Гудошникова Е.В.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Лекции к курсу «Высшая математика»

СОДЕРЖАНИЕ

ВОПРОСЫ КУРСА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Понятие связного вектора. Длина и направление вектора

Понятие свободного вектора

Угол и направленный угол между векторами

Определение коллинеарных векторов

Определение компланарных векторов

ПРОСТЕЙШИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Сумма векторов. Определение и теорема о независимости от выбора представителей (док-во)

Умножение вектора на число

Разность векторов

Формальные свойства простейших операций над векторами

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Понятие линейной комбинации и линейной зависимости

Признак линейной зависимости векторов

Теорема о добавлении нулевого вектора (док-во)

Теорема о добавлении ненулевого вектора (док-во)

Признак коллинеарности (док-во)

Разложение вектора по неколлинеарным векторам (док-во)

Признак компланарности (док-во)

Разложение вектора по некомпланарным векторам (док-во)

БАЗИСЫ И КООРДИНАТЫ

Понятие базиса на плоскости и в пространстве

Координаты относительно базиса

Ортонормированный базис

Координаты линейной комбинации векторов

Координаты связного вектора

Признак коллинеарности в координатах

Признак компланарности в координатах

Ориентация базиса на плоскости и в пространстве

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

• *Связным вектором* называется упорядоченная пара точек. Первая точка называется *началом* вектора, вторая – *концом.* Связный вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\vec{AB}$.

• *Длиной (модулем)* вектора называется расстояние между его началом и концом. Обозначается $|AB|$.

Вектор с длиной 1 называется *единичным.*

• *Направлением* ненулевого вектора $\vec{AB}$ называется направление луча AB.

Направление нулевого вектора считается произвольным.

• Два вектора называются *конгруэнтными*, если длина и направление одного вектора совпадают с длиной и направлением другого вектора.

• Множество всех векторов, конгруэнтных между собой, называется *свободным вектором.*

Длиной и направлением свободного вектора называется длина и направление любого его представителя.

Свободные вектора обозначаются $\vec{a}$, $\vec{b}$ и т.д.

• *Величиной угла* (углом) между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется величина угла, направление сторон которого совпадает с направлениями векторов.

Направленным углом между упорядоченной парой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между направлением $\vec{a}$ и направлением $\vec{b}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

• Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если их представители, имеющие общее начало, располагаются на одной прямой.

Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их направления совпадают или противоположны.

• Три ненулевых вектора называются *компланарными* если их представители, имеющие общее начало, располагаются в одной плоскости.

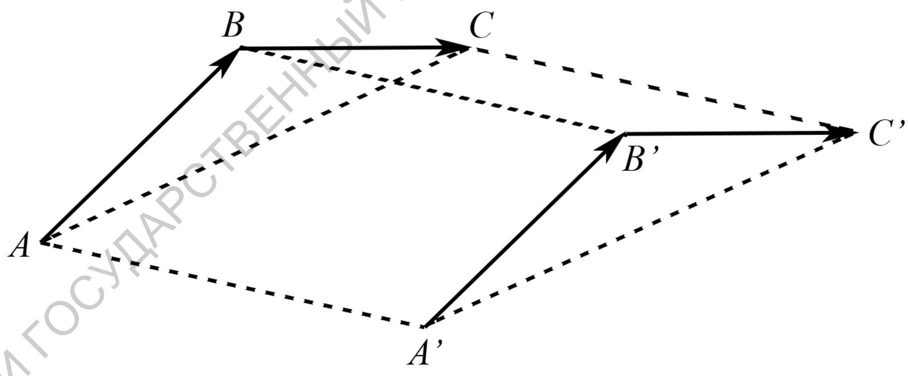
ПРОСТЕЙШИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

• *Сумма векторов.*

Пусть $\vec{AB}$ – представитель вектора $\vec{a}$, $\vec{BC}$ – представитель вектора $\vec{b}$. Суммой векторов $\vec{a}+\vec{b}$ называется вектор, представителем которого является вектор $\vec{AC}$. (Правило треугольника.)

ТЕОРЕМА. Сумма векторов не зависит от выбора их представителей.

ДОК-ВО. Пусть $\vec{AB}$ и $\vec{A'B'}$ – представители вектора $\vec{a}$, $\vec{BC}$ и $\vec{B'C'}$ – представители вектора $\vec{b}$.



Тогда $|AB| = |A'B'|$ и $(AB)\|(A'B')$, следовательно $ABB'A'$ – параллелограмм, откуда $|AA'| = |BB'|$ и $(AA')\|(BB')$.

