## 7. Изолированные особые точки

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в кольце $0 < |z - z_0| < \rho$ (или если $z_0 = \infty$, то в кольце $\rho < |z| < \infty$), но не определена в самой точке $z = z_0$. В этом случае точку $z_0$ называют *изолированной особой точкой* для функции $f(z)$.

По поведению $f(z)$ вблизи точки $z = z_0$ различают следующие *три вида особых точек*:

1. Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ существует и конечен, то точка $z = z_0$ называется *устранимой особой точкой* для функции $f(z)$ (или *правильной точкой* для функции $f(z)$).
2. Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ существует, но равен бесконечности, то точка $z = z_0$ называется *полюсом* для функции $f(z)$.
3. Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует, то точка $z = z_0$ называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$.

Пример 1. Точка $z = 0$ является устранимой особой точкой для функции $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{tg} z}$, так как функция $f(z)$ аналитическая в кольце $0 < |z| < \dfrac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = 1$.

Пример 2. Точка $z = i$ является полюсом для функции $f(z) = \dfrac{1}{z - i}$ так как эта функция аналитическая в кольце $0 < |z - i| < \infty$ и $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{1}{z - i} = \infty$.

Пример 3. Точка $z = 0$ является существенно особой для функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ так как эта функция аналитическая в кольце $0 < |z| < \infty$ и поскольку $\lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$ не существует, так как $\lim\limits_{x \to O-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$, а $\lim\limits_{x \to O+0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$.

Пример 4. Точка $z = 0$ не является изолированной особой точкой для функции $f(z) = \dfrac{1}{\sin \frac{1}{z}}$, так как точка $z = 0$ является предельной точкой для полюсов $z_k = \pm \dfrac{1}{k\pi}$ этой функции.

*Определение характера особенности функции по ряду Лорана*

- Для того чтобы изолированная особая точка $z_0$ была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности точки $z_0$ была тождественным нулем.
- Для того чтобы изолированная особая точка $z_0$ была полюсом для функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности точки $z_0$ содержала лишь конечное число членов.
- Для того чтобы изолированная особая точка $z_0$ была существенно особой для функции $f(z)$, необходимо и достаточно чтобы

главная часть ряда Лорана в окрестности точки $z_0$ содержала бесконечное число членов.

*Порядок полюса.*

Для того чтобы точка $z_0 \neq \infty$ была полюсом для функции $f(z)$, необходимо и достаточно чтобы эта функция была представима в виде $f(z) = (z - z_0)^{-m} \psi(z)$, $\psi(z_0) \neq 0$, где $\psi(z)$- функция аналитическая в окрестности точки $z_0$, $m \geq 1$ - целое. Это число называется *порядком полюса* $z_0$ функции $f(z)$. Если $m = 1$, то полюс называется *простым*.

➢ Точка $z_0$ является полюсом порядка $m$ для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда, главная часть ряда Лорана в окрестности этой точки имеет вид:

$$\frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \ldots \frac{c_{-1}}{z - z_0},\ c_{-m} \neq 0.$$

➢ Точка $z = \infty$ - полюс $m$-го порядка для функции $f(z)$, если функция $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ имеет в точке $z = 0$ полюс $m$-го порядка.

➢ Для того чтобы точка $z = \infty$ являлась полюсом порядка $m$ для функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности точки $z = \infty$ имела вид:

$$c_m z^m + \ldots + c_1 z,\ c_m \neq 0.$$

<u>Пример 5.</u> Рассмотрим функцию $f(z) = z \cos\frac{1}{z}$.

Имеем: $f(z) = z\cos\frac{1}{z} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n}} = z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n-1}}$, $0 < |z| < \infty$.

Точка $z = 0$ - существенно особая для функции $f(z)$, $z = \infty$ - полюс первого порядка для этой функции.▪

**<u>Упражнения.</u>**

**7.1** Найти особые точки функций, выяснить их характер, исследовать поведение функций на бесконечности:

1) $\frac{1}{z - z^3}$. 2) $\frac{z^4}{1 + z^4}$. 3) $\frac{z^5}{(1 - z)^2}$. 4) $\frac{1}{z(z^2 + 4)^2}$. 5) $\frac{e^z}{1 + z^2}$. 6) $\frac{1 + z^2}{e^z}$. 7) $z e^{-z}$.

8) $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$. 9) $\frac{e^z}{z(1 - e^{-z})}$. 10) $\frac{1 - e^z}{1 + e^z}$. 11) $\operatorname{th} z$. 12) $e^{-\frac{1}{z^2}}$. 13) $z e^{\frac{1}{z}}$. 14) $e^{\frac{z}{1-z}}$.

15) $e^{z - \frac{1}{z}}$. 16) $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$. 17) $\frac{1}{\sin z}$. 18) $\frac{\cos z}{z^2}$. 19) $\operatorname{tg} z$. 20) $\operatorname{tg}^2 z$. 21) $\frac{\operatorname{ctg} z}{z^2}$.

22) $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$. 23) $\operatorname{ctg} z - \frac{2}{z}$. 24) $\frac{1}{\sin z - \sin a}$. 25) $\frac{1}{\cos z - \cos a}$. 26) $\sin\frac{1}{1 - z}$.

27) $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}$. 28) $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}-\frac{1}{z}$. 29) $\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$. 30) $e^{-z}\cos\frac{1}{z}$. 31) $e^{\operatorname{ctg}\frac{1}{z}}$. 32) $e^{\operatorname{tg}\frac{1}{z}}$.

33) $\sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right)$. 34) $\sin\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{z}}\right)$.

**7.2** Определить характер особенности для следующих функций в точке $z_0$:

1) $\sin z + 3\sin^2 z$, $z_0 = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2) $\sin(z-1)+\cos^3\frac{\pi}{2}z$, $z_0 = 1$.

3) $\frac{\cos\frac{\pi}{2}z}{\sin^2(z-1)}$, $z_0 = 1$.

4) $\frac{\sin z}{z-\pi}$, $z_0 = \pi$.

