

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

А.С. Шаповалов

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Учебно-методическое пособие
для студентов физического факультета

Саратов 2015

УДК 537.533:533.7

Автор: *А.С. Шаповалов*

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ:
учеб.-метод. пособие для студентов физического факультета направлений
подготовки 03.03.02 «Физика» (бакалавриат) и 03.04.02 «Физика» (магистратура) [Электронное издание] /
А.С. Шаповалов. – Саратов: СГУ имени Н.Г. Чернышевского, 2015.

Рекомендуют к опубликованию:

Кафедра прикладной физики Саратовского государственного университета
(протокол № 14 от 28.08.2015 г.)

Доктор физико-математических наук, профессор *Д.А. Усанов*
(Саратовский государственный университет)

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| Введение..... | 4 |
| Глава 1. Законы распределения и моменты случайных величин..... | 6 |
| § 1.1. Распределение Максвелла..... | 6 |
| § 1.2. Законы распределения длины и времени свободного пробега молекул..... | 8 |
| § 1.3. Расчет вектора намагниченности парамагнетика..... | 12 |
| § 1.4. Расчет вектора поляризации полярного диэлектрика..... | 14 |
| Глава 2. Собственные спектры флуктуаций..... | 18 |
| § 2.1. О методах расчёта. Принципиальные положения, преимущества и границы применимости метода А.Ф. Голубенцева..... | 18 |
| § 2.2. Спектр флуктуаций продольной скорости электронного пучка на катоде в общем случае. Формула Рэка..... | 20 |
| § 2.3. Спектр флуктуаций поперечной скорости электронного пучка на катоде в общем и частном случаях..... | 25 |
| § 2.4. Спектр флуктуаций поперечных смещений электронного пучка на катоде в общем и частном случаях..... | 27 |
| § 2.5. Спектральная плотность теплового шума. Формула Найквиста..... | 32 |
| § 2.6. Спектральная плотность дробового шума в общем и частном случаях. Формула Шоттки..... | 34 |
| § 2.7. Спектральная плотность генерационно-рекомбинационного шума в полупроводниках..... | 39 |
| Глава 3. Взаимные спектры флуктуаций электронного пучка на неоднородном катоде..... | 42 |
| § 3.1. Общее выражение для взаимной спектральной плотности флуктуаций тока и продольной скорости электронного пучка..... | 43 |
| § 3.2. Общее выражение для взаимной спектральной плотности флуктуаций тока и поперечной скорости электронного пучка..... | 52 |
| § 3.3. Общее выражение для взаимной спектральной плотности флуктуаций тока и поперечных смещений электронного пучка..... | 59 |
| Заключение..... | 63 |
| Библиографический список..... | 64 |

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы методики проведения статистических расчётов в рамках общего курса физики, специального курса статистической электроники и др. представляются весьма актуальными. Практически все физические явления и процессы носят случайный характер. Поэтому их детальное теоретическое исследование требует статистического анализа. Данные эксперимента также требуют статистической обработки. Однако опыт преподавания показывает, что проведение статистических расчётов нередко вызывает у студентов серьёзные затруднения.

В период перехода на двухуровневую систему высшего образования создание и публикация учебно-методических разработок по всем разделам физики вообще и по указанному направлению в частности, играет особую роль. Это объясняется тем, что в соответствии с новыми учебными планами в настоящее время существенно повышается роль самостоятельной работы студентов. Совершенно очевидно, что эта работа не может быть эффективной без серьёзного методического обеспечения.

На младших курсах затруднения студентов при проведении статистических расчётов объясняются рядом причин. Прежде всего, тем, что студенты ещё не прослушали курс теории вероятностей и могут пользоваться только тем достаточно кратким изложением основ этой теории, которое они получают в рамках раздела «Молекулярная физика», входящего в курс общей физики. Другой не менее важной причиной является недостаточное число имеющихся учебно-методических разработок.

У студентов старших курсов, которые прослушали и курс теории вероятностей, и курс статистической физики, указанные затруднения объясняются, по-видимому, спецификой соответствующего математического аппарата, который требует значительного объёма времени для его освоения и приобретения практических навыков использования, а также недостаточным количеством учебного времени, выделяемого для теоретических курсов и практических занятий указанного профиля. (Достаточно сказать, что в рамках курса теории вероятностей на изложение теории случайных процессов реально лектор может выделить всего несколько лекций.) А это значит, что, излагая специальные курсы, такие, как, например, статистическая электроника, теория шумов электронных приборов, методы теоретического и экспериментального исследования шумов и флуктуаций и другие, лектор вынужден давать дополнительные сведения по теории случайных процессов, спектрально-корреляционному анализу, методам расчета статистических характеристик систем и процессов и т.д.

В данной работе излагается и обсуждается ряд методов и приёмов статистического анализа различных физических систем и процессов, которые расширяют представления об их статистических свойствах, закрепляют навыки проведения статистических расчётов, умение выбрать наиболее простой метод расчёта. Основное внимание уделяется примерам использования такой стандартной техники вероятностных расчетов, которая в ряде случаев позволяет существенно упростить соответствующие математические выкладки или провести их при более общих исходных предположениях. В связи с этим особый интерес представляет оригинальный метод расчета спектров флуктуаций, предложенный профессором Саратовского государственного университета А.Ф. Голубенцевым. Приводятся примеры применения этого метода, обосновываются необходимость, возможность и целесообразность его использования.

Отдельные параграфы пособия представляют собой, по существу, самостоятельные учебно-методические разработки. Тематика разработок разнообразная. Это обстоятельство предопределило такую структуру и порядок изложения материала, при которых содержание каждого параграфа можно рассмотреть без привлечения других частей пособия. Список рекомендуемой литературы дан к каждому параграфу отдельно. В каждом параграфе своя система обозначений физических величин, расшифровка обозначений, нумерация математических выражений. Кроме того, каждый параграф сопровождается аннотацией. Всё это должно облегчить работу читателя, которого интересует тематика некоторого конкретного параграфа. Материал первой главы предназначен, в основном, для студентов младших курсов, материалы последующих глав – для студентов старших курсов и аспирантов.

Указанные разработки в разные годы были опубликованы в разделе «Образование» межвузовского научного сборника «Вопросы прикладной физики» издательства Саратовского государственного университета.

Глава 1. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 1.1. Распределение Максвелла

Приводится краткий обзор методик изложения вопроса о распределении Максвелла и его выводе, которые используются в отечественных и зарубежных учебниках. Обсуждается переход от трёхмерной нормальной плотности распределения проекций скорости молекул к Максвелловскому закону распределения абсолютной величины скорости. Предлагается простой математический прием получения указанного закона, основанный на использовании элементарных сведений из теории вероятностей.

Выводы законов распределения абсолютной величины и проекций скорости молекул, которые приводятся в рамках курса общей физики [1-14], нередко вызывают затруднения у студентов. О сложности необходимых расчетов свидетельствует тот факт, что в ряде отечественных и зарубежных учебников законы распределения молекулярных скоростей даются без вывода [15-24] или не даются вообще [25]. Для более полного усвоения материала по этой тематике представляется целесообразным применение в лекционных курсах и, главное, на практических занятиях, различных подходов на отдельных этапах вывода Максвелловского закона. В данной работе обсуждается переход от нормального трехмерного закона распределения проекций скорости к плотности распределения модуля скорости молекул. Наряду с выкладками, используемыми в большинстве литературных источников, предлагается использование стандартного вероятностного расчета.

Анализ отечественных и зарубежных учебников и учебных пособий показывает, что при изложении материала о распределении скоростей молекул вначале, как правило, определяется трехмерный нормальный закон распределения проекций скорости [1-13]. Это первый этап расчетов. Второй этап расчетов содержит вывод Максвелловской плотности распределения $f(v)$ абсолютной величины скорости молекул v , который базируется на нормальном распределении $\varphi(v_x, v_y, v_z)$ проекций v_x, v_y, v_z скорости. На этом этапе подавляющее большинство авторов [1-12] в качестве основного методического приема вводит в рассмотрение условное пространство скоростей, плотность

изображающих точек и число таких точек, которые попадают в шаровой слой радиуса v и толщиной dv . Плотность распределения v определяется как относительное число изображающих точек, попадающих в слой заданного радиуса и единичной толщины. С методической точки зрения этот прием, по видимому, следует считать наиболее оправданным. Однако, отличаясь высокой наглядностью и достаточной простотой, он требует дополнительных геометрических построений и соответствующих пояснений, которые делают его несколько громоздким. Если же эти построения в целях экономии времени опускаются, то основное достоинство метода, а именно его наглядность, в значительной степени теряется.

Второй этап расчета $f(v)$ можно провести и без введения в рассмотрение условного пространства скоростей молекул, то есть чисто математически. Так поступает, например, автор учебного пособия [13]. Соответствующие выкладки проведены здесь компактно и кратко. К сожалению, переход от $\varphi(v_x, v_y, v_z)$ к $f(v)$ в этом пособии практически не обосновывается с вероятностной точки зрения. Поэтому при практическом использовании эту методику необходимо дополнить ссылками на теоремы теории вероятностей и соответствующими пояснениями.

Если условное пространство скоростей вводится в рассмотрение, то расчет $f(v)$ возможен и без предварительного определения трехмерного закона распределения проекций скорости $\varphi(v_x, v_y, v_z)$. Один из вариантов такого расчета содержится в [14] и основывается на использовании распределения Гиббса. Естественно, он требует предварительной информации о распределении Гиббса и, как показывает практика, является более сложным для понимания, чем приемы, указанные выше.

Очевидно, что для более полного понимания вывода и содержания закона Максвелла желательно применение разных подходов к его расчету, что можно сделать на практических занятиях.

В данном пособии предлагается следующий подход [26]. При известном распределении $\varphi(v_x, v_y, v_z)$ плотность распределения $f(v)$ нетрудно получить на основе известной связи $f(v)$ с интегральной функцией распределения $F(v)$ модуля скорости [26], которая рассчитывается довольно просто. Действительно,

$$f(v) = \frac{\partial F(v)}{\partial v},$$

где $F(v) = P(\mathbf{U} > v)$ - вероятность того, что случайный модуль скорости молекулы $\mathbf{U} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ меньше некоторого текущего значения v . Согласно формуле полной вероятности функция распределения $F(v)$ равна интегралу от трехмерной нормальной плотности вероятности проекций скорости $\varphi(v_x, v_y, v_z)$ по области D значений проекций v_x, v_y, v_z , представляющей объем сферы радиуса v

$$F(v) = \iiint_{(D)} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right\} dv_x dv_y dv_z. \quad (1.1.1)$$

На первый взгляд взятие такого интеграла представляется сложным. В действительности же вычисления сильно упрощаются, если от декартовых переменных v_x, v_y, v_z перейти к сферическим координатам u, θ, φ . Осуществив замену переменных

$$v_x = u \sin \theta \cos \varphi, \quad v_y = u \sin \theta \sin \varphi, \quad v_z = u \cos \theta,$$

и, учитывая, что

$$dv_x dv_y dv_z = u^2 \sin \theta du d\theta d\varphi,$$

выражение (1.1.1) можно представить так:

$$F(v) = \int_{u=0}^v \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{mu^2}{2kT} \right\} u^2 \sin \theta du d\theta d\varphi. \quad (1.1.2)$$

Проинтегрировав (1.1.2) по θ и φ , получим интеграл с переменным верхним пределом

$$F(v) = \int_0^v \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi u^2 \exp \left\{ -\frac{mu^2}{2kT} \right\} du. \quad (1.1.3)$$

Дифференцируя (1.1.3) по v , приходим к искомому выражению для плотности распределения Максвелла

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 \exp \left\{ -\frac{mv^2}{2kT} \right\}.$$

Использование приведенного подхода способствует развитию навыков вероятностных расчетов.

§ 1.2. Законы распределения длины и времени свободного пробега молекул

Обсуждаются простой статистически корректный вывод законов распределения длины и времени свободного пробега молекул и границы применимости полученных результатов. Вывод основывается на использовании основных свойств стационарного пуассоновского потока событий.

Изучение курса общей физики, в частности молекулярной физики, требует использования статистических методов описания состояния системы, расчета и анализа ее характеристик. Так, статистически полное и корректное описание модели вещества в газообразном состоянии предполагает введение в рассмотрение законов распределения всех основных случайных величин, харак-

теризующих движение молекул и в том числе плотности распределения вероятности $f(x)$ длины свободного пробега частиц x , плотности распределения вероятности $g(t)$ времени их свободного движения t . Однако в учебной литературе [1-10], как правило, указанным законам уделяется значительно меньше внимания, чем, например, распределению скорости молекул или потенциальной энергии. Довольно часто законы распределения длины и времени свободного пробега молекул вообще не приводятся [4-7], а иногда даются без вывода [8]. Как правило, основное внимание уделяется расчету числовых характеристик этих случайных величин, т.е. их математическим ожиданиям. В тех же источниках [1-3, 9,10], где вывод указанных законов все-таки приводится, расчет базируется на рассмотрении одномерной физической модели рассеяния молекулярного пучка на частицах газа, в рамках которого расчетные соотношения для уменьшения интенсивности пучка обосновываются не статистическими, а физическими соображениями. При этом остается открытым вопрос о границах применимости полученного результата. Основным достоинством такого подхода является, по-видимому, его наглядность. Однако более последовательным и корректным представляется подход, в рамках которого физические соображения привлекаются для обоснования статистических свойств потока событий, представляющего собой последовательность актов столкновения молекул, а сам вывод основывается на основных теоремах теории вероятностей. При таком подходе заключение о границах применимости конечного результата простым и явным образом следует из исходных положений о свойствах анализируемого потока событий. Кроме того, он способствует развитию навыков статистических расчетов. Поскольку оба подхода обладают определенными достоинствами и с методической точки зрения дополняют друг друга, очевидно, следует рекомендовать использование одного из них в лекционном курсе, а другого - на семинарских занятиях.

Статистическая методика получения законов распределения длины и времени свободного движения молекул одна и та же. В дальнейшем для определенности речь пойдет о ее применении для вывода закона распределения длины свободного пробега молекул $f(x)$. Распространение этой методики на вывод плотности распределения времени свободного пробега молекул, по существу, сводится к изменению системы обозначений соответствующих величин.

Статистически корректный вывод экспоненциального закона распределения длины свободного пробега молекул $f(x)$, основанный на свойствах пуассоновского потока событий можно найти в ряде источников. Один из наиболее компактных вариантов этого вывода представлен в [11]. Дополнив указанные математические выкладки [11] обоснованием и констатацией свойств пуассоновского потока событий [12], а также явным выражением конечного результата в виде плотности распределения вероятности $f(x)$ длины свободного пробега, получим статистически корректный и последовательный способ изложения обсуждаемого вопроса в рамках курса общей физики. С учетом сказанного рекомендуемый вариант расчета принимает вид, который приводится ниже.

Исходя из физических соображений, нетрудно видеть, что в состоянии термодинамического равновесия системы последовательность актов столкновения молекул, т.е. рассматриваемый поток событий, обладает свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности. В рамках данной работы физическое обоснование этих свойств можно опустить в виду его элементарности и ограничиться обсуждением существования указанных свойств [12].

1. Стационарность потока означает, что вероятность попадания того или иного числа событий на некоторый интервал длины Δx зависит только от длины этого интервала и не зависит от того, где именно на оси x расположен этот интервал. Можно показать, что это свойство выражает требование постоянства плотности событий (среднего числа событий, возникающих на единице длины)

2. Отсутствие последействия означает, что для любых непересекающихся элементов длины число событий, попадающих на один элемент, не зависит от числа событий, попадающих на другой. Это свойство потока, выражающее требование взаимной независимости того или иного числа событий возникающих на непересекающихся элементах длины, обуславливается тем, что отдельные события в рассматриваемой системе возникают независимо друг от друга.

3. Ординарность потока означает, что вероятность попадания на элементарный (бесконечно малый) интервал длины Δx двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Другими словами это свойство выражает требование практической невозможности появления двух или нескольких событий на малом интервале длины Δx . Вероятность появления одного события на интервале Δx пропорциональна величине Δx , то есть является бесконечно малой величиной порядка Δx , а вероятности появления двух и более событий есть бесконечно малые высшего порядка по сравнению с Δx .

Для определения плотности распределения длины свободного пробега молекул введем в рассмотрение вспомогательную функцию $P_0(x)$, представляющую собой вероятность того, что на длине x не происходит ни одного столкновения. Вероятность $P_0(x + dx)$ события, состоящего в том, что молекула не испытает ни одного столкновения на длине $x + dx$ в соответствии с первыми двумя свойствами рассматриваемого потока событий и следствием из теоремы умножения вероятностей запишется так:

$$P_0(x + dx) = P_0(x)P_0(dx). \quad (1.2.1)$$

Здесь $P_0(dx)$ - вероятность отсутствия столкновений на интервале dx .

На основании третьего свойства потока вероятность $P_1(dx)$ появления одного события на интервале dx можно представить таким образом:

$$P_1(dx) = \frac{dx}{\lambda},$$

где λ - постоянная величина, статистический смысл которой будет определен позднее. Согласно указанному свойству потока и следствию из теоремы сложения вероятностей

$$P_0(dx) + P_1(dx) = 1.$$

Следовательно

$$P_0(dx) = 1 - \frac{dx}{\lambda}. \quad (1.2.2)$$

Подставляя (1.2.2) в (1.2.1), приходим к выражению

$$P_0(x + dx) = P_0(x) \left(1 - \frac{dx}{\lambda} \right).$$

Разлагая $P_0(x + dx)$ в ряд по степеням dx и ограничиваясь величинами первого порядка малости, получаем дифференциальное уравнение

$$dP_0(x) = -P_0(x) \frac{dx}{\lambda}, \quad (1.2.3)$$

которое необходимо решить при очевидном граничном условии: $P_0(0) = 1$.

Нетрудно показать [11], что решение уравнения (1.2.3) имеет вид

$$P_0(x) = \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right). \quad (1.2.4)$$

По своему статистическому смыслу $P_0(x)$ представляет собой вероятность $P(X \geq x)$ того, что случайная длина свободного пробега X больше или равна некоторому возможному значению x . Согласно следствию из теоремы сложения вероятностей

$$P(X \geq x) + P(X < x) = 1, \quad (1.2.5)$$

где $P(X < x)$ - вероятность события, указанного в круглой скобке. По определению вероятность $P(X < x)$ является интегральной функцией $F(x)$ распределения случайной величины X . Таким образом, из (1.2.4) и (1.2.5) следует интегральный закон распределения длины свободного пробега в виде

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right). \quad (1.2.6)$$

Как известно, дифференциальный закон распределения случайной величины X , то есть плотность распределения вероятности $f(x)$, является производной от функции $F(x)$. Дифференцируя (1.2.6), получаем искомую плотность распределения длины свободного пробега молекул

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right). \quad (1.2.7)$$

Для выяснения статистического смысла постоянной λ найдем математическое ожидание $M(X)$ длины свободного пробега

$$M\{X\} = \int_0^{\infty} x \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) dx = \lambda.$$

Таким образом, параметр λ в приведенных соотношениях есть не что иное, как средняя длина свободного пробега молекул.

Приведенный вывод закона распределения (1.2.7) базируется на использовании трех основных свойств пуассоновского потока событий. Следовательно, существование определенных границ применимости полученного результата связано с нарушениями этих свойств в различных физических ситуациях. Применимость будет вполне корректна, если процесс столкновений протекает во времени достаточно однородно и плотность событий постоянна (поток стационарен), если отдельные столкновения происходят независимо друг от друга (отсутствует последствие), если вероятность двойных, тройных и т.д. столкновений пренебрежимо мала (поток ординарен).

Использованную схему расчета можно применить и для вывода закона распределения времени свободного пробега молекул. Действительно, если вместо случайной величиной X , ее возможного значения x и среднего значения λ в рассмотрение ввести случайное время свободного пробега T , его возможное значение t и среднее значение τ , то повторное проведение выкладок в новой системе обозначений приведет к плотности распределения времени свободного пробега $g(t)$ в виде

$$g(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Совпадение законов распределения длины и времени свободного пробега молекул объясняется тем, что поток столкновений является пуассоновским.

§ 1.3. Расчет вектора намагниченности парамагнетика

Обсуждается простой вывод закона распределения собственных магнитных моментов молекул по направлению и упрощенный расчет вектора намагниченности парамагнетика во внешнем магнитном поле.

В рамках курса общей физики для студентов физического факультета, начиная с раздела "Молекулярная физика и термодинамика", на лекциях и семинарских занятиях уделяется большое внимание изучению законов распределения случайных величин, методики усреднения, приемам нахождения плотности распределения функции случайного аргумента и другим вероятностным вопросам. Естественно, что для закрепления и дальнейшего углубления этих знаний и приемов весьма полезным является их практическое применение в последующих разделах курса. Тем более что использование стандартной техники вероятностных расчетов в ряде случаев позволяет существенно сократить или упростить соответствующие математические выкладки. В данной работе приводятся простой способ получения закона распределения собственных магнитных моментов молекул парамагнетика по

направлению во внешнем магнитном поле и расчет намагниченности вещества.

