Гудошникова Е.В.

АКТУАРНЫЕ ОСНОВЫ СТРАХОВАНИЯ ИМУЩЕСТВА

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

С развитием рыночных отношений в России страхование, как и другие сферы бизнеса, приобрело рыночные черты. Страховой полис стала товаром, и, как и любой товар, должен подчиняться законам рынка, в том числе и в вопросах ценообразования. Но если верхняя граница цены страхового полиса, как и для промышленных товаров, определяется потребительским спросом, то определение нижней границы страховки имеет существенные отличия. Нижняя граница промышленных товаров определяется, по сути, их себестоимостью, потому что даже сильное желание привлечь больше клиентов и вытеснить конкурентов, не позволит продавать товары ниже их себестоимости себе в убыток. Для страхования такое понятие, как себестоимость, не имеет смысла, ведь нельзя же определять стоимость страхового полиса затратами на производство бланков и зарплату агентам. Тем не менее, определение цены страхования подчиняется строгим законам, но уже не только экономическим, а еще и математическим.

Основное содержание страхования заключается в том, что страховая компания предлагает клиентам заплатить ей сравнительно небольшой взнос, и тогда при несчастном случае, оговоренном в договоре, компания выплатит клиенту сумму, существенно больше взноса. Теоретически возможны обе крайние ситуации. С одной стороны может не произойти ни одного несчастного случая, и компания получить большую прибыль. С другой стороны могут случиться несчастные случаи со всеми клиентами, и тогда компания окажется с огромным долгом. То есть большое значение приобретают вероятность страхового случая и вероятность разорения компании. Вероятность страхового случая определяется специалистами-статистиками. Вероятность разорения, или риск компании исследуется специалистами в одной из областей математики – актуарной математике.

Актуарная математика охватывает очень много аспектов деятельности компаний, связанных с риском. Методы актуарной математики, основанные в значительной мере на методах теории вероятности, позволяют производить расчеты при определении взноса, вносимого клиентом при заключении страхового договора. Актуарий должен на основе реальных данных об исследуемом процессе определить основные закономерности и тенденции развития этого процесса и по результатам прогноза спланировать финансовую деятельность компании, которая обеспечит оптимальные результаты.

В настоящее время теория страхования достаточно четко разделилась на два направления: страхование жизни и страхование имущества. Оба направления, естественно строятся на одинаковых теоретических принципах расчета риска, но, несомненно, и имеют существенные различия. Например, при страховании имущества четко определена верхняя граница страховой суммы, так как она не может превышать стоимость имущества. При страховании жизни верхней границы страхового договора не существует. Есть и целый ряд других различий, и в учебной литературе теории расчетов рисков страхования жизни и имущества излагаются именно как разные теории.

При этом, несмотря на большой список книг и статей на тему страхования имущества, трудно найти строгое математическое изложение основных теоретических положений и методик актуарных расчетов страхования имущества. Как правило, это или рассуждение на заданную тему, а не четкие формулировки и определения, или рекомендуемые формулы для расчетов без вывода и обоснования.

В настоящем пособии сделана попытка изложить основные положения актуарной теории страхования имущества для студентов-математиков, сделав упор на математические, а не экономические составляющие теории, уместив все это в семестровый курс лекций.

Основной для пособия послужила книга: Корнилов И.А. «Основы страховой математики» (М.: ЮНИТИ, 2004). Большинство примеров взято именно из этой книги.

1. Тарифная политика простейшей схемы страхования

1.1. Первичные концепции страхования

Основное содержание страхования имущества

Страховая компания и клиент заключают договор о страховании от страхового случая (пожара, кражи, аварии и т.д.), суть которого заключается в следующем. Клиент отдает компании установленный взнос. Если страховой случай произошел, то компания выплачивает клиенту возмещение. Если страховой случай не произошел, то действие договора прекращается и компания оставляет взнос себе. Это самая простая классическая схема страхования. Здесь величина ущерба равна величине возмещения и равна сумме договора.

Для клиента страхование не должно быть средством обогащения, поэтому выплачиваемое возмещение не может быть выше реального ущерба (верхней границы нет только при страховании жизни). Так нельзя автомобиль, ценой 100 т.р., застраховать на сумму 200 т.р. И если в результате страхового случая не произошло полного уничтожения имущества, то не будет выплачено и всей суммы договора. Даже если клиент застраховал свое имущество, стоимостью, например, 40 т.р. в двух разных компаниях на полную сумму, то в случае утраты он получит от обеих компаний в сумме только 40 т.р., а не по 40 т.р. от каждой.

