Гудошникова Е.В.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА МАТРИЦ

Лекции к курсу «Высшая математика»

СОДЕРЖАНИЕ

ВОПРОСЫ КУРСА

ПОНЯТИЕ МАТРИЦЫ

Определение и обозначение матрицы и ее элементов

Квадратная матрица, главная и побочная диагональ

Единичная матрица

Нулевая матрица

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Сложение матриц

Умножение матрицы на число

Умножение матриц. Коммутирующие матрицы

Транспонирование

Свойства операций над матрицами (док-во)

ПЕРЕСТАНОВКИ

Перестановка n чисел

Число перестановок

Инверсии и тип перестановок

Теорема об изменении типа перестановки (док-во)

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

Понятие определителя

Определитель единичной матрицы (док-во)

Определитель транспонированной матрицы

Определитель произведения матриц

Определитель с нулевой строкой или столбцом (док-во)

Перестановка строк или столбцов определителя (док-во)

Определитель с одинаковыми строками или столбцами (док-во)

Определитель со строкой, представленной суммами (док-во)

Сложение и вычитание строк или столбцов определителя (док-во)

Вынесение множителя из строки или столбца определителя (док-во)

Разложение определителя по элементам строки или столбца

Определитель треугольной матрицы (док-во)

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Вычисление определителей второго порядка (док-во)

Вычисление определителей третьего порядка (док-во)

Вычисление определителей произвольного порядка (алгоритм)

МИНОРЫ И РАНГ МАТРИЦЫ

Определения минора, ранга и базисного минора матрицы

Теорема о базисном миноре (док-во)

Теоремы,облегчающие нахождение ранга матрицы

Метод нахождения ранга матрицы (алгоритм)

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Понятие обратной матрицы

Необходимое и достаточное условия существования обратной матрицы (док-во)

формула для элементов обратной матрицы (док-во)

Свойства обратной матрицы

Алгоритм нахождения обратной матрицы

Матричные уравнения

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Понятие линейной системы, однородной и неоднородной системы

Понятие решения системы

Понятие совместной, несовместной, нетривиально совместной и определенной системы

Матричная запись линейной системы

Решение линейной системы методом Гаусса (алгоритм)

Признак совместности линейной системы (док-во)

Признак нетривиальной совместности однородной линейной системы (док-во)

Решение квадратных систем линейных уравнений методом Крамера (док-во)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

ПОНЯТИЕ МАТРИЦЫ

• *Матрицей* размера $m \times n$ (читается "эм на эн") называется таблица чисел, расположенных в m строк и n столбцов.

Например, матрица размера 2×3: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Элемент матрицы (число), стоящий в i-ой строке и j-ом столбце обозначается a_{ij} (b_{ij}, c_{ij} и т.д.). Сами матрицы обозначаются прописными буквами: $A, B, C....$ Запись $A = (a_{ij})_{mn}$ означает матрицу A размера $m \times n$ с элементами a_{ij}, где $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, .., n$.

• *Квадратной матрицей* размера n называется матрица, состоящая из n строк и n столбцов.

Главная диагональ квадратной матрицы размера $n \times n$ – это элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$:

$$\begin{pmatrix} \otimes & \circ & ... & \circ \\ \circ & \otimes & ... & \circ \\ ... & ... & ... & ... \\ \circ & \circ & ... & \otimes \end{pmatrix}$$

Побочная диагональ квадратной матрицы размера $n \times n$ – это элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1}$:

$$\begin{pmatrix} \circ & ... & \circ & \otimes \\ \circ & ... & \otimes & \circ \\ ... & ... & ... & ... \\ \otimes & ... & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

• *Единичной матрицей* называется квадратная матрица, элементы которой определяются по формуле:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ если } i = j \\ 0 \text{ если } i \neq j \end{cases}$$

(То есть по главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы – нули.)

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

Единичная матрица обозначается E.

• *Нулевой матрицей* называется матрица (любого размера) все элементы которой – нули.

Нулевая матрица обозначается O.

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

• *Сложение матриц.*

Суммой двух матриц A и B одинакового размера называется матрица C, элементы которой определяются по формуле $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$. (Матрицы разного размера складывать нельзя).

Пишут $C = A + B$. Аналогично определяется операция $A - B$.

Например: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1+2 & 0-1 & -1+3 \\ 2-4 & 3+3 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

• *Умножение матрицы на число.*

Произведением матрицы A и числа α называется матрица C того же размера, что и матрица A с элементами $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Пишут $C = \alpha A$.

Например: $$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot -1 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

• *Умножение матриц.*

Произведением матрицы A размера $m \times n$ и матрицы B размера $n \times p$ называется матрица C размера $m \times p$, элементы которой определяются по формуле $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

Пишут $C = AB$.

Например: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 4+0\cdot 0 & 1(-1)+2\cdot 5+0\cdot 3 \\ 3\cdot 2-1\cdot 4+1\cdot 0 & 3(-1)-1\cdot 5+1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Если число столбцов матрицы A не совпадает с числом строк матрицы B, то произведение AB не определено.

Для квадратных матриц одного размера в общем случае $AB \neq BA$.