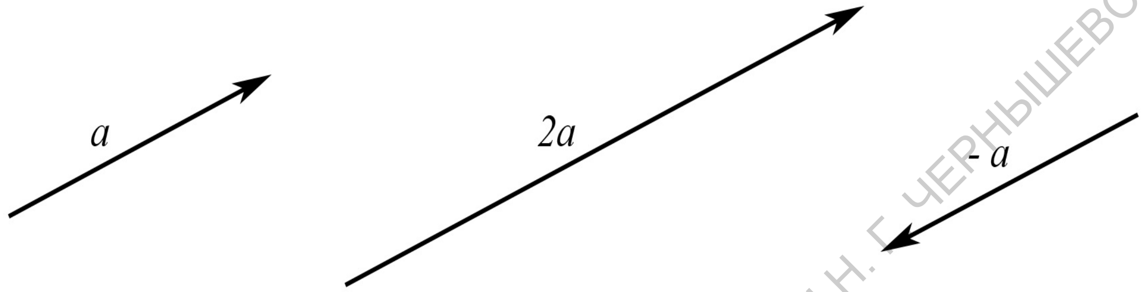
С другой стороны $|BC| = |B'C'|$ и $(BC)\|(B'C')$, откуда следует, что $BCC'B'$ – параллелограмм. Поэтому $|CC'| = |BB'|$ и $(CC')\|(BB')$.

Сравнивая полученные равенства, получаем, что $|AA'| = |CC'|$ и $(AA')\|(CC')$, следовательно $ACC'A'$ – параллелограмм, откуда $|AC| = |A'C'|$ и $(AC)\|(A'C')$, то есть $\vec{AC} = \vec{A'C'}$.

• *Умножение вектора на число.*

Вектором $\lambda\vec{a}$ при $\lambda \neq 0$ называется вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$; противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$; а длина равна $|\lambda||a|$.

Вектором $0\vec{a}$ называется нулевой вектор.



• *Разность векторов.*

По определению полагают $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$.

Из изложенного выше следует правило треугольника для разности векторов: $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$.

• *Формальные свойства простейших операций над векторами.*

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$
5. $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$
6. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$
7. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

• *Линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ($\lambda_1, ..., \lambda_n$ – некоторые числа) называется вектор $\lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$.

• Вектора $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует равная $\vec{0}$ их линейная комбинация, в которой хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. В противном случае вектора называются *линейно независимыми*.

• *Признак линейной зависимости векторов.*

ТЕОРЕМА. Вектора $\vec{a}_1, ...\vec{a}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией остальных.

ДОК-ВО. Если вектор $\vec{a}_i$ является линейной комбинацией остальных, то перенеся все слагаемые в одну сторону, мы получим равную нулю линейную комбинацию, в которой коэффициент при $\vec{a}_i$ равен 1.

Обратно, если вектора линейно зависимы, то существует их линейная комбинация, равная $\vec{0}$, причем для некоторого i коэффициент при $\vec{a}_i$ отличен от нуля, следовательно вектор $\vec{a}_i$ может быть выражен через остальные, то есть является их линейной комбинацией.

• *Добавление нулевого вектора.*

ТЕОРЕМА. Если к линейно независимой системе векторов добавить нулевой вектор, то система станет линейно зависимой.

ДОК-ВО. Построим линейную комбинацию, в которой коэффициенты при всех ненулевых векторах равны нулю, а коэффициент при нулевом векторе отличен от нуля. Очевидно, построенная линейная комбинация будет равна $\vec{0}$, следовательно вектора линейно зависимы.

• *Добавление ненулевого вектора.*

ТЕОРЕМА. Если к линейно зависимой системе векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ добавить произвольный вектор $\vec{b}$, то система останется линейно зависимой.

ДОК-ВО. Рассмотрим равную нулю линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$. Поскольку вектора линейно зависимы, в этой комбинации должны быть ненулевые коэффициенты. Прибавим к этой сумме слагаемое $0\vec{b}$. Полученная линейная комбинация векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n, \vec{b}$ осталась нулевой, следовательно является линейно зависимой.

• *Признак коллинеарности.*

ТЕОРЕМА. Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

ДОК-ВО. Если один из векторов нулевой, то утверждение очевидно. Рассмотрим $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Если направления векторов совпадают, то можно записать $|b|\vec{a} = |a|\vec{b}$, так как с обеих сторон равенства записаны вектора, у которых длины и направления совпадают. Из этого равенства получаем нулевую линейную комбинацию $|b|\vec{a} - |a|\vec{b} = \vec{0}$, причем оба коэффициента не равны нулю.