Абсолютная величина вектора намагниченности J парамагнетика равна сумме проекций собственных магнитных моментов молекул p_m на направление вектора магнитной индукции B намагничивающего поля. Эту величину можно представить так [1-4]:

$$J = np_m \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \cos \alpha_i \right), \quad (1.3.1)$$

где n - концентрация молекул, α_i - угол (острый) между вектором собственного магнитного момента i -й молекулы и вектором магнитной индукции. Величина, стоящая в круглых скобках, по своему статистическому смыслу является математическим ожиданием $M\{\cos \alpha\}$, нахождение которого требует знания закона распределения случайного угла α .

Для нахождения плотности распределения $\varphi(\alpha)$ угла α воспользуемся законом распределением $f(U)$ Больцмана частиц по потенциальной энергии U

$$f(U) = C \exp\left(-\frac{U}{kT}\right). \quad (1.3.2)$$

Здесь C - постоянная, определяемая из условия нормировки, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура вещества. Потенциальная энергия магнитного диполя в магнитном поле равна

$$U = -p_m B \cos \alpha. \quad (1.3.3)$$

Угол α изменяется в пределах от 0 до π , где функция $U(\alpha)$ монотонна. Следовательно, плотность распределения $\varphi(\alpha)$ может быть найдена как плотность вероятности функции случайного аргумента на основе известного выражения [4], которое знакомо учащимся из решений ряда задач молекулярной физики,

$$\varphi(\alpha) = f(U) |U'_\alpha|, \quad (1.3.4)$$

где $|U'_\alpha|$ - абсолютная величина производной от потенциальной энергии по углу α .

Подстановка (1.3.2) и (1.3.3) в (1.3.4) позволяет записать искомое распределение угла с точностью до нормировочного множителя в следующем виде:

$$\varphi(\alpha) = C \frac{p_m B}{kT} \sin \alpha \exp\left\{\frac{p_m B}{kT} \cos \alpha\right\}. \quad (1.3.5)$$

Обычно при подобных расчетах предполагается, что величина $\frac{p_m B}{kT}$ значительно меньше единицы [1]. Разлагая экспоненту в выражении (1.3.5) в степенной ряд и ограничиваясь членами 1-го порядка малости, получим

$$\varphi(\alpha) = C \frac{p_m B}{kT} \left[1 + \frac{p_m B}{kT} \cos \alpha \right] \sin \alpha. \quad (1.3.6)$$

Из условия нормировки $\int_0^{\pi} \varphi(\alpha) d\alpha = 1$ следует

$$C = \frac{kT}{2p_m B}. \quad (1.3.7)$$

Подставляя (1.3.7) в (1.3.6), получаем окончательное выражение для плотности распределения α

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_m B}{kT} \cos \alpha \right) \sin \alpha.$$

Этот результат соответствует данным работ [1-3], полученным при помощи более длительных рассуждений.

Расчет математического ожидания $M\{\cos \alpha\}$ сводится к вычислению простого интеграла

$$M\{\cos \alpha\} = \int_0^{\pi} \cos \alpha \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_m B}{kT} \cos \alpha \right) \sin \alpha d\alpha = \frac{p_m B}{3kT}. \quad (1.3.8)$$

Подстановка (1.3.8) в (1.3.1) дает известное выражение [1-3] для абсолютной величины вектора намагниченности парамагнетика

$$J = \frac{np_m^2 B}{3kT}.$$

Нетрудно видеть, что рассмотренный подход может быть использован и при расчете вектора поляризации полярных диэлектриков.

§ 1.4. Расчет вектора поляризации полярного диэлектрика

Обсуждается простой вывод закона распределения собственных электрических моментов молекул по направлению и расчет вектора поляризации полярного диэлектрика во внешнем электрическом поле.

В предыдущем параграфе и в работе [1] для закрепления представлений об основных статистических понятиях и технике вероятностных расчетов предложен методический прием расчета намагниченности парамагнетика, предполагающий определение и непосредственное использование плотности распределения случайного угла α между направлением собственного магнитного момента молекулы и направлением внешнего магнитного поля. В данном параграфе этот прием применяется для расчета абсолютной величины вектора поляризации P полярного диэлектрика. Порядок расчета сохраняется прежним [1]. В первой части параграфа сам расчет, по существу, сводится к замене в соответствующих выражениях работы [1] потенциальной энергии магнитного диполя во внешнем магнитном поле потенциальной энергией электрического диполя во внешнем электрическом поле. Во второй части па-

рафа снимается основное упрощающее предположение о том, что напряженность внешнего поля мала, и приводятся более точные результаты вычислений. Основная отличительная черта работы состоит в том, что все вероятностные характеристики случайного угла α - плотность распределения, математическое ожидание функции этого угла - определяются стандартными методами теории вероятностей.

Выражение для абсолютной величины P вектора поляризации полярного диэлектрика запишем в виде [2,3]

$$P = np_0 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \cos \alpha_i \right), \quad (1.4.1)$$

где n - концентрация молекул, p_0 - абсолютная величина собственного электрического момента молекул, α_i - случайный угол между вектором p_0 собственного электрического момента i -й молекулы и вектором напряженности электрического поля E . Величина угла α изменяется в пределах от 0 до π . Для описания распределения электрических моментов молекул по направлению достаточно определить плотность распределения $\varphi(\alpha)$ случайной величины α .

Определение численного значения вектора поляризации сводится к расчету величины, стоящей в круглых скобках и являющейся математическим ожиданием $M\{\cos \alpha\}$, и требует знания плотности распределения $\varphi(\alpha)$.

Выражение для $\varphi(\alpha)$ нетрудно получить при помощи подходов, использованных в [2,3] для определения функций, связанных с $\varphi(\alpha)$. Однако стандартный метод теории вероятностей, применяемый для нахождения плотности вероятности функции случайного аргумента, позволяет это сделать проще и короче.

Во внешнем электрическом поле молекулы парамагнетика распределены по потенциальной энергии U в соответствии с законом Больцмана

$$f(U) = C \exp\left(-\frac{U}{kT}\right), \quad (1.4.2)$$

где C - постоянная, определяемая из условия нормировки, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура вещества.

Потенциальная энергия U электрических диполей является функцией случайного аргумента

$$U = -p_0 E \cos \alpha,$$

которая при изменении α от 0 до π ведет себя монотонно. Следовательно, плотность распределения $\varphi(\alpha)$ можно найти при помощи известного выражения [4]

$$\varphi(\alpha) = f(U) |U'_\alpha|, \quad (1.4.3)$$

где $|U'_\alpha|$ - абсолютная величина производной от потенциальной энергии по углу α . Выполнив в (1.4.3) дифференцирование функции $U(\alpha)$, получим

$$\varphi(\alpha) = C \beta k T \sin \alpha \exp\{\beta \cos \alpha\}, \quad (1.4.4)$$

где $\beta = p_0 E / kT$

Предположим, что напряженность поля достаточно мала, т.е.

$$p_0 E \ll kT, \quad (1.4.5)$$

$\beta \ll 1$ (на практике это условие обычно выполняется). Разложим экспоненту в (1.4.4) в ряд по степеням $\beta \cos \alpha$ и ограничимся членами 1-го порядка малости. Тогда (1.4.4) примет вид

$$\varphi(\alpha) = C \beta kT [1 + \beta \cos \alpha] \sin \alpha.$$

Используя условие нормировки

$$\int_0^{\pi} \varphi(\alpha) d\alpha = 1,$$

получаем $C = 1/2\beta kT$. В результате окончательное выражение для плотности распределения угла α в рамках принятого приближения запишется так:

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \alpha \right) \sin \alpha. \quad (1.4.6)$$

Знание плотности распределения (1.4.6) позволяет легко найти математическое ожидание

$$M\{\cos \alpha\} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos \alpha (1 + \beta \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha = \frac{\beta}{3} = \frac{p_0 E}{3kT}, \quad (1.4.7)$$

подстановка которого в (1.4.1) дает известное выражение [2,3] для модуля вектора поляризации

$$P = \frac{np_0^2 E}{3kT}. \quad (1.4.8)$$

Как уже говорилось упрощающее предположение (1.4.5), использованное в приведенном расчете, выполняется в большинстве практически важных случаев. Поэтому расчет величины P обычно проводится именно в этом приближении. Однако следует иметь в виду, что в этом случае окончательный результат (1.4.8) содержат принципиальный недостаток. Действительно, из (1.4.8) не следует возможность "насыщения" величины P при высоких значениях напряженности поля и достижения уровня максимальной поляризованности вещества, когда $P = np_0$. Что касается выражения (1.4.6), то оно не дает правильных представлений о законе распределения электрических моментов молекул по направлению в сильных электрических полях. Поэтому более последовательным представляется расчет плотности распределения $\varphi(\alpha)$ и модуля вектора поляризации P в общем случае, т.е. без наложения предварительных условий на величину $p_0 E / kT$. Тем более, что этот расчет по сравнению с изложенным не содержит каких-либо дополнительных математических трудностей.

В самом деле, если на (1.4.4) не накладывается ограничение (1.4.5), то из условия нормировки следует

$$C = \frac{1}{2kT \operatorname{Sh} \beta},$$

и плотность вероятности $\varphi(\alpha)$ имеет вид

$$\varphi(\alpha) = \frac{\beta}{2 \operatorname{Sh} \beta} \sin \alpha \exp(\beta \cos \alpha) \quad (1.4.9)$$

Расчет математического ожидания $M\{\cos \alpha\}$ в этом случае сводится к вычислению несложного интеграла (первообразная выражается элементарной функцией) и дает следующий результат

$$M\{\cos \alpha\} = \frac{\beta}{2 \operatorname{Sh} \beta} \int_0^{\pi} \cos \alpha \sin \alpha \exp(\beta \cos \alpha) d\alpha = L(\beta), \quad (1.4.10)$$

где $L(\beta) = \operatorname{cth} \beta - \frac{1}{\beta}$ - функция Ланжевена [3]. Подставив (1.4.10) в выражение (1.4.1) для P , получим

$$P = L(\beta) n p_0. \quad (1.4.11)$$

Если напряжённость электрического поля достаточно мала, т.е. $\beta \ll 1$ ($p_0 E \ll kT$), то $L(\beta) \cong \beta/3$ [3], и из (1.4.11) следует (1.4.8).

Если же напряжённость электрического поля достаточно велика, т.е. $\beta \gg 1$ ($p_0 E \gg kT$), то $L(\beta) \cong 1$ [3]. В этом случае наблюдается максимально возможная поляризованность вещества, абсолютная величина вектора поляризации практически не зависит от напряженности поля и равна $P = n p_0$.

В заключение отметим, что если под β понимать отношение $p_m B / kT$ (p_m - модуль магнитного момента молекулы, B - модуль индукции магнитного поля), то выражение (1.4.9) будет описывать распределение по направлению собственных магнитных моментов молекул в магнитном поле, а правая часть равенства (1.4.11) будет определять модуль вектора намагниченности J парамагнетика.

Глава 2 СОБСТВЕННЫЕ СПЕКТРЫ ФЛУКТУАЦИЙ

Для расчёта спектров флуктуаций можно использовать множество методов, ставших классическими. В различных конкретных случаях авторы выбирают тот или иной метод, который, по их мнению, является оптимальным при решении поставленной задачи. В данной работе основное внимание уделяется методам, которые отличаются или простотой расчёта, или более общим характером исходных предположений о статистических свойствах математической модели изучаемого случайного процесса. В частности, такими качествами обладает оригинальный метод расчёта, предложенный профессором Саратовского государственного университета А.Ф. Голубенцевым. Ниже приводятся примеры расчёта спектров флуктуаций, большинство из которых проводится именно этим методом.

§ 2.1. О методах расчёта. Принципиальные положения, преимущества и границы применимости метода А.Ф. Голубенцева

Обсуждается метод расчета спектров флуктуаций, предложенный
А.Ф. Голубенцевым.

Одна из фундаментальных работ А.Ф. Голубенцева [1] посвящена детальному исследованию важной проблемы радиофизики и электроники – флуктуациям нормальной (продольной) составляющей скорости электронного пучка на поверхности катода. Помимо критического анализа различных подходов (Рэка [2], Ядавalli [3]) к выводу выражения для спектральной плотности флуктуаций скорости, выяснения границ применимости этого выражения, автор [1] предлагает, по существу, оригинальный метод расчета спектра.

Единственным ограничением метода является предположение о дельта-коррелированности флуктуаций. Другими словами, он позволяет определить спектральную плотность $S_v(\omega)$ флуктуаций продольной скорости $v(t)$ электронного пучка для той области частот, где спектр флуктуаций является равномерным, что позволяет условно считать флуктуации $v(t)$ белым шумом. В то же время, в определенном смысле, метод А.Ф. Голубенцева носит более общий характер, чем традиционный подход.

Действительно, при классическом выводе выражения для спектральной плотности флуктуаций скорости электронного пучка [4,5] электроны, эмитируемые катодом, делятся на скоростные классы. Затем определяются средние

квадраты флуктуаций средней скорости электронов каждого класса, которые вызываются дробовыми флуктуациями элементов тока, обусловленных электронами этих классов. Флуктуации элементов тока считаются независимыми, поэтому результирующее значение среднего квадрата флуктуаций скорости определяется суммированием (интегрированием) соответствующих величин, отвечающих отдельным скоростным классам частиц. При этом предполагается, что продольная скорость электронов распределена по закону Релея, а флуктуации тока определяются формулой Шоттки. Совершенно очевидно, что указанные предположения справедливы не всегда. На реальном неоднородном эмиттере они могут не выполняться [6]. Эксперименты показывают, что дисперсия скорости электронов, испускаемых подобными эмиттерами, довольно часто не отвечает Релеевскому закону распределения скорости, а спектр дробового шума реального катода в ряде случаев описывается выражением, отличным от формулы Шоттки и характеризуется аномально высоким уровнем [7-10]. Таким образом, для указанных случаев необходимо использование такого метода расчёта и получение общего соотношения для спектра флуктуаций скорости пучка, которые соответствуют произвольным закону распределению скорости электронов и спектру флуктуаций тока. Именно этим требованиям удовлетворяют метод расчета и конечный результат А.Ф. Голубенцева.

Достоинством метода является высокая степень его физического обоснования. В самом деле, основная трудность расчета спектра флуктуаций скорости связана с тем, что "при решении задачи о взаимодействии электромагнитной волны с электронным потоком последний обычно рассматривается как непрерывная среда", а "шумы в электронных потоках неразрывно связаны именно с дискретностью электронного пучка". В рамках дискретной модели поток характеризуется решетчатой (дискретной) случайной функцией $v_e(t)$, которая представляет собой скорость отдельных электронов и определена лишь для моментов вылета частиц из катода. В рамках гидродинамической (непрерывной) модели пучок описывается непрерывной случайной функцией $v(t)$, являющейся скоростью электронного потока и определенной для любого момента времени. Таким образом, трудность расчета спектра $v(t)$, в конечном счете, заключается в обосновании "разумного" перехода от $v_e(t)$ к $v(t)$. Этот переход может быть осуществлен разными способами. Примером могут служить способы Рэка [2] и Ядавalli [3]. В связи с этим возникает вопрос о том, какой из них считать более обоснованным. На этот вопрос А.Ф. Голубенцев дал совершенно определенный ответ: "так как, в конечном счете, интересуются только корреляционной функцией случайной функции $v(t)$, то естественным является требование "инвариантности" корреляционной функции $v(t)$ относительно способа перехода от дискретного рассмотрения к гидродинамическому". Этот критерий обоснованности перехода от дискретной модели пучка к гидродинамической и был положен А.Ф.Голубенцевым в основу его метода.

Принципиальным достоинством метода является возможность его применения для расчета спектра флуктуаций не только продольной скорости электронного пучка. Его можно использовать, в принципе, во многих задачах, решение которых связано с переходом от дискретной случайной функции к непрерывной. При этом получаемые результаты соответствуют произвольным законам распределения случайных величин, характеризующих дискретную модель исследуемой физической системы, а классические данные о соответствующих спектрах флуктуаций вытекают из найденных этим методом как частные случаи. Опыт показал, что метод А.Ф. Голубенцева может успешно применяться при расчете спектра флуктуаций поперечной скорости [11], спектральной плотности флуктуаций поперечных смещений электронного пучка на катоде [12], спектра теплового шума [13]. В работе [14] А.Ф. Голубенцев и его ученик Л.М. Минкин наглядно продемонстрировали эффективность применения обсуждаемого метода для расчета спектра дробового шума.

Подход А.Ф. Голубенцева к разработке метода расчета спектров флуктуаций, при котором в основу расчета закладывается критерий корректности перехода от дискретной модели пучка к гидродинамической весьма плодотворен. Вопрос о корректности указанного перехода и методики расчета спектров возникает при исследовании не только собственных, но и взаимных спектральных плотностей флуктуаций электронного пучка. Совершенно очевидно, что в этом случае критерий корректности перехода должен быть дополнен требованием "инвариантности" взаимной корреляционной функции флуктуаций относительно способа перехода, и это требование должно быть положено в основу метода расчета взаимных спектров флуктуаций. Такой подход позволил разработать методику расчета взаимных спектров флуктуаций тока и продольной скорости [15], тока и поперечной скорости [16], тока и поперечных смещений [17] электронного пучка на неоднородном катоде.

Ценной чертой метода А.Ф. Голубенцева является также его простота. Расчеты этим методом не содержат громоздкие математические выкладки. С точки зрения трудоемкости он весьма "экономичен".

Ниже приводятся результаты применения указанного метода для расчета собственных спектров флуктуаций.

§ 2.2. Спектр флуктуаций продольной скорости электронного пучка на катоде в общем случае. Формула Рэка.

Предлагается методическое упрощение вывода формулы Рэка. Необходимые вычисления основываются на применении метода А.Ф. Голубенцева.

В общих и специальных курсах по статистической радиофизике и электронике значительное внимание уделяется расчету спектров флуктуаций, генерируемых фундаментальными источниками шума. К таким расчетам, в част-

ности, относится вывод формулы Рэка для спектральной плотности флуктуаций продольной (перпендикулярной эмитирующей поверхности) скорости электронного пучка на катоде. Классическое выражение, для спектральной плотности флуктуаций скорости [1] получено при предположении, что скорость электронов распределена по закону Релея, а флуктуации тока описываются формулой Шоттки [2]. Исследование спектральной плотности флуктуаций скорости электронного пучка на неоднородном катоде требует применения более общего выражения для спектра, соответствующего произвольному закону распределения скорости электронов и произвольному спектру флуктуаций тока. Неоднородному катоду указанные выше предположения в общем случае не отвечают [3]. В связи с этим большой теоретический и практический интерес представляет метод расчета спектра флуктуаций, предложенный А.Ф.Голубенцевым [4] и основанный на нетрадиционном подходе. Этот метод достаточно подробно описан в [4-6] и используется на практике [7]. В данной работе предлагается методическое упрощение определения спектра флуктуаций скорости методом А.Ф. Голубенцева, касающееся расчета одного из промежуточных соотношений вывода. После чего в целях удобства использования работы в учебно-исследовательской практике приводится полная схема вывода спектра флуктуаций скорости, учитывающая указанное упрощение.

Предлагаемое упрощение вывода, по существу, сводится к приближенному определению математического ожидания $M\left\{\frac{1}{n}\right\}$, где n – число электронов, испущенных катодом за некоторый (конечный) интервал времени T . Для вычисления этого математического ожидания представим число частиц n в виде суммы

$$n = \bar{n} + \delta n = \bar{n} \left(1 + \frac{\delta n}{\bar{n}}\right),$$

где $\bar{n} = M\{n\}$ – среднее число частиц, испущенных за время T , δn – отклонение от среднего, M – символ взятия математического ожидания. Считая, что время T достаточно велико и $\delta n \ll \bar{n}$, разложим величину $\frac{1}{n}$ в ряд по степеням $\frac{\delta n}{\bar{n}}$ и ограничимся членами второго порядка малости. Получим

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\bar{n}} \left(1 - \frac{\delta n}{\bar{n}} + \frac{\delta n^2}{(\bar{n})^2}\right)$$

Усреднение этого выражения приводит к равенству

$$M\left\{\frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{\bar{n}} \left(1 + \frac{M(\delta n^2)}{(\bar{n})^2}\right). \quad (2.2.1)$$

Если, как и в [4-6], предположить, что число частиц n распределено по закону Пуассона, то $M\{\delta n^2\} = \bar{n}$, и из (2.2.1) следует

$$M\left\{\frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{\bar{n}} \left(1 + \frac{1}{\bar{n}}\right). \quad (2.2.2)$$

Если T достаточно велико и $\bar{n} \gg 1$, то

$$M\left\{\frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{\bar{n}}. \quad (2.2.3)$$

Очевидно, что таким приемом и выражением (2.2.1) можно пользоваться при любом законе распределения n , но равенства (2.2.2), (2.2.3) справедливы только для Пуассоновского закона.

Приведенные вычисления являются фрагментом расчета спектра флуктуаций скорости, полную схему которого без проведения элементарных выкладок можно представить таким образом.

Как и в [4-6], продольную скорость $v(t)$ электронного пучка, которая должна быть задана для любого момента времени, определим методом "мгновенного усреднения" Рэка скорости v_e отдельных электронов, скомбинированным с естественным требованием стационарности процесса $v(t)$. Это означает, что в качестве $v(t)$ принимается средняя скорость электронов, эмитированных катодом за физически бесконечно малый интервал времени. Поскольку метод расчёта может быть использован для определения спектра флуктуаций не только продольной скорости электронного пучка, но и его поперечной скорости, поперечных смещений и т.д., в дальнейшем скорость пучка и скорости отдельных электронов будем обозначать соответственно $v(t)$ и $v_e(t)$.