**7.3** Определить порядки полюсов $z_0$ для следующих функций:

1) $\frac{z}{\sin^3 z}$, $z_0 = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2) $\frac{z^2-3z+2}{(z^2-4)^2(z-1)^3}$, $z_0 = 2$, $z_0 = 1$.

3) $\frac{\cos\pi z+1}{(z^2-z-2)^3}$, $z_0 = -1$, $z_0 = 2$.

**7.4** Найти особые точки функций и определить их тип (для полюсов указать порядок):

1) $\frac{z+2}{(z-1)^3 z(z+1)}$. 2) $\operatorname{ctg} z$. 3) $\frac{1}{(z^2+i)^3}$. 4) $e^{\frac{1}{z-2i}}$. 5) $\cos\frac{1}{z+i}$.

## Вычеты и их приложения

### 8. Вычет в конечной точке. Вычет в бесконечно удаленной точке

*Вычет в конечной точке*

Пусть точка $z_0$ изолированная особая точка для функции $f(z)$. Тогда функция $f(z)$ является аналитической в кольце $0<|z-z_0|<\rho$. По теореме Лорана функция $f(z)$ в кольце $0<|z-z_0|<\rho$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n. \tag{8.1}$$

*Вычетом* функции $f(z)$ в точке $z_0$ называется коэффициент $c_{-1}$ в разложении в ряд Лорана (8.1).

Вычет функции в точке $z_0$ обозначается $\underset{z=z_0}{res} f(z)$.

Приведем *основные формулы для отыскания вычетов* функции $f(z)$ в точке $z_0$,

1) Если точка правильная для функции $f(z)$, то $\underset{z=z_0}{\text{res}} f(z) = 0$.

2) Пусть функция $f(z)$ имеет в точке $z_0$ полюс первого порядка, тогда

$$\underset{z=z_0}{\text{res}} f(z) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) \tag{8.2}$$

3) Пусть функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитические функции в точке $z_0$ и $\psi(z)$ удовлетворяет условию $\psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$. Тогда

$$\underset{z=z_0}{\text{res}} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{8.3}$$

4) Пусть функция $f(z)$ имеет в точке $z_0$ полюс $m$-го порядка. Тогда

$$\underset{z=z_0}{\text{res}} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left( f(z)(z - z_0)^m \right)^{(m-1)}. \tag{8.4}$$

5) Для каждой четной функции $f(z)$ имеют место равенства

$$\underset{z=z_0}{\text{res}} f(z) = -\underset{z=-z_0}{\text{res}} f(z),\ \underset{z=0}{\text{res}} f(z) = \underset{z=\infty}{res} f(z) = 0. \tag{8.5}$$

Для нечетной функции

$$\underset{z=z_0}{\text{res}} f(z) = \underset{z=-z_0}{res} f(z), \tag{8.6}$$

в предположении, что написанные выше вычеты имеют смысл.

<u>Пример 1.</u>

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$, имеющую полюс первого порядка в точке $z = 1$ и полюс второго порядка в точке $z = 2$. По формуле (8.2) имеем

$$\underset{z=1}{\text{res}} f(z) = \left. \frac{z}{(z-2)^2} \right|_{z=1} = 1,$$

по формуле (8.4) получаем

$$\underset{z=2}{\text{res}} f(z) = \left. \frac{-1}{(z-1)^2} \right|_{z=2} = -1.$$

<u>Пример 2.</u>

Для функции $f(z) = \text{ctg}\, z$ точки $z = k\pi$ ($k$ - целое) являются простыми полюсами и по формуле (8.3) находим

$$\operatorname*{res}_{z=k\pi} \operatorname{ctg} z = \left[ \frac{\cos z}{(\sin z)'} \right] \Bigg|_{z=k\pi} = 1.$$

Пример 3.

Для функции $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ точка $z = 0$ является существенно особой. Для нахождения вычета в этой точке находим коэффициент $c_{-1}$ ряда Лорана (8.1). Имеем $c_{-1} = \frac{1}{4!}$. Отсюда $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{4!}$.▪

*Вычет в бесконечно удаленной точке*

Пусть точка $z = \infty$ изолированная особая для функции $f(z)$. Тогда функция $f(z)$ является аналитической в кольце $\rho < |z| < \infty$. По теореме Лорана функция $f(z)$ в этом кольце разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n. \tag{8.7}$$

*Вычетом* функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ (обозначается $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$) называется число $-c_{-1}$, где $c_{-1}$ - коэффициент ряда Лорана (8.7), т. е.

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}. \tag{8.8}$$

Пример 4.

Для функции $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots$ коэффициент $c_{-1} = 1$ и, следовательно, $\operatorname*{res}_{z=\infty} e^{\frac{1}{z}} = -1$.▪

- Пусть точка $z = \infty$ - правильная для функции $f(z)$ и

$$\lim_{z=\infty} f(z) = A \neq \infty, \tag{8.9}$$

тогда

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \left[ A - f(z) \right] z. \tag{8.10}$$

Пример 5.

Найдем $\operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{z^2}{1+z^3} e^{\frac{1}{z}}$. Точка $z = \infty$ для функции $f(z) = \frac{z^2}{1+z^3} e^{\frac{1}{z}}$ правильная. Имеем $\lim_{z=\infty} f(z) = 0$. По формуле (8.10) находим, что

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \left[ -\frac{z^3}{1+z^3} e^{\frac{1}{z}} \right] = -1.▪$$

- Пусть функция $f(z)$ аналитическая во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_m$, тогда

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0 . \qquad (8.11)$$

Пример 6.

Найдем вычет функции $f(z) = \dfrac{z}{z+2} e^z$ в точке $z = \infty$.

Имеем $\operatorname*{res}_{z=-2} f(z) = (ze^z)\Big|_{z=-2} = -2e^{-2}$.

По формуле (8.11) находим $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 2e^{-2}$.▪

**Упражнения.**

**8.1** Найти вычеты указанных ниже функций относительно конечных особых точек:

1) $\dfrac{z^2+1}{z-2}$. 2) $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$. 3) $\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n \in \mathbf{N}$. 4) $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^4}$. 5) $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$. 6) $\operatorname{tg} z$.