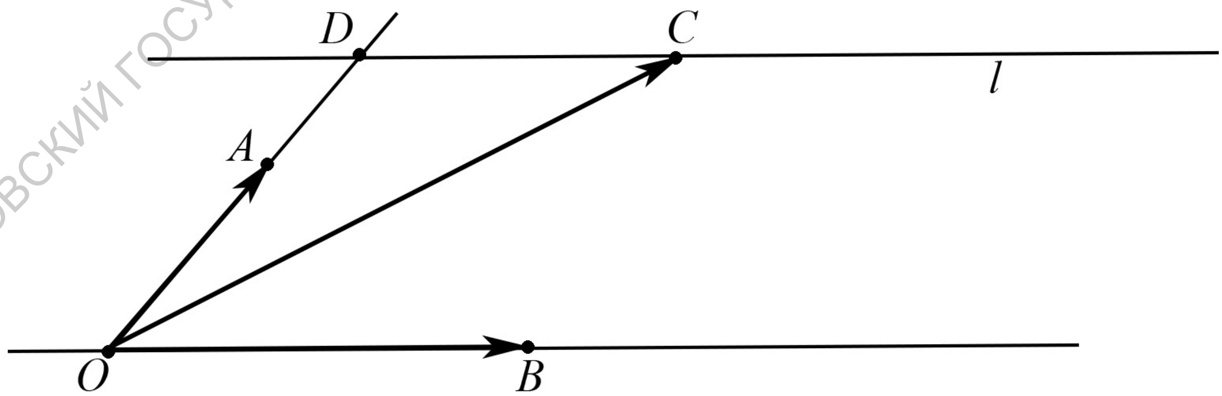
Аналогично, если направления векторов противоположны, то можно записать $|b|\vec{a} = -|a|\vec{b}$, откуда $|b|\vec{a}+|a|\vec{b} = \vec{0}$ и оба коэффициента не равны нулю.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то найдется число $\lambda \neq 0$ такое, что $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

• *Разложение вектора по неколлинеарным векторам.*

ТЕОРЕМА. Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, а вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то существует, причем единственная, пара чисел α и β такие, что $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

ДОК-ВО. Построим вектора $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$. Через точку C проведем прямую $l \| (OB)$. Обозначим $D = l \cap (OA)$.



$\vec{OD} \| \vec{a} \implies$ найдется число α такое, что $\vec{OD} = \alpha\vec{a}$.

$\vec{DC} \| \vec{b} \implies$ найдется число β такое, что $\vec{DC} = \beta\vec{b}$. Откуда $\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{DC}$ или $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. И существование разложения доказано.

Докажем единственность. Если $\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$ и $\vec{c} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b}$, то вычитая одно равенство из другого, получим: $\vec{0} = (\alpha_1 - \alpha_2)\vec{a} + (\beta_1 - \beta_2)\vec{b}$. А так как вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, они линейно независимы и коэффициенты в полученной линейной комбинации равны нулю, то есть $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\beta_1 = \beta_2$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. На плоскости может быть только два линейно независимых вектора.

• *Признак компланарности.*

ТЕОРЕМА. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

ДОК-ВО. Если среди трех векторов есть пара коллинеарных, то эта пара линейно зависима, следовательно и вся тройка линейно зависима. Если три вектора попарно неколлинеарны, то по теореме о разложении по неколлинеарным векторам один из них можно представить в виде линейной комбинации двух других, следовательно, они линейно зависимы.

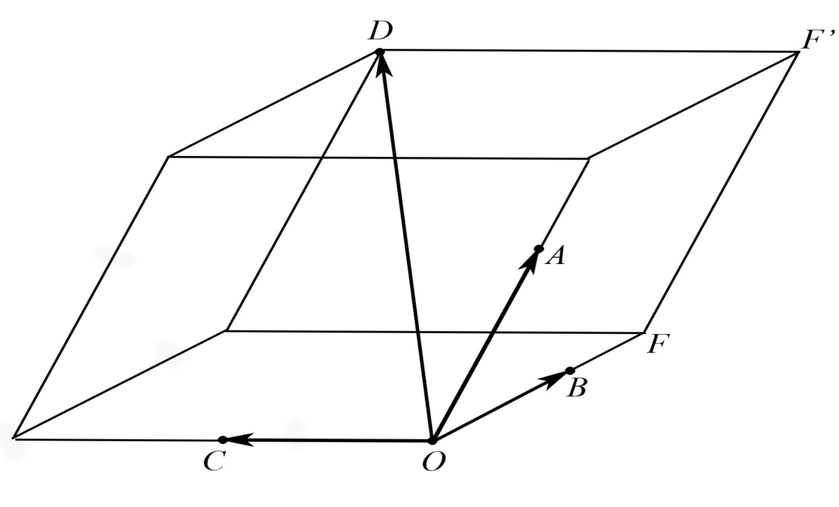
• *Разложение вектора по некомпланарным векторам.*

ТЕОРЕМА. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомланарны. Тогда для любого вектора $\vec{d}$ существуют однозначно определяемые числа α, β, γ такие, что $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

ДОК-ВО. Построим вектора $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OD} = \vec{d}$.