Например: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 4 & 1\cdot 3 + 2\cdot 5 \\ -1\cdot 0 + 1\cdot 4 & -1\cdot 3 + 1\cdot 5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

но $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 - 3\cdot 1 & 0\cdot 2 + 3\cdot 1 \\ 4\cdot 1 - 5\cdot 1 & 4\cdot 2 + 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 13 \end{pmatrix}.$

Отметим, что существуют матрицы такие, что $AB = BA$. Такие матрицы называются *коммутирующими*.

• *Транспонирование.*

Для матрицы A размера $m \times n$ транспонированной называется матрица C размера $n \times m$ с элементами $c_{ij} = a_{ji}$.

Пишут $C = A^T$. Например: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

• *Свойства операций над матрицами.*

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + O = A$
4. $A - A = O$
5. $1 \cdot A = A$
6. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$
8. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
9. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$
10. $A(B + C) = AB + AC$
11. $A(BC) = (AB)C$
12. $AE = EA = A$
13. $AO = OA = O$
14. $(A + B)^T = A^T + B^T$
15. $(AB)^T = B^T A^T$

Док-во всех свойств проводится по одной и той же схеме: доказывается, что матрица, являющаяся результатом вычисления левой части равенства, и матрица, являющаяся результатом вычисления правой части равенства, имеют одинаковую размерность и элементы, стоящие в i-ой строке и j-ом столбце обеих матриц равны. Для примера докажем одно свойство.

ДОК-ВО 15. Пусть матрица A размера $m \times n$, B – размера $n \times p$, тогда их произведение имеет размер $m \times p$, а матрица, транспонированная к произведению (левая часть равенства) – $p \times m$. Справа стоит произведение матрицы размера $p \times n$ (транспонированной к B) и матрицы размера $n \times m$ (транспонированной к A), то есть матрица также, как и слева, размера $p \times m$.

Покажем теперь равенство элементов:

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{kj} = \sum_k (A^T)_{kj} (B^T)_{ik} = \\ = \sum_k (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}.$$

и свойство доказано.

ПЕРЕСТАНОВКИ

• *Перестановка n чисел.*

Пусть мы имеем n чисел: $1, 2, 3, ..., n$. Поменяем местами какие-нибудь два из них. Мы получим набор тех же самых чисел, но записанных в другом порядке, или *перестановку.* Поменяв местами еще какую-либо пару чисел, мы получим еще одну перестановку и т.д. Каждую перестановку будем обозначать $(i_1, ..., i_n)$, где i_k – одно из чисел от 1 до n, стоящее в данной перестановке на k-ом месте.

• *Число перестановок.*

Подсчитаем количество всех возможных перестановок. Мы имеем n свободных мест, на которые нам надо распределить n чисел. Первое число мы можем записать на любое место, то есть для его расположения имеется n различных вариантов. Запишем первое число на одно из мест. Для расположения второго числа у нас остается $n - 1$ свободное место, поскольку одно из мест уже занято первым числом. Значит, для каждого расположения первого числа мы имеем $n - 1$ вариант расположения второго числа. Таким образом, для расположения первых двух чисел мы имеем $n(n - 1)$ различных вариантов.

Расположим каким-либо из вариантов первые два числа. Для расположения третьего у нас имеется $n - 2$ свободных места. Значит, первые три числа мы можем расположить $n(n-1)(n-2)$ различными способами.

Продолжая рассуждения, получим, что все n чисел можно расположить на n мест одним из $n(n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1$ различных способов. Это число обозначается $n!$ (читается "эн-факториал") и равно количеству всех перестановок из n чисел.

• *Инверсии и тип перестановки.*

Рассмотрим какую-нибудь из перестановок. Будем говорить, что два числа из этой перестановки образуют *инверсию*, если большее число стоит раньше меньшего. Например в перестановке пяти чисел (2,4,1,5,3) инверсии образуют числа 2 и 1, 4 и 1, 4 и 3, 5 и 3. Число инверсий в перестановке $(i_1, ..., i_n)$ будем обозначать $N(i_1, ..., i_n)$. Так $N(2, 4, 1, 5, 3) = 4$.

Будем говорить, что некоторая перестановка является перестановкой четного типа, если она имеет четное число инверсий и перестановкой нечетного типа, если она имеет нечетное число инверсий.

• *Теорема об изменении типа перестановки.*

ТЕОРЕМА. Если в некоторой перестановке поменять местами два элемента, то ее тип измениться на противоположный.

ДОК-ВО. Поменяем местами два соседних элемента в перестановке. При этом станет или на одну инверсию больше, если раньше выбранная нами пара инверсию не образовывала, или на одну инверсию меньше, если образовывала. В любом случае тип перестановки изменится.

Пусть теперь требуется поменять местами два не соседних элемента a_i и a_j. Пусть для определенности $i < j$. Заметим, что чтобы переставить элемент a_i на j-ое место, нам потребуется $j-i$ раз последовательно поменять его местами с соседним элементом. После этого a_j окажется на $j-1$-ом месте и для того, чтобы переставить его на i-ое место, потребуется $j-i-1$ раз последовательно поменять его местами с соседним элементом. Всего мы $2j-2i-1$ раз поменяли местами соседние элементы, следовательно перестановка нечетное число раз меняла тип, что равносильно требуемому утверждению.

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

• *Определителем* квадратной матрицы A размера n называется число $\det A$ (или $|A|$), определяемое по формуле

$$\det A = \sum (-1)^{N(i_1,\ldots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n},$$

где сумма берется по всем возможным перестановкам $(i_1, \ldots, i_n)$, ($n!$ слагаемых), а $N(i_1, \ldots, i_n)$ – число инверсий.