7) $\operatorname{ctg}^2 z$. 8) $\dfrac{\cos^3 z}{z^3}$. 9) $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$. 10) $\dfrac{1}{z(1-z^2)}$. 11) $\dfrac{1}{z^2-z^3}$. 12) $\dfrac{\cos 4z}{(z-2)^3}$.

13) $\dfrac{z^3+1}{z^4(z^4+1)} \cos z \operatorname{ch} z$. 14) $\sin z \sin\dfrac{1}{z}$. 15) $\sin^2 \dfrac{1}{z}$. 16) $z^2 \sin\dfrac{1}{z}$. 17) $\sin z \operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$.

18) $z \sin\dfrac{1}{z+1}$. 19) $\dfrac{1}{\operatorname{ch} z}$. 20) $\dfrac{1+z^{2n}}{z^n(z-2)}$, $n \in \mathbf{N}$.

**8.2** Вычислить:

1) $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}$, $n \in \mathbf{N}$. 2) $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)}$. 3) $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{\operatorname{tg} z - z}{(1-\cos z)^2}$. 4) $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z^{n-2}}{\operatorname{sh}^n z}$, $n = 2,3,...$

5) $\operatorname*{res}_{z=0} z^{n-3} \operatorname{ctg}^n z$, $n = 2,3,...$ 6) $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z}{\operatorname{ch} z - 1 - \dfrac{z^2}{2}}$.

**8.3** Найти вычеты следующих функций в бесконечности:

1) $\dfrac{z^4+1}{z^5-1}$. 2) $\cos\pi\dfrac{z+2}{2z}$. 3) $\dfrac{\sin\dfrac{1}{z}}{z-1}$. 4) $\dfrac{\cos^2\dfrac{\pi}{z}}{z-1}$. 5) $\dfrac{(z^{10}+1)\sin\dfrac{1}{z}}{(z^5+2)(z^5-1)}$. 6) $z\cos^2\dfrac{\pi}{z}$.

**8.4** Вычислить

1) $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z^2 e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1}$. 2) $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z^2 \sin^2\dfrac{1}{z}}{(z-1)(z-2)}$. 3) $\operatorname*{res}_{z=\infty} z\sin\dfrac{z+1}{z-1}$. 4) $\operatorname*{res}_{z=\infty} \dfrac{z}{z+3} e^{\frac{1}{z}}$. 5) $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}}$.

6) $\operatorname*{res}_{z=\infty} z\sin\dfrac{z}{z+1}$.

## 9. Основная теорема теории вычетов

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области $D$, за исключением конечного числа особых точек и непрерывна вплоть до границы $\partial D$ этой области. Пусть $\partial D$ состоит из конечного числа ограниченных кусочно-гладких кривых. Тогда

а) если область $D$ не содержит точку $z=\infty$, то

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)\,; \tag{9.1}$$

б) если точка $z=\infty$ принадлежит области $D$, то

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \left( \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \right). \tag{9.2}$$

Здесь $z_1, z_2, ..., z_n$ - все конечные особые точки функции $f(z)$, лежащие в области $D$.

Эта теорема о вычетах является одной из самых важных теорем теории функций комплексного переменного. С помощью этой теоремы можно эффективно вычислить многие определенные интегралы.

Рассмотрим примеры на вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью вычетов.

В примерах 1 и 2 интегрирование по окружностям производится против часовой стрелки.

Пример 1. Пусть $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z+3)}$. Тогда по формуле (9.1):

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z),$$

так как в круге $|z|<2$ функция $f(z)$ имеет одну особую точку $z=0$ (простой полюс). Находим $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \left.\dfrac{e^z}{z+3}\right|_{z=0} = \dfrac{1}{3}$.

Следовательно, $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z+3)}\,dz = \frac{2\pi i}{3}$.

Пример 2. Вычислим интеграл $I = \displaystyle\int_{|z|=4} \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}\,dz$. Функция $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}$ в круге $|z|<4$ имеет две особые точки $z=1$ и $z=2$. Поэтому

$$I = 2\pi i \left( \operatorname*{res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=2} f(z) \right) = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z).$$

Точка $z=\infty$ является правильной для функции $f(z)$, т.к. $\lim\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.

Находим $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z=\infty}(0 - f(z))z = -\lim_{z=\infty} \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{1-\frac{2}{z}} = -1$. Таким образом, $I = 2\pi i$.▪

**Упражнения.**

**9.1** Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4}$ $(D: |z-1|<1)$. 2) $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$ $(D: |z-1-i|<2)$.

3) $\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z}{(z+1)^3} dz$ $\left(D: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{2}{3}}\right)$. 4) $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$ $(D: 2<|z|<4)$.

5) $\int\limits_{\partial D} \frac{z}{z+3} e^{\frac{1}{3z}} dz$ $(D: |z|>4)$. 6) $\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$ $(D: |z|<2)$.

7) $\int\limits_{\partial D} \frac{z^2 \sin^2 \frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)} dz$ $(D: |z|<3)$. 8) $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3}{z^4-1} dz$ $(D: |z|<2)$.

9) $\int\limits_{\partial D} \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} dz$ $(D: |z|<2)$. 10) $\int\limits_{\partial D} \sin\frac{z}{z+1} dz$ $(D: |z|>3)$.

11) $\int\limits_{\partial D} z \sin\frac{z+1}{z-1} dz$ $(D: |z|<2)$. 12) $\int\limits_{\partial D} \sin\frac{1}{z-1} dz$ $(D: |z-1|>1)$.

13) $\int\limits_{\partial D} e^{\frac{1}{1-z}} \frac{dz}{z}$ $(D: |z-2|+|z+2|<6)$. 14) $\int\limits_{\partial D} z\cos\frac{z}{z+1} dz$ $(D: |z|<2)$.

15) $\int\limits_{\partial D} \frac{\sin z\, dz}{(z^3-z)(z-i)}$ $(D: |z-1|<1)$. 16) $\int\limits_{\partial D} \frac{\operatorname{ctg} z}{z} dz$ $(D: |z|>1)$.