Поэтому следует различать следующие основные понятия:

S – сумма договора, то есть стоимость застрахованного имущества;

y – величина выплачиваемого возмещения, которая в некоторых типах договоров может не совпадать с величиной ущерба;

x_o – величина индивидуального ущерба.

Определим два вида ущерба:

а) если при наступлении страхового случая может произойти только полная потеря имущества (например, при угоне автомобиля), то это так называемый нераспределенный ущерб и $x_o = S$;

б) если при наступлении страхового случая может произойти и полная, и частичная потеря имущества (например, при автомобильной аварии), то это так называемый распределенный ущерб.

Потери и прибыль клиента

Если страхование не приводит к обогащению клиента, то в чем тогда его выгода? Предположим, потенциальный клиент имеет автомобиль ценой 90 т.р., который ему предлагают застраховать от угона на полную сумму за 5 т.р. (то есть взнос клиента = 5 т.р., возмещение = 90 т.р.).

Рассмотрим потери клиента в различных ситуациях:

а) клиент не застраховался, автомобиль не угнали – потерь нет;

б) клиент не застраховался, автомобиль угнали – потери 90 т.р.;

в) клиент застраховался, автомобиль не угнали – потери 5 т.р.;

г) клиент застраховался, автомобиль угнали – потери 5 т.р.

Таким образом, клиент в любом случае не получает прибыли, а, застраховавшись, в любом случае теряет взнос. Для клиента смысл страхования в одном: ограничить свои потери взносом.

Потери и прибыль компании

Пусть клиент все же застраховал свой автомобиль ценой 90 т.р. от угона на полную сумму за взнос 5 т.р.

Рассмотрим потери и прибыль компании:

а) автомобиль угнали – потери компании 90-5=85 т.р.;

б) автомобиль не угнали – прибыль компании 5 т.р.

На первый взгляд кажется, что возможные потери намного больше возможной прибыли. Но дело в том, что намного чаще автомобили не угоняют, и компания получает прибыль. И самое главное для компании – определить величину взноса так, чтобы действительно получать прибыль, а не нести потери.

Конечно, для компании чем выше взнос, тем лучше, но в условиях рынка и жесткой конкуренции компании вынуждены снижать тарифы, чтобы привлекать клиентов. Однако снижение тарифов тоже имеет свои границы, поскольку страховые возмещения все же приходится выплачивать. Определение той «золотой середины» для величины страхового взноса, позволяющего компании и получать прибыль, и быть конкурентоспособной и есть основное содержание тарифной политики.

1.2. Формирование и структура взноса

Правило Байеса

При определении величины страхового взноса компания должна руководствоваться следующими соображениями:

(1) Слишком большой взнос отпугнет клиентов. Завышенный по сравнению с другими компаниями взнос ведет к потери конкурентоспособности, а, следовательно, к разорению.

(2) Слишком маленький взнос, конечно, привлечет клиентов, но собранной суммы может не хватить на выплату возмещений, не говоря уже о прибыли. Таким образом, заниженный взнос так же ведет к разорению.

Указанные соображения приводят к так называемому решающему правилу Байеса, которое заключается в том, что минимально возможная величина взноса (не дающая прибыли, но и не ведущая к разорению) должна отвечать условию: в каждый момент времени сумма собранных взносов равна сумме выплаченных возмещений.

Принцип эквивалентности ответственности

Правило Байеса идеализировано и абстрактно, оно отражает лишь главную идею, которая лежит в основе расчетов по определению страхового взноса. В практическом применении необходимо учитывать следующие соображения.

Во-первых, процесс выплаты взносов и возмещений по одному и тому же договору растянут во времени. Невозможно заключить договора, подождать год, посмотреть, сколько понадобиться возмещений, а потом объявить, каким должен был быть взнос. Следовательно, речь может идти только о средних вероятностных значениях, то есть, математических ожиданиях рассматриваемых величин.

Во-вторых, если договор заключен на сравнительно длительный срок, то необходимо учитывать такой фактор, как изменение цены денег.