• *Определитель единичной матрицы.*

Используя определение, вычислим определитель единичной матрицы. Поскольку $a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n} \neq 0$ только в том случае, если все множители отличны от нуля, то есть являются числами (единицами), стоящими на главной диагонали, получаем, что все слагаемые в сумме, образующей определитель, будут равны нулю, кроме слагаемого $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn} = 1$. Причем число инверсий здесь равно нулю. Следовательно, слагаемое берется со знаком "+" и определитель единичной матрицы любого порядка равен 1.

• *Определитель транспонированной матрицы.*

Определитель не меняется при транспонировании: $\det A^T = \det A$.

ДОК-ВО. с а м о с т о я т е л ь н о

Из этого свойства следует, что строки и столбцы определителя равноправны и все свойства для строк, справедливы и для столбцов.

• *Определитель произведения матриц.*

Определитель произведения равен произведению определителей: $\det AB = \det A \det B$.

ДОК-ВО. с а м о с т о я т е л ь н о

• *Определитель с нулевой строкой (столбцом).*

Определитель, у которого строка (столбец) состоит из нулей, равен нулю.

ДОК-ВО. Для доказательства достаточно отметить, что в этом случае в каждом слагаемом суммы, образующей определитель, будет нулевой множитель.

• *Перестановка строк (столбцов) определителя.*

Если в определителе переставить две строки (столбца), то определитель изменит знак.

ДОК-ВО. По определению $\det A = \sum (-1)^{N(i_1,\dots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$.

Поменяем местами две строки (столбца). При этом, во-первых, в каждом слагаемом суммы два множителя, соответствующие переставленным строкам (столбцам), поменяются местами, отчего значение самого произведения не изменится, а во-вторых, в перестановке $(i_1, \dots, i_n)$ два элемента, соответствующие номерам переставленных строк (столбцов), поменяются местами, отчего тип перестановки изменится на противоположный, следовательно, каждое слагаемое суммы поменяет знак.

• *Определитель с одинаковыми строками (столбцами).*

Определитель с одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

ДОК-ВО. Поменяем местами одинаковые строки (столбцы). С одной стороны определитель не изменится, а с другой стороны он должен поменять знак на противоположный. Это возможно лишь в том случае, если определитель равен нулю.

• *Определитель со строкой (столбцом), представленной суммами.*

Если в матрице A в i-ой строке (столбце) все элементы представлены суммами, то $\det A = \det A_1 + \det A_2$, где матрицы A_1 и A_2 отличаются от матрицы A только i-ой строкой (столбцом): у матрицы A_1 в i-ой строке (столбце) стоят первые слагаемые сумм, а у матрицы A_2 – вторые слагаемые.

ДОК-ВО (для строк, для столбцов аналогично). Пусть для определенности у матрицы A суммами представлена первая строка. По определению

$$\det A = \sum (-1)^{N(i_1,\dots,i_n)} (a_{1i_1} + b_{1i_1}) a_{2i_2} \dots a_{ni_n} =$$
$$= \sum (-1)^{N(i_1,\dots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} + \sum (-1)^{N(i_1,\dots,i_n)} b_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} =$$
$$= \det A_1 + \det A_2$$

• *Сложение строк (столбцов) определителя.*

Значение определителя не измениться, если одну строку (столбец) заменить на сумму или разность этой строки (столбца) и любой другой строки (столбца) определителя. (В случае разности заменять следует ту строку (столбец), из которой вычитали.)

ДОК-ВО. Заменим в определителе i-ую строку (столбец) на ее сумму с j-ой строкой (столбцом). По предыдущему свойству полученный определитель равен сумме исходного определителя и определителя, с двумя одинаковыми строками (столбцами), то есть равного нулю.

• *Вынесение множителя из строки (столбца).*

Если в определителе все элементы одной строки (столбца) разделить на α, то значение определителя уменьшиться в α раз.

ДОК-ВО. В каждое слагаемое суммы, составляющей определитель, входит по одному элементу некоторой строки (столбца). Поэтому если разделить все элементы этой строки (столбца) на α, каждое слагаемое суммы, составляющей определитель, уменьшиться в α раз. Значит и сама сумма уменьшится в α раз.

• *Разложение определителя по элементам строки (столбца).*

Рассмотрим a_{ij} – элемент матрицы n-го порядка. Вычеркнем в этой матрице i-ую строку и j-ый столбец. Останется матрица порядка $n-1$. Обозначим ее определитель D_{ij}. Величина $(-1)^{i+j}D_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением элемента* a_{ij}.

ТЕОРЕМА. Определитель матрицы равен сумме произведений элементов одной строки на их алгебраические дополнения. То есть

$$\det A = a_{i1}(-1)^{i+1}D_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}D_{i2} + ... + a_{in}(-1)^{i+n}D_{in}.$$

Эта формула называется формулой разложения определителя по элементам строки.

Для столбцов аналогично.

ДОК-ВО. с а м о с т о я т е л ь н о

Пример. Разложить определитель по элементам второй строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+ 4(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

• *Определитель треугольной матрицы.*

Если у матрицы все элементы ниже главной диагонали равны нулю, то ее определитель равен произведению элементов главной диагонали.