Проведем через точку D плоскость $\pi_1 \| (OAC)$. Обозначим $F = \pi_1 \cap (OB)$.

Проведем через точку D плоскость $\pi_2 \| (OCB)$ и прямую $(FF_1) \| (OA)$, чтобы $F_1 = \pi_2 \cap (FF_1)$.



$F \in (OB) \implies \vec{OF} \| \vec{OB} \implies$ найдется число β такое, что $\vec{OF} = \beta\vec{OB}$.

$\vec{FF_1} \| \vec{OA}$ по построению $\implies$ найдется число α такое, что $\vec{FF_1} = \alpha\vec{OA}$.

Так как $\pi_1 \| \vec{OC} \implies \vec{F_1D} \| \vec{OC} \implies$ найдется число γ такое, что $\vec{F_1D} = \gamma\vec{OC}$.

Поскольку $\vec{OD} = \vec{OF} + \vec{FF_1} + \vec{F_1D}$, получаем $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ и существование разложения доказано.

Покажем единственность. Если $\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$ и $\vec{d} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b} + \gamma_2\vec{c}$ то, вычитая одно равенство из другого, получим: $\vec{0} = (\alpha_1 - \alpha_2)\vec{a} + (\beta_1 - \beta_2)\vec{b} + (\gamma_1 - \gamma_2)\vec{c}$. А так как вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны, они линейно независимы, следовательно коэффициенты в полученной линейной комбинации равны нулю, то есть $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. В пространстве может быть только три линейно независимых вектора.

БАЗИСЫ И КООРДИНАТЫ

• *Базисом на плоскости* называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов.

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

• *Координатами* вектора относительно базиса называются коэффициенты разложения вектора по этому базису.

Пусть имеется базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и вектор $\vec{a}$ с координатами (α_1, α_2), то есть

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} \text{ – матричная запись вектора } \vec{a}$$

Аналогично в пространстве: $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$

• Базис называется *ортонормированным*, если вектора базиса попарно перпендикулярны и имеют длину 1.

Вектора ортонормированного базиса принято обозначать $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

• *Координаты линейной комбинации векторов*

ТЕОРЕМА. Координаты линейной комбинации векторов равны той же линейной комбинации соответствующих координат.

ДОК-ВО. Пусть $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$, $\vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2$. Тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e}_2,$$

то есть координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат векторов. (Аналогично для пространства.)

Пусть $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$, тогда $\lambda\vec{a} = \lambda\alpha_1\vec{e}_1 + \lambda\alpha_2\vec{e}_2$, то есть координаты произведения вектора на число равны произведению соответствующих координат вектора на это число. (Аналогично для пространства.)

• *Координаты связного вектора*

Рассмотрим вектор $\vec{AB}$ в прямоугольной системе координат с центром в точке O. То есть координаты точки A это координаты вектора $\vec{OA}$, а координаты точки B это координаты вектора $\vec{OB}$. Так как $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$, получаем правило:

Чтобы найти координаты связного вектора, надо из координат его конца вычесть координаты начала.

• *Признак коллинеарности в координатах*

ТЕОРЕМА. Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

ДОК-ВО. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны $\iff$ $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ $\iff$ $\alpha_1 = \lambda\beta_1$, $\alpha_2 = \lambda\beta_2$ и $\alpha_3 = \lambda\beta_3$ $\iff \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2} = \dfrac{\alpha_3}{\beta_3}$

СЛЕДСТВИЕ. Два ненулевых вектора на плоскости коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты относительно любого базиса образуют нулевой определитель:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$$

Пример применения. Написать уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки $K(1;2)$ и $M(3;0)$.

Решение. Пусть точка $F(x;y) \in KM$. Тогда вектора $\vec{KF}$ и $\vec{KM}$ коллинеарны. Найдем координаты этих векторов и запишем признак коллинеарности:

$$\begin{matrix} \vec{KF}(x-1;y-2) \\ \vec{KM}(2;-2) \end{matrix} \implies \begin{vmatrix} x-1 & y-2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \implies -2(x-1)-2(y-2)=0$$

$$\implies x+y-3=0 \text{ – искомое уравнение прямой.}$$

Ответ: $x+y-3=0$.

• *Признак компланарности в координатах*

ТЕОРЕМА. Три ненулевых вектора компланарны тогда и только тогда, когда их координаты относительно любого базиса образуют нулевой определитель:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

ДОК-ВО. Вектора компланарны, следовательно они линейно зависимы, значит существуют числа λ, μ, ν такие, что

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0} \iff \begin{matrix} \lambda\alpha_1+\mu\beta_1+\nu\gamma_1=0 \\ \lambda\alpha_2+\mu\beta_2+\nu\gamma_2=0 \\ \lambda\alpha_3+\mu\beta_3+\nu\gamma_3=0 \end{matrix} \iff \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку строки определителя линейно зависимы.