Если учесть, что, по сути, взнос – это то, чем рискует клиент, возмещение – это то, чем рискует компания, то в применении к реальности из правила Байеса получаем следующий принцип эквивалентности ответственности сторон: математическое ожидание современной цены риска клиента равно математическому ожиданию современной цены риска компании.

Составляющие страхового взноса

При расчете риска клиента и компании одной из основных величин является вероятность страхового случая p (Эта величина может быть найдена как отношение страховых случаев к общему количеству договоров. Определением вероятности занимается статистика и здесь методика расчетов рассматриваться не будет.) Если из года в год эмпирические значения p практически равны, то есть их колебания случайны, невелики и не имеют направленного изменения, то можно с высокой степенью надежности утверждать, что истинное значение p, то есть реальное отношение числа страховых случаев к числу договоров, будет находиться в узком доверительном интервале. Тем самым определяются две составляющие страхового взноса:

(1) Рисковая премия – та минимально возможная сумма, которая обеспечивает эквивалентность обязательств сторон.

(2) Рисковая надбавка – надбавка на безопасность, которая создается для выплат возмещения, незначительно превышающее среднее.

Рисковая премия + рисковая надбавка = нетто премия.

Ведение страховых договоров требует множество различных расходов: тиражирование бланков договоров, зарплата сотрудникам, аренда офиса, реклама и т.д., и т.п. Естественно, что все расходы компания может покрыть только за счет клиента, точнее, его взносов. Отсюда возникает третья составляющая страхового взноса:

(3) Нагрузка, которая предназначена для покрытия расходов на ведение дела, проведение мероприятий, снижающих риск разорения, получение прибыли.

Таким образом, взнос, или брутто-премия состоит из актуарной составляющей – нетто-премии, включающей в себя рисковую премию и рисковую надбавку, и неактуарной составляющей – нагрузки.

1.3. Рисковая премия

Определение рисковой премии

Рисковая премия (*РП*) – основная составляющая взноса клиента, которая обеспечивает выполнение принципа эквивалентности финансовых обязательств компании и клиента, состоящего в том, что и клиент, и компания должны в среднем платить одинаково. Следовательно, рисковая премия одного договора должна быть равна математическому ожиданию величины индивидуального ущерба x_0, то есть

$$РП = M(x_0) = px_0,$$

где p – вероятность страхового случая.

Пример 1 (РП при нераспределенном ущербе).

Автомобиль ценой 400 т.р. страхуется от угона на полную стоимость. Компания по статистике за предыдущие годы оценивает вероятность угона автомобиля этого класса как 0,01. Таким образом, имеем:

величина возможного ущерба $x_0 = 400$ т.р.;

вероятность предъявления иска $p=0{,}01$;

математическое ожидание ущерба $M(x_0) = px_0 = 400 \cdot 0{,}01 = 4$ т.р.

$\Rightarrow$ *РП* = 4 т.р.

Пример 2 (РП при распределенном дискретном ущербе).

Автомобиль ценой 400 т.р. страхуется от аварии. Вероятность аварии 0,15. В договоре оговаривается, что ущерб округляется до сотен т.р. Компания располагает следующими статистическими данными:

величина ущерба	100 т.р.	200 т.р.	300 т.р.	400 т.р.
вероятность ущерба	0,4	0,3	0,2	0,1

То есть величина возможного ущерба x_0 принимает разные значения с разной вероятностью. Таким образом, имеем:

взвешенное среднее ущерба $\bar{x}_0$=100·0,4+200·0,3+300·0,2+400·0,1=200 т.р.;

вероятность предъявления иска p=0,15;

математическое ожидание иска $M(\bar{x}_0) = p\bar{x}_0 = 200 \cdot 0{,}15 = 3$ т.р. $\Rightarrow$ *РП* = 3 т.р.

Пример 3 (РП при распределенном непрерывном ущербе).

Автомобиль ценой 400 т.р. страхуется от аварии. Вероятность аварии 0,15.Ущерб распределен равномерно, то есть плотность вероятности $f(x) = 1/400$. Таким образом, имеем:

математическое ожидание величины возможного ущерба

$$\bar{x}_0 = \int_0^{400} xf(x)dx = \frac{1}{400}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{400} = 200 \text{ т.р.};$$

вероятность предъявления иска p=0,15;

математическое ожидание иска $M(\bar{x}_0) = p\bar{x}_0 = 200 \cdot 0{,}15 = 3$ т.р. $\Rightarrow$ *РП* = 3 т.р.