17) $\int\limits_{\partial D} \frac{e^{\pi z}}{2z^2-i} dz$ $(D: |z|<1, \operatorname{Re} z>0, \operatorname{Im} z>0)$. 18) $\int\limits_{\partial D} \frac{z\, dz}{e^{z^2}-1}$ $(D: |z|>4)$.

## 10. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

При вычислении определенных интегралов применяется следующий метод. Пусть требуется найти интеграл по отрезку $[a;b]$ от функции $f(x)$. Тогда отрезок $[a;b]$ дополняют кривой $\Gamma$, которая вместе с ним ограничивает некоторую область $D$. Функция $f(x)$ аналитически продолжается в построенную таким образом область $D$. К аналитическому продолжению $f(z)$ применяется основная теорема о вычетах. Если интеграл по контуру $\Gamma$ удается вычислить или выразить через интеграл по отрезку $[a;b]$, то поставленная задача решена.

Если отрезок интегрирования бесконечный, то рассматривают семейства расширяющихся контуров интегрирования, чтобы в результате предельного перехода получить интересующий нас интеграл по бесконечному отрезку интегрирования.

## I. Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi$.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi, \tag{10.1}$$

где $R(u,v)$ - рациональная функция от $u,v$. Пусть $z = e^{i\varphi}$. Тогда

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),\ d\varphi = -i\frac{dz}{z}.$$

При изменении $\varphi$ от $0$ до $2\pi$ переменная $z$ пробегает окружность $|z| = 1$ в положительном направлении. Интеграл (10.1) сводится к интегралу по замкнутому контуру

$$I = \int\limits_{|z|=1} R_1(z)\, dz,$$

где $R_1(z) = -\frac{i}{z} R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]$ - рациональная функция от $z$. По теореме о вычетах

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} R_1(z), \tag{10.2}$$

где $z_1, z_2, ...., z_n$ - все полюсы рациональной функции $R_1(z)$, лежащие в круге $|z| < 1$.

<u>Пример 1.</u> Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3\cos\varphi}.$$

Решение.

Делая в интеграле замену переменной $z = e^{i\varphi}$, получаем $I = \int\limits_{|z|=1} \frac{-2i}{3z^2 + 10z + 3} dz$. Уравнение $3z^2 + 10z + 3 = 0$ имеет корни $z_1 = -\frac{1}{3}$, $z_2 = -3$. Так как в круге $|z| < 1$ лежит лишь точка $z_1 = -\frac{1}{3}$ - полюс первого порядка для подынтегральной функции, то

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{-2i}{3z^2+10z+3} = 4\pi \frac{1}{6z+10}\bigg|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{2}. \blacksquare$$

**Упражнения.**

**10.1** Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{13+12\sin\varphi}$. 2) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi}{13+12\cos\varphi}d\varphi$. 3) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos^4\varphi}{1+\sin^2\varphi}d\varphi$. 4) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2+\cos\varphi)^2}$.

5) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}d\varphi,\ a>1$. 6) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\sin\varphi},\ a>1$. 7) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos^2\varphi}{1-a\sin^2\varphi}d\varphi,\ 0<a<1$.

8) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}d\varphi, -1<a<1$.

## II. Интегралы от рациональных функций

Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx,$$

где $R(x)$ - рациональная функция: $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, не имеющая полюсов на действительной оси и такая, что степень многочлена $Q(x)$ по крайней мере на две единицы превышает степень многочлена $P(x)$.

Возьмем контур интегрирования, изображенный на рис.1, где $C_R$ - полуокружность радиуса $R$ с центром в начале координат. Выберем $R$ столь большим, чтобы все полюсы функции $R(z)$, находящиеся в верхней полуплоскости, заключались внутри этого контура. По теореме о вычетах будем иметь:

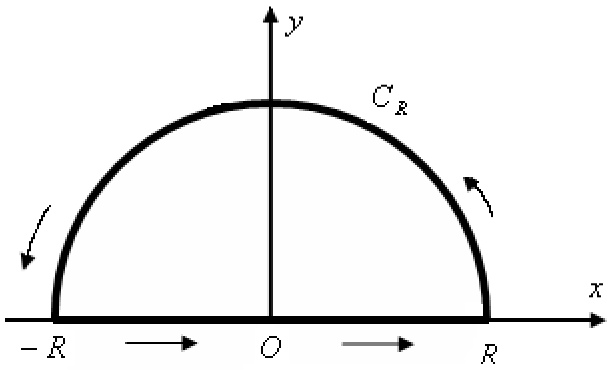

Рис.1

$$\int\limits_{-R}^{+R} R(x)\,dx + \int\limits_{C_R} R(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z), \tag{10.3}$$

где сумма распространяется на все полюсы, принадлежащие верхней полуплоскости.

В силу условий, наложенных на рациональную функцию $R(z)$, при достаточно больших значениях $|z|=R$, будем иметь

$$|R(z)| < \frac{C}{R^2}, \ C = const .$$

Поэтому

$$\int_{C_R} |R(z)\,dz| < \frac{C\pi R}{R^2} = \frac{C\pi}{R} \to 0 \qquad \text{при } R \to \infty .$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$ в равенстве (10.3) , получим

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{res} R(z) \tag{10.4}$$

Замечание.

Аналогично доказывается формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = -2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k < 0}} \operatorname{res} R(z) . \tag{10.5}$$

Здесь вычеты берутся по всем полюсам функции $R(z)$, лежащим в нижней полуплоскости.

Пример 1. Вычислим интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

Так как функция $R(z) = \frac{1}{(z^2+1)^4} = \frac{1}{(z-i)^4 (z+i)^4}$ имеет в верхней полуплоскости единственный полюс четвертого порядка в точке $i$.

$$\operatorname*{res}_{z=i} R(z) = \frac{1}{3!} \left[ \frac{1}{(z+i)^4} \right]^{(3)} \Bigg|_{z=i} = -\frac{5i}{32} .$$

То в силу (10.4): $I = \frac{5\pi}{16}$. ▪

**Упражнения.**

**10.2** Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$. 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$. 3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}$. 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

**5)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$. 6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 25}$. 7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$. 8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4ix-5)^2}$.