Пример применения. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $N(1;2;0)$, $P(-1;0;0)$ и $Q(-1;3;-1)$.

Решение. Пусть точка $F(x;y;z) \in NPQ$. Тогда вектора $\vec{NF}$, $\vec{NP}$ и $\vec{NQ}$ компланарны. Найдем координаты этих векторов и запишем признак компланарности:

$$\begin{matrix} \vec{NF}(x-1;y-2;z) \\ \vec{NP}(-2;-2;0) \\ \vec{NQ}(-2;1;-1) \end{matrix} \implies \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\implies \quad 2(x-1)-2z-4z-2(y-2)=0 \quad \implies$$

$$\implies \quad x-y-3z+1=0 \text{ –искомое уравнение плоскости.}$$

Ответ: $x-y-3z+1=0$.

- *Ориентация базиса на плоскости*

Базис на плоскости называется *положительным*, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму осуществляется против часовой стрелки и *отрицательным* в противном случае.

- *Ориентация базиса в пространстве*

Рассмотрим базис в пространстве.

Отложим все базисные вектора от одной точки O и обозначим A_1, A_2, A_3 – концы первого, второго и третьего базисного вектора соответственно. Проведем окружность через концы векторов. Плоскость $(A_1A_2A_3)$ разбивает все пространство на две части. Будем рассматривать построенную нами окружность из той части пространства, которой не принадлежит точка O.

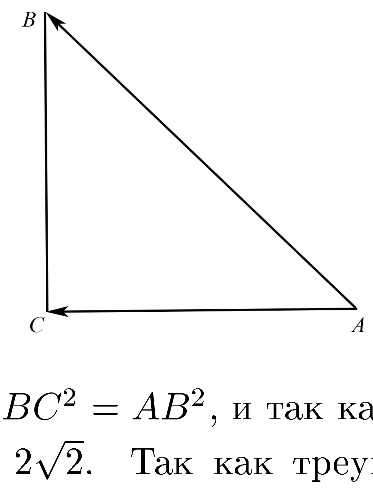
Если точки A_1, A_2, A_3 расположены против часовой стрелки, то базис называется *положительным*, а если по часовой стрелке – *отрицательным*.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

- *Скалярное произведение* двух векторов – это число, определяемое как

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{cases} |a|\,|b|\,\cos(\hat{ab}), \text{ если } \vec{a}\neq\vec{0} \text{ и } \vec{b}\neq\vec{0} \\ 0, \text{ если } \vec{a}=\vec{0} \text{ или } \vec{b}=\vec{0} \end{cases}$$

Пример. ABC – равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = 4$. Найти $\vec{AB}\vec{AC}$.



Решение. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, и так как $AC = BC$ получаем: $2AC^2 = 16 \implies AC = 2\sqrt{2}$. Так как треугольник равнобедренный, острые углы по 45^o. И по определению скалярного произведения получаем:

$$\vec{AB}\vec{AC} = |AB|\cdot|AC|\cos 45^o = 4\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 8.$$

Ответ: 8.

- *Смысл знака*

  $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff \cos(\hat{ab})=0 \iff \hat{ab}=90^0 \iff \vec{a}\perp\vec{b}$

  $\vec{a}\cdot\vec{b}>0 \iff \cos(\hat{ab})>0 \iff$ вектора образуют острый угол.

  $\vec{a}\cdot\vec{b}<0 \iff \cos(\hat{ab})<0 \iff$ вектора образуют тупой угол.

- *Формальные свойства*

  1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
  2. $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$
  3. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
  4. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|a|^2$.

- *Координатное выражение в ортонормированном базисе*

  Пусть $\vec{a}(\alpha_1,\alpha_2)$, $b(\beta_1,\beta_2)$. Тогда

  $\vec{a}\cdot\vec{b}=(\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j})\cdot(\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j})=\alpha_1\beta_1\vec{i}^2+\alpha_1\beta_2\vec{i}\cdot\vec{j}+\alpha_2\beta_1\vec{i}\cdot\vec{j}+\beta_1\beta_2\vec{j}^2$

Так как базис ортонормированный, то $\vec{i}^2=|i|^2=1$, $\vec{j}^2=|j|^2=1$, и $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, поскольку вектора взаимно перпендикулярны.

Таким образом $\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$.

Аналогично в пространстве: $\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$.