ДОК-ВО. Разложим определитель треугольной матрицы порядка n по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & \dots & .. \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определитель получившейся треугольной матрицы порядка $n-1$ опять разложим по первой строке. Повторяя операции n раз, получим требуемое.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

• *Вычисление определителей второго порядка.*

Используя определение, подсчитаем определитель для квадратной матрицы размера 2. Для $n = 2$ мы имеем всего две перестановки: (1,2) и (2,1). В первой из них 0 инверсий, во второй – одна. Следовательно $\det A = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Например $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -5.$

• *Вычисление определителей третьего порядка.*

Вычислим определитель для квадратной матрицы размера 3. Поскольку $3! = 6$, мы имеем 6 различных перестановок. Три перестановки с четным числом инверсий: (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) (0, 2 и 2 инверсии соответственно); и три перестановки с нечетным числом инверсий: (3,2,1), (2,1,3), (1,3,2) (3, 1 и 1 инверсия соответственно). Поэтому в сумме из формулы для вычисления определителя в этом случае будет три слагаемых со знаком "+" и три слагаемых со знаком "-":

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Схематично формулу для вычисления определителя третьего порядка можно изобразить так:

$$|A| = \begin{pmatrix} \otimes & \circ & \circ \\ \circ & \otimes & \circ \\ \circ & \circ & \otimes \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ & \otimes & \circ \\ \circ & \circ & \otimes \\ \otimes & \circ & \circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ & \circ & \otimes \\ \otimes & \circ & \circ \\ \circ & \otimes & \circ \end{pmatrix} -$$
$$- \begin{pmatrix} \circ & \circ & \otimes \\ \circ & \otimes & \circ \\ \otimes & \circ & \circ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \circ & \otimes & \circ \\ \otimes & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \otimes \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \otimes & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \otimes \\ \circ & \otimes & \circ \end{pmatrix}$$

• *Вычисление определителя произвольного порядка.*

Приведенная выше теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца позволяет сводить вычисление определителя n-го порядка к вычислению определителей $n-1$-го порядка. Для упрощения вычислений прежде, чем применять эту теорему, следует, соблюдая равенство, преобразовать исходный определитель так, чтобы в получившемся определителе в какой-либо строке или столбце было как можно больше нулей (все, кроме одного). Этого можно добиться складывая или вычитая строки (столбцы) определителя, и вынося множителей из строки (столбца) за знак определителя (по свойствам определителя его значение при этом не измениться).

Например: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{matrix}\text{вычтем из первой} \\ \text{строки вторую}\end{matrix}\right) =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{matrix}\text{прибавим ко второму} \\ \text{столбцу первый}\end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{matrix}\text{разложим по элементам} \\ \text{первой строки}\end{matrix}\right) = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{matrix}\text{вычтем из второй} \\ \text{строки третью}\end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{matrix}\text{прибавим ко второму} \\ \text{столбцу третий}\end{matrix}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{matrix}\text{разложим по элементам} \\ \text{второй строки}\end{matrix}\right) =$$

$$= -1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5.$$

МИНОРЫ И РАНГ МАТРИЦЫ

• Рассмотрим матрицу A произвольного размера (не обязательно квадратную). Вычеркнем из нее несколько строк и столбцов, чтобы осталось ровно k строк и k столбцов. Определитель оставшейся квадратной матрицы называется *минором k-ого порядка* матрицы A.

• *Рангом* матрицы A называется наибольший порядок не равного нулю минора.

• Пусть k – ранг матрицы A. *Базисным минором* матрицы A называется любой ненулевой минор порядка k.

• *Теорема о базисном миноре.*

Любая строка матрицы A может быть представлена как линейная комбинация строк, входящих в базисный минор. (Аналогичное утверждение имеет место и для столбцов.)

ДОК-ВО. Пусть матрица A имеет ранг k и мы хотим представить в виде линейной комбинации строк базисного минора i-ую строку матрицы A. Не уменьшая общности, можно считать, что базисный минор стоит в левом верхнем углу матрицы A. Рассмотрим квадратную матрицу B порядка $k+1$, составленную из k строк и столбцов базисного минора, i-ой строки матрицы A (не всей строки, а тех ее элементов, которые входят в столбцы, образующие базисный минор) и j-ого столбца матрицы A (не всего столбца, а тех его элементов, которые входят в строки, образующие базисный минор и i-ую строку).

Если i-ая строка матрицы A входила в базисный минор, то в построенном нами определителе есть две одинаковые строки и он равен нулю. Если i-ая строка матрицы A не входила в базисный минор, то построенный нами определитель является минором $k+1$-ого порядка матрицы A и должен равняться нулю, поскольку ранг матрицы A равен k. Следовательно в любом случае $\det B = 0$.

Разложим определитель матрицы B по элементам последнего столбца (который является частью j-ого столбца матрицы A):

$$\det B = c_1 a_{1j} + c_2 a_{2j} + ... + c_k a_{kj} + c_{k+1} a_{ij} = 0,$$

где $c_1, ...c_{k+1}$ – некоторые числа. Заметим , что коэффициент c_{k+1} с точностью до знака совпадает с базисным минором, следовательно, отличен от нуля. Разделив на него, получим:

$$a_{ij} = -\frac{c_1}{c_{k+1}}a_{1j} - \frac{c_2}{c_{k+1}}a_{2j}... - \frac{c_k}{c_{k+1}}a_{kj}$$

Мы представили элемент a_{ij} в виде линейной комбинации элементов, входящих в базисный минор, причем коэффициенты не зависят от номера выбранного столбца. Следовательно, всю i-ую строку можно представить как линейную комбинацию строк базисного минора.