1.4. Рисковая надбавка

<u>*Определение рисковой надбавки в простейшем случае*</u>

Рисковая надбавка (*РН*) – это надбавка, созданная для выплаты возмещений, количество которых превышает среднее ожидаемое.

Пусть компания имеет n одинаковых договоров с вероятностью страхового случая p на сумму S каждый с нераспределенным ущербом. Тогда среднее число страховых случаев *np*, а средняя сумма выплат *npS*. Обозначим δ – то превышение числа страховых случаев, которое компания предусмотрела в рисковой надбавке, то есть компания готова выплатить $(np+\delta)S$. Разность $(np+\delta)S - npS = \delta S$ – это рисковая надбавка по всему пакету из n договоров, а рисковая надбавка к каждому договору

$$РН = \frac{\delta S}{n}.$$

<u>*Определение относительной рисковой надбавки*</u>

Если средняя сумма выплат по одному договору *pS*, то отношение

$$\delta_0 = \frac{РН}{pS} = \frac{\delta}{pn}$$

называют относительной рисковой надбавкой (*ОРН*). Она показывает во сколько раз (на сколько процентов) *РН* повышает основную составляющую взноса, равную математическому ожиданию суммы возмещения. Отметим, что так как *pS*=*РП*, то имеем соотношение $РН=РП\cdot\delta_0$.

<u>*Основная формула*</u>

Обозначим m – число наступивших страховых случаев. Вероятность разорения компании $\varepsilon=P(m>np+\delta)$.

Так как мы считаем, что отклонения m от среднего значения не имеют направленности, то есть с одинаковой вероятностью могут быть как в большую, так и в меньшую сторону, то

$$\varepsilon = \frac{1}{2}P(|m-np|>\delta) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}P(|m-np|\le\delta) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}P(np-\delta\le m\le np+\delta).$$

Все договора между собой независимы, значит, мы имеем схему Бернулли: последовательность n независимых испытаний с равной вероятностью p появления события. По формуле Бернулли, известной из теории вероятности,

$$P(np-\delta\le m\le np+\delta) = \sum_{np-\delta\le m\le np+\delta}\binom{n}{m}\cdot p^m(1-p)^{n-m}.$$

Эта формула является точной, применять ее можно при любых значениях n и p, однако, при больших n и маленьких p, что чаще всего имеется на практике, она становится очень неудобной. Тем более сложно получить из нее непосредственное выражение δ.

По интегральной теореме Муавра-Лапласа при $n\to\infty$

$$P(np-\delta\le m\le np+\delta)\to \Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{-\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ – функция Лапласа.

На практике при $n\ge 100$ и $np(1-p)\ge 20$ вместо “$\to$” можно поставить “$\approx$”, и мы получаем приближенную формулу: $\varepsilon = 0{,}5-\Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \Rightarrow$

$$\delta=\sqrt{np(1-p)}\Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon);\qquad \delta_0=\sqrt{\frac{1-p}{np}}\Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon).$$

Отметим сразу очевидное наблюдение: чем больше число договоров, тем меньше относительная рисковая надбавка.

Выражение ОРН через математическое ожидание и дисперсию

Обозначим, как и раньше, x_0 – среднее значение индивидуального ущерба, p – вероятность страхового случая. Тогда

$$M(x_0)=px_0,\ D(x_0)=M(x_0^2)-(M(x_0))^2=px_0^2-(px_0)^2=p(1-p)x_0^2 \quad\Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1-p}{np}}=\sqrt{\frac{1}{np}\frac{D(x_0)}{px_0^2}}=\sqrt{\frac{D(x_0)}{nM^2(x_0)}} \quad\Rightarrow\quad \delta_0=\frac{\sqrt{D(x_0)}}{\sqrt{n}M(x_0)}\cdot\Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon).$$

Пример 4 (ОРН при нераспределенном ущербе).

Пусть число договоров n=1000, вероятность страхового случая p=0,1. Какой должна быть *ОРН*, чтобы фактическое число страховых случаев превысило среднее ожидаемое не чаще, чем один раз в 25 лет (т.е. ε=1/25=0,04)?

$$\delta_0=\sqrt{\frac{1-p}{np}}\Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon)=\sqrt{\frac{0{,}9}{1000\cdot 0.1}}\Phi^{-1}(0{,}46)\approx 0{,}0949\cdot 1{,}75=0{,}166075.$$

Таким образом, $\delta_0\approx 17\%$ (округлять, очевидно, можно только в большую сторону).