Пример. Для векторов $\vec{a}(2;-1;3)$ и $\vec{b}(1;4;0)$ (в прямоугольной системе координат) найти $\vec{a}\vec{b}$.

Решение. $\vec{a}\vec{b}=2\cdot1-1\cdot4+3\cdot0=-2$.

Ответ: -2.

Пример. Для вектора $\vec{a}(1;2;3)$ найти $\vec{a}^2$.

Решение. $\vec{a}^2=\vec{a}\vec{a}=1^2+2^2+3^2=14$.

Ответ: 14.

- *Механический смысл*

  Пусть $\vec{F}$ – вектор силы, приложенной к телу, $\vec{S}$ –путь, пройденный телом под действием этой силы. Тогда скалярное произведение векторов $\vec{F}\cdot\vec{S}$ равно работе, произведенной данной силой.

ПСЕВДОСКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

• *Псевдоскалярное произведение* двух векторов плоскости – это число, определяемое как

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{cases}|a|\,|b|\,\sin(\hat{ab}),\ \text{если}\ \vec{a}\neq\vec{0}\ \text{и}\ \vec{b}\neq\vec{0}\\ 0,\ \text{если}\ \vec{a}=\vec{0}\ \text{или}\ \vec{b}=\vec{0}\end{cases}$$

Угол между векторами измеряется от первого вектора ко второму против часовой стрелки.

Псевдоскалярное произведение определяется только для двумерных векторов. Для векторов пространства псевдоскалярное произведение не определено.

• *Смысл знака*

$\vec{a}\times\vec{b}=0 \iff \sin(\hat{ab})=0 \iff \hat{ab}=0^0$ или $\hat{ab}=180^0 \iff \vec{a}\|\vec{b}$

$\vec{a}\times\vec{b}>0 \iff \sin(\hat{ab})>0 \iff$ вектора образуют положительный базис.

$\vec{a}\times\vec{b}<0 \iff \sin(\hat{ab})<0 \iff$ вектора образуют отрицательный базис.

• *Формальные свойства*

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
2. $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$
3. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

• *Координатное выражение*

Пусть $\vec{a}(\alpha_1,\alpha_2),\ b(\beta_1,\beta_2)$. Тогда учитывая, что псевдоскалярное произведение вектора на самого себя равно нулю, получим

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2)\times(\beta_1\vec{e}_1+\beta_2\vec{e}_2)=$$
$$=\alpha_1\beta_1(\vec{e}_1\times\vec{e}_1)+\alpha_1\beta_2(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)+\alpha_2\beta_1(\vec{e}_2\times\vec{e}_1)+\alpha_2\beta_2(\vec{e}_2\times\vec{e}_2)=$$
$$=(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1).$$

Последнее выражение может быть записано в виде

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2\\ \beta_1&\beta_2\end{vmatrix}.$$

Отметим, что в если базис ортонормированный, то $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = 1$ и для ортонормированного базиса

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

• *Геометрический смысл*

Хорошо известные формулы для нахождения площади треугольника и параллелограмма могут быть записаны при помощи псевдоскалярного произведения:

$$S_{\text{треугольника } ABC} = \frac{1}{2}|AB|\,|AC|\sin A = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$$
$$S_{\text{параллелограмма } ABCD} = |AB|\,|AC|\sin A = |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

Пример применения. Найти площадь треугольника с вершинами в точках

$A(1;-1)$, $B(2;0)$, $C(-2;2)$ (в прямоугольной системе координат).

Решение. Найдем координаты пары векторов, выходящих из одной точки. (В качестве векторов можно брать любые стороны треугольника, но направление векторов выбирать так, чтоб они обязательно выходили из одной точки.)

$$\begin{matrix} \vec{AC} = \vec{a}(-3;3), \\ \vec{AB} = \vec{b}(1;1), \end{matrix} \implies S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \mod \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-6| = 3.$$

Ответ: 3.

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

• *Векторным произведением* двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$, удовлетворяющий трем условиям:

1. $|c| = |a|\,|b|\sin(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$
3. Вектора $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ образуют положительный базис.

Векторное произведение двух коллинеарных векторов полагают равным $\vec{0}$.