• *Теоремы, облегчающие нахождение ранга матрицы.*

Основываясь на свойствах определителей, можно сформулировать правила преобразования матрицы, сохраняющие ее ранг:

1. Ранг матрицы не изменится, если поменять местами две ее строки (столбца).

2. Ранг матрицы не изменится, если все элементы ее строки (столбца) умножить на число, отличное от нуля.

3. Ранг матрицы не изменится, если из матрицы вычеркнуть нулевую строку (столбец).

4. Если в матрице есть две пропорциональных строки (столбца), то ранг матрицы не изменится при вычеркивании одной из них.

5. Ранг матрицы не изменится, если одну строку (столбец) заменить ее суммой с другой строкой (столбцом).

Действительно, все эти преобразования переводят нулевые определители в нулевые, а ненулевые – в ненулевые.

• *Метод вычисления ранга матрицы* состоит в том, что, применяя указанные преобразования, приводят матрицу к виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} & \dots & a_{2m} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} & a_{3n+1} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

поскольку в этом случае легко указать ненулевой минор: его образуют первые n столбцов. (Здесь подразумевается, что $n \leq m$. Если окажется, что $n > m$, то следует сначала транспонировать матрицу, что тоже не меняет ранг, поскольку определители транспонированных матриц равны.)

Отметим, что всегда можно привести произвольную матрицу к указанному ступенчатому виду, например следующим способом:

вычтем первую строку, умноженную на подходящий множитель из всех остальных, чтобы получить нули в первом столбце со второй по последнюю строку;

вычтем вторую строку, умноженную на подходящий множитель из всех остальных, кроме первой, чтобы получить нули во втором столбце с третьей по последнюю строку (полученные ранее нули в первом столбце при этом не "портятся", так как от них будем отнимать те же нули;

и так далее, спускаясь по строкам вниз, получим требуемое.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 & 5 & 8 & 8 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

вычтем из второй строки первую, умноженную на 2,
из третьей строки – первую, умноженную на 3,
из четвертой строки – первую, умноженную на 5,
из пятой строки – первую, умноженную на 4

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -3 & -3 & -7 & -7 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -9 & -9 & -10 & -10 \\ 0 & 4 & -8 & -7 & -18 & -18 & -23 & -22 \\ 0 & 4 & -6 & -6 & -13 & -12 & -19 & -19 \end{pmatrix} \to$$

вычтем из третьей строки вторую, умноженную на 1,5,
из четвертой строки – вторую, умноженную на 2,
из пятой строки – вторую, умноженную на 2,

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -3 & -3 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4,5 & -4,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & -8 & -7 & -12 & -12 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -7 & -6 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to$$

прибавим к четвертой строке третью, умноженную на -8,
к пятой – третью, умноженную на -6

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -3 & -3 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4,5 & -4,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 24 & 24 & -13 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 21 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

Первые пять столбцов матрицы образуют ненулевой минор, следовательно, ранг матрицы 5.

На практике совсем не обязательно пользоваться именно описанным методом. Лучше вычитать строку и столбцы (не обязательно соседние), в которых много одинаковых элементов, а затем переставить строки и столбцы, чтобы получить нужное расположение нулей.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 & 5 & 2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 10 & 7 & 5 & 5 & 3 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

вычтем из первой строки четвертую
и из третьей строки пятую

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 3 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

поскольку первая строка пропорциональна
второй (с коэффициентом 2) вычеркнем ее

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 3 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

умножим третий столбец на 2, и вычтем его из первого столбца

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 6 & 3 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

переставим третью строку на первое место и пятый столбец на второе

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

поменяем местами вторую и четвертую строки
и четвертый и третий столбец

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку первые четыре столбца полученной матрицы образуют треугольную матрицу с определителем $1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 \neq 0$, ранг исходной матрицы равен 4.

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

• *Понятие обратной матрицы.*

Если для квадратных матриц A и B, имеющих одинаковую размерность, $AB = E$ или $BA = E$, то матрица B называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1}.

Отметим, что если $AB = E$ и $CA = E$, то $B = C$. Действительно,

$$B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$$

Обратная матрица существует не для любой квадратной матрицы. Например, очевидно, нулевая матрица не может иметь обратную, поскольку при умножении ее на любую другую матрицу будем получать нулевую, а не единичную.

• *Необходимое и достаточное условие существования. Формула для элементов обратной матрицы.*

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы у матрицы A существовала обратная, необходимо и достаточно, чтобы $\det A = 0$. Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{\det A} & \dfrac{A_{12}}{\det A} & \cdots & \dfrac{A_{1n}}{\det A} \\ \dfrac{A_{21}}{\det A} & \dfrac{A_{22}}{\det A} & \cdots & \dfrac{A_{2n}}{\det A} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{A_{n1}}{\det A} & \dfrac{A_{n2}}{\det A} & \cdots & \dfrac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}^T,$$

где A_{ij} алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

ДОК-ВО. Поскольку имеет место очевидная цепочка равенств:

$$\det A \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det E = 1,$$

определитель обратной матрицы, если она существует, должен быть обязательно отличен от нуля.