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^3}$, $a > 0$. 10) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4+a^4)^2}$, $a > 0$.

### III. Интегралы вида $\int\limits_{0}^{+\infty} R(x)\,dx$.

Основная сложность, возникающая при вычислении определенных интегралов с помощью теории вычетов, состоит в том, что в некоторых случаях приходится интегрировать по контуру совсем не ту функцию, от которой вычисляется определенный интеграл.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{0}^{+\infty} R(x)\,dx, \tag{10.6}$$

где $R(x)$- рациональная функция, $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, не имеющая полюсов на $[0,+\infty)$ и такая, что степень многочлена $Q(x)$ по крайней мере на две единицы превышает степень многочлена $P(x)$. В случае, когда $R(-x) = R(x)$, $I = \dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$ и интеграл $I$ можно вычислить по формуле (10.4).

Рассмотрим вычисление интеграла (10.6) для случая, когда $R(x)$ не является четной функцией.

Пусть $D$ – комплексная плоскость с разрезом $[0;+\infty)$, $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$ - регулярная функция в области $D$, непрерывная вплоть до границы области $D$, принимающая значение $\ln x$ на верхнем берегу разреза и значение $f(x) = \ln x + 2\pi i$ на нижнем берегу этого разреза.

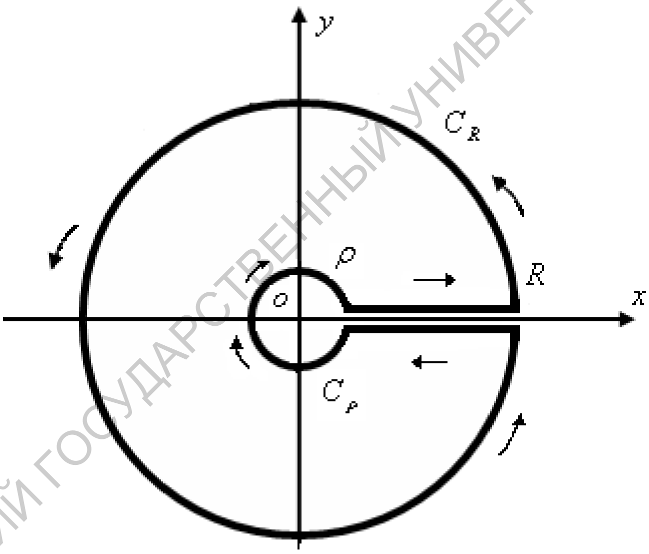

Рис.2

Рассмотрим контур $\Gamma_{\rho,R}$ (рис. 2), состоящий из окружностей $C_\rho : |z| = \rho$; $C_R : |z| = R$ и отрезков $[\rho; R]$, $[R; \rho]$, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза (рис.2). Пусть $R > 0$ настолько велико, а $\rho > 0$ настолько мало, что внутри контура $\Gamma_{\rho,R}$ лежат все полюсы функции $R(z)$.

Обозначим $F(z) = R(z)\ln z$. По теореме о вычетах

$$I_{\rho,R} = \int_{\Gamma_{\rho,R}} F(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname*{res}_{z=z_k} [R(z)\ln z], \tag{10.7}$$

где сумма берется по всем полюсам $R(z)$.

Интеграл представляется в виде суммы интегралов

$$I_{\rho,R} = \int_{\rho}^{R} R(x)\ln x\,dx + \int_{R}^{\rho} R(x)[\ln x + 2\pi i]dx + \int_{C_\rho} F(z)\,dz + \int_{C_R} F(z)\,dz. \tag{10.8}$$

В силу условий, наложенных на рациональную функцию $R(z)$, интегралы по окружностям $C_\rho$ и $C_R$ стремятся к нулю при $\rho \to 0$ и $R \to \infty$, а сумма первых двух интегралов в равенстве (10.8) равна $\int_\rho^R (-2\pi i) R(x)\,dx$. Переходя в равенстве (10.7) к пределу при $\rho \to 0$ и $R \to \infty$, получаем

$$I = -\sum \operatorname*{res}_{z=z_k} [R(z)\ln z], \tag{10.9}$$

где сумма берется по всем полюсам функции $R(z)$.

<u>Пример 1.</u>

Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(z) = \ln z\, R(z) = \frac{\ln z}{(1+z)(1+z^2)}$ $(\ln(-1) = \pi i)$ в комплексной плоскости с разрезом $[0;+\infty)$. Находим вычеты этой функции в полюсах $z_1 = -1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, это простые полюсы этой функции:

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{\ln z_1}{(1+z_1^2)} = \frac{\pi i}{2},$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \frac{\frac{\pi}{2} i}{(1+i)2i} = \frac{\pi}{8}(1-i),$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_3} f(z) = \frac{\frac{3\pi}{2} i}{(1-i)(-2i)} = \frac{-3\pi}{8}(1+i).$$

По формуле (10.9): $I = -\left[\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi}{8}(1-i) - \frac{3\pi}{8}(1+i)\right] = \frac{\pi}{4}$.▪

**<u>Упражнения.</u>**

**10.3** Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$. 2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+a)(x^2+b^2)}$, $a>0,\ b>0$. 3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+4)}$.

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+i)}$. 5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2i)(x^2+1)}$. 6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+a^2}dx$, $a>0$.

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x+i)(x^2+i)}$. 8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\,x}{(x^3+1)^2}$.

## IV. Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} R(x)\,dx$.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} R(x)\,dx, \qquad (10.10)$$

здесь $R(x)$ - рациональная функция, не имеющая полюсов на действительной оси, которая стремится к нулю при $z$, стремящемся к $\infty$. Интеграл (10.10) есть преобразование Фурье функции $R(x)$. При вычислении интегралов (10.10) используется *лемма Жордана*:

Пусть $\alpha > 0$ и выполняются следующие условия:

1).функция $g(z)$ непрерывна в области $\operatorname{Im} z \geq 0$, $|z| \geq R_0 > 0$,

2) $M(R) = \max\limits_{z \in C_R} |g(z)| \to 0$ при $R \to \infty$, где $C_R$ - полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Тогда $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_{C_R} g(z) e^{i\alpha z} dz = 0$.