Пример 5 (ОРН при распределенном дискретном ущербе с заданной вероятностью).

Пусть число договоров n=10 000 и индивидуальный ущерб может составить 100 т.р. с вероятностью 0,03 или 400 т.р. с вероятностью 0,01. Компания хочет обеспечить 95% надежности, то есть вероятность разорения ε=5%=0,05 (1 раз в 20 лет).

$$M(x_0)=100\cdot 0{,}03+400\cdot 0{,}01=7;$$

$$D(x_0)=M(x_0^2)-(M(x_0))^2=100^2\cdot 0{,}03+400^2\cdot 0{,}01-7^2=1851;$$

$$\delta_0=\frac{\sqrt{D(x_0)}}{\sqrt{n}M(x_0)}\cdot \Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon)=\frac{\sqrt{1851}}{100\cdot 7}\Phi^{-1}(0{,}45)=0{,}0615\cdot 1{,}645\approx 0{,}101\approx 11\%.$$

Пример 6 (ОРН при распределенном дискретном ущербе с заданным распределением).

Пусть число договоров n=10 000, вероятность страхового случая p=0,1, а величина ущерба имеет распределение

величина ущерба	10 т.р.	20 т.р.	30 т.р.	40 т.р.
вероятность ущерба при наступлении страхового случая	0,3	0,4	0,2	0,1

Компания хочет обеспечить надежность 96%, то есть вероятность разорения ε=4%=0,04 (1 раз в 25 лет).

$$\bar{x}_0=10\cdot 0{,}3+20\cdot 0{,}4+30\cdot 0{,}2+40\cdot 0{,}1=21\text{т.р.};$$

$$M(\bar{x}_0)=p\bar{x}_0=0{,}1\cdot 21=2{,}1;$$

$$D(x_0)=M(x_0^2)-(M(x_0))^2=21^2\cdot 0{,}1-2{,}1^2=39{,}69;$$

$$\delta_0=\frac{\sqrt{D(x_0)}}{\sqrt{n}M(x_0)}\cdot \Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon)=\frac{\sqrt{39{,}69}}{100\cdot 2{,}1}\Phi^{-1}(0{,}46)=0{,}03\cdot 1{,}75\approx 0{,}0525\approx 6\%.$$

<u>*Анализ конкурентоспособности и надежности по ОРН*</u>

Приведенные формулы для расчета относительной рисковой надбавки являются правильными с точки зрения математики, но не учитывают реальную ситуацию на рынке, на котором работают как крупные компании с большими пакетами договоров, так и мелкие. (Как было указано, чем больше количество договоров, тем меньше *ОРН*.) Рассмотрим пример:

Пример 7 (сравнение крупной и мелкой компании).

Пусть имеется две компании, предлагающие один и тот же вид страхования с вероятностью страхового случая p=0,1.

Компания	n	ε	$\sqrt{np(1-p)}$	$\Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon)$	δ	δ_0
A	1000	0,01	9,49	2,33	22,11	$0{,}2211\approx 23\%$
	1000	0,04	9,49	1,75	16,61	$0{,}1661\approx 17\%$
	1000	0,08	9,49	1,41	13,38	$0{,}1338\approx 14\%$
	1000	0,15	9,49	1,04	9,87	$0{,}0987\approx 10\%$
B	10 000	0,0001	30	3,33	99,9	$0{,}0999\approx 10\%$
	10 000	0,01	30	2,33	69,9	$0{,}0699\approx 7\%$
	10 000	0,04	30	1,75	52,5	$0{,}0525\approx 6\%$

Предположим, что в данной подотрасли страхования относительная рисковая надбавка составляет, в среднем, 10%.

Если компания *A* хочет обеспечить себе вероятность разорения, как этого требуют европейский стандарты, 1 раз в 100 лет, то она должна назначать рисковую надбавку 23%, что более чем в два раза больше средней. Естественно, в этом случае, цена страхового договора у этой компании окажется сильно завышенной, и она перестает быть конкурентоспособной. Вероятность разорения 1 раз в 25 лет, как обычно устанавливают для себя молодые компании, требует рисковой надбавки 17%, которая так же существенно выше средней. Чтобы получить рисковую надбавку в 10%, компания может себе позволить надежность лишь 100-15=85%, то есть вероятность разорения этой компании $\frac{1}{0{,}15} = 6{,}666 - 1$ раз в 7 лет. Чтобы выдержать конкуренцию, компания должна очень сильно рисковать.