С другой стороны, пусть $\det A \neq 0$. Рассмотрим матрицу B с элементами

$$b_{ij} = \left(\frac{A_{ji}}{\det A}\right), \tag{*}$$

где A_{ji} – алгебраическое дополнение элемента a_{ji} матрицы A. Тогда AB – это матрица с элементами

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = \sum_k a_{ik} \left(\frac{A_{jk}}{\det A}\right) = \frac{1}{\det A} \sum_k a_{ik} A_{jk}.$$

Последнюю сумму можно рассматривать как разложение некоторого определителя по элементам j-ой строки с элементами $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$, причем если $i = j$, то это в точности определитель матрицы A, следовательно, для любого i $c_{ii} = 1$. Если же $i \neq j$, то в этом определителе есть две одинаковые строки i-ая и j-ая. Следовательно, для $i \neq j$ $c_{ij} = 0$. Таким образом, произведение AB это матрица, у которой по диагонали стоят единицы, а все остальные элементы – нули. То есть $AB = E$.

Аналогично доказывается, что $BA = E$.

• *Свойства обратной матрицы.*

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. $(\alpha \cdot A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
4. $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$

• *Алгоритм нахождения обратной матрицы.*

1. Вычисляем определитель матрицы $\det A$ и убедиться, что он отличен от нуля (в противном случае матрица не имеет обратной).

2. Находим число $\lambda = \dfrac{1}{\det A}$.

3. Строим матрицу $\|A_{ij}\|$ из алгебраических дополнений элементов a_{ij}.

4. Транспонируем матрицу $\|A_{ij}\|$, тем самым получаем $\|A_{ij}\|^T$.

5. Умножаем каждый элемент матрицы $\|A_{ij}\|^T$ на число λ. Получаем обратную матрицу A^{-1}.

6. Для проверки результата находим произведения AA^{-1} и (или) $A^{-1}A$. Если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, то обратная матрица найдена верно.

• *Матричные уравнения.*

Пусть A – известная квадратная матрица с ненулевым определителем, B – известная матрица размера $n \times m$, X – неизвестная матрица.

Рассмотрим уравнение

$$AX = B.$$

Для того, чтобы это уравнение имело смысл, необходимо, чтобы матрицы A была порядка n. Умножая уравнение слева на матрицу A^{-1}, получим равенство:

$$X = A^{-1}B,$$

которое определяет матрицу X, как матрицу размера $n \times m$.

Заметим, что для похожего уравнения

$$XA = B.$$

матрица A должна быть порядка m. А для нахождения X следует умножить уравнение на A^{-1} справа, а не слева, как выше:

$$X = BA^{-1},$$

Это равенство определяет матрицу X, как матрицу размера $m \times m$.

Пример. Решить уравнения

1. $AX = B$
2. $XA = B$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение: подсчитаем определитель матрицы A:

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 0 = 2.$$

Найдем A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Решением первого уравнения будет матрица

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+0-1 & \frac{3}{2}+0+\frac{5}{2} \\ -1+4-1 & 1+3+2 & -3+2-5 \\ -\frac{3}{2}+4-\frac{1}{2} & \frac{3}{2}+3+1 & -\frac{9}{2}+2-\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 4 \\ 2 & 6 & -6 \\ 2 & \frac{11}{2} & -5 \end{pmatrix}$$

Решением второго уравнения будет матрица

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+1-\frac{9}{2} & 0-1+3 & \frac{1}{2}+1-\frac{3}{2} \\ 2-3-3 & 0+3+2 & 2-3-1 \\ \frac{1}{2}+2-\frac{15}{2} & 0-2+5 & \frac{1}{2}+2-\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

• *Основные понятия.* Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n, \end{cases}$$

где a_{ij} и b_i – известные числа, x_i – искомые неизвестные. Числа a_{ij} называются коэффициентами системы, b_i – свободными членами.

Система называется *однородной*, если все $b_i = 0$ и *неоднородной* в противном случае.

Решением системы называется упорядоченный набор чисел, обращающих все уравнения системы в истинные равенства.

Система называется *совместной*, если она имеет по крайней мере одно решение, и *несовместной*, если у нее нет решения. Система называется *определенной* если она имеет единственное решение.

Рассмотрим однородную систему. Очевидно, что эта система всегда совместна, так как ее решением являются нули. Если помимо нулевых решений у однородной системы имеются другие решения, то такая система называется *нетривиально совместимой.*

• *Матричная запись системы.*

С системой линейных уравнений ассоциируют три матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

В сделанных обозначениях система линейных уравнений может быть записана в матричной форме:

$$AX = B.$$

Действительно, i-ую строчку системы можно рассматривать как произведение i-ой строки матрицы A на столбец X.