- *Формальные свойства*

  1. $[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}]$
  2. $\lambda[\vec{a}\vec{b}] = [(\lambda\vec{a})\vec{b}] = [\vec{a}(\lambda\vec{b})]$
  3. $[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}] = [\vec{a}\vec{c}] + [\vec{b}\vec{c}]$ и $[\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})] = [\vec{a}\vec{b}] + [\vec{a}\vec{c}]$

- *Координатное выражение*

  Пусть $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Тогда, учитывая, что векторное произведение вектора на самого себя есть $\vec{0}$, получим

$$[\vec{a}\vec{b}] = [(\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3)(\beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3)] =$$
$$= \alpha_2\beta_1[\vec{e}_2\vec{e}_1] + \alpha_3\beta_1[\vec{e}_3\vec{e}_1] + \alpha_1\beta_2[\vec{e}_1\vec{e}_2] + \alpha_3\beta_2[\vec{e}_3\vec{e}_2] + \alpha_1\beta_3[\vec{e}_1\vec{e}_3] + \alpha_2\beta_3[\vec{e}_2\vec{e}_3] =$$
$$= [\vec{e}_2\vec{e}_3](\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) - [\vec{e}_3\vec{e}_1](\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) + [\vec{e}_1\vec{e}_2](\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) =$$
$$= [\vec{e}_2\vec{e}_3]\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} + [\vec{e}_3\vec{e}_1]\begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} + [\vec{e}_1\vec{e}_2]\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Последнее выражение можно рассматривать как разложение определителя по строке, поэтому оно может быть записано в виде

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} [\vec{e}_2\vec{e}_3] & [\vec{e}_3\vec{e}_1] & [\vec{e}_1\vec{e}_2] \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

А в ортонормированном базисе

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

- *Геометрический смысл*

  Из определения непосредственно следует, что модуль векторного произведения векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

Пример применения. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(2;-1;1)$ и $\vec{b}(-1;3;0)$ (в прямоугольной системе координат).

Решение. Найдем векторное произведение векторов:

$$\vec{c}=[\vec{a}\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=$$
$$=-3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}.$$

Следовательно векторное произведение есть вектор $\vec{c}(-3;-1;5)$, а его модуль, то есть длина $|\vec{c}|\sqrt{(-3)^2+1^1+5^2}=\sqrt{35}$.

Ответ: $\sqrt{35}$.

• *Двойное векторное произведение трех векторов*

Рассмотрим векторное произведение двух векторов. Получившийся в результате вектор можно векторно умножить еще на один вектор. В результате получим так называемое двойное векторное произведение трех векторов.

Отметим два свойства двойного векторного произведения:

$[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$

$[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

• *Смешанное произведение* трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – это число, определяемое как $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=[\vec{a}\vec{b}]\cdot\vec{c}$ (векторное произведение первых двух векторов скалярно умножили на третий.)

• *Смысл знака*

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0 \iff [\vec{a}\vec{b}]\perp\vec{c}$. Пусть $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, тогда произведение $[\vec{a}\vec{b}]$ перпендикулярно плоскости (OAB). Следовательно $\vec{c}$ параллелен плоскости (OAB), что означает, что вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны.

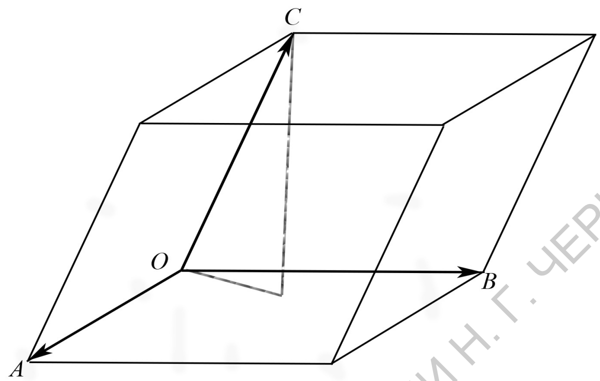
$\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0 \iff$ вектора $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ образуют положительный базис.

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0 \iff$ вектора $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ образуют отрицательный базис.

• *Геометрический смысл*

ТЕОРЕМА. Модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

ДОК-ВО. Построим $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ и $\vec{OC} = \vec{c}$ и рассмотрим параллелепипед с ребрами OA, OB, OC.



Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Площадь основания – это площадь параллелограмма со сторонами OA и OB:

$$S = |OA|\,|OB|\sin(A\hat{O}B) = |a|\,|b|\sin(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$$

Найдем высоту параллелепипеда:

$$\begin{aligned} h =& |OC|\sin(\text{угла между лучом } OC \text{ и плоскостью } OAB) = \\ =& |c|\sin(\frac{\pi}{2} - \text{угол между } \vec{c} \text{ и плоскостью } OAB) = \\ =& |c|\cos(\text{угол между } \vec{c} \text{ и } [\vec{a}\vec{b}] \end{aligned}$$

Умножая полученные значения площади и высоты, получим:

$$V_{\text{пар}} = |a|\,|b|\sin(\widehat{\vec{a}\vec{b}})|c|\cos(\widehat{\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]}) = |[\vec{a}\vec{b}]|\,|c|\cos(\widehat{\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

• *Формальные свойства*

1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$
2. $\lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\lambda\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(\lambda\vec{c})$
3. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$,
   $\vec{a}(\vec{b}_1 + \vec{b}_2)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}_1\vec{c} + \vec{a}\vec{b}_2\vec{c}$,
   $\vec{a}\vec{b}(\vec{c}_1 + \vec{c}_2) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}_1 + \vec{a}\vec{b}\vec{c}_2$.