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Решение.

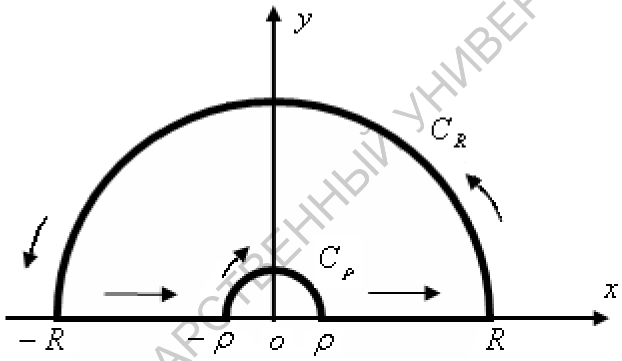

Рис.3

Пусть $\Gamma_{\rho,R}$ - контур, изображенный на рис.3. Рассмотрим интеграл

$$I_{\rho,R} = \int\limits_{\Gamma_{\rho,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Этот интеграл равен нулю, так как функция $\frac{e^{iz}}{z}$ регулярна внутри контура $\Gamma_{\rho,R}$.

С другой стороны, интеграл $I_{\rho,R}$ равен

$$I_{\rho,\alpha} = \int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int\limits_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz. \qquad (*)$$

Сумма первых двух слагаемых в равенстве (*) равна

$$\int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Последний интеграл в равенстве (*) по стремится к нулю при $R \to \infty$ по лемме Жордана. Найдем предел интеграла $\int\limits_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz$ при $\rho \to 0$. Имеем

$$\int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_\rho} \left[\frac{1}{z} + h(z)\right] dz,$$

где $h(z)$ – функция, регулярная в точке $z = 0$. Так как

$\int_{C_\rho} \frac{1}{z} dz = \int_\pi^0 \frac{\rho i e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} d\varphi = -i\pi$, а $\lim_{\rho\to 0} \int_{C_\rho} h(z) dz = 0$, то $\lim_{\rho\to 0} \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = -i\pi$.

Переходя к пределу при $\rho \to 0$ и $R \to \infty$ в (*), будем иметь

$$2i\int_\rho^\infty \frac{\sin x}{x} dx - i\pi = 0,$$

откуда получаем, что $I = \frac{\pi}{2}$. ▪

Обратимся теперь к вычислению интеграла (10.10) . Выберем тот же контур интегрирования что и в п. II (см. рис. (1)). Радиус $R$ выбираем столь большим, чтобы все полюсы функции $e^{i\alpha z} R(z)$, принадлежащие верхней полуплоскости, лежали внутри контура интегрирования. По теореме о вычетах получаем

$$\int_{-R}^{+R} e^{i\alpha x} R(x) dx + \int_{C_R} e^{i\alpha z} R(z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(e^{i\alpha z} R(z)\right), \tag{10.11}$$

где $z_1, z_2, ...., z_n$- все полюсы рациональной функции $R(z)$, лежащие в верхней полуплоскости. Переходя к пределу в равенстве (10.11) при $R \to \infty$ и используя лемму Жордана, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(e^{i\alpha z} R(z)\right), \ \alpha > 0. \tag{10.12}$$

Если рациональная функция $R(x)$ действительна при действительных $x$, то, отделяя в формуле (10.12) действительную и мнимую части, получаем

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos\alpha x \, dx = -2\pi \operatorname{Im}\left[\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(e^{i\alpha z} R(z)\right)\right], \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin\alpha x \, dx = 2\pi \operatorname{Re}\left[\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(e^{i\alpha z} R(z)\right)\right]. \end{aligned} \tag{10.13}$$

<u>Пример 2.</u>

Вычислить интеграл $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx$, $a > 0$.

Решение.

Имеем $I_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx$. Применяя формулу (10.13), получим

$$I_1 = -\frac{2\pi}{2}\,\mathrm{Im}\,\underset{z=ai}{\mathrm{res}}\,\frac{e^{iz}}{z^2+a^2} = -\pi\,\mathrm{Im}\,\frac{e^{-a}}{2ai} = \frac{\pi\, e^{-a}}{2a}.$$

Пример 3.

Вычислить интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos 5x}{x^2-2x+5}\,dx$.

Решение.

Имеем по формуле (10.13)

$$I = -2\pi\,\mathrm{Im}\left[\underset{z=1+3i}{\mathrm{res}}\,\frac{e^{i5z}(z-1)}{z^2-2z+5}\right].$$

Вычисляя вычет в точке $z = 1+3i$, находим $I = -\pi\, e^{-10}\sin 5$.▪

**Упражнения.**

**10.4** Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx$. 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}\,dx$. 3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}\,dx$.

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^3+13x)\sin x}{x^4+13x^2+36}\,dx$. 5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2-4x+5}\,dx$. 6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+2x+10}\,dx$.

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx$. 8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx$, $a>0$.

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx$, $a>0$. 10) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+a^2)^2}\,dx$, $a>0$.

11) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx$, $a>0, \mathrm{Re}\, b>0$. 12) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx$, $a>0, \mathrm{Re}\, b>0$.

## 11. Гармонические функции

Действительная функция $u(x,y)$, имеющая в области $D$ непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (11.1)$$

называется *гармонической* в области $D$, а уравнение (11.1) - *уравнением Лапласа*. Оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ называется *оператором Лапласа*. Уравнение (11.1) можно записать в виде

$$\Delta u = 0. \qquad (11.2)$$

Гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, связанные между собой *условиями Коши-Римана*: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, называются *сопряженными*. Если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ - аналитическая в области $D$, то ее действительная и мнимая части являются в этой области сопряженными гармоническими функциями.

Если задана гармоническая функция $u(x,y)$ в односвязной области, то можно найти с точностью до постоянного слагаемого, аналитическую в области функцию $f(z)=u+iv$, т. е. восстановить аналитическую функцию по заданной ее действительной (мнимой) части.