Флуктуации скорости пучка будем считать дельта-коррелированным случайным процессом. Следовательно, полученные соотношения будут справедливы для равномерной части спектра флуктуаций скорости. Принятое предположение позволяет представить автокорреляционную функцию $R_v(\tau)$ скорости пучка в виде

$$R_v(\tau) = R_{0v} \delta(\tau), \quad (2.2.4)$$

где R_{0v} – постоянная величина, $\delta(\tau)$ - дельта-функция, τ - разность моментов времени.

Из выражения (2.2.4) и соотношения Хинчина-Винера следует, что спектральная плотность $S_v(\omega)$ флуктуаций скорости будет иметь вид

$$S_v(\omega) = \frac{R_{0v}}{2\pi}. \quad (2.2.5)$$

Здесь ω - круговая частота.

Для нахождения постоянной R_{0v} введём в рассмотрение вспомогательную функцию $v^T(t)$, представляющую среднее за некоторый конечный интервал времени T значение скорости электронного пучка. Эта функция замечательна тем, что она допускает физически обоснованное представление через параметры, характеризующие как гидродинамическую, так и дискретную модели пучка. В рамках гидродинамической модели она, очевидно, запишется так:

$$v^T(t) = \int_t^{t+T} v(t) dt. \quad (2.2.6)$$

В параметрах дискретной модели пучка эта функция определится выражением

$$v^T(t) = \frac{v_{e1} + v_{e2} + v_{e3} + \dots + v_{en}}{n}, \quad (2.2.7)$$

где n – число электронов, эмитированных за время T .

Из равенства математических ожиданий $M\{v^T(t)\}$, рассчитанных на основе (2.2.6) и (2.2.7), следует физически логичный результат – равенство среднего значения \bar{v} скорости пучка и среднего значения \bar{v}_e скорости электронов:

$$M\{v^T(t)\} = \bar{v} = \bar{v}_e.$$

Дисперсия средней за время T скорости электронного пучка $D\{v^T(t)\}$, определённая в соответствии с равенствами (2.2.6) и (2.2.7), также должна быть одна и та же. Расчет дисперсии $D\{v^T(t)\}$ на основе (6) дает

$$D\{v^T(t)\} = \frac{R_{ov}}{T}. \quad (2.2.8)$$

Определение $M\{v^T(t)\}$ на основе равенства (2.2.7) оказывается более сложным, так как в рамках корпускулярных представлений об электронном пучке средняя за время T скорость пучка $v^T(t)$ зависит от $n+1$ случайной величины $v_{e1}, v_{e2}, v_{e3}, \dots, v_{en}, n$. Упрощения расчета $M\{v^T(t)\}$ в этом случае можно достичь путем замены числа электронов n в знаменателе (2.2.7) математическим ожиданием \bar{n} [6]. В работе [4] показано, что при достаточно больших n и T такая замена не приводит к заметной ошибке в конечных результатах. Однако с методической точки зрения более целесообразным представляется проведение следующего приближенного расчета $M\{v^T(t)\}$ без замены n на \bar{n} в (2.2.7).

Проведем вычисления $D\{v^T(t)\}$ в два этапа. Вначале найдем условную дисперсию $D\{v^T(t) | n\}$, определяемую при условии, что число испущенных электронов равно n . На втором этапе определим безусловную дисперсию, то есть проведем усреднение $D\{v^T(t) | n\}$ по n . Так как случайные величины $v_{e1}, v_{e2}, v_{e3}, \dots, v_{en}$ независимы и распределены по одному и тому же закону, из (2.2.7) следует

$$D\{v^T(t) | n\} = \frac{1}{n} D\{v_e\},$$

где $D\{v_e\}$ – дисперсия скорости электронов. Усреднение полученного выражения по n , по существу, сводится к вычислению $M\left\{\frac{1}{n}\right\}$, которое проведено выше. Действительно,

$$D\{v^r(t)\} = M\{D[v^r(t) | n]\} = M\left\{\frac{1}{n}D\{v_e\}\right\} = M\left\{\frac{1}{n}\right\}D\{v_e\}. \quad (2.2.9)$$

Подставляя (2.2.3) в (2.2.9) приходим к окончательному выражению для дисперсии

$$D\{v^r(t)\} = \frac{D\{v_e\}}{n}. \quad (2.2.10)$$

Приравнявая правые части равенств (8) и (10), получим

$$R_{ov} = \frac{T}{n}D\{v_e\}. \quad (2.2.11)$$

Подстановка (2.2.11) в соотношение (2.2.5) приводит к равенству

$$S_v(\omega) = \frac{T}{2\pi n}D\{v_e\} \quad (2.2.12)$$

Учитывая, что величина $\frac{\bar{n}}{T}$ в соотношении (2.2.12) есть среднее число элек-

тронов, эмитируемых в единицу времени, равное $\frac{I_0}{e}$ (здесь e – элементарный заряд, I_0 – постоянная составляющая тока), окончательное выражение для спектра флуктуаций продольной скорости электронного пучка на катоде в общем случае можно представить так:

$$S_v(\omega) = \frac{eD\{v_e\}}{2\pi I_0}. \quad (2.2.13)$$

Важнейшее достоинство выражения (2.2.13) заключается в том, что оно справедливо при любом законе распределения скорости электронов на катоде.

В частном случае, когда катод однороден и скорость электронов распределена по закону Релея [1,2],

$$D\{v_e\} = \frac{(4 - \pi)kT_c}{2m}, \quad (2.2.14)$$

где k - постоянная Больцмана, T_c - абсолютная температура катода, m - масса электрона. В этом случае из выражений (2.2.13) и (2.2.14) следует формула Рэка

$$S_v(\omega) = \frac{(4 - \pi)e k T_c}{4\pi m I_0}. \quad (2.2.15)$$

Если катод неоднороден, то плотность распределения скорости электронов может существенно отличаться от закона Релея, а дисперсия скорости – от величины (2.2.14) [3]. В этом случае формула Рэка (2.2.15) несправедлива, и для определения реального спектра флуктуаций необходимо воспользоваться выражением (2.2.13). Из выражения (2.2.13) следует, что все виды неоднородности эмиттера, которые влияют на распределение скорости электронов и её дисперсию, ведут к изменению спектральной плотности флуктуаций скорости электронного пучка.

§ 2.3 Спектр флуктуаций поперечной скорости электронного пучка на катоде в общем и частном случаях

Приводятся результаты расчёта спектра флуктуаций поперечной скорости электронного пучка на ленточном катоде методом А.Ф. Голубенцева

Под поперечной скоростью электронного пучка или отдельных электронов на ленточном катоде будем понимать составляющую этой скорости, которая параллельна эмитирующей поверхности и перпендикулярна границам большей длины. Исследование спектральной плотности флуктуаций поперечной скорости электронного пучка на неоднородном катоде требует применения общего выражения для спектра, соответствующего произвольному закону распределения скорости электронов и произвольному спектру флуктуаций тока. Классическое выражение для спектральной плотности флуктуаций поперечной скорости электронного пучка на ленточном катоде для этой цели не подходит, так как получено при предположении [1,2,3], что поперечная составляющая u_e скорости электронов распределена по нормальному закону, а флуктуации тока описываются формулой Шоттки. В связи с этим на основе нетрадиционного подхода А.Ф. Голубенцева найдем выражение для спектра флуктуаций поперечной скорости в общем случае [4].

Как и в [5,6,7], поперечную скорость $u(t)$ электронного пучка, которая должна быть задана для любого момента времени, определим методом "мгновенного усреднения" Рэка поперечной скорости u_e отдельных электронов, скомбинированным с естественным требованием стационарности процесса $u(t)$. Это означает, что в качестве $u(t)$ принимается среднее значение поперечной составляющей скорости электронов, эмитированных катодом за физически бесконечно малый интервал времени.

Указанный метод расчета позволяет определить выражение для спектральной плотности флуктуаций, справедливое для той области частот, которая характеризуется равномерным спектром и имеет ширину, обратно пропорциональную времени мгновенного усреднения [5]. Учитывая, что исследуется равномерная часть спектра флуктуации поперечную скорость электронного пучка $u(t)$ условно будем считать дельта-коррелированным случайным процессом. Принятое предположение позволяет представить автокорреляционную функцию $R_u(\tau)$ поперечной скорости пучка в виде

$$R_u(\tau) = R_{ou} \delta(\tau), \quad (2.3.1)$$

где R_{ou} - постоянная величина, $\delta(\tau)$ - дельта-функция, τ - разность моментов времени.

Подстановка (2.3.1) в соотношение Хинчина-Винера [1] даёт выражение для спектральной плотности $S_u(\omega)$ флуктуаций поперечной скорости пучка в виде

$$S_u(\omega) = \frac{R_{ou}}{2\pi}. \quad (2.3.2)$$

Здесь ω - круговая частота.

Для нахождения постоянной R_{ou} введём в рассмотрение вспомогательную функцию $u^T(t)$, представляющую среднее за некоторый конечный интервал времени T значение скорости электронного пучка. Эта функция замечательна тем, что она допускает физически обоснованное представление через параметры гидродинамической и дискретной модели пучка и позволяет аналитически выразить принцип их физического соответствия ("инвариантность автокорреляционной функции"). В рамках гидродинамической модели она, очевидно, запишется так:

$$u^T(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt. \quad (2.3.3)$$

В параметрах дискретной модели пучка эта функция имеет вид

$$u^T(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} u_{ej}, \quad (2.3.4)$$

где n - число электронов, испущенных за время T ; u_{ej} ($j=1,2,\dots,n$) – поперечные скорости электронов, эмитируемых на интервале времени T .

Определив математические ожидания $M\{u^T(t)\}$ на основе выражений (2.3.3) и (2.3.4) и приравняв их, получим одно из условий физического соответствия дискретной и гидродинамической моделей пучка – равенство средней скорости пучка и средней скорости электронов

$$M\{u^T(t)\} = M\{u(t)\} = M\{u_e(t)\}.$$

Здесь M - символ операции взятия математического ожидания. В реальных случаях эти математические ожидания в отличие от аналогичных характеристик продольной скорости, как правило, равны нулю.

Дисперсия средней за время T поперечной скорости электронного пучка $D\{u^T(t)\}$, определённая в соответствии с равенством (2.3.3), равна

$$D\{u^T(t)\} = \frac{R_{ou}}{T} \quad (2.3.5)$$

При определении $D\{u^T(t)\}$ на основе равенства (2.3.4) учтём вывод, полученный в работе [5] и в предыдущем параграфе, который заключается в том, что при достаточно больших T , величину n в знаменателе правой части равенства без заметной ошибки можно заменить средним значением $M\{n\}$. Тогда $D\{u^T(t)\}$ выразится через $M\{n\}$ и дисперсию $D\{u_e\}$ поперечной скорости электронов следующим образом:

$$D\{u^T(t)\} = \frac{D(u_e)}{M\{n\}}, \quad (2.3.6)$$

где $D\{u_e\} = D\{u_{e1}\} = D\{u_{e2}\} = \dots = D\{u_{en}\}$ - дисперсия поперечной скорости произвольного электрона. Указанные дисперсии равны, так как соответству-

ющие случайные величины распределены по одному и тому же закону. Приравнивая правые части выражений (2.3.5) и (2.3.6) находим

$$R_{ou} = \frac{T}{M\{n\}} D\{u_e\}. \quad (2.3.7)$$

Подстановка (2.3.7) в соотношение (2.3.2) с учётом того, что величина $eM\{n\}/T$ (e - абсолютная величина заряда электрона) равна постоянной составляющей I_0 тока, приводит к окончательному выражению для спектральной плотности $S_u(\omega)$ флуктуаций поперечной скорости электронного пучка на катоде в общем случае

$$S_u(\omega) = \frac{eD\{u_e\}}{2\pi I_0}. \quad (2.3.8)$$

Если предположить, что поперечная составляющая скорости электронов u_e распределена по нормальному закону, то

$$D\{u_e\} = kT_c/m, \quad (2.3.9)$$

где k - постоянная Больцмана, T_c - абсолютная температура эмиттера, m - масса электрона. В этом случае из выражения (8) вытекает известное соотношение для спектральной плотности флуктуаций поперечной скорости пучка на однородном катоде [8]

$$S_u(\omega) = \frac{ekT_c}{4\pi m I_0}. \quad (2.3.10)$$

Если катод неоднороден, то распределение поперечной скорости электронов может существенно отличаться от нормального закона, а дисперсия скорости – от величины (2.3.9). В этом случае формула (2.3.10) несправедлива, и для определения реального спектра флуктуаций необходимо пользоваться выражением (2.3.8).

Из равенства (2.3.8) следует, что все эффекты неоднородности катода, которые ведут к увеличению дисперсии поперечной составляющей скорости электронов, вызывают рост спектральной плотности флуктуаций поперечной скорости пучка. Одним из таких эффектов является неэквипотенциальность эмитирующих зёрен катода, которая вызывает электрические поля, изменяющие как продольную, так и поперечную составляющие скорости электронов вблизи эмитирующей поверхности [9]. Как показывает расчет [9], различие потенциалов эмитирующих зёрен на величину порядка 1В может приводить к увеличению дисперсии $D\{u_e\}$ и спектральной плотности $S_u(\omega)$ на порядок.

§ 2.4. Спектр флуктуаций поперечных смещений электронного пучка на катоде в общем и частном случаях

Приводятся результаты расчёта спектра поперечных смещений центра тяжести электронного пучка на ленточном катоде методом А.Ф. Голубенцева

Под поперечным смещением электронного пучка на ленточном катоде будем понимать смещение положения центра тяжести пучка в направлении, параллельном эмитирующей поверхности и перпендикулярном границам эмиттера большей длины. Спектральная плотность поперечных флуктуаций положения центра тяжести электронного пучка на ленточном катоде, приведенная в работе [1], рассчитана путем разбиения эмиттера на отдельные элементарные полосы, параллельные границам большей длины, определения возмущений центра тяжести пучка вследствие дробовых флуктуаций тока каждой полосы и последующего суммирования средних квадратов этих возмущений. Предполагалось, что катод однороден в эмиссионном отношении, а дробовые флуктуации тока описываются формулой Шоттки.

Естественно, что этот метод неприменим, если катод неоднороден и его эмиссионная способность зависит от координат, а уровень дробовых шумов не отвечает формуле Шоттки. Указанный метод не позволяет также установить связь спектра флуктуаций смещений с дисперсией координаты точки эмиссии электрона. (Хотя в соответствии с общими физико-статистическими соображениями такая связь должна существовать.) В связи с этим возникает необходимость провести соответствующий вывод без использования формулы Шоттки и получить такое выражение для спектральной плотности флуктуаций центра тяжести, которое соответствовало бы произвольному закону распределения эмиссионной способности вдоль поверхности катода, а следовательно, и произвольному закону распределения случайной координаты точки вылета электрона.

Для описания поперечных флуктуаций пучка на ленточном катоде направим ось y вдоль его поверхности перпендикулярно границам большей длины [2,1]. Как и в работе [2], под координатой $y(t)$ центра тяжести электронного пучка будем понимать среднее значение координат y_e точек вылета электронов, эмитированных катодом за физически бесконечно малый интервал времени.

Таким образом, непрерывная функция времени $y(t)$, являющаяся одной из основных характеристик пучка в рамках гидродинамического приближения фактически получается методом “мгновенного усреднения” Рэка [3] решетчатой функции $y_e(t)$, характеризующей дискретную модель пучка и определенной лишь в те моменты времени, когда происходит испускание отдельных электронов.

Предполагая, что флуктуации $y(t)$ можно условно считать белым шумом (дельта-коррелированным случайным процессом), автокорреляционную функцию $R_y(\tau)$ смещения $y(t)$ представим так:

$$R_y(\tau) = R_{0y}\delta(\tau) \quad (2.4.1)$$

где R_{0y} - постоянная величина, $\delta(\tau)$ - дельта-функция, τ - разность моментов времени. Используя (2.4.1) и соотношение Хинчина-Винера [4], получим вы-

ражение для спектральной плотности флуктуации $S_y(\omega)$ поперечных смещений в виде

$$S_y(\omega) = \frac{R_{0y}}{2\pi}. \quad (2.4.2)$$

Здесь ω - круговая частота.

Для нахождения постоянной R_{0y} введем в рассмотрение такую вспомогательную случайную функцию, при помощи которой можно аналитически выразить принцип физического соответствия дискретной и гидродинамической моделей пучка [5]. В качестве такой функции примем среднее за время T значение смещения электронного пучка $y^T(t)$ за произвольный, но конечный интервал времени. В рамках гидродинамического приближения случайная функция $y^T(t)$ будет иметь вид

$$y^T(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} y(t) dt. \quad (2.4.3)$$

В рамках дискретной модели пучка она определится следующим выражением:

$$y^T(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} y_{ej}, \quad (2.4.4)$$

где y_{ej} - координата точки вылета j -го электрона, n - число электронов, испущенных за время T .

Определив математические ожидания выражений (2.4.3) и (2.4.4) и приравняв их, получим:

$$M\{y^T(t)\} = M\{y(t)\} = M\{y_e(t)\}$$

Дисперсия $D\{y^T(t)\}$, найденная на основе уравнения (2.4.3), составляет

$$D\{y^T(t)\} = \frac{R_{0y}}{T}. \quad (2.4.5)$$

При нахождении дисперсии этой же величины в рамках дискретной модели учтем, что $y_{e1}, y_{e2}, \dots, y_{en}$ независимые случайные величины, а величину n в выражении (2.4.4) без большой ошибки можно заменить [5] ее средним значением $M\{n\}$. Тогда дисперсия $D\{y^T(t)\}$ запишется так:

$$D\{y^T(t)\} = \frac{D\{y_e\}}{M\{n\}}, \quad (2.4.6)$$

где $D\{y_e\}$ - дисперсия координаты точки вылета отдельного электрона. Приравняв правые части выражений (2.4.5) и (2.4.6), получаем:

$$R_{0y} = \frac{T}{M\{n\}} D\{y_e\}. \quad (2.4.7)$$

Умножив числитель и знаменатель правой части выражения (2.4.7) на заряд электрона e и подставив это выражение в соотношение (2.4.2), получаем

связь спектральной плотности флуктуаций $S_y(\omega)$ с дисперсией $D\{y_e\}$ электронной координаты,

$$S_y(\omega) = \frac{eD\{y_e\}}{2\pi I_0}. \quad (2.4.8)$$

При выводе выражения (2.4.8) не накладывалось никаких ограничений на спектр флуктуаций тока или закон распределения случайной координаты y_e , что придаёт ему общий характер по сравнению с соотношением, полученным в [1]. По этой причине оно применимо для описания и однородного, и неоднородного катодов.

Если катод однородный, то плотность распределения электронной координаты $f(y_e)$ описывается равномерным законом

$$f(y_e) = \begin{cases} 1/L_c & \text{при } |y_e| \leq L_c/2, \\ 0 & \text{при } |y_e| > L_c/2, \end{cases}$$

где L_c - ширина катода в направлении оси y . В этом случае дисперсия $D\{y_e\}$ равна:

$$D\{y_e\} = \frac{L_c^2}{12}. \quad (2.4.9)$$

Подстановка (2.4.9) в (2.4.8) приводит к выражению для спектральной плотности флуктуации поперечных смещений пучка на однородном катоде

$$S_y(\omega) = \frac{eL_c^2}{24\pi I_0}, \quad (2.4.10)$$

которое совпадает с известным классическим результатом [1].

Очевидно, что выражение (2.4.8) может быть использовано для расчета спектра флуктуаций $y(t)$ при любом законе распределения y_e , который реализуется для того или иного типа неоднородного эмиттера. Величины $D\{y_e\}$ и $S_y(\omega)$ зависят от вида плотности распределения электронной координаты $f(y_e)$, которая, в свою очередь, определяется зависимостью от координаты y_e эмиссионной способности катода (плотности тока эмиссии). Реальный катод может обладать мелкомасштабными и крупномасштабными эмиссионными неоднородностями, которые вызывают отклонения действительно реализуемого закона $f(y_e)$ от равномерной плотности распределения.

Действительно, в общем случае зависимость эмиссионной способности от координат описывается нецентрированной случайной функцией, то есть суммой её математического ожидания и центрированной случайной компоненты. Центрированная случайная компонента описывает мелкомасштабные неоднородности, пространственная протяжённость которых сравнима с размерами эмитирующих зёрен и, следовательно, значительно меньше поперечных размеров катода. Если математическое ожидание эмиссионной способности не является постоянной величиной, то катод наряду с мелкомасштабными обладает и крупномасштабной неоднородностью, пространственная протяжённость которой сравнима с поперечными размерами катода. В отли-

чие от мелкомасштабных крупномасштабная неоднородность (неоднородность математического ожидания) описывается регулярной функцией, представляющей зависимость от координат математического ожидания эмиссионной способности.

Совершенно очевидно, что мелкомасштабные неоднородности, описывающие пространственные изменения (случайные пульсации) эмиссионной способности на длинах значительно меньших поперечных размеров катода L_c , не могут вызвать существенного изменения дисперсии $D\{y_e\}$, а следовательно, и спектральной плотности $S_y(\omega)$, по сравнению с величинами (2.4.9) и (10), соответствующими закону равномерной плотности. Даже при большой “амплитуде” пульсации эмиссионной способности, имеющие малую “длину волны”, мало скажутся на величине интеграла, определяющего значение математического ожидания $M\{y_e^2\}$, входящего в дисперсию. Этот интеграл определится некоторым средним уровнем эмиссионной способности, то есть произойдет своего рода сглаживание пульсаций при интегрировании.