• *Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.*

Рассмотрим систему, в которой число уравнений не превышает число неизвестных, то есть $m \leq n$. Обозначим $A|B$ так называемую расширенную матрицу системы:

$$A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Выполнив преобразования, сохраняющие ранг матрицы, приведем ее к ступенчатому виду:

$$A'|B' = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & ... & d_{1s} & ... & d_{1n} & c_1 \\ 0 & d_{22} & ... & d_{2s} & ... & d_{2n} & c_2 \\ 0 & 0 & ... & d_{3s} & ... & d_{3n} & c_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_{rs} & ... & d_{rn} & c_r \end{pmatrix}$$

(Число строк могло измениться за счет вычеркивания нулевых и пропорциональных строк.) Запишем систему уравнений, соответствующую преобразованной матрице:

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + ... + d_{1s}x_s + ... + d_{1n}x_n = c_1 \\ \qquad d_{22}x_2 + ... + d_{2s}x_s + ... + d_{2n}x_n = c_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad d_{rs}x_s + ... + d_{rn}x_n = c_r \end{cases}$$

Очевидно, что полученная система эквивалентна исходной, то есть множества решений обеих систем совпадают.

Если в последней строке системы все коэффициенты равны нулю, то эта строка имеет вид $0 = c_r$, откуда следует, что система не имеет решений, то есть несовместна. ($c_r \neq 0$ так как тогда вся строка матрицы $A|B$ оказалась бы нулевой и должна была быть вычеркнута при преобразовании матрицы.)

Если в последней строке есть хоть один ненулевой коэффициент, то соответствующая ему переменная может быть выражена через остальные $n-s$ переменных. Пусть для определенности $d_{rs} \neq 0$. Тогда систему можно записать в виде

$$\begin{cases} d_{11}x_1 & = -d_{12}x_2 - ... - d_{1n}x_n + c_1 \\ d_{22}x_2 & = -d_{23}x_3 - ... - d_{2n}x_n + c_2 \\ \vdots & \\ d_{rs}x_s & = -d_{rs+1}x_{s+1} - ... - d_{rn}x_n + c_r \end{cases}$$

Пусть $s < n$. Выразим из последнего уравнения x_s и подставим во все остальные. Из предпоследнего уравнения выразим x_{s-1} и подставим во все остальные и так далее. Таким образом переменные $x_1, ..., x_s$

будут выражены через переменные $x_{s+1}, ..., x_n$. Придавая переменным $x_{s+1}, ..., x_n$ произвольные числовые значения, будем получать соответствующие значения остальных переменных. Следовательно нами найдено бесконечное множество решений, зависящее от $n - s$ параметров.

Если же оказалось, что $s = n$, то из последнего уравнения однозначно выражается x_n. Подставляя полученное значение в предпоследнее уравнение, найдем x_{n-1} и так далее. Следовательно в этом случае система имеет единственное решение.

Рассмотрим случай, когда в преобразованной матрице A' число строк больше числа неизвестных. То есть в матрице A' по крайней мере две последние строки имеют вид

$$\begin{pmatrix} \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & ... & 0 & d_{r-1n} & c_{r-1} \\ 0 & 0 & ... & 0 & d_{rn} & c_r \end{pmatrix}$$

Если эти строки пропорциональны, то одна из них должна быть вычеркнута. Если строки не пропорциональны, то они дают противоречивые уравнения: $d_{r-1n}x_n = c_{r-1}$ и $d_{rn}x_n = c_r$, откуда следует, что система не имеет решений.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix} \to$$

вычтем из второй строки первую, умноженную на 3,
из четвертой – первую, умноженную на 5

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{pmatrix} \to$$

прибавим к третьей строке вторую, а из четвертой вычтем ее же

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

вычеркнем нулевые строки $\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{pmatrix}$

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ \quad - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = -23 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 7 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 23 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 - 16 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 23 \end{cases}$$

Мы получили трехпараметрическое решение системы.

• *Признак совместности системы линейных уравнений.*

ТЕОРЕМА. Пусть A – матрица системы линейных уравнений, $A|B$ – ее расширенная матрица. Для того, чтобы система была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был равен рангу матрицы $A|B$.

ДОК-ВО. Преобразуем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, как это делалось в методе Гаусса: $A|B \to A'|B'$.

Если система совместна, то в последней строке матрицы A' обязательно есть ненулевые элементы, следовательно ранг матрицы A' и ранг матрицы $A'|B'$ равны числу строк этих матриц. А значит и ранг матрицы A равен рангу матрицы $A|B$.

И наоборот, если ранг матрицы A равен рангу матрицы $A|B$, то ранг матрицы A' равен рангу матрицы $A'|B'$, значит в последней строке матрицы A' обязательно есть ненулевые элементы, поэтому существует решение системы, которое может быть найдено методом Гаусса.

Если система несовместна, то в последней строке матрицы A' все элементы равны нулю, а в предпоследней строке обязательно есть ненулевые элементы, так как иначе последняя и предпоследняя строка матрицы $A'|B'$ были бы пропорциональны (они отличались бы на один последний элемент) и одна из них должна была быть вычеркнута. Следовательно ранг матрицы A' на единицу меньше ранга матрицы $A'|B'$. А значит и ранг матрицы A на единицу меньше ранга матрицы $A|B$.

• *Признак нетривиальной совместности однородной системы линейных уравнений.*

ТЕОРЕМА. Пусть A – матрица однородной системы линейных уравнений размера $m \times n$. Для того, чтобы система была нетривиальна совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был меньше n.

ДОК-ВО. Преобразуем матрицу системы к ступенчатому виду $A \to A'$. Заметим, что число строк матрицы A' не может быть больше числа неизвестных, так как тогда по крайней мере две последние строки должны иметь вид

$$\begin{pmatrix} \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{r-1n} & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{rn} & \end{pmatrix}$$

Эти строки пропорциональны, следовательно одна должна быть вычеркнута.