Многие физические задачи сводятся к отысканию гармонических функций, удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Рассмотрим постановку и решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

## I. Задача Дирихле

Пусть на границе $\Gamma$ ограниченной области $D$ задана непрерывная функция $u_0(z)$. *Классическая задача Дирихле* состоит в следующем: найти функцию $u(z)$, гармоническую в области $D$, непрерывную вплоть до границы $\Gamma$ и принимающую на $\Gamma$ значения $u_0(z)$:

$$\Delta u(z)=0\,,\ z\in D;\ u(z)\big|_{z\in\Gamma}=u_0(z)\,. \tag{11.3}$$

Здесь и далее $u(z)=u(x,y)$, $u_0(z)=u_0(x,y)$ - действительные функции, $\Delta$ - оператор Лапласа.

Решение классической задачи Дирихле существует и единственно. Наряду с классической задачей будем рассматривать также более *общую задачу Дирихле*, когда $u_0(z)$ ограничена и имеет конечное число точек разрыва. Требуется найти гармоническую в области $D$ функцию $u(z)$, ограниченную, непрерывную вплоть до границы во всех точках непрерывности функции $u_0(z)$ и в этих точках удовлетворяющую граничному условию $u(z)=u_0(z)$. При этом область $D$ может быть неограниченной. Решение этой задачи Дирихле существует и единственно.

Следующие примеры показывают, что если в постановке задачи Дирихле отказаться от требования ограниченности искомой функции, то терема единственности будет неверна.

Пример 1.

а) Функция $u(x,y)=y$ - гармоническая в полуплоскости $y>0$, непрерывна вплоть до границы и равная нулю при $y=0,\ (x\neq\infty)$. Функция тождественно равная нулю также удовлетворяет этим условиям.

б) Функция $u(x,y)=\dfrac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}=\mathrm{Re}\,\dfrac{1+z}{1-z}$, гармоническая в круге $x^2+y^2<1$, непрерывна вплоть до границы этого круга, за исключением точки $(1,0)$, и равна нулю во всех точках окружности $x^2+y^2=1$, кроме точки $(1,0)$. Функция, тождественно равная нулю, также удовлетворяет всем этим требованиям. ▪

## II. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге

Пусть функция $u(x,y)$, гармоническая в круге $|z|<1$ и ограничена в этом круге, непрерывна вплоть до границы круга, за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда имеет место *формула Пуассона*

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_0(e^{i\theta})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\theta, \qquad (11.4)$$

где $z=re^{i\varphi}$, $0\le r<1$.

Формулу Пуассона можно также записать в виде

$$u(z)=\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}u_0(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\frac{d\xi}{\xi},\ |z|<1. \qquad (11.5)$$

С помощью формулы Пуассона можно решать задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге $|z|<1$. В частности, если граничная функция является рациональной функцией от $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, то интеграл в формуле (11.5) вычисляется с помощью вычетов.

Пример 2. Найдем решение задачи

$$\Delta u(z)=0,\ |z|<1,\ u(z)\big|_{|я|=1}=\frac{\sin\varphi}{5+4\cos\varphi},$$

где $z=re^{i\varphi}$.

Воспользуемся формулой (11.5). Пусть $\xi=e^{i\theta}$, тогда

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right),\quad \cos\theta=\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)$$

и

$$u_0(\xi)=\frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}=\frac{1}{2i}\frac{\xi^2-1}{(2\xi^2+5\xi+2)}.$$

Вычислим интеграл

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{(\xi^2-1)(\xi+z)}{2i(2\xi^2+5\xi+2)(\xi-z)\xi}d\xi,$$

где окружность $|\xi|=1$ ориентированна против часовой стрелки, $|z|<1$.

Подынтегральная функция $F(\xi)$ в области $|\xi|>1$ имеет одну конечную особую точку $\xi=-2$ - полюс первого порядка и устранимую особую точку $\xi=\infty$. Следовательно, $J=-\operatorname*{res}_{\xi=-2}F(\xi)-\operatorname*{res}_{\xi=\infty}F(\xi)$.

Находим

$$\operatorname*{res}_{\xi=-2}F(\xi)=\frac{2-z}{4i(z+2)},\ \operatorname*{res}_{\xi=\infty}F(\xi)=-\frac{1}{4i},\ I=\frac{z}{2i(z+2)}.$$

По формуле (11.5) получаем решение задачи Дирихле

$$u(x,y)=\operatorname{Re}\frac{z}{2i(z+2)}=\frac{y}{(x+2)^2+y^2}=\frac{r\sin\varphi}{r^2+4r\cos\varphi+4}.\ \blacksquare$$

**Упражнения.**

**11.1** Найти решение задачи Дирихле

1) $\Delta u(z)=0$, $|z|<1$, $u\big|_{|z|=1}=\dfrac{1}{5+3\cos\varphi}$.

2) $\Delta u(z)=0$, $|z|<1$, $u\big|_{|z|=1}=\dfrac{\cos\varphi}{5+4\cos\varphi}$.

3) $\Delta u(z)=0$, $|z|<1$, $u\big|_{|z|=1}=\dfrac{\cos\varphi}{13+12\cos\varphi}$.

4) $\Delta u(z)=0$, $|z|<1$, $u\big|_{|z|=1}=\dfrac{1}{13+12\sin\varphi}$.

5) $\Delta u(z)=0$, $|z|<1$, $u\big|_{|z|=1}=\dfrac{\sin\varphi}{5+3\cos\varphi}$.

## III. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости

Пусть функция $u(z)$, гармоническая и ограниченная в полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$, непрерывна вплоть до прямой $\operatorname{Im}z=0$, за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда имеет место *формула Пуассона*

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yu(t)}{(t-x)^2+y^2}dt, \tag{11.6}$$

где $z=x+iy, y>0$.