Существенное изменение дисперсии $D\{y_e\}$ может наблюдаться лишь при наличии крупномасштабной неоднородности, то есть зависимости (регулярной) математического ожидания эмиссионной способности от поперечной координаты.

Крупномасштабные неоднородности монотонного характера, когда $f(y_e)$ монотонно нарастает или падает, приводят к уменьшению дисперсии $D\{y_e\}$ по сравнению с величиной, определяемой (2.4.9). Это объясняется тем, что действительное распределение $f(y_e)$ в этом случае эквивалентно некоторому П-образному закону (закону равномерной плотности) меньшей ширины. По этой же причине наблюдается уменьшение дисперсии $D\{y_e\}$ и в тех случаях, которым соответствуют кривые $f(y_e)$, имеющие максимум в области $|y_e| < L_c/2$. В пределе при бесконечно узкой кривой $f(y_e)$, когда все эмиссионные центры располагаются вдоль прямой линии, перпендикулярной оси y , а кривая $f(y_e)$ описывается дельта-функцией, дисперсия $D\{y_e\}$ равна нулю.

Таким образом, одна из особенностей влияния эмиссионной неоднородности катода на уровень флуктуаций поперечных смещений пучка состоит в том, что, в принципе, величина $S_y(\omega)$ на неоднородном катоде может быть ниже, чем на однородном эмиттере.

Очевидно, что характер неоднородности катода может приводить и к увеличению дисперсии $D\{y_e\}$. Случаи, вызывающие существенное возрастание $D\{y_e\}$, реализуются, в частности, при немонотонном законе распределения y_e , когда в области $|y_e| < L_c/2$ кривая $f(y_e)$ имеет минимум. Для оценки предельно высоких значений $D\{y_e\}$ в этом случае предположим, что все электроны эмитируются только двумя линиями с координатами $y_e = \pm L_c/2$. Эти линии имеют равную эмиссионную способность, поэтому вероятность эмиссии произвольного электрона любой из этих линий равна 1/2. В этом

случае $f(y_e)$ опишется линейной комбинацией двух дельта-функций, $M\{y_e\}$ будет равно нулю, а $M\{y_e^2\}$ и $D\{y_e\}$ составят величину $L_c^2/4$, которая превышает уровень дисперсии $D\{y_e\}$ для однородного катода в 3 раза. Это означает, что уровень спектральной плотности флуктуаций на подобном эмиттере будет в 3 раза выше, чем на однородном. Таким образом, коэффициент увеличения дисперсии $D\{y_e\}$ и спектральной плотности $S_y(\omega)$ на неоднородном катоде в зависимости от характера эмиссионной нерегулярности эмиттера может лежать в пределах от 0 до 3.

§ 2.5. Спектральная плотность теплового шума. Формула Найквиста

Приводятся результаты расчёта формулы Найквиста методом
А.Ф. Голубенцева

Обсуждаемый метод применим не только для расчета спектров флуктуаций электронного пучка. Его можно успешно использовать для исследования различных физических систем, содержащих свободные носители заряда, - проводников, полупроводников и т.д. В качестве примера можно привести расчет [1] спектральной плотности теплового шума проводника, т.е. формулы Найквиста. Расчет представляет методический интерес и может быть использован в общих и специальных курсах, посвященных шумам и флуктуациям.

Позволяя описать лишь равномерную часть спектра флуктуаций, обсуждаемый метод в отличие от кинетического подхода не предусматривает явный учет столкновений электронов с узлами кристаллической решётки. Для исключения из рассмотрения процессов столкновения проанализируем тепловое движение электронов в элементе проводника, длина которого равна длине свободного пробега электронов L_0 , а затем обобщим полученные данные на проводник произвольной длины L . Площадь поперечного сечения проводника будем считать равной S .

Ток проводника i , обусловленный хаотическим движением электронов, запишем через случайную продольную составляющую v скорости потока носителей заряда, определяемую методом “мгновенного усреднения” Рэка,

$$i = n_0 e S v \quad (2.5.1)$$

где n_0 - концентрация свободных носителей, e - элементарный заряд. Согласно (2.5.1) спектральная плотность флуктуаций теплового тока $S_i(\omega)$ выразится через спектр флуктуаций скорости потока $S_v(\omega)$ таким образом:

$$S_i(\omega) = n_0^2 e^2 S^2 S_v(\omega). \quad (2.5.2)$$

В соответствии с выражением (2.2.12), полученным в § 2.2 величина $S_v(\omega)$ определяется дисперсией $D(v_e)$ продольной проекции v_e скорости электронов

и средним числом частиц λ , проходящих через данное сечение потока (в данном случае в прямом и обратном направлении) в единицу времени

$$S_v(\omega) = \frac{D(v_e)}{2\pi\lambda}. \quad (2.5.3)$$

Как и при кинетическом подходе, будем считать, что проекции электронной скорости распределены по нормальному закону. Тогда [2]

$$D(v_e) = \frac{kT}{m}, \quad (2.5.4)$$

$$\lambda = \frac{n_0 M\{v_T\}}{2} S, \quad (2.5.5)$$

где T - абсолютная температура проводника, $M\{v_T\}$ - среднее значение абсолютной величины скорости теплового движения электронов. Подставляя (2.5.3), (2.5.4), (2.5.5) в (2.5.2), находим спектр флуктуаций теплового тока

$$S_i(\omega) = \frac{kT}{\pi r}, \quad (2.5.6)$$

где $r = \frac{m}{n_0 e^2 S} M\{v_T\}$ - сопротивление рассматриваемого элемента проводника

по классической электронной теории проводимости. Спектральная плотность флуктуаций $S_E(\omega)$ тепловой ЭДС $E = ir$, действующей на элементе проводника, равна

$$S_E(\omega) = r^2 S_i(\omega). \quad (2.5.7)$$

Подстановка (2.5.6) в (2.5.7) приводит к формуле Найквиста

$$S_E(\omega) = \frac{rkT}{\pi}. \quad (2.5.8)$$

Для обобщения полученного результата на проводник произвольной длины L представим его в виде цепочки из N последовательно включённых элементов, рассмотренных выше ($L = NL_0$). В таком проводнике будут действовать ЭДС ε , равная сумме N последовательно включённых тепловых ЭДС E_p ($p = 1, 2, \dots, N$). Очевидно, что эти ЭДС будут некоррелированы, так как их величины определяются независимыми наборами скоростей электронов. Следовательно спектральная плотность $S_\varepsilon(\omega)$ результирующей ЭДС ε определится суммой N одинаковых слагаемых вида (8), которая по виду также совпадает с формулой Найквиста

$$S_\varepsilon(\omega) = \frac{RkT}{\pi},$$

где $R = Nr$ - сопротивление проводника произвольной длины.

Нетрудно видеть, что при использовании метода А.Ф. Голубенцева расчёт спектральной плотности флуктуаций оказывается более простым и коротким, чем при других подходах.

§ 2.6. Спектральная плотность дробового шума в общем и частном случаях. Формула Шоттки.

Обсуждается физический механизм возникновения аномального дробового шума, связанный с неоднородностью эмиссионных состояний катода. Приводится расчёт спектральной плотности флуктуаций тока эмиссии при произвольном законе распределения числа испущенных электронов. Для однородного эмиттера полученный результат совпадает с формулой Шоттки.

Знание о расчётных соотношениях для определения спектральной плотности дробового шума в общем случае, когда число электронной, испускаемых эмиттером за некоторый интервал времени не соответствует закону Пуассона особенно важно для исследования шумовых свойств неоднородных катодов. Поэтому перед проведением соответствующего расчёта целесообразно представить краткие сведения о физической природе неоднородности эмиссионных состояний реальных катодов и данных эксперимента

Физическая природа неоднородности эмиссионных состояний катода и данные эксперимента. При расчете шумовых характеристик электронных приборов обычно считают, что уровень дробового шума термо катода определяется формулой Шоттки. Вывод этой формулы основывается, как известно, на предположении о том, что интенсивность процесса испускания электронов $\lambda(t)$, равная среднему числу электронов, испускаемых за единичный промежуток времени, примыкающий к моменту времени t , является постоянной величиной $\lambda(t) = \lambda$. При этом вероятность $P_N(t)$ испускания эмиттером $N(t)$ электронов за некоторый промежуток времени t задается распределением Пуассона [1], параметр которого совпадает с λ :

$$P_N(t) = \frac{(\lambda t)^N}{N!} e^{-\lambda t}, \quad (2.6.1)$$

В этом случае плотность распределения $f(\tau, \lambda)$ интервала времени τ между двумя последовательными актами испускания электронов описывается экспоненциальным законом с тем же значением параметра [2]:

$$f(\tau, \lambda) = \lambda e^{-\lambda \tau} \quad (2.6.2)$$

Однако экспериментальные исследования эффективных термокатодов (в частности, оксидного) обнаруживают, что в ряде случаев уровень дробового шума может значительно превышать расчетное значение [3-6]. В работе [4] это явление было названо аномальным дробовым эффектом. Аномальный дробовой эффект оксидного катода наблюдается и в режиме насыщения, и в режиме пространственного заряда [3,4].

Измерения, проведенные в [4] на частотах 2 МГц и выше (когда фликкер – шумом можно пренебречь), показали, что в режиме пространственного заряда экспериментальные значения коэффициента депрессии могут на один и даже два порядка превышать теоретические значения, а в режиме насыщения – достигать значений 10–20 (вместо 1). При этом повышенный шум наблюда-

ется, как правило, у недостаточно хорошо активированных катодов.

Авторы работы [6] у 25—30% обследованных ламп с оксидным катодом наблюдали эквивалентное сопротивление шумов (в диодном режиме), в несколько раз превышающее номинальное значение.

Очевидно, что одной из возможных причин аномального дробового эффекта могут являться физико-химические процессы, протекающие в оксидном катоде при его работе. Указанные процессы обуславливают не статический, а динамический характер его равновесия [7-9]. Испарение избыточных атомов бария с поверхности катода, а также отравление оксидного слоя, вследствие химических реакций свободного бария с остаточными газами, приводят к снижению эмиссионной способности. В то же время на границе оксидного слоя с керном происходит противоположный процесс - непрерывное восстановление окиси бария металлами керна и образование избыточного бария, который вследствие перепада концентрации поперек оксидного слоя диффундирует на его поверхность. Эти процессы повышают эмиссию катода. Таким образом, эмиссионная способность оксидного катода определяется взаимодействием процессов отравления, восстановления и диффузии и с течением времени меняется.

Аналогичные флуктуации эмиссионной способности, вызванные колебаниями потенциального барьера, адсорбцией атомов остаточных газов и т. д., наблюдаются и у катодов других типов [10,11]. Следовательно, интенсивность процесса испускания электронов $\lambda(t)$ является не детерминированной, а случайной величиной. Реальный катод характеризуется не одним, а множеством эмиссионных состояний, которым соответствуют различные значения параметра интенсивности λ .

Для фиксированного момента времени неоднородность эмиссионных состояний выражается в виде соответствующего вклада в пространственные изменения (пространственную неоднородность) эмиссионной способности. Поэтому о величине возможного перепада параметра λ в различных эмиссионных состояниях можно судить, по видимому, по результатам экспериментальных исследований пространственной эмиссионной неоднородности, выполненных методами эмиссионной микроскопии [10,12-18] и сканирующего отверстия [17,19,20]. В первом приближении можно предполагать, что числовые характеристики указанных неоднородностей являются величинами одного порядка. В таком случае максимальное значение перепада параметра λ для реальных катодов можно оценить величинами порядка 10 - 10^2 и выше.

Неоднородность эмиссионных состояний и их смена приводит к тому, что плотность распределения интервала времени τ между моментами вылета отдельных электронов описывается не экспоненциальным законом (2.6.2), а более сложным выражением. Вид этого выражения можно задать, исходя из физических соображений и логичного предположения о том, что соотношение (2.6.2) может быть принято в качестве условной плотности распределения интервала, соответствующей случаю, когда параметр интенсивности принимает данное значение.

Изменение плотности распределения интервала, вызванное сменой эмиссионных состояний катода, может приводить к увеличению интенсивности флуктуаций тока эмиссии, и, следовательно, к ухудшению шумовых характеристик катода и прибора в целом. Исследованию указанного типа неоднородности эмиттеров посвящены работы [21-30].

Спектральная плотность флуктуаций тока эмиссии при произвольном законе распределения интервала. Как уже указывалось, для выяснения влияния смены эмиссионных состояний на уровень флуктуаций тока эмиссии катода необходимо получение выражения для спектральной плотности дробового шума, являющегося более общим, чем формула Шоттки и соответствующего произвольному закону распределения интервала τ . Вывод такого выражения имеет большое практическое значение и, кроме того, представляет существенный теоретический и методический интерес. При его проведении воспользуемся подходом, не связанным с предварительным определением автокорреляционной функции тока эмиссии [21,23-25].

Ток эмиссии, наблюдающийся в плоскости эмиттера, представим импульсным случайным процессом вида

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e\delta(t-t_n), \quad (2.6.3.)$$

где e – заряд электрона; t_n – момент испускания электрона с порядковым номером n . Выразим спектральную плотность флуктуаций тока $S_i(\omega)$ через Фурье-образ $i_T(\omega)$ усеченной реализации тока $i_T(t)$ [10]

$$S_i(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} M\{|i_T(\omega)|^2\}. \quad (2.6.4)$$

Здесь

$$i_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i_T(t)e^{-j\omega t} dt,$$

$$i_T(t) = \begin{cases} i(t) & \text{при } |t| \leq T/2, \\ 0 & \text{при } |t| > T/2, \end{cases}$$

M – символ взятия математического ожидания, ω – круговая частота.

Пусть в промежутке времени $(-T/2; +T/2)$ содержится $2N+1$ импульсов тока, то есть $T \cong (2N+1)\bar{\tau}$, где $\bar{\tau}$ – математическое ожидание интервала времени между двумя последовательными моментами испускания электронов (в качестве начала оси времени выбран момент вылета электрона с порядковым номером $n=0$). Тогда

$$i_T(t) = \sum_{n=-N}^N e\delta(t-t_n),$$

$$i_T(\omega) = i_N(\omega) = \sum_{n=-N}^N e e^{-j\omega t_n},$$

$$S_i(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi(2N+1)\tau} M\{|i_N(\omega)|^2\}. \quad (2.6.5)$$

Величину $|i_N(\omega)|^2$ в (2.6.5) можно записать в виде двойной суммы:

$$|i_N(\omega)|^2 = \sum_{n=-N}^N \sum_{\mu=-N}^N e^2 e^{-j\omega t_n} e^{j\omega t_\mu}.$$

Выделим в двойной сумме члены, соответствующие $n = \mu$. Учитывая, что среднее суммы всегда равно сумме средних от слагаемых, найдем:

$$M\{|i_N(\omega)|^2\} = (2N+1)e^2 + \sum_{n=-N}^N \sum_{\substack{\mu=-N \\ (n \neq \mu)}}^N e^2 M\{e^{-j\omega t_n} e^{j\omega t_\mu}\}. \quad (2.6.6)$$

Величина $M\{e^{-j\omega t_n} e^{j\omega t_\mu}\}$ зависит только от разности $n - \mu$ номеров двух импульсов. Положим, $n = \mu + p$, тогда

$$\sum_{n=-N}^N \sum_{\mu=-N}^N e^2 M\{e^{j\omega(t_\mu - t_n)}\} = \sum_{\mu=-N}^N \sum_{p=1}^{N+\mu} h_p(-\omega) + \sum_{\mu=-N}^N \sum_{p=1}^{N-\mu} h_p(\omega), \quad (2.6.7)$$

где

$$h_p(\omega) = e^2 M\{e^{j\omega(t_\mu - t_n)}\}. \quad (2.6.8)$$

Подсчет двойных сумм в соотношении (2.6.7) дает следующие результаты:

$$\sum_{\mu=-N}^N \sum_{p=1}^{N-\mu} h_p(\omega) = \sum_{p=1}^{2N} (2N+1-p)h_p(\omega), \quad (2.6.9)$$

$$\sum_{\mu=-N}^N \sum_{p=1}^{N+\mu} h_p(-\omega) = \sum_{p=1}^{2N} (2N+1-p)h_p(-\omega). \quad (2.6.10)$$

Подставляя соотношения (2.6.6), (2.6.7), (2.6.9), (2.6.10) в (2.6.5), получаем:

$$S_i(\omega) = \frac{1}{2\pi\tau} \left\{ e^2 + \sum_{p=1}^{\infty} [h_p(\omega) + h_p(-\omega)] \right\}. \quad (2.6.11)$$

Так как i -й интервал имеет вид

$$\tau_i = t_{i+1} - t_i,$$

величина $t_\mu - t_n$ в соотношении (2.6.8) для $h_p(\omega)$ представляет собой следующую сумму:

$$t_n - t_\mu = t_{\mu+p} - t_\mu = \tau_\mu + \tau_{\mu+1} + \dots + \tau_{\mu+p-1}$$

Величины τ_i независимы и имеют одинаковый закон распределения. Следовательно,

$$t_{\mu+p} - t_{\mu} = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_p \quad (2.6.12)$$

и

$$h_p(-\omega) = e^2[\varphi(\omega)]^p, \quad h_p(\omega) = e^2[\varphi^*(\omega)]^p,$$

где

$$\varphi(\omega) = M\{e^{j\omega\tau}\}; \quad \varphi^*(\omega) = M\{e^{-j\omega\tau}\}.$$

Подставляя (2.6.12) в (2.6.11), находим окончательное выражение для спектральной плотности флуктуаций тока эмиссии:

$$S_i(\omega) = \frac{eI_0}{2\pi} \left[1 + 2 \operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} \right], \quad (2.6.13)$$

где $I_0 = e/\bar{\tau}$ – среднее значение тока.

Нетрудно показать, что для экспоненциального закона распределения интервала τ второй член в (2.6.13) равен нулю, и полученное выражение совпадает с формулой Шоттки. В общем же случае указанное слагаемое отлично от нуля.

Для всех частот колебаний, используемых в электронике, включая СВЧ, и реальных токов I_0 выполняется неравенство $\omega\bar{\tau} = \omega \frac{e}{I_0} \ll 1$. Разлагая

$M\{e^{j\omega\tau}\}$ в степенной ряд и ограничиваясь членами второго порядка малости, находим, что соотношение, стоящее в квадратной скобке выражения (2.6.13), не зависит от частоты и имеет следующий вид:

$$1 + 2 \operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} = v_{\tau}^2,$$

где $v_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\bar{\tau}}$ – коэффициент вариации интервала; σ_{τ}^2 — дисперсия интервала.

В частном случае, когда интервал распределён по экспоненциальному закону, коэффициент вариации интервала равен 1. В общем же случае спектральная плотность

$$S_i(\omega) = \frac{eI_0}{2\pi} v_{\tau}^2 \quad (2.6.14)$$

в v_{τ}^2 раз превышает уровень, определяемый формулой Шоттки.

Результаты расчётов, проведённых на основе выражения (2.6.14) и представленных в [21] показывают, что для реально обоснованных законов распределения интервала τ и диапазонов изменений параметра интенсивности эмиссии λ неоднородного катода величина v_{τ}^2 может достигать 10 и более единиц.

§ 2.7. Спектральная плотность генерационно-рекомбинационного шума в полупроводниках

Предлагается простой расчёт спектральной плотности генерационно-рекомбинационного шума в полупроводниках. Расчёт основан на применении теоремы Кемпбелла.

Важным источником шума в полупроводниках и полупроводниковых приборах является генерационно-рекомбинационный шум [1-6]. Теоретическому и экспериментальному исследованию этого явления посвящено значительное количество работ отечественных и зарубежных авторов [1-10]. Ввиду высокой теоретической и практической значимости генерационно-рекомбинационного шума расчет его спектральной плотности, как правило, входит в программы общих и специальных курсов по статистической электронике, шумам и флуктуациям в электронных приборах. Расчёты указанного спектра и других статистических характеристик, представленные в известных источниках [1-6], часто вызывают у учащихся определённые затруднения, особенно на этапе получения и обоснования автокорреляционной функции. По этой причине в данной работе приводится простой расчёт спектра генерационно-рекомбинационного шума, основанный на применении теоремы Кемпбелла и соотношений Хинчина-Винера.

Генерационно-рекомбинационный шум в полупроводниках возникает вследствие флуктуаций δN числа свободных носителей заряда N относительно некоторого равновесного значения N_0 , обусловленных эффектами генерации и рекомбинации числа носителей. Обычно случайную функцию $\delta N = \delta N(t)$ условно считают непрерывной функцией времени. Поставленная задача состоит в расчёте спектральной плотности этой функции $S_{\delta N}(\omega)$ (ω – круговая частота).