Если число строк матрицы A' в точности равно числу неизвестных, то методом Гаусса однозначно находится единственное (нулевое) решение системы. Следовательно для того, чтобы система имела не только нулевое решение необходимо, чтобы число строк, а значит и ранг матрицы A' должны быть строго меньше числа неизвестных.

Проводя рассуждения в обратную сторону, получим доказательство достаточности.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для квадратной линейной однородной системы уравнений утверждение "ранг матрицы A меньше числа неизвестных" равносильно требованию $\det A = 0$.

• *Решение квадратных систем линейных уравнений методом Крамера.*

Рассмотрим систему линейных уравнений, в которой число неизвестных совпадает с числом уравнений. Такая система может быть записана матричным уравнением

$$AX = B,$$

где A – квадратная матрица.

Обозначим $D = \det A$, $D(x_i)$ – определитель матрицы, которая отличается от матрицы A только тем, что в ней i-ый столбец заменен столбцом свободных членов

$$D(x_i) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{1i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пусть $D \neq 0$. Тогда решение системы может быть найдено по формулам

$$x_i = \frac{D(x_i)}{D}.$$

ДОК-ВО. Разложим определитель $D(x_i)$ по элементам i-ого столбца, учитывая, что алгебраическое дополнение элемента b_k то же самое, что и алгебраическое дополнение элемента a_{ki} матрицы A:

$$x_i = \frac{D(x_i)}{D} = \frac{b_1 A_{1i} + \dots b_n A_{ni}}{D} = \frac{A_{1i}}{D} b_1 + \dots + \frac{A_{ni}}{D} b_n = \\ = (A^{-1})_{i1} b_1 + \dots + (A^{-1})_{in} b_n,$$

где A_{ki} – алгебраическое дополнение элемента a_{ki} матрицы A. Последняя сумма есть не что иное, как произведение i-ой строки матрицы A^{-1} на столбец B. Следовательно,

$$X = A^{-1}B \implies AX = B$$

Пример: решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 4 \end{cases}$

Решение.

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&-1&-2\\1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&-1\\0&-1&-2\\2&0&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&-1\\-1&-2\end{vmatrix}=-10$$

$$D(x_1)=\begin{vmatrix}6&2&-1\\2&-1&-2\\4&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&0&-5\\2&-1&-2\\4&0&1\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}10&-5\\4&1\end{vmatrix}=-30$$

$$D(x_2)=\begin{vmatrix}1&6&-1\\2&2&-2\\1&4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&6&-1\\0&2&-2\\2&4&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}6&-1\\2&-2\end{vmatrix}=-20$$

$$D(x_3)=\begin{vmatrix}1&2&6\\2&-1&2\\1&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&-1&-6\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2\\-1&-6\end{vmatrix}=-10$$

таким образом $x_1=\dfrac{-30}{-10}=3,\quad x_2=\dfrac{-20}{-10}=2,\quad x_3=\dfrac{-10}{-10}=1.$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

(теоретический минимум)

1. Что такое матрица? Приведите пример.
2. Что такое единичная матрица?
3. Какие матрицы можно складывать?
4. Как складывать матрицы? Приведите пример.
5. Как умножить матрицу на число? Приведите пример.
6. Какие матрицы можно перемножать?
7. Как умножить матрицу на матрицу? Приведите пример.
8. Чему рано произведение матрицы на единичную?
9. Что такое транспонирование? Приведите пример.
10. Чему равна транспонированная матрица для суммы матриц?
11. Чему равна транспонированная матрица для произведения матриц?
12. Как находится определитель для матрицы второго порядка? Приведите пример.
13. Как находится определитель для матрицы третьего порядка? Приведите пример.
14. Чему равен определитель единичной матрицы?
15. Какая матрица называется треугольной и чему равен ее определитель? Приведите пример.
16. При каких действиях со строками или столбцами матрицы значение определителя не меняется?
17. При каком действии определитель матрицы меняет знак?
18. Как вынести множитель из строки или столбца определителя? Приведите пример.
19. В каких случаях можно сразу сказать, что определить матрицы равен нулю?
20. Что такое алгебраическое дополнение элемента матрицы? Приведите пример.
21. Как разложить определитель по элементам строки или столбца? Приведите пример.
22. Какие матрицы называются обратными? Как обозначается обратная матрица?
23. В каком случае для матрицы можно найти обратную?
24. Как находится обратная матрица?

25. Приведите пример системы линейных уравнений.
26. Приведите пример решения системы методом Гаусса.
27. Какие системы линейных уравнений можно решать методом Крамера?
28. Приведите пример решения системы методом Крамера.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Дано: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $F = (1 \;\; 3 \;\; 3)$, $H = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Выполнить действия с матрицами:

1. $A + B - 2C$
2. $A \cdot B + B \cdot A$
3. $A \cdot D$
4. $F \cdot D$
5. $(5A + E) \cdot B + C^T$

Вычислить

6. $\det H$
7. $\det A$
8. $\det G$

9. Найти C^{-1}, выполнить проверку.

Решить, если можно, матричные уравнения:

10. $A \cdot X = C$
11. $X \cdot B = C$

12. Решить методом Крамера систему: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

13. Решить методом Гаусса систему: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ 3x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$