Так как $\dfrac{y}{(t-x)^2+y^2}=\operatorname{Re}\dfrac{1}{i(t-z)}$, то формулу Пуассона (11.6) можно записать в виде

$$u(z)=\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(t)}{(t-z)}dt. \tag{11.7}$$

С помощью формул (11.6) или (11.7) можно решать задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Рассмотрим, например, задачу

$$\Delta u(z) = 0\,,\ y > 0\,;\ \ u\big|_{y=0} = R(x)\,, \tag{11.8}$$

где рациональная функция $R(z)$ действительна, не имеет полюсов на действительной оси и $R(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Решением этой задачи в силу (211.7) является функция

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(t)}{(t-z)} dt\,,$$

где $\operatorname{Im} z > 0$. Этот интеграл можно вычислить с помощью вычетов по формуле (10.5):

$$u(z) = -2 \operatorname{Re} \sum_{\operatorname{Im} \varsigma_k < 0} \operatorname*{res}_{\varsigma = \varsigma_k} \frac{R(\varsigma)}{\varsigma - z}\,. \tag{11.9}$$

Здесь вычеты берутся по всем полюсам функции $R(\varsigma)$, лежащим в полуплоскости $\operatorname{Im} \varsigma < 0$.

Пример 3. Найдем решение задачи

$$\Delta u(z) = 0\,,\ y > 0\,;\ u\big|_{y=0} = \frac{1}{1+x^2}\,,$$

По формуле (11.9) получаем

$$u(z) = -2 \operatorname{Re} \operatorname*{res}_{\varsigma = -i} \frac{1}{(1+\varsigma^2)(\varsigma - z)} = -2 \operatorname{Re} \frac{1}{2i(z+i)} = \frac{y+1}{x^2 + (y+1)^2}\,.\blacksquare$$

**Упражнения.**

**11.2** Найти решение задачи Дирихле

1) $\Delta u(z) = 0\,,\ y > 0\,,\ u\big|_{y=0} = \dfrac{1}{1+x^4}\,.$

2) $\Delta u(z) = 0\,,\ y > 0\,,\ u\big|_{y=0} = \dfrac{x^3}{16+x^4}\,.$

3) $\Delta u(z) = 0\,,\ y > 0\,,\ u\big|_{y=0} = \dfrac{x}{1+x^4}\,.$

4) $\Delta u(z) = 0\,,\ y > 0\,,\ u\big|_{y=0} = \dfrac{x}{4+x^2}\,.$

## Приложение
## Образцы контрольных и самостоятельных работ

### Тема «Ряды Тейлора»

1. Разложить в степенной ряд в окрестности точки $z_0 = 0$

   а) $f(z) = \dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)^2}$,

   б) $f(z) = \sin^3 4z$,

   в) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z^2)(1+z^2+z^4)}$,

   г) $f(z) = \cos z \,\mathrm{sh} 6z$.

2. Найти $f^{(100)}(0)$, если $f(z) = \cos(z+4) - z^{20}e^z$.

### Тема «Ряды Лорана»

1. Разложить в ряд Лорана

   а) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)(z+2)}$, $1 < |z| < 2$;

   б) $f(z) = \cos\dfrac{z^2-2z+5}{z^2-2z+1}$, $0 < |z-1| < \infty$;

   в) $f(z) = z^5 e^{\frac{z+1}{z}}$, $0 < |z| < \infty$.

2. Найти главную часть ряда Лорана в окрестности точки $z_0$

   а) $f(z) = \dfrac{1}{\sin \pi z}$, $z_0 = 2$;

   б) $f(z) = ctg\, \pi z$, $z_0 = 0$.

3. Определить характер особенности функции в данных точках

   а) $f(z) = z^2 \cos\dfrac{\pi}{z}$, $z_0 = 0$, $z_0 = \infty$;

   б) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{z}{z+1}$, $z_0 = -1$, $z_0 = \infty$.

4. Найти все особые точки данной функции и определить характер особенности в этих точках $f(z) = \dfrac{z^2}{\sin^2 \dfrac{1}{z+1}}$.



### Тема «Вычеты»

1. Найти вычет функции во всех конечных особых точках и в бесконечно удаленной точке

   а) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2(z+3)}$;

б) $f(z)=\dfrac{1+z^{10}}{z^9(z^2+4)}$;

в) $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z^2+1)^2}$;

г) $f(z)=\sin z\,\sin\dfrac{1}{z}$;

д) $f(z)=e^{\frac{z+2}{z}}$.

**2.** Вычислить

а) $\operatorname*{res}\limits_{z=0}\dfrac{z^4}{\sin^5 z}$;

б) $\operatorname*{res}\limits_{z=0}\dfrac{\operatorname{ctg}^2 z}{z}$.

**Тема «Вычисление интегралов»**

Вычислить интегралы

1. $\displaystyle\int\limits_{\partial D}\frac{e^z}{z^3(z+2)}dz,\ D\{|z|<1\}$,
2. $\displaystyle\int\limits_{\partial D}\frac{z^3}{z^2+1}e^{\frac{z+1}{z}}\,dz,\ D\left\{|z|<\frac{1}{2}\right\}$,
3. $\displaystyle\int\limits_{\partial D}\frac{z}{e^{z^2}-1}dz,\ D\{|z|<3\}$,
4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$,
5. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\cos\varphi}{3+\sin\varphi}d\varphi$ .

**Тема «Гармонические функции»**

Найти решение задачи Дирихле:

1) $\Delta u(z)=0$, $|z|<1$, $u\big|_{|z|=1}=\dfrac{\cos\varphi}{5+3\cos\varphi}$.

2) $\Delta u(z)=0$, $y>0$, $u\big|_{y=0}=\dfrac{x^2}{1+x^4}$.

# ЛИТЕРАТУРА

1. Волковыский Л. П., Лунц Г., Арамович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного.- М.: Наука, 1975.
2. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций.- М.: Наука, 1968.
3. Евграфов М. А. Аналитические функции.- М.: Наука, 1968.
4. Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. М.: ИЛ, 1963.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. –М.: Наука, 1965.
6. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. – М.: Наука, 1967. – Т. 1.
7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного.-М.: Наука, 1984.
8. Сборник задач по теории аналитических функций/ Под редакцией Евграфова М. А.-М.: Наука, 1972.
9. Сидоров Ю. В. , Федорюк М. В. , Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1989.
10. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.3, ч.2– М.: Наука, 1969.
11. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного. Т.1. М.: ИЛ, 1962.
12. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. - М.: Наука, 1985.- Ч. 1.