Воспользуемся следующей математической моделью флуктуаций $\delta N(t)$. Предположим, что в полупроводниковом образце в момент времени t_k вследствие случайного характера генерационно-рекомбинационных процессов возникает a_k неравновесных носителей. Как известно [11], с течением времени их число $\delta N_k(t)$ будет спадать по экспоненциальному закону

$$\delta N_k = a_k e^{-\frac{t-t_k}{\tau}}, \quad \delta N_k = a_k e^{-\frac{t-t_k}{\tau}} \quad (2.7.1)$$

где τ – время жизни избыточных носителей заряда. Исходя из физических соображений, естественно считать, что последовательность флуктуационных импульсов (2.7.1) представляет стационарный пуассоновский поток событий, следующих с некоторой частотой ν . Следовательно, результирующие флуктуации числа свободных носителей заряда $\delta N(t)$ опишутся суперпозицией указанных импульсов [2]

$$\delta N(t) = \sum_k a_k e^{-\frac{t-t_k}{\tau}}. \quad (2.7.2)$$

Будем полагать, что случайные величины a_k являются алгебраическими и распределёнными по одному и тому же закону. В [2] они условно называются

амплитудами импульсов. Математическое ожидание амплитуд импульсов, очевидно, следует принять равным нулю, а независимые случайные моменты возникновения импульсов t_k считать распределёнными по закону равномерной плотности.

В рамках этой математической модели процесса математическое ожидание $M\{\delta N\}$, дисперсия $D\{\delta N\}$ и автокорреляционная функция $R_{\delta N}(u)$ флуктуаций числа свободных носителей заряда могут быть записаны на основе теоремы Кемпбелла таким образом:

$$M\{\delta N\} = \nu \bar{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt, \quad (2.7.3)$$

$$D\{\delta N\} = \nu \bar{a}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(t) dt, \quad (2.7.4)$$

$$R_{\delta N}(u) = \nu \bar{a}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \varphi(t+u) dt, \quad (2.7.5)$$

где

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}. \quad (2.7.6)$$

$\varphi(t)$ - функция формы импульса; \bar{a} - математическое ожидание амплитуды импульса; \bar{a}^2 - математическое ожидание квадрата амплитуды; u - разность моментов времени.

По условию задачи $\bar{a} = 0$ и, следовательно, $M\{\delta N\} = 0$. Подставив (2.7.6) в (2.7.4), (2.7.5) и выполнив интегрирование, получим

$$D\{\delta N\} = \nu \bar{a}^2 \frac{\tau}{2}, \quad (2.7.7)$$

$$R_{\delta N}(u) = \nu \bar{a}^2 \frac{\tau}{2} e^{-\frac{|u|}{\tau}}, \quad (2.7.8)$$

Двухсторонняя спектральная плотность флуктуаций числа носителей $S_{\delta N}(\omega)$ является преобразованием Фурье от автокорреляционной функции

$$S_{\delta N}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\delta N}(u) e^{-j\omega u} du. \quad (2.7.9)$$

Подстановка (2.7.8) в (2.7.9) и интегрирование последнего приводят к следующему выражению для генерационно-рекомбинационного спектра числа носителей

$$S_{\delta N}(\omega) = \frac{\nu \bar{a}^2}{2\pi} \frac{\tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (2.7.10)$$

В принципе поставленную задачу можно считать решённой. Однако обычно соотношения (2.7.8), (2.7.10) для автокорреляционной функции и спектральной плотности записывают через дисперсию числа носителей. Кроме того, часто в качестве конечного результата расчёта приводится спектральная плотность флуктуаций тока образца. Поэтому есть смысл привести дополнительные выражения для указанных статистических характеристик.

Обозначим для краткости $D\{\delta N\} = \bar{\delta N}^2$. В соответствии с (2.7.7)

$$\overline{va^2} = \frac{2}{\tau} \overline{\delta N^2}. \quad (2.7.11)$$

Подстановка (2.7.11) в (2.7.8) и (2.7.10) приводит к известным выражениям [1,3,4] для автокорреляционной функции и спектральной плотности числа носителей

$$R_{\delta N}(u) = \overline{\delta N^2} e^{-\frac{|u|}{\tau}}$$

$$S_{\delta N}(\omega) = \frac{\overline{\delta N^2}}{\pi} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (2.7.12)$$

Используя (2.7.12), выражение для спектра флуктуаций тока можно записать на основе следующих соображений. Если средние значения тока и числа носителей в образце равны соответственно I_0 и N_0 , то ток, обусловленный движением одного носителя заряда, составляет I_0/N_0 . Следовательно, флуктуации тока δI и числа носителей δN , а также спектральные плотности флуктуаций тока $S_i(\omega)$ и числа носителей $S_N(\omega)$, связаны соотношениями [1,3]

$$\delta I = \frac{I_0}{N_0} \delta N,$$

$$S_i(\omega) = \frac{I_0^2}{N_0^2} S_{\delta N}(\omega). \quad (2.7.13)$$

Таким образом, согласно (2.7.12) и (2.7.13) спектральная плотность флуктуаций тока может быть представлена так:

$$S_i(\omega) = \frac{I_0^2}{\pi N_0^2} \overline{\delta N^2} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (2.7.14)$$

В литературных источниках, посвящённых шумам и флуктуациям, наряду с двухсторонней спектральной плотностью $S_i(\omega)$ [6], задающейся на всей оси ω , используется физическая спектральная плотность $W_i(f)$, которая задается только для положительных значений частоты $f = \omega/2\pi$ и равна

$$W_i(f) = \begin{cases} 4\pi S_i(2\pi f) & \text{при } f \geq 0, \\ 0 & \text{при } f < 0. \end{cases} \quad (2.7.15)$$

В соответствии с выражениями (2.7.14), (2.7.15) физическая спектральная плотность флуктуаций тока, вызванных генерационно-рекомбинационным эффектом, запишется так:

$$W_i(f) = 4 \frac{I_0^2}{N_0^2} \overline{\delta N^2} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (2.7.16)$$

Выражение (2.7.16) точно совпадает с известным результатом, представленным в [1,3] и других источниках.

Привлекательной чертой изложенного расчёта являются не только простота и наглядность. Использованный подход позволяет вскрыть структуру выражения для дисперсии числа частиц, то есть связь дисперсии с параметрами $\overline{a^2}$, ν , τ пуассоновского потока событий, моделирующего процесс возникновения флуктуаций. Знание этой связи представляет существенный интерес. Это обстоятельство выгодно отличает приведённый метод расчёта от подхода, использованного в [3] и других работах.

Глава 3.

ВЗАИМНЫЕ СПЕКТРЫ ФЛУКТУАЦИЙ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА НА НЕОДНОРОДНОМ КАТОДЕ

Проблема корреляции флуктуаций электронного пучка на катоде относится к числу классических и представляет существенный теоретический и практический интерес. С фундаментальной точки зрения изучение корреляции флуктуаций важно для выяснения физического механизма случайных процессов, возникающих на катоде. Прикладное значение проблемы обусловливается тем, что шумовые свойства электронного пучка, а следовательно, и электронного прибора, в общем случае определяются совокупностью всех элементов матрицы спектральных плотностей, включая взаимные спектральные плотности флуктуаций тока, продольной и поперечной скорости, поперечных смещений электронного пучка. Так взаимная спектральная плотность флуктуаций тока и кинетического потенциала (величины, пропорциональной флуктуационной составляющей продольной скорости электронного пучка) определяет величину шумовых инвариантов S и Π электронного пучка, его шумность и минимальный коэффициент шума СВЧ электронно-лучевых усилителей типа O [1,2]. Действительная часть взаимной спектральной плотности флуктуаций тока и кинетического потенциала пучка является шумовым инвариантом Π электронного пучка, мнимая часть указанной взаимной спектральной плотности входит в выражение для шумового инварианта S и в значительной степени определяет его величину. Разность шумовых инвариантов ($S-\Pi$) определяет минимальный коэффициент шума. Корреляция флуктуаций может приводить как к увеличению, так и к уменьшению минимального коэффициента шума.

Экспериментальные исследования шумов электронного пучка показывают [3-5], что корреляция флуктуаций тока и скорости электронного пучка на выходе электронной пушки типа O , в ряде режимов работы приборов имеет место. Аналогичные данные были получены в работе [5] при исследовании СВЧ шумов магнетронной инжекционной пушки. Строго говоря, приведённые экспериментальные данные не являются доказательством наличия корреляции флуктуаций на катоде, так как возможно она возникает, например, в многоскоростной области электронного прожектора. Тем не менее, они дают основания предполагать о существовании корреляции флуктуаций уже на поверхности катода. Теоретические исследования шумовых свойств катодов показывают [6], что одной из причин возникновения корреляции флуктуаций пучка может служить неоднородность эмиттера. Ниже приводятся результаты расчёта взаимных спектров флуктуаций электронного пучка на неоднородном катоде методом А.Ф. Голубенцева.

§ 3.1. Общее выражение для взаимной спектральной плотности флуктуаций тока и продольной скорости электронного пучка

Обсуждается возможность возникновения корреляции флуктуаций продольной скорости и тока электронного пучка на неоднородном катоде. Используется модель кинетически неоднородного эмиттера, отдельные области которого испускают электроны с различным распределением скоростей.

Для выяснения возможности возникновения корреляции и расчёта взаимного спектра флуктуаций тока и продольной (перпендикулярной поверхности катода) скорости электронного пучка воспользуемся общей статистической моделью нерегулярного эмиттера, который обладает двумя типами неоднородности – эмиссионной и кинетической (по закону распределения скорости эмитированных электронов), – не конкретизируя параметры неоднородности и её происхождение [7-9].

Предположим, что отдельные элементы эмитирующей поверхности катода испускают группы электронов с различными плотностями распределения $f_k(v_e)$ составляющих скорости v_e , перпендикулярных поверхности эмиттера. В дальнейшем указанные группы электронов будем называть кинетическими классами. Вследствие наличия поперечных составляющих скорости эмитируемые электроны различных кинетических классов «перемешиваются» и образуют единый электронный пучок, характеризующийся некоторой общей плотностью распределения электронных скоростей $f(v_e)$. Вид функции $f(v_e)$ естественно зависит от плотностей распределения $f_k(v_e)$ и числа электронов соответствующих кинетических классов. Будем считать, что исследуемый катод эмитирует электроны L кинетических классов, т.е. $k = 1, 2, \dots, L$. Аналогичный подход для расчета спектра флуктуаций использовался в [1] при определении спектральной плотности скорости пучка. Только там электроны разбивались на скоростные классы, а не кинетические.

Предположим также, что все эмиссионные центры катода можно разделить на N типов, отличающихся, по крайней мере, соотношением числа электронов различных кинетических классов, т.е. распределением электронов по кинетическим классам. Совокупность центров определенного типа в общем случае может отличаться также и эмиссионной способностью, что позволяет говорить о ней, как об эмиссионной области соответствующего типа. Существование нескольких типов подобных областей, по существу, означает наличие дистрибутивно-эмиссионной неоднородности катода. Однако для краткости указанные области и вид неоднородности будем называть эмиссионными.

Под скоростью электронного пучка v_e на катоде, как и ранее, будем понимать среднее значение скорости v_e электронов, испущенных за физически

бесконечно малый интервал времени [10-12]. Ее величина, естественно, будет зависеть как от вида функций $f_k(v_e)$, так и от соотношения числа частиц различных кинетических классов.

Вследствие флуктуаций числа частиц, эмитируемых различными эмиссионными областями, текущий закон распределения электронных скоростей на подобном катоде с течением времени, очевидно, будет изменяться. Следовательно, детальное описание спектра скоростей требует введения в рассмотрение такой рандомизированной условной плотности вероятности скорости, которая характеризовала бы распределение скоростей на любом конечном интервале времени, а после статистического усреднения приводила бы к безусловному регулярному закону распределения.

Качественное обоснование возможности возникновения корреляции флуктуаций тока и скорости можно провести следующим образом [7,13,14]. Если токи эмиссии отдельных областей постоянны и равны I_{0m} , $m = 1,2,\dots,N$, то безусловная плотность распределения электронных скоростей в смешанном электронном пучке может быть записана по формуле полной вероятности таким образом [15]:

$$f(v_e) = \sum_{k=1}^L p_k(I_{01}, I_{02}, \dots, I_{0N}) f_k(v_e), \quad (3.1.1)$$

где

$$\sum_{k=1}^L p_k = 1,$$

$p_k(I_{01}, I_{02}, \dots, I_{0N})$ – весовой коэффициент, зависящий в общем случае от токов $I_{01}, I_{02}, \dots, I_{0N}$ всех эмиссионных областей и выражающий вероятность того, что взятый наугад электрон относится к k -ому кинетическому классу.

В случае, когда токи эмиссии отдельных эмиссионных областей флуктуируют, и величина их полного тока i_m кроме постоянной составляющей I_{0m} , равной математическому ожиданию, содержит также флуктуационную компоненту δi_m , распределение скоростей электронов в пучке будет описываться рандомизированной условной плотностью распределения $f(v_e | i_1, i_2, \dots, i_N)$, получающейся из (3.1.1) заменой I_{0m} на i_m при $m = 1, 2, \dots, N$. Так как скорость пучка определяется функцией $f(v_e | i_1, i_2, \dots, i_N)$, содержащей коэффициенты p_k , зависящие от токов i_m и полного тока i пучка, флуктуации скорости электронного потока в общем случае будут коррелированы с флуктуациями тока.

Для строгого доказательства возможности возникновения корреляции и развития методики расчета взаимного спектра флуктуаций введем в рассмотрение рандомизированную условную плотность распределения скорости электронов, эмитированных за любой конечный интервал времени T . Эта функция выразится через плотности распределения $f_k(v_e)$ и вероятности p_k принадлежности произвольного электрона к соответствующему кинетическому классу, но величины p_k теперь будут зависеть от числа электронов

n_1, n_2, \dots, n_N , испущенных за указанное время всеми эмиссионными областями, т.е. $p_k = p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)$. Соответствующее выражение, очевидно, будет иметь вид, аналогичный (3.1.1)

$$f(v_e | n_1, n_2, \dots, n_N) = \sum_{k=1}^L p_k(n_1, n_2, \dots, n_N) f_k(v_e), \quad (3.1.2)$$

где $f(v_e | n_1, n_2, \dots, n_N)$ – рандомизированная условная плотность распределения скорости электронов, определяемая при условии, что отдельные эмиссионные области испустили за время T соответственно n_1, n_2, \dots, n_N частиц.

Случайные изменения числа частиц n_1, n_2, \dots, n_N вызывают флуктуации тока электронного пучка. Поскольку эта же причина, как следует из (3.1.2), приводит и к флуктуациям скорости пучка, есть все основания полагать, что в общем случае указанные флуктуации будут коррелированными.

Для расчета взаимной спектральной плотности флуктуаций тока i и скорости v электронного пучка воспользуемся приближенным методом [10,11], успешно применявшимся для нахождения спектральных плотностей флуктуации тока и скорости. Как и в [10,11], будем считать, что флуктуации тока и скорости стационарно связаны, а взаимная корреляционная функция этих флуктуаций $R_{iv}(\tau)$ описывается дельта-функцией $\delta(\tau)$, т.е.

$$R_{iv}(\tau) = R_{0iv} \delta(\tau), \quad (3.1.3)$$

где R_{0iv} – вещественная постоянная величина, $\tau = t_2 - t_1$ – разность моментов времени.

Это означает, что взаимный спектр условно считается равномерным, т.е. не зависящим от частоты. В действительности взаимный спектр зависит от частоты, но используемый метод расчета позволяет найти лишь равномерную составляющую этого спектра. Подстановка (3.1.3) в соотношения Хинчина-Винера [1] приводит к следующему выражению для взаимной спектральной плотности

$$S_{iv}(\omega) = \frac{R_{0iv}}{2\pi}. \quad (3.1.4)$$

В общем случае взаимный спектр имеет комплексный характер. Принимая предположение (3.1.3) мы ограничиваемся, таким образом, определением вещественной части спектра. Величина постоянной R_{0iv} удовлетворяет следующему соотношению, доказанному в теории случайных функций [1] и связывающему спектральные плотности тока $S_i(\omega)$, скорости $S_v(\omega)$ и их взаимную спектральную плотность:

$$|S_{iv}(\omega)|^2 \leq S_i(\omega) S_v(\omega).$$

Это неравенство устанавливает границу применимости тех или иных статистических моделей катода, используемых при определении взаимного спектра.

С целью нахождения неизвестной постоянной R_{0iv} введем в рассмотрение две вспомогательных случайных функции. В качестве первой такой функции рассмотрим среднюю за некоторый конечный интервал времени T скорость $v^T(t)$ электронного пучка, определив её так же, как и в § 2.2. В рамках гидродинамической модели пучка она имеет вид

$$v^T(t) = \int_t^{t+T} v(t) dt. \quad (3.1.5)$$

Здесь $v(t)$ - скорость электронного пучка, определённая для любого момента времени методом “мгновенного усреднения” Рэка [12].

На основе дискретных представлений о пучке эта же функция описывается таким очевидным соотношением:

$$v^T(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_{ej}, \quad (3.1.6)$$

где n - полное число электронов, испущенных за время T , v_{ej} – скорость j -ого электрона, испущенного на указанном интервале времени любой эмиссионной областью.

Математическое ожидание $M\{v^T(t)\}$, определенное при помощи выражения (3.1.5), равно средней скорости электронного пучка $M\{v(t)\}$, которую обозначим v_0 . Расчет $M\{v^T(t)\}$ и других статистических характеристик на основе выражения (3.1.6) связан с усреднением и по скорости, и по числу электронов. Это требует использования рандомизированной условной плотности вероятности скорости электронов $f(v_e | n_1, n_2, \dots, n_N)$ и соответствующего закона распределения числа испущенных электронов. Дальнейшие выкладки проведем для произвольного условного закона распределения скорости. Его конкретный вид будет определяться выбором конкретной физико-статистической модели неоднородного катода. Точно так же можно поступить с законом распределения числа испущенных электронов. Однако для простоты будем считать, что эмиттер работает в режиме насыщения, и случайные величины n_1, n_2, \dots, n_N независимы и распределены по закону Пуассона.

Взятие математических ожиданий от левой и правой частей (3.1.6) дает

$$M\{v^T(t)\} = \sum_{k=1}^L \bar{v}_{ek} M\{p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)\}, \quad (3.1.7)$$

где $\bar{v}_{ek} = \int_0^{\infty} v_e f_k(v_e) dv_e$ – средняя скорость электронов k -ого кинетического класса.

Из соотношений (3.1.6) и (3.1.2) следует, что математические ожидания $M\{p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)\}$ определяют не только $M\{v^T(t)\}$, но и безусловную плотность вероятности электронов в пучке

$$f(v_e) = \sum_{k=1}^L f_k(v_e) M\{p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)\}. \quad (3.1.8)$$

В качестве $M\{p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)\}$ в выражениях (3.1.7) и (3.1.8) следует принять величину $p_k(n_{01}, n_{02}, \dots, n_{0N})$, где $n_{0m} = M\{n_m\}$ - математическое ожидание числа электронов, эмитированных за время T m -ой эмиссионной областью, $m = 1, 2, \dots, N$.

В самом деле, представим все n_m таким образом:

$$n_m = n_{0m} \left(1 + \frac{\delta n_m}{n_{0m}}\right).$$

Здесь δn_m - флуктуация числа электронов, эмитированных m -ой областью, удовлетворяющая неравенству $|\delta n_m| \ll n_{0m}$. Флуктуации числа частиц $\delta n_m, \delta n_j$, испущенных различными эмиссионными областями ($m \neq j$), будем считать независимыми. Разложим $p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)$ в ряд по степеням $\frac{\delta n_m}{n_{0m}}$

, ограничимся членами второго порядка малости и проведем операцию взятия математического ожидания. Первый член этого разложения будет равен $p_k(n_{01}, n_{02}, \dots, n_{0N})$. Очевидно, что эта вероятность не зависит от интервала времени T , так как она определяется относительным вкладом $\frac{n_{0m}}{n_0}$ каждой эмиссионной области в общее число $n_0 = n_{01} + n_{02} + \dots + n_{0N}$ частиц, испущенных за время T . При Пуассоновском распределении чисел n_m и n

$$\frac{n_{0m}}{n_0} = \frac{\lambda_m}{\lambda_0},$$

где λ_m - среднее число электронов, испускаемых в единицу времени m -ой областью, λ_0 - среднее число электронов, испускаемых в единицу времени всем катодом.

При усреднении по числу частиц остальных слагаемых в разложении для $p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)$ те члены, которые содержат множители $M\{\delta n_m / n_{0m}\}$, обращаются в ноль, поскольку $M\{\delta n_m\} = 0$. Как показывает расчет, сумма тех слагаемых, которые содержат множители $M\{\delta n_m^2 / n_{0m}^2\}$, для некоторых конкретных моделей неоднородного катода и соответствующих им конкретных функций $p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)$ также равна нулю. В то же время существует множество моделей, для которых сумма указанных слагаемых, содержащих $M\{\delta n_m^2 / n_{0m}^2\}$ отлична от нуля и равна

$$M \left\{ \frac{\delta n_m^2}{n_{0m}^2} \right\} = \frac{1}{\lambda_m T}$$

В этих случаях безусловная плотность вероятности и числовые характеристики скорости электронов, а также спектральная плотность флуктуаций скорости пучка и взаимный спектр оказываются зависящими от T . Но спектральные плотности флуктуаций не должны зависеть от интервала времени T . Для предотвращения такого противоречия в указанных случаях в выражениях (3.1.7), (3.1.8) вместо величины $M \{ p_k(n_1, n_2, \dots, n_N) \}$, очевидно, необходимо использовать ее предел при $T \rightarrow \infty$, как это делается при определении функции корреляции 2-ого рода и нахождении спектральной плотности нестационарных сигналов 2-ой группы [6]. Этот предел равен $p_k(n_{01}, n_{02}, \dots, n_{0N})$. Таким образом, в любом из рассмотренных случаев

$$f(v_e) = \sum_{k=1}^L p_k(n_{01}, n_{02}, \dots, n_{0N}) f_k(v_e), \quad (3.1.9)$$

$$M \{ v^T(t) \} = \sum_{k=1}^L \bar{v}_{ek} p_k(n_{01}, n_{02}, \dots, n_{0N}) = v_{e0},$$

где v_{e0} – средняя скорость всех электронов, эмитируемых катодом. Очевидно, что соотношение (3.1.9), как и (3.1.1), можно было бы принять сразу, исходя из физических соображений.