Док-во свойств 1 и 2 очевидно, а для доказательства 3 следует использовать свойство 1 и распределительность скалярного произведения векторов.

• *Координатное выражение*

Пусть $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\vec{c}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = \begin{vmatrix} [\vec{e}_2\vec{e}_3] & [\vec{e}_3\vec{e}_1] & [\vec{e}_1\vec{e}_2] \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} (\gamma_1\vec{e}_1 + \gamma_2\vec{e}_2 + \gamma_3\vec{e}_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma_1[\vec{e}_2\vec{e}_3]\vec{e}_1 & \gamma_2[\vec{e}_3\vec{e}_1]\vec{e}_2 & \gamma_3[\vec{e}_1\vec{e}_2]\vec{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$$

И, переставив строки определителя, окончательно получаем:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$$

Отметим, что в ортонормированном базисе $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 = 1$.

Пример применения. найти объем тетраэдра с вершинами в точках $A(1; -1; 3)$, $B(2; 0; -1)$, $C(-2; 2; 1)$, $D(0; 1; -2)$ (в прямоугольной системе координат).

Решение. Как известно, объем тетраэдра равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах, а объем параллелепипеда равен модулю смешанного произведения векторов, на которых он построен.

Найдем координаты тройки векторов, выходящих из одной точки. (В качестве векторов можно брать любые ребра тетраэдра, но направление векторов выбирать так, чтоб они обязательно выходили из одной точки.)

$$\begin{matrix} \vec{AB} = \vec{a}(1; 1; -4), \\ \vec{AC} = \vec{b}(-3; 3; -2), \\ \vec{AD} = \vec{c}(-1; 2; -5), \end{matrix} \implies V_{ABCD} = \frac{1}{6} \mod \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\left|-15 - 2 + 24 - 12 + 4 - 15\right| = \frac{1}{6}\left|-16\right| = \frac{8}{3}.$$

Ответ: 8/3.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Дано: $\vec{a}(2;1)$, $\vec{b}(0;-1)$, $\vec{u}(1;-1;2)$, $\vec{v}(-1;2;1)$, $\vec{w}(2;1;-3)$,
ABC – равносторонний треугольник со стороной 2.

Контрольные задания:

1. Изобразите вектора $2\vec{AB}$, $-\vec{AC}$, $\vec{AB}+\vec{AC}-2\vec{BC}$.

2. Найти координаты векторов $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{b}$.

3. Проверить, что вектора $\vec{e_1}(2;3)$ и $\vec{e_2}(-1;2)$ образуют базис на плоскости и найти координаты вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

4. Проверить, что вектора $\vec{e_1}(3;1;1)$, $\vec{e_2}(-1;1;-1)$ и $\vec{e_3}(0;0;1)$ образуют базис в пространстве и найти координаты вектора $\vec{u}$ в этом базисе.

5. Найти, при каком значении параметра λ вектора $\vec{x}(\lambda;2)$ и $\vec{y}(1;3)$ будут коллинеарны.

6. Найти, при каком значении параметра λ вектора $\vec{x}(\lambda;2;0)$, $\vec{y}(1;1;0)$ и $\vec{z}(2;3;-1)$ будут компланарны.

7. Найти $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$, $\vec{BC}\cdot\vec{CA}$, $\vec{AB}\cdot\vec{CB}$.

8. Найти $\vec{a}\vec{b}$,
$(\vec{a}+\vec{b})^2$,
$(2\vec{a}+3\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$,
$\vec{u}\vec{v}$,
$\vec{u}^2+\vec{v}^2$.

9. Найти, при каком значении параметра λ вектора $\vec{x}=\lambda\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ будут перпендикулярны.

10. Найти координаты векторов $[\vec{u}\vec{v}]$, $[\vec{u}[\vec{v}\vec{w}]]$, $[[\vec{u}\vec{v}]\vec{w}]$.

11. Найти $\vec{u}\vec{v}\vec{w}$.

12. Используя признак коллинеарности, написать уравнение прямой, проходящей через точки $K(1;2)$ и $M(3;0)$.

13. Используя признак компланарности, написать уравнение плоскости, проходящей через точки $N(1;2;0)$, $P(-1;0;0)$ и $Q(-1;3;-1)$.

14. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

15. Найти площадь треугольника, сторонами которого служат вектора $\vec{u}$ и $\vec{w}$.

16. Найти объем тетраэдра, ребрами которого служат вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.