Сопоставление результатов расчёта $M \{ v^T(t) \}$ на основе (3.1.5) и (3.1.6) показывает, что средняя скорость пучка v_0 равна средней скорости электронов v_{e0} .

По аналогии с (3.1.5), (3.1.6) на основе непрерывной и дискретной моделей электронного пучка введем в рассмотрение среднее за время T значение тока луча

$$i^T(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i(t) dt, \quad (3.1.10)$$

$$i^T(t) = \frac{ne}{T}, \quad (3.1.11)$$

где $i(t)$ - ток эмиссии катода в рамках непрерывной модели пучка, n - число электронов, испущенных катодом за время T .

Сравнение математических ожиданий $M \{ i^T(t) \}$, найденных с использованием (3.1.10) и (3.1.11), дает следующее выражение для среднего значения I_0 тока эмиссии:

$$I_0 = \frac{n_0 e}{T} = \lambda_0 e.$$

Если теперь предположить, что флуктуации скорости пучка дельта - коррелированы и рассчитать дисперсию $v^T(t)$, то можно получить спектральную плотность флуктуаций скорости пучка. В случае однородного катода она совпадает с формулой Рэка. Аналогичная операция с $i^T(t)$ позволяет найти спектральную плотность флуктуаций тока, выражение для которой совпадает с формулой Шоттки [11].

Для расчета взаимной спектральной плотности флуктуаций тока и скорости, и определения R_{0iv} в выражении (3.1.4) необходимо найти одномерный начальный момент второго порядка $M\{i^T(t)v^T(t)\}$.

Используя выражения (3.1.5), (3.1.10), указанный момент можно записать так:

$$M\{i^T(t)v^T(t)\} = I_0 v_0 + \frac{1}{T^2} \int_t^{t+T} \int_t^{t+T} R_{iv}(t_2 - t_1) dt_1 dt_2.$$

Вследствие предположения (3.1.3) из этого соотношения следует

$$M\{i^T(t)v^T(t)\} = I_0 v_0 + \frac{R_{0iv}}{T}. \quad (3.1.12)$$

Этот же момент, рассчитанный на основе выражений (3.1.6), (3.1.11) имеет вид

$$M\{i^T(t)v^T(t)\} = \frac{e}{T} M\{nM(v_e | n_1, n_2, \dots, n_N)\}, \quad (3.1.13)$$

где $M(v_e | n_1, n_2, \dots, n_N)$ – условное математическое ожидание скорости электронов, определяемое при условии, что за время T отдельные эмиссионные области катода испускают соответственно n_1, n_2, \dots, n_N электронов; $M\{nM(v_e | n_1, n_2, \dots, n_N)\}$ – безусловное математическое ожидание, получаемое усреднением величины, стоящей в фигурных скобках, по всем значениям n_1, n_2, \dots, n_N .

Приравнявая правые части равенства (3.1.12) и (3.1.13), нетрудно найти постоянную R_{0iv} , а следовательно, и окончательное выражение для взаимной спектральной плотности флуктуаций тока и скорости

$$S_{iv}(\omega) = \frac{e}{2\pi} \{M[nM(v_e | n_1, n_2, \dots, n_N)] - n_0 v_0\}. \quad (3.1.14)$$

Обсуждение выражения (3.1.14) показывает следующее. Если катод кинетически однороден, т.е. все $f_k(v_e)$ одинаковы, то $f(v_e | n_1, n_2, \dots, n_N)$, как следует из (3.1.2), не зависит от числа частиц,

$$M(v_e | n_1, n_2, \dots, n_N) = v_{e0} = v_0, \quad (3.1.15)$$

и корреляция флуктуаций отсутствует. Также очевидно, что взаимная спектральная плотность флуктуаций равна нулю, вследствие выполнения равенства (3.1.15), в том случае, когда катод кинетически неоднороден, но вероят-

ностные коэффициенты p_k в выражении (3.1.2) для условной плотности распределения скорости электронов являются постоянными величинами, не зависящими от числа частиц. Наконец, равенство (3.1.15) выполняется и корреляция флуктуаций отсутствует для кинетически неоднородных катодов с переменными вероятностными коэффициентами p_k , но при условии, что зависимость p_k от числа частиц является линейной функцией от n_m/n , $m=1,2,\dots,N$. Это объясняется тем, что в таком случае неоднородный катод, по существу, представляет собой несколько параллельно включенных независимых однородных эмиттеров, на каждом из которых корреляция флуктуаций тока и скорости отсутствует.

В то же время анализ результатов, полученных на основе соотношений (3.1.14) и (3.1.2) для кинетически неоднородного катода, показывает, что корреляция флуктуаций отсутствует лишь для весьма ограниченного числа функций $p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)$. В большинстве случаев флуктуации тока и скорости пучка на поверхности катода коррелированы. Например, корреляция имеет место, когда вероятностные коэффициенты $p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)$ пропорциональны произведению соответствующего нормировочного множителя и величин n_m с некоторыми постоянными, отличными от 1, весовыми коэффициентами k_{sm} , или величин n_m^2 , или произведений $n_m n_j$ и т.д. Данные соответствующих расчетов приводятся ниже.

Основной результат исследования (3.1.14) получен для общей модели эмиттера, неоднородного в эмиссионном (эмиссионно-дистрибутивном) и кинетическом отношении. Характеристиками эмиссионной неоднородности здесь являются вероятностные коэффициенты $p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)$ выражения для рандомизированной условной плотности распределения скоростей, так как они определяются эмиссионными параметрами отдельных областей катода. Характеристиками кинетической неоднородности эмиттера выступают законы распределения $f_k(v_e)$ и средние значения \bar{v}_{ek} скорости электронов различных кинетических классов. Пока все эти характеристики заданы в общем виде.

Нахождение численных значений взаимного спектра флуктуаций требует введения конкретной комплексной физико-статистической модели неоднородного эмиттера, которая включает в себя, по существу, две частных модели. Одна из них представляет собой модель эмиссионно-дистрибутивной неоднородности, которая позволяет задать конкретный вид коэффициентов $p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)$. Вторая частная модель описывает кинетическую неоднородность катода и конкретизирует вид $f_k(v_e)$ и \bar{v}_{ek} .

В частном случае, когда катод содержит 2 эмиссионные области ($N=2$), эмитируемые частицы относятся к двум кинетическим классам ($L=2$), а их число распределено по закону Пуассона, выражения для v_0 и $S_{iv}(\omega)$ упрощаются и принимают вид

$$v_0 = \bar{v}_{e1} + p_{02}(\bar{v}_{e2} - \bar{v}_{e1}), \quad (3.1.16)$$

$$S_{iv}(\omega) = \frac{e}{2\pi} (\bar{v}_{e2} - \bar{v}_{e1}) \{M[np_2(n_1, n_2)] - n_0 p_{02}\}, \quad (3.1.17)$$

где $p_{02} = p_2(n_{01}, n_{02})$.

Для иллюстрации возможности возникновения корреляционного эффекта приведем результаты расчета $S_{iv}(\omega)$ для ряда математических моделей эмиссионной нерегулярности эмиттера, которым отвечают $L=N=2$.

Так при

$$p_1(n_1, n_2) = 1 - \alpha \frac{n_1 n_2}{n^2},$$

$p_2(n_1, n_2) = 1 - p_1(n_1, n_2)$, $0 < \alpha < 2$ взаимный спектр имеет вид

$$S_{iv}(\omega) = -\frac{e\alpha p_{1e} p_{2e}}{2\pi} (\bar{v}_{e2} - \bar{v}_{e1}),$$

где $p_{1e} = n_{01}/n_0$, $p_{2e} = n_{02}/n_0$ – безусловные вероятности того, что данный электрон испущен соответственно 1-ой или 2-ой эмиссионными областями.

При

$$p_1 = \frac{n_1^2}{n_1^2 + n_2^2}$$

взаимная спектральная плотность определяется выражением

$$S_{iv}(\omega) = -\frac{e}{2\pi} \frac{p_{1e} p_{2e} (p_{1e} - p_{2e})}{(p_{1e}^2 + p_{2e}^2)^3} (1 + 2p_{1e} p_{2e}) (\bar{v}_{e2} - \bar{v}_{e1}).$$

Если

$$p_1 = \frac{k_{e1} n_1}{k_{e1} n_1 + k_{e2} n_2}, \quad 0 < k_{e1} < 1, \quad 0 < k_{e2} < 1,$$

то соответствующее выражение для $S_{iv}(\omega)$ запишется так:

$$S_{iv}(\omega) = \frac{e}{2\pi} p_{1e} p_{2e} \frac{k_{e1} k_{e2} (k_{e1} - k_{e2})}{(k_{e1} p_{1e} + k_{e2} p_{2e})^3} (\bar{v}_{e2} - \bar{v}_{e1}).$$

Для статистической модели, в которой

$$p_1 = \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 + \frac{n_2}{n} \frac{n_{01}}{n_0},$$

корреляция флуктуаций описывается соотношением

$$S_{iv}(\omega) = -\frac{e}{2\pi} p_{1e} p_{2e} (\bar{v}_{e2} - \bar{v}_{e1}).$$

Эти примеры можно продолжить. Физико-статистические модели, которым соответствуют приведенные выше выражения для вероятностных коэффициентов p_1 , p_2 и взаимной спектральной плотности $S_{iv}(\omega)$, нетрудно обосновать для различных типов эмиссионной неоднородности эмиттеров.

Аналогичные примеры можно привести для более сложных моделей неоднородного эмиттера, когда $N=2$, $L=3$ [16] или $N=3$, $L=2$ [17]. Следовательно, корреляция флуктуаций тока и скорости на неоднородном катоде является весьма вероятным фактором, который необходимо учитывать при теоретических расчетах и интерпретации результатов эксперимента.

§ 3.2. Общее выражение для взаимной спектральной плотности флуктуаций тока и поперечной скорости электронного пучка

Представлен расчёт взаимной спектральной плотности флуктуаций тока и поперечной скорости электронного пучка на поверхности неоднородных эмиттеров.

Описание системы случайных процессов в рамках спектрально-корреляционной теории предполагает определение матрицы спектральных плотностей [1]. При этом наиболее сложным в методическом отношении является нахождение взаимных спектров случайных процессов. Это характерно как для научно-исследовательской практики, так и для изложения этого вопроса в специальных учебных курсах по теории шумов.

Одним из основных источников шумов вакуумных электронных приборов СВЧ является катод [2]. Случайный характер эмиссии электронов вызывает флуктуации тока, продольной и поперечной скорости, а также поперечных смещений электронного пучка на поверхности катода. На однородном эмиттере эти флуктуации, как правило, считаются не коррелированными [1]. Однако для неоднородного эмиттера более типична обратная ситуация, когда флуктуации являются коррелированными. В данном параграфе пособия предлагается приближённая методика определения взаимного спектра флуктуаций тока и поперечной скорости электронного пучка на неоднородном катоде, аналогичная той, что представлена в работах [3-5] для расчёта взаимного спектра флуктуаций тока и продольной составляющей скорости электронного пучка.

Для определённости, как и в § 2.3, будем считать, что катод ленточный. Под поперечной скоростью электронного пучка u или поперечной скоростью отдельных электронов u_e на подобном эмиттере будем понимать составляющую этой скорости, которая параллельна эмитирующей поверхности и перпендикулярна границам большей длины.

Предположим, что отдельные эмиссионные центры катода испускают группы электронов с различными плотностями распределения $f_k(u_e)$ поперечных составляющих скорости u_e . Группы электронов, отвечающие разным законам распределения $f_k(u_e)$ можно назвать поперечно-кинетическими классами, так как им соответствуют различные значения средней кинетической энергии частиц, связанной с их движением вдоль поверхности катода.. Вследствие “перемешивания” вблизи катода электроны различных классов образуют единый электронный пучок, характеризующийся некоторой общей

плотностью распределения электронных скоростей $f(u_e)$, вид которой зависит от плотностей распределения $f_k(u_e)$ и числа электронов соответствующих классов. Будем считать, что исследуемый катод эмитирует электроны L поперечно-кинетических классов, т.е. $k = 1, 2, \dots, L$.

Предположим также, что отдельные элементы эмитирующей поверхности катода можно разделить на N типов, отличающихся, по крайней мере, соотношением числа электронов различных поперечно-кинетических классов, т.е. распределением электронов по классам. Совокупность центров определенного типа в общем случае может отличаться также и эмиссионной способностью, что позволяет говорить о ней, как об эмиссионной области соответствующего типа. Существование нескольких типов подобных областей, по существу, означает наличие дистрибутивно-эмиссионной неоднородности катода. Однако для краткости указанные области и вид неоднородности будем называть эмиссионными.

Под поперечной скоростью электронного пучка u на катоде, как принято в классической работе [6], будем понимать среднее значение поперечной скорости u_e электронов, испущенных за физически бесконечно малый интервал времени. Это означает, что непрерывная функция времени $u(t)$ получается из "решётчатой" функции $u_e(t)$ методом "мгновенного усреднения" Рэка [6,7]. Ее величина, естественно, будет зависеть как от вида функций $f_k(u_e)$, так и от отношения числа частиц различных поперечно-кинетических классов.

Вследствие флуктуаций числа частиц n_r , $r=1, 2, \dots, N$, эмитируемых различными эмиссионными областями, текущий закон распределения электронных скоростей на подобном катоде с течением времени, очевидно, будет изменяться. Следовательно, детальное описание спектра скоростей требует введения в рассмотрение такой рандомизированной условной плотности вероятности скорости, которая характеризовала бы распределение скоростей на любом конечном интервале времени, а после статистического усреднения приводила бы к безусловному регулярному закону распределения. Дальнейшие выкладки проведем для произвольных законов распределения случайных величин n_r и u_{ey} .

Рандомизированная условная плотность распределения поперечной скорости электронов, эмитированных за любой конечный интервал времени T , выразится через плотности распределения $f_k(u_e)$ и вероятностей p_k принадлежности произвольного электрона к соответствующему поперечно-кинетическому классу, которые зависят от числа электронов n_1, n_2, \dots, n_N , испущенных за указанное время всеми эмиссионными областями, т.е. $p_k = p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)$. Согласно формуле полной вероятности эту функцию можно представить таким образом:

$$f(u_e | n_1, n_2, \dots, n_N) = \sum_{k=1}^L p_k(n_1, n_2, \dots, n_N) f_k(u_e), \quad (3.2.1)$$

где $\sum_{k=1}^L p_k(n_1, n_2, \dots, n_N) = 1$, $f(u_e | n_1, n_2, \dots, n_N)$ – рандомизированная условная плотность распределения поперечной скорости, определяемая при условии, что отдельные эмиссионные области испустили за время T соответственно n_1, n_2, \dots, n_N электронов.

Случайные изменения числа частиц n_1, n_2, \dots, n_N вызывают флуктуации тока электронного пучка. Поскольку эта же причина, как следует из (3.2.1), приводит и к флуктуациям поперечной скорости пучка, есть основания полагать, что в общем случае указанные флуктуации будут коррелированными.

Безусловная плотность распределения $f(u_e)$ определяется математическими ожиданиями $M\{n_r(t)\} = n_{0r}$, $r = 1, 2, \dots, N$ и запишется так [3-5]:

$$f(u_e) = \sum_{k=1}^L p_{0k} f_k(u_e), \quad (3.2.2)$$

где $p_{0k} = p_k(n_{01}, n_{02}, \dots, n_{0N})$.

Для расчета взаимной спектральной плотности флуктуаций тока и поперечной скорости электронного пучка воспользуемся приближенным методом [3-5, 7], успешно применявшимся для нахождения спектральных плотностей флуктуации тока и скорости и их взаимного спектра. Как и в [3-5], будем считать, что флуктуации тока и поперечной скорости стационарно связаны, а взаимная корреляционная функция этих флуктуаций $R_{iu}(\tau)$ описывается дельта-функцией $\delta(\tau)$, т.е.

$$R_{iu}(\tau) = R_{oiu} \delta(\tau), \quad (3.2.3)$$

где $\tau = t_2 - t_1$ – разность моментов времени, R_{oiu} – вещественная постоянная величина. Это означает, что используемый метод расчета позволяет найти лишь равномерную составляющую спектра. Подстановка (3.2.3) в соотношение Хинчина–Винера [1] приводит к следующему выражению для взаимного спектра $S_{iu}(\omega)$ флуктуаций тока и поперечной скорости пучка

$$S_{iu}(\omega) = \frac{R_{oiu}}{2\pi}. \quad (3.2.4)$$

Здесь ω – круговая частота. В общем случае взаимная спектральная плотность имеет комплексный характер. Принимая предположение (3.2.3), мы ограничиваемся, таким образом, определением вещественной части взаимного спектра. Величина постоянной R_{oiu} ограничивается следующим соотношением, доказанным в теории случайных функций [8],

$$|S_{iu}(\omega)|^2 \leq S_i(\omega) S_u(\omega),$$

где $S_i(\omega)$, $S_u(\omega)$ – спектральные плотности флуктуаций тока и поперечной скорости пучка соответственно. Это соотношение устанавливает границу

применимости результатов расчёта взаимного спектра, полученных на основе тех или иных статистических моделей катода.

С целью нахождения неизвестной постоянной R_{oiu} введем в рассмотрение две вспомогательные случайные функций, которые можно выразить через характеристики как непрерывной, так и дискретной моделей электронного пучка. В качестве первой такой функции рассмотрим среднюю за некоторый конечный интервал времени T поперечную скорость $u^T(t)$ электронного пучка. В рамках соответственно непрерывной и дискретной моделей пучка она запишется так [3-5]:

$$u^T(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt, \quad (3.2.5)$$

$$u^T(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_{ej}, \quad (3.2.6)$$

где n – полное число электронов, испущенных за время T , u_{ej} – скорость j -го электрона, испущенного на указанном интервале времени любой эмиссионной областью. Расчёт математического ожидания $M\{u^T(t)\}$ на основе выражений (3.2.5) и (3.2.6) приводит к равенству средней поперечной скорости пучка u_0 и средней поперечной скорости электронов u_{0e} , которые согласно (3.2.2) можно представить так:

$$u_0 = u_{0e} = \sum_{k=1}^L p_{0k} W_k, \quad (3.2.7)$$

где $W_k = \int_{-\infty}^{+\infty} u_e f_k(u_e) du_e$ – среднее значение поперечной скорости электронов k -го класса.

По аналогии с (3.2.5), (3.2.6) на основе непрерывной и дискретной моделей электронного пучка введем в рассмотрение среднее за время T значение тока $i^T(t)$ электронного луча

$$i^T(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i(t) dt, \quad (3.2.8)$$

$$i^T(t) = \frac{ne}{T}, \quad (3.2.9)$$

где e – абсолютная величина заряда электрона, $i(t)$ – непрерывная функция тока эмиссии катода в рамках непрерывной модели пучка. Сравнение математических ожиданий $M\{i^T(t)\}$, найденных с использованием (3.2.8) и (3.2.9), приводит к выражению для среднего значения $M\{i(t)\} = I_0$ тока эмиссии

$$I_0 = \frac{n_0 e}{T},$$

где n_0 – среднее число электронов, эмитируемых катодом за время T .

Для расчета взаимной спектральной плотности флуктуаций тока и поперечной скорости и определения R_{0iu} воспользуемся соотношениями (3.2.5), (3.2.8) и (3.2.6), (3.2.9) и найдём одномерный начальный момент второго порядка $M\{i^T(t)u^T(t)\}$ на основе соответственно непрерывной и дискретной моделей пучка. Используя выражения (3.2.5), (3.2.8), указанный момент можно записать так:

$$M\{i^T(t)u^T(t)\} = I_0 u_0 + \frac{1}{T^2} \int_t^{t+T} \int_t^{t+T} R_{iu}(t_2 - t_1) dt_1 dt_2$$

Вследствие предположения (3.2.3) из этого соотношения следует

$$M\{i^T(t)u^T(t)\} = I_0 u_0 + \frac{R_{0iu}}{T}. \quad (3.2.10)$$

Этот же момент, рассчитанный на основе выражений (6), (9) имеет вид

$$M\{i^T(t)u^T(t)\} = \frac{e}{T} M\{nM(u_e | n_1, n_2, \dots, n_N)\}, \quad (3.2.11)$$

где $M(u_e | n_1, n_2, \dots, n_N)$ – условное математическое ожидание поперечной скорости электронов, определяемое при условии, что за время T отдельные эмиссионные области катода испускают соответственно n_1, n_2, \dots, n_N электронов, $M\{nM(u_e | n_1, n_2, \dots, n_N)\}$ – безусловное математическое ожидание, получаемое усреднением величины, стоящей в фигурных скобках, по всем значениям n_1, n_2, \dots, n_N . Приравнявая правые части равенства (3.2.10) и (3.2.11), нетрудно найти постоянную R_{0iu} , а следовательно, и взаимный спектр флуктуаций тока и поперечной скорости

$$S_{iu}(\omega) = \frac{e}{2\pi} \{M[nM(u_e | n_1, n_2, \dots, n_N)] - n_0 u_0\}. \quad (3.2.12)$$

Согласно (3.2.1) условное и безусловное математические ожидания в (3.2.12) равны

$$M(u_e | n_1, n_2, \dots, n_N) = \sum_{k=1}^L p_k W_k, \quad (3.2.13)$$

$$M[nM(u_e | n_1, n_2, \dots, n_N)] = \sum_{k=1}^L W_k M(np_k). \quad (3.2.14)$$

Подстановка (3.2.7), (3.2.13), (3.2.14) в (3.2.12) позволяет записать окончательное выражение для взаимной спектральной плотности флуктуаций тока и поперечной скорости электронного пучка через вероятностные коэффициенты p_k

$$S_{iu}(\omega) = \frac{e}{2\pi} \sum_{k=1}^L W_k [M(np_k) - n_0 p_{0k}], \quad (3.2.15)$$

где p_{0k} – значение коэффициента p_k при $n_1 = n_{01}, n_2 = n_{02}, \dots, n_k = n_{0k}, \dots, n_N = n_{0N}, n = n_0, n_{0k} = M\{n_k\}, n_0 = M\{n\}$.

Анализ выражений (3.2.12), (3.2.15) позволяет указать те случаи, когда корреляция рассматриваемых флуктуаций на катоде отсутствует. Если катод кинетически однороден, т.е. все $f_k(u_e)$ одинаковы, то $f(u_e | n_1, n_2, \dots, n_N)$, как следует из (3.2.1), не зависит от числа частиц,

$$M(u_e | n_1, n_2, \dots, n_N) = u_{0e} = u_0, \quad (3.2.16)$$

и корреляция флуктуаций отсутствует. Также очевидно, что взаимная спектральная плотность флуктуаций равна нулю, вследствие выполнения равенства (16), в том случае, когда катод кинетически неоднороден, но вероятностные коэффициенты p_k в выражении (3.2.1) для условной плотности распределения скорости электронов являются постоянными величинами, не зависящими от числа частиц. Наконец, равенство (3.2.16) выполняется и корреляция флуктуаций отсутствует для кинетически неоднородных катодов с переменными вероятностными коэффициентами p_k , но при условии, что зависимость p_k от числа частиц является линейной функцией от n_k/n . Это объясняется тем, что в таком случае неоднородный катод, по существу, представляет собой несколько параллельно включенных независимых однородных эмиттеров, на каждом из которых корреляция флуктуаций тока и скорости отсутствует.

Выражения (3.2.12), (3.2.15) записаны для общего случая, когда u_0 отлична от нуля, а катод характеризуется произвольным числом эмиссионных областей и поперечно - кинетических классов электронов. Если $u_0=0$, то вторые слагаемые в фигурной скобке соотношения (3.2.12) и под знаком суммы выражения (3.2.15) отсутствуют.

В частном случае, когда катод содержит 2 эмиссионные области ($N=2$), а эмитируемые частицы относятся к двум различным поперечно - кинетическим классам ($L=2$), выражения для u_0 и $S_{iu}(\omega)$ упрощаются и принимают вид:

$$u_0 = W_1 + p_{02}(W_2 - W_1),$$

$$S_{iu}(\omega) = \frac{e}{2\pi}(W_2 - W_1)\{M[np_2(n_1, n_2)] - n_0 p_{02}\}. \quad (3.2.17)$$

В целом анализ соотношений (3.2.12), (3.2.15), (3.2.17) для кинетически неоднородного катода показывает, что корреляция флуктуаций отсутствует лишь для весьма ограниченного числа функций $p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)$. В большинстве случаев флуктуации тока и поперечной скорости электронного пучка на поверхности катода коррелированы. Для иллюстрации этого факта достаточно привести результаты расчёта взаимного спектра флуктуаций для математико-статистических моделей неоднородного эмиттера, представленных в [5]. Указанные расчёты проведены при предположении, что эмиттер работает в режиме насыщения, случайные величины n_1, n_2, \dots, n_N независимы и распределены по закону Пуассона, а относительные флуктуации числа частиц малы. Вычисления выполнены с точностью до величин второго порядка малости.

Результаты расчётов показывают, что при $L=N=2$ и $p_1 = (n_1/n)[1 + \alpha(n_2/n)]$, $\alpha = \text{const}$ взаимный спектр имеет вид

$$S_{iu}(\omega) = \frac{e\alpha p_{01}p_{02}}{2\pi}(W_2 - W_1),$$

где $p_{01} = n_{01}/n_0$, $p_{02} = n_{02}/n_0$ – безусловные вероятности того, что данный электрон испущен соответственно 1-ой или 2-ой эмиссионными областями.

При $p_1 = n_1^2/(n_1^2 + n_2^2)$ взаимная спектральная плотность флуктуаций определяется выражением

$$S_{iu}(\omega) = -\frac{e}{2\pi} \frac{p_{01}p_{02}(p_{01} - p_{02})}{(p_{01}^2 + p_{02}^2)^3} (W_2 - W_1)(1 + 2p_{01}p_{02}).$$

Если, $p_1 = k_1 n_1 / (k_1 n_1 + k_2 n_2)$, $0 < k_1 < 1$, $0 < k_2 < 1$, то соответствующее выражение для $S_{iu}(\omega)$ имеет вид

$$S_{iu}(\omega) = \frac{e}{2\pi} p_{01}p_{02} \frac{k_1 k_2 (k_1 - k_2)}{(k_1 p_{01} + k_2 p_{02})^3} (W_2 - W_1).$$

Для статистической модели, в которой $p_1 = (n_1/n)^2 + (n_2 n_{01}/n n_0)$, взаимный спектр описывается соотношением:

$$S_{iu}(\omega) = -\frac{e}{2\pi} p_{01}p_{02}(W_2 - W_1).$$

Приведённые примеры показывают, что исследование шумовых свойств неоднородных эмиттеров в большинстве случаев должно проводиться с учётом корреляции флуктуаций тока и поперечной скорости электронного пучка.

Задание вида функций, описывающих вероятностные коэффициенты p_k и законы распределения $f_k(u_e)$, а также получение численных значений взаимной спектральной плотности требует дополнения рассмотренной общей статистической модели катода соответствующими физическими положениями, которые придадут ей конкретный физико-статистический характер. Для ряда конкретных физико-статистических моделей неоднородного эмиттера такие модели разработаны, и соответствующие взаимные спектры приведены выше. Однако экспериментальные исследования неоднородных эмиттеров могут привести к обоснованию более широкого спектра моделей, а следовательно, и к получению новых результатов. Достоинством предложенной методики расчёта взаимной спектральной плотности является возможность её применения для различных физико-статистических моделей неоднородного эмиттера.

§ 3.3. Общее выражение для взаимной спектральной плотности флуктуаций тока и поперечных смещений электронного пучка

Представлен расчёт взаимной спектральной плотности флуктуаций тока и поперечного смещения электронного пучка на поверхности неоднородных эмиттеров.

Одним из источников шума вакуумных электронных приборов СВЧ являются флуктуации поперечного смещения (положения центра тяжести) электронного пучка на катоде [1]. Неоднородность катода изменяет уровень этих флуктуаций и вызывает их корреляцию с флуктуациями тока эмиссии. Исследование корреляции флуктуаций относится к наиболее сложным вопросам учебно-методической и научно-исследовательской практики. В данном параграфе пособия предлагается методика расчёта взаимной спектральной плотности флуктуаций тока и поперечного смещения электронного пучка [2], являющаяся дальнейшим развитием подхода А.Ф. Голубенцева, использованного в работах [3,4] применительно к флуктуациям тока, продольной и поперечной скорости пучка.

Рассмотрим ленточный катод. Для описания поперечных флуктуаций электронного пучка и их корреляции с током, как и ранее, воспользуемся прямоугольной системой координат с началом в точке пересечения диагоналей прямоугольника, являющегося эмиттером электронов. Ось Y направим по касательной к поверхности катода и перпендикулярно границам эмиттера большей длин.

Будем считать, что непрерывная функция времени $y(t)$, являющаяся поперечной координатой (смещением) центра тяжести электронного пучка на катоде определяется методом "мгновенного усреднения" Рэка [5] "решётчатой" функции $Y(t)$ поперечных координат отдельных электронов, то есть $y(t)$ является средним за физически бесконечно малый интервал времени значением поперечных координат Y испущенных электронов.

В качестве рабочей примем следующую общую модель неоднородного катода. Предположим, что все электроны, эмитируемые катодом, делятся на L классов, каждый из которых отличается собственной плотностью распределения $f_k(Y)$ ($k=1,2,..L$) электронной координаты Y . Для краткости эти классы и неоднородность катода, связанную с их различием, будем условно называть координатными. Кроме того, предположим, что эмитирующая поверхность катода обладает также эмиссионно-дистрибутивной неоднородностью, т.е. представляет собой N областей в виде полос произвольной ширины и параллельных оси Y , отличающихся интегральной эмиссией электронов и характерным собственным распределением электронов по координатным классам. Таким образом, катоду присущи два вида неоднородности: эмиссионно-дистрибутивная и координатная.

Как и в [2,4], для детального описания изменений во времени положения центра тяжести пучка введём в рассмотрение рандомизированную условную

плотность распределения поперечной координаты Y электронов, эмитированных за любой конечный интервал времени T

$$f(Y | n_1, n_2, \dots, n_N) = \sum_{k=1}^L p_k(n_1, n_2, \dots, n_N) f_k(Y), \quad (3.3.1)$$

где $\sum_{k=1}^L p_k(n_1, n_2, \dots, n_N) = 1$, $p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)$ – вероятность принадлежности произвольного электрона к k -ому координатному классу при условии, что отдельные эмиссионные области испустили за время T соответственно n_1, n_2, \dots, n_N электронов, $f(Y | n_1, n_2, \dots, n_N)$ – рандомизированная условная плотность распределения поперечной координаты электронов, определяемая при тех же условиях, что и $p_k(n_1, n_2, \dots, n_N)$.

Безусловная плотность распределения координаты Y электронов согласно (3.3.1), очевидно, опишется выражением

$$f(Y) = \sum_{k=1}^L p_{0k} f_k(Y), \quad (3.3.2)$$

где $p_{0k} = p_k(n_{01}, n_{02}, \dots, n_{0N})$, $n_{0r} = M\{n_r(t)\}$, $r = 1, 2, \dots, N$, M – символ взятия математического ожидания.

Предположим, что флуктуации тока и смещения пучка стационарно связаны, а их взаимная корреляционная функция $R_{iy}(\tau)$ описывается δ – функцией

$$R_{iy}(\tau) = R_{0iy} \delta(\tau), \quad (3.3.3)$$

где $\tau = t_2 - t_1$ – разность моментов времени, R_{0iy} – вещественная постоянная величина. Тогда взаимная спектральная плотность флуктуаций тока и смещения $S_{iy}(\omega)$ согласно соотношению Хинчина- Винера определится выражением

$$S_{iy}(\omega) = \frac{R_{0iy}}{2\pi}. \quad (3.3.4)$$

где ω – круговая частота. Использование соотношения (3.3.3) означает предположение о том, что исследуемый спектр "белый" и вещественный. При произвольном характере спектра излагаемая методика позволяет определять лишь равномерную (не зависящую от частоты) компоненту вещественной части взаимной спектральной плотности.

Для нахождения постоянной R_{0iy} введём в рассмотрение две вспомогательные функции – средние за время T смещение $y^T(t)$ и ток $i^T(t)$ электронного пучка, – которые физически обоснованно выражаются через характеристики и непрерывной, и дискретной моделей пучка

$$y^T(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} y(t) dt = \sum_{j=1}^n Y_j, \quad (3.3.5)$$

$$i^T(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i(t) dt = \frac{ne}{T} \quad (3.3.6)$$

где $n = n_1 + n_2 + \dots + n_N$ – полное число электронов, эмитированных катодом за время T , e – абсолютная величина заряда электрона. Сравнение начальных моментов первого $M\{i^T(t)\}$, $M\{y^T(t)\}$ и второго $M\{i^T(t)y^T(t)\}$ порядков, вычисленных на основе тех частей выражений (3.3.5), (3.3.6), которые соответствуют непрерывной и дискретной моделям пучка, приводит к равенствам

$$\begin{aligned} y_0 &= Y_0, \\ I_0 &= \frac{n_0 e}{T}, \\ n_0 e y_0 + R_{0iy} &= e M\{n M(Y|n_1, n_2, \dots, n_N)\}, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

где $n_0 = M\{n\}$, $y_0 = M\{y\}$, $Y_0 = M\{Y\}$, $M(Y|n_1, n_2, \dots, n_N)$ – условное математическое ожидание координаты Y электрона, определяемое при условии, что отдельные эмиссионные области катода испускают за время T соответственно n_1, n_2, \dots, n_N электронов. Находя из (3.3.7) величину R_{0iy} и подставляя её в (3.3.4), получаем окончательное выражение для взаимного спектра флуктуаций

$$S_{iy}(\omega) = \frac{e}{2\pi} \{M[n M(Y|n_1, n_2, \dots, n_N)] - n_0 y_0\}. \quad (3.3.8)$$

На основе (3.3.1) полученный результат можно выразить через вероятностные коэффициенты p_k, p_{0k} следующим образом:

$$S_{iy}(\omega) = \frac{e}{2\pi} \sum_{k=1}^L Y_{0k} [M(np_k) - n_0 p_{0k}], \quad (3.3.9)$$

где $Y_{0k} = \int_{-\infty}^{+\infty} Y f_k(Y) dY$ – среднее значение координаты точки эмиссии электронов k -ого координатного класса.

В частном случае, когда катод имеет две эмиссионные области ($N=2$) и испускает электроны двух координатных классов ($L=2$) выражение (3.3.9) принимает вид

$$S_{iy}(\omega) = \frac{e}{2\pi} (Y_{02} - Y_{01}) \{M[np_2(n_1, n_2)] - n_0 p_{02}\}. \quad (3.3.10)$$

Выражения (3.3.8), (3.3.9), (3.3.10) применимы для различных частных моделей эмиссионно-дистрибутивной и координатной неоднородностей, определяющих конкретный вид функций p_k и f_k [2]. Анализ этих соотношений показывает, что для большинства видов неоднородности катода (видов функций p_k и f_k) флуктуации тока и смещения электронного пучка на его поверхности коррелированы. Так, на основе результатов, приведённых в [2] и соответствующих $L=N=2$, нетрудно записать взаимный спектр флуктуаций тока и смещения для произвольной координатной неоднородности ($Y_{01} \neq Y_{02}$)

и различных частных случаев эмиссионно-дистрибутивной нерегулярности эмиттера.

Действительно, для простейшей модели эмиссионно-дистрибутивной неоднородности катода, когда $p_1 = (n_1/n)[1 + \alpha(n_2/n)]$, $\alpha = \text{const}$, взаимный спектр имеет вид

$$S_{iy}(\omega) = \frac{e\alpha p_{01}p_{02}}{2\pi}(Y_{02} - Y_{01}),$$

где $p_{01} = n_{01}/n_0$, $p_{02} = n_{02}/n_0$ – безусловные вероятности того, что данный электрон испущен соответственно 1-ой или 2-ой эмиссионными областями.

Для квадратичной модели с $p_1 = n_1^2/(n_1^2 + n_2^2)$ взаимная спектральная плотность определяется выражением

$$S_{iy}(\omega) = -\frac{e}{2\pi} \frac{p_{01}p_{02}(p_{01} - p_{02})}{(p_{01}^2 + p_{02}^2)^3} (Y_{02} - Y_{01})(1 + 2p_{01}p_{02}).$$

Пропорциональной модели соответствует $p_1 = k_1 n_1 / (k_1 n_1 + k_2 n_2)$, $0 < k_1 < 1$, $0 < k_2 < 1$ и следующее выражение для взаимного спектра :

$$S_{iy}(\omega) = \frac{e}{2\pi} p_{01}p_{02} \frac{k_1 k_2 (k_1 - k_2)}{(k_1 p_{01} + k_2 p_{02})^3} (Y_{02} - Y_{01}).$$

Для ограниченно инерционной статистической модели, в рамках которой $p_1 = (n_1/n)^2 + (n_2 n_{01} / n n_0)$, взаимная спектральная плотность флуктуаций описывается соотношением:

$$S_{iy}(\omega) = -\frac{e}{2\pi} p_{01}p_{02}(Y_{02} - Y_{01}).$$

Расчёт в общем виде и приведённые примеры свидетельствуют о необходимости учёта корреляции флуктуаций тока и смещения электронного пучка при исследовании шумовых свойств неоднородных эмиттеров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом данной работы является формирование и представление двух комплексов учебно-методических разработок, посвящённых методике проведения статистических расчётов по тематике курсов для студентов физического и других естественных факультетов.

Первый комплекс разработок, предназначенный для студентов младших курсов, составил содержание первой главы. Второй комплекс, приведённый во второй и третьей главах пособия, предназначен для студентов-старшекурсников и аспирантов.

Как уже указывалось, указанные учебно-методические разработки в разное время были опубликованы в разделе «Образование» межвузовского научного сборника «Вопросы прикладной физики» издательства Саратовского университета и студенты уже имели возможность ими воспользоваться. Опыт их применения в учебном процессе на кафедре прикладной физики СГУ дал положительные результаты. Это позволяет надеяться на то, что они окажутся востребованными и полезными и в будущем.

Библиографический список

Литература к § 1.1.

1. Фриш С.Э. и Тиморева А.В. Курс общей физики. Том I. Физические основы механики. Молекулярная физика. Колебания и волны. М., 2007.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Том I. Механика. Молекулярная физика. М., 1977.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том II. Термодинамика и молекулярная физика. М., 1975.
4. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н., Эткин В.С. Курс общей физики. Молекулярная физика. М., 1982.
5. Яковлев В.Ф. Курс физики. Теплота и молекулярная физика. М., 1976.
6. Китайгородский А.И. Введение в физику. М., 1973.
7. Сущинский М.М. Курс физики. Физические основы механики. Молекулярная физика и термодинамика. М., 1973.
8. Рейф Ф. Берклеевский курс физики. Том V. Статистическая физика. М., 1972.
9. Поройков И.В. Краткий курс лекций по физике. М., 1965.
10. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М., 1965.
11. Россель Ж. Общая физика. М., 1964.
12. Кикоин И.К. и Кикоин А.К. Молекулярная физика. М., 1963.
13. Телеснин Р.В. Молекулярная физика. М., 1965.
14. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. М., 1981
15. Serway R.A., Jewett J.W. Principles of Physics. A Calculus-Based Text. Vol. I. USA, 2002
16. Halliday D., Resnick R., Walker J. Fundamentals of Physics. USA, 1997
17. Поль Р.В. Механика, акустика и учение о теплоте. М., 1971.
18. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Том IV. Кинетика. Теплота. Звук. М., 1967
19. Рымкевич П.А. Курс физики. М., 1975
20. Зисман Г.А. и Тодес О.М. Курс общей физики. Том I. Механика. Молекулярная физика. Колебания и волны. М. 1969
21. Шубин А.С. Курс общей физики. М., 1969.
22. Радченко И.В. Молекулярная физика. М., 1965.
23. Путилов К.А. Курс физики. Том I. Механика. Акустика. Молекулярная физика. Термодинамика. М., 1963.
24. Яворский Б.М., Детлаф А.А., Милковская Л.Б. Курс физики. Том I. М., 1963.
25. Геворкян Р.Г., Шепель В.В. Курс общей физики. М., 1972.
26. Шаповалов А.С., Шаповалова И.А. О выводе Максвелловского закона распределения скоростей молекул // Вопросы прикладной физики. Саратов, 2008. Вып. 15. С. 16-18.

Литература к § 1.2.

1. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. М., 1981.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. М., 1975.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. М., 1977.
4. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М., 1965.
5. Рейф Ф. Берклеевский курс физики. Т. V. Статистическая физика. М., 1972.
6. Поль Р.В. Механика, акустика и учение о теплоте. М., 1971.
7. Сущинский М.М. Курс физики. Т. 1. Физические основы механики. Молекулярная физика и термодинамика. М., 1973.
8. Фриш С.Э. и Тиморева А.В. Курс общей физики. Т. 1. Физические основы механики. Молекулярная физика. Колебания и волны. М., 1962.
9. Радченко И.В. Молекулярная физика. М., 1965.
10. Кикоин И.К. и Кикоин А.К. Молекулярная физика. М., 1963.
11. Голубенцев А.Ф., Денисов Ю.И., Минкин Л.М. Введение в статистическую электронику. Саратов, 1990.
12. Шаповалов А.С., Минкин Л.М. К вопросу о выводе законов распределения длины и времени свободного пробега молекул // Вопросы прикладной физики. Саратов, 2006. Вып. 13. С. 22-24.

Литература к § 1.3.

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 2. Электричество и магнетизм. М., 1978.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М., 1977.
3. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М., 1983.
4. Шаповалов А.С. Методическое упрощение расчёта намагничённости парамагнетика // Вопросы прикладной физики. Саратов, 2004. Вып. 10. С. 4-5.

Литература к § 1.4.

1. Шаповалов А.С. Методическое упрощение расчёта намагничённости парамагнетика // Вопросы прикладной физики. Саратов, 2004. Вып. 10. С. 4-5.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М., 1977.
3. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М., 1983.
4. Шаповалов А.С. Простой статистический расчёт вектора поляризации полярного диэлектрика // Вопросы прикладной физики. Саратов, 2005. Вып. 12. С. 58-59.

Литература к § 2.1

1. Голубенцев А.Ф. О спектральной плотности флуктуаций скорости электронов на катоде электронной пушки // Вопросы электронной техники. Саратов, 1971. Вып. 2. С.83-103.
2. Rack A.J. // Bell System Techn. J. 1938. V. 17, №10. P. 592-619.
3. Yadavalli S.V. // Jour. Appl. Phys. 1955. V.26, №5. P. 605-608.
4. Шумы в электронных приборах / Под ред. Л.Д. Смуллина и Г.А. Хауса. М.-Л. 1964.
5. Ван дер Зил А. Флуктуации в радиотехнике и физике. М.-Л. 1958.
6. Шаповалов А.С., Голубенцев А.Ф., Денисов Ю.И. Эмиссионные и шумовые свойства неоднородных эмиттеров / Под редакцией профессора В.М. Лопухина. Саратов. 1983.
7. Dalke W., Dlonhy F. // Proc. IRE. 1958. V. 46, № 9. P. 1639-1645.
8. Набоков Ю.И., Авдеев В.Е. // Изв. АН СССР. Сер. Физическая. 1960. Т. 33, № 3. С. 452-457.
9. Taczanowski A., Derko H., Zbikowski A. // Pracein Przemysl. inst. Electron. 1960. V. 1, № 1. P. 20-34.
10. Попов А.И., Колпаков Д.Е. // Электронная техника. Сер. 5. Приёмно-усилительные лампы. 1971. Вып. 1. С. 35-42.
11. Шаповалов А.С. Методика расчёта спектров флуктуаций поперечной скорости электронного пучка на катоде (общий случай) // Вопросы прикладной физики. Саратов, 1998. Вып. 4. С. 14-15.
12. Шаповалов А.С. Методика расчёта спектров флуктуаций поперечных смещений электронного пучка на катоде (общий случай) // Вопросы прикладной физики. Саратов, 1998. Вып. 4. С. 5-6.
13. Шаповалов А.С. Простой вывод формулы Найквиста // Вопросы прикладной физики. Саратов, 2001. Вып. 7. С. 10-11.
14. Голубенцев А.Ф., Денисов Ю.И., Минкин Л.М. Введение в статистическую электронику. Саратов, 1990.
15. Шаповалов А.С. Корреляция и взаимный спектр флуктуаций электронного пучка на неоднородном эмиттере // Вопросы прикладной физики. Саратов, 1997. Вып. 3. С. 9-12.
16. Шаповалов А.С. Методика расчёта взаимного спектра флуктуаций тока и поперечной скорости электронного пучка на неоднородном катоде // Вопросы прикладной физики. Саратов, 1999. Вып. 5. С. 15-18.
17. Шаповалов А.С. Методика определения взаимного спектра флуктуаций тока и поперечного смещения электронного пучка на неоднородном катоде // Вопросы прикладной физики. Саратов, 1999. Вып. 5. С. 19-21.

Литература к § 2.2

1. Rack A.J. // Bell System Tech. J. 1938. V. 17, № 10. P. 592-619.
2. Шумы в электронных приборах / Под ред. Л.Д. Смуллина и Г.А. Хауса. М.-Л., 1964.

3. Шаповалов А.С., Голубенцев А.Ф., Денисов Ю.И. Эмиссионные и шумовые свойства неоднородных эмиттеров. Саратов, 1983.

4. Голубенцев А.Ф. О спектральной плотности флуктуаций скорости электронов на катоде электронной пушки // Вопросы электронной техники. Саратов, 1971. Вып. 2. С. 83-103.

5. Голубенцев А.Ф., Минкин Л.М. Шумы и флуктуации в электронных потоках. Саратов, 1982.

6. Голубенцев А.Ф., Денисов Ю.И., Минкин Л.М. Введение в статистическую электронику. Саратов, 1990.

7. Шаповалов А.С., Минкин Л.М. Об одном методическом упрощении вывода формулы Рэка для спектра флуктуаций скорости электронного пучка // Вопросы прикладной физики. Саратов, 2006. Вып. 13. С. 19-22.

Литература к § 2.3

1. Шумы в электронных приборах / Под ред. Л.Д. Смуллина и Г.А. Хауса. М.-Л. 1964.

2. Ван дер Зил А. Флуктуации в радиотехнике и физике. М.-Л. 1958.

3. Van Duzer T. // IEEE Trans. 1963. V. ED-10, № 6. P.370-378.

4. Шаповалов А.С. Методика расчёта спектра флуктуаций поперечной скорости электронного пучка на катодке (общий случай) // Вопросы прикладной физики. Саратов, 1998. Вып. 4. С. 14-15.

5. Голубенцев А.Ф. О спектральной плотности флуктуаций скорости электронов на катоде электронной пушки // Вопросы электронной техники. Саратов, 1971. Вып. 2. С.83-103.

6. Rack A.J. // Bell System Techn. J. 1938. V. 17, №10. P. 592-619.

7. Голубенцев А.Ф., Денисов Ю.И., Минкин Л.М. Введение в статистическую электронику. Саратов, 1990.

8. Van Duzer T. // IEEE Trans. 1963. V. ED-10, № 6. P.370-378.

9. Шаповалов А.С. Экспериментальные исследования и обобщённая модель неоднородного эмиттера // Вопросы прикладной физики. Саратов, 1989. Вып. 1. С. 43-61.

Литература к § 2.4

1. Van Duzer T. // IEEE Trans. 1963. V. ED-10, № 6. P.370-378.

2. Шаповалов А.С. Методика расчёта спектра флуктуаций поперечных смещений электронного пучка на катоде (общий случай) // Вопросы прикладной физики. Саратов, 1998. Вып. 4. С. 5-6.

3. Rack A.J. // Bell System Techn. J. 1938. V. 17, №10. P. 592-619.

4. Шумы в электронных приборах / Под ред. Л.Д. Смуллина и Г.А. Хауса. М.-Л. 1964.

5. Голубенцев А.Ф. О спектральной плотности флуктуаций скорости электронов на катоде электронной пушки // Вопросы электронной техники. Саратов, 1971. Вып. 2. С.83-103.

Литература к § 2.5

1. Шаповалов А.С. Простой вывод формулы Найквиста // Вопросы прикладной физики. Саратов, 2001. Вып. 7. С. 10-11.
2. Шумы в электронных приборах / Под ред. Л.Д. Смуллина и Г.А. Хауса. М.-Л. 1964.

Литература к § 2.6

1. Давенпорт В.Б., Рут В.Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов / Пер. с англ. под ред. Р.Л. Добрушина. – М.: ИЛ, 1960, – 468 с.
2. Пугачев В.С. Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1968. – 368 с.
3. Dalke W., Dlonhy F. A Cathode Test Utilizing Noise Measurements // Proc. IRE. – 1958. – Vol. 46, ¹ 9. – P. 1639-1645.
4. Набоков Ю.И., Авдеев В.Е. Об аномальном дробовом эффекте в приборах с оксидным катодом // Изв. АН СССР. Сер. Физическая. – 1960. – Т. 33, № 3. – С. 452-457.
5. Taczanowski A., Derko H., Zbikowski A. Badania szumow katod termoelectronowych // Pracen Przemysl. inst. Electron. – 1960. – Vol. 1, № 1. P. 20-34.
6. Попов А.И., Колпаков Д.Е. О возможном механизме аномально высоких дробовых шумов в ПУЛ // Электронная техника. Сер. 5. Приёмно-усилительные лампы. – 1971. – В. 1. – С. 35-42.
7. Герман Г. и Вагенер С. Оксидный катод. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 508 с.
8. Zngang En-Qiu. Electron Emission from Practical Thermionic Cathodes // Acta Electron. Sin. – 1985. – Vol. 13, ¹ 5. – P. 25-31.
9. Zngang En-Qiu. Instabilities of Thermionic Emission in Oxide Cathodes // Int. J. Electron. – 1984. – Vol. 56, ¹ 4. – P. 457- 465.
10. Шумы в электронных приборах / Под ред. Л.Д. Смуллина и Г.А. Хауса, пер. с англ. под ред. К.И. Палатова. - М.-Л.: Энергия, 1964, – 484 с.
11. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. – М. : Наука, 1968. – 660 с.
12. Спивак Г.В., Дубинина Е.М., Сбитникова И.С., Прямова И.А., Виноградов Д.П. Развитие методов электронной микроскопии для наблюдения микрогеометрии и центров эмиссии термокатодов // Радиотехника и электроника. – 1958. – Т. 3, № 8. – С. 1077-1083.
13. Sandor A. Activation Process of Impregnated Dispenser Cathode viewed in the Large-screen Emission Microscope // J. Electron. and Control. First Series. – 1962. – Vol. 13, № 5. – P. 401-416.
14. Шишкин Б.В., Дубинина Е.М., Мичурина К.А. Электронно-оптические исследования оксидных катодов // Радиотехника и электроника. – 1965. – Т. 10, № 7. – С. 1295-1299.

15. Спивак Г.В., Шишкин Б.Б. Количественные электронно-оптические исследования эффективных термоэмиттеров // Радиотехника и электроника. – 1966. – Т. 11, № 10. – С. 1826-1831.

16. Шишкин Б.В., Дубинина Е.М., Мичурина К.А. Электронно-оптические исследования оксидных катодов. Часть 2 // Изв. АН СССР. Сер. Физическая. – 1966. – Т. 30, № 5. – С. 873-876.

17. Дружинин А.В., Кондрашенков Ю.А., Некрасов В.И. Эмиссионная неоднородность эффективных термокатодов // Изв. АН СССР. Сер. Физическая. – 1969. – Т. 33, № 5. – С. 411-420.

18. Дружинин А.В. Методика определения работы выхода микроучастков поверхности термокатодов // Изв. АН СССР. Сер. Физическая. – 1961. – Т. 25, № 6. – С. 730-734.

19. Jansen C.G.T., Venema A., Weekers Th.H. Nonuniform Emission of Thermionic Cathodes // J. Appl. Phys. – 1966. – Vol. 37, № 6. – P. 2234-2245.

20. Красинькова М.В., Мойжес Б.Я. Об эмиссионной однородности оксидного катода // ЖТФ. – 1968. – Т. 38, № 12. – С. 2096-2100.

21. Шаповалов А.С., Голубенцев А.Ф., Денисов Ю.И. Эмиссионные и шумовые свойства неоднородных эмиттеров / Под редакцией профессора В.М. Лопухина. – Саратов.: Изд-во СГУ, 1983. – 90 с.

22. Шаповалов А.С. Экспериментальные исследования и обобщенная модель неоднородного эмиттера // Вопросы прикладной физики. : Межвуз. науч. сб. Саратов.: Изд-во СГУ. – 1989. – В. 1. – С. 43-61.

23. Голубенцев А.Ф., Шаповалов А.С. О природе аномального дробового шума термокатодов // Тез. докл. 15-й Всесоюзная конференции по эмиссионной электронике. – Киев, 1973. – С. 115-116.

24. Голубенцев А.Ф., Шаповалов А.С. К вопросу об уровне дробового шума термокатода // ЖТФ. – 1974. – Т. 44, № 10. – С. 2174–2177.

25. Голубенцев А.Ф., Шаповалов А.С. К вопросу о спектральной плотности флуктуаций тока эмиссии термокатода // Изв. вузов. Радиофизика. – 1974. – Т. 17, № 12. – С. 1885-1890.

26. Голубенцев А.Ф., Шаповалов А.С. О влиянии смены эмиссионных состояний термокатода на шумовые свойства СВЧ приборов. – В кн.: ВИМИ "РИПОРТ". – М.: ЦНИИ "Электроника". – 1976. – №17. Деп. № 4318/76.

27. Шаповалов А.С., Денисов Ю.И., Голубенцев А.Ф. Дробовой шум неоднородного эмиттера // Тез. докл. 10-й Всесоюзной научной конференции по электронике сверхвысоких частот. – Минск, 1983. – Т. 1. Вакуумная электроника СВЧ. – С. 60.

28. Шаповалов А.С., Денисов Ю.И. Статистический механизм возникновения аномальных дробовых шумов в потоках носителей заряда // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1985. – Т. 28, № 5. – С. 88.

29. Шаповалов А.С., Денисов Ю.И., Голубенцев А.Ф., Малозёмов Ю.А., Минкин Л.М. О спектре дробового шума потоков носителей заряда // Вопросы электроники СВЧ. Спектральные характеристики физических систем.: Межвуз. науч. сб. Саратов.: Изд-во СГУ. – 1985. – В.16. – С.15-18.

30. Шаповалов А.С. Дробовой шум неоднородного катода при параболическом распределении параметра интенсивности эмиссии // Вопросы прикладной физики. Межвуз. науч. сб. Саратов.: Изд-во СГУ. – 2000. – В. 6. – С. 77-79.

Литература к § 2.7

1. Лукьянчикова Н.Б. Флуктуационные явления в полупроводниках и полупроводниковых приборах. М., 1990.
2. Букингем М. Шумы в электронных приборах и системах. М., 1986.
3. Ван дер Зил А. Шумы при измерениях. М., 1979.
4. Ван дер Зил А. Флуктуационные явления в полупроводниках. М., 1961.
5. Ван дер Зил А. Флуктуации в радиотехнике и физике. М., 1958.
6. Шумы в электронных приборах. Под редакцией Смуллина Л.Д. и Хауса Г.А. М.-Л., 1964.
7. Hoffmann H.J., Sohn W. Analysis of Localized Levels in Semiconducting CdS from Generation-Recombination Noise Spectra // Phys. Stat. Solid A. – 1977.- Vol. 44, № 1.- P. 237-246.
8. Hoffmann H.J., Huber E. Generation-Recombination Noise and Defect Levels in Semiconducting CdSe Crystals // Physica (B+C). – 1981.-Vol. 111, № 2,3.- P. 249-256.
9. Bosman G., Zijlstra R.J.J. Generation-Recombination Noise in *p*-type Silicon // Solide-State Electron. – 1982. – Vol. 25, № 4. - P. 273-280.
10. Van Rheenen A.D., Bosman G., Van Vliet C.M. Decomposition of Generation-Recombination Noise Spectra in Separate Lorenzians // Solide-State Electron. – 1985. – Vol. 28, № 5. - P. 457-463.
11. Епифанов Г.И., Мома Ю.А. Твёрдотельная электроника. М. 1986.

Литература к § 3.1

1. Шумы в электронных приборах / Под ред. Л.Д. Смуллина и Г.А. Хауса, пер. с англ. под ред. К.И. Палатова. - М.-Л.: Энергия, 1964, – 484 с.
2. Лопухин В.М., Магалинский В.Б., Мартынов В.П., Рошаль А.С. Шумы и параметрические явления в электронных приборах сверхвысоких частот. – М.: Наука, 1966. – 372 с.
3. Анищенко В.С., Соколов И.П., Штыров А.И. Влияние плотности тока на шумность электронного пучка // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. - 1969. - В. 11. - С. 111-116.
4. Анищенко В.С., Соколов И.П., Штыров А.И. Влияние частоты на шумовые свойства пучка // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. - 1971. - В. 11. - С. 117-118.
5. Анищенко В.С., Соколов И.П., Штыров А.И. Измерение СВЧ шумов магнетронной инжекционной пушки // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. - 1971. - В. 7. - С. 27-32.

6. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. – М. : Наука, 1968. – 660 с.

7. Шаповалов А.С. О корреляции флуктуаций тока и скорости электронного пучка в СВЧ приборах с неоднородным катодом // Тез. докл. межд. научн.-техн. конф. Актуальные проблемы электронного приборостроения. Саратов, СГТУ. –1996. – Ч.1. – С. 59-60.

8. Шаповалов А.С. Влияние корреляции флуктуаций на шумовые параметры электронного пучка на неоднородном эмиттере // Вопросы прикладной физики. : Межвуз. науч. сб. Саратов.: Изд-во СГУ. – 1997. – В. 3. – С. 17-20.

9. Шаповалов А.С. Взаимный спектр флуктуаций электронного пучка на неоднородном эмиттере // Мат. межд. научн.-техн. конф. Актуальные проблемы электронного приборостроения. Саратов, СГТУ. – 1998. – Ч.1. – С. 226-230.

10. Голубенцев А.Ф. О спектральной плотности флуктуаций скорости электронов на катоде электронной пушки // Вопросы электронной техники.: Межвуз. науч. сб. Саратов.: Изд-во СГУ. – 1971. – В. 2. – С. 83-103.

11. Голубенцев А.Ф., Денисов Ю.И., Минкин Л.М. Введение в статистическую электронику. – Саратов.: Изд-во СГУ, 1990. – 126 с.

12. Rack A.J. Effect of Space-charge and Transit-time on the Shot Noise in Diodes // Bell System Techn. J. – 1938. Vol. 17, №10. – P. 592-619.

13. Шаповалов А.С., Голубенцев А.Ф., Денисов Ю.И. Эмиссионные и шумовые свойства неоднородных эмиттеров / Под редакцией профессора В.М. Лопухина. – Саратов.: Изд-во СГУ, 1983. – 90 с.

14. Шаповалов А.С. Исследование влияния корреляции флуктуаций на минимальный коэффициент шума СВЧ усилителя типа О // Тез. докл. межд. научн.-техн. конф. Актуальные проблемы электронного приборостроения. Саратов, СГТУ. –1996. – Ч.1. – С. 61-62.

15. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1965. – 400с.

16. Шаповалов А.С. Методика исследования взаимного спектра флуктуаций электронного пучка при сложном характере кинетической неоднородности катода // Вопросы прикладной физики. : Межвуз. науч. сб. Саратов.: Изд-во СГУ. – 2000. – В. 6. – С. 14-16.

17. Шаповалов А.С. Методика исследования взаимного спектра флуктуаций электронного пучка при сложном характере эмиссионной неоднородности катода // Вопросы прикладной физики. : Межвуз. науч. сб. Саратов.: Изд-во СГУ. – 2000. – В. 6. – С. 16-19.

Литература к § 3.2

1. Шумы в электронных приборах / Под редакцией Л.Д.Смуллина и Г.А.Хауса. Изд-во "Энергия", М.-Л., 1964. 484 с.

2. Шаповалов А.С., Голубенцев А.Ф., Денисов Ю.И. Эмиссионные и шумовые свойства неоднородных эмиттеров. Изд-во Саратовского университета, Саратов, 1983. 92 с.

3. Шаповалов А.С. О корреляции флуктуаций тока и скорости электронного пучка в СВЧ приборах с неоднородным катодом // Тезисы докладов международной конференции: "Актуальные проблемы электронного приборостроения". Саратов, 1996, ч. 1, С. 59-60.

4. Шаповалов А.С. Исследование влияния корреляции флуктуаций на минимальный коэффициент шума СВЧ усилителя типа 0 // Тезисы докладов международной научно-технической конференции: "Актуальные проблемы электронного приборостроения". Саратов, 1996, ч. 1, С. 61-62.

5. Шаповалов А.С. Корреляция и взаимный спектр флуктуаций электронного пучка на неоднородном эмиттере // Вопросы прикладной физики. Межвузовский научный сборник. Изд-во Саратовского университета, Саратов, 1997, ¹ 3, С. 9-12.

6. Rack A.I. Effect of space charge and transit time on the shot noise in diodes // Bell System Tech. J. 1938, v. 17, October, P. 592-619.

7. Голубенцев А.Ф. О спектральной плотности флуктуаций скорости электронов на катоде электронной пушки // Вопросы электронной техники. Межвузовский научный сборник. Изд-во Саратовского университета, Саратов, 1971, Вып. 2, С. 83-103.

8. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. Мир, М., 1974. 464 с.

Литература к § 3.3

1. Van Duzer T. Noise-Figure Calculations for Crossed-Field Forward-Wave Amplifiers // IEEE Trans. 1963. Vol. ED-10. № 6. P.370-378.

2. Шаповалов А.С. Методика определения взаимного спектра флуктуаций тока и поперечного смещения электронного пучка на неоднородном катоде // Вопросы прикладной физики. Межвузовский научный сборник. Изд-во Саратовского университета, Саратов, 1999. Вып. 5. С. 19-21.

3. Голубенцев А.Ф. О спектральной плотности флуктуаций скорости электронов на катоде электронной пушки // Вопросы электронной техники. Межвузовский научный сборник. Изд-во Саратовского университета, Саратов, 1971. Вып. 2. С. 83-103.

4. Шаповалов А.С. Корреляция и взаимный спектр флуктуаций электронного пучка на неоднородном эмиттере // Вопросы прикладной физики. Межвузовский научный сборник. Изд-во Саратовского университета, Саратов, 1997. Вып. 3. С. 9-12.

5. Rack A.I. Effect of space charge and transit time on the shot noise in diodes // Bell System Tech. J. 1938. Vol. 17. October. P. 592-619.

Учебное электронное издание

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Учебно-методическое пособие
для студентов физического факультета

Автор
Шаповалов Александр Степанович