Компания *B* может установить надбавку 10% ничем не рискуя, и тем самым обеспечить себе большую, по сравнению со «средними» компаниями надежность и большую прибыль. Более того, она может назначить надбавку и 7%. В этом случае страховые полисы компании окажутся более дешевыми, по сравнению с аналогичными полисами «средних» компаний, а, значит, более предпочтительными для клиентов.

Таким образом, компания *B* уверенно чувствует себя на рынке только потому, что она большая. У маленькой компании *A* практически нет шансов выжить.

Замечание о фактической ОРН

Как уже отмечалось, фактическая *ОРН* зависит не только от вида договора и его математических характеристик, но, и возможно даже в большой степени, от других, нематематических составляющих.

В 1993 году одна молодая российская страховая компания заключила договор о страховании корабля, который бал продан в Индию на металлолом, как отслуживший свой срок, и должен был дойти до места назначения своим ходом. Чтобы получить этот контракт, компания выиграла конкурс, в том числе у знаменитой страховой компании Ллойда, назначив очень низкий взнос. Среди мотивов такого решения главным был конъюктурный. Компания хотела заявить о себе на рынке. С актуарной точки зрения компании было все равно, какой взнос назначать, так как подобных договоров у компании не было, и любой назначенный взнос не покрыл бы ущерба, который мог возникнуть. Поэтому размер взноса уже не играл особой роли. Он мог быть и вдвое выше «правильного», и вдвое ниже.

Приведенные выше формулы для расчета относительной рисковой надбавки могут служить лишь приблизительными рекомендациями при определении тарифной политики страховой компании. При формировании тарифной политики в задачи актуария входят лишь «правильные» математические расчеты взноса. Реальную рисковую надбавку компания будет назначать исходя из собственных представлении о готовности рискнуть, и о том насколько выше (или ниже) среднего она готова назначить цену страхового полиса.

1.5. Нетто-премия и брутто-премия

Нетто-премия (НП) и прибыль компании

Если определена рисковая премия *РП* и относительная рисковая надбавка δ_0, то

$$НП=РП+РН=РП(1+\delta_0).$$

Отметим, что прибыль компании определяется именно размером нетто-премии. Так если собрано суммарно *НП* на сумму *G*, а выплачено возмещений на сумму *E*, то разность *G-E* это и есть прибыль (или потери) компании.

Пример 8 (нахождение прибыли компании).

В страховой компании 6000 договоров, в каждом из которых вероятность страхового случая 0,005, а выплачиваемая страховая сумма 100 000 руб. Нетто премия договора 800 руб.

а) На какую прибыль (без учета налогов) может рассчитывать компания с вероятностью 0,9?

б) Какова вероятность того, что компания разориться, то есть прибыль станет отрицательной?

Решение. Найдем суммарный нетто взнос со всего портфеля:

$$G=6000\cdot 800=4\ 800\ 000 \text{ (руб.)}$$

Пусть m – число происшедших страховых случаев,

$$M(m)=6000\cdot 0{,}005=30;$$

$$\sqrt{D(m)}=\sqrt{6000\cdot 0{,}005\cdot(1-0{,}005)}=5{,}4635.$$

Найдем с вероятностью 0,9 максимальное число страховых случаев $m_{\max}$:

$$P(m\leq m_{\max})=0{,}9.$$

По интегральной теореме Лапласа приближенно получаем:

$$0{,}5+\Phi(a)=0{,}9,\ \text{где } \Phi \text{ – функция Лапласа, } a=\frac{m_{\max}-M(m)}{\sqrt{D(m)}};$$

$\Rightarrow$ $\Phi(a)=0{,}4$ $\Rightarrow$ $a=1{,}28$ $\Rightarrow$ $m_{\max}=30+1{,}28\cdot 5{,}4635=36{,}99328$, то есть $m_{\max}=37$.
Следовательно, с вероятностью 0,9 компания выплатит не больше, чем

$$E=100\ 000\cdot 37=3\ 700\ 000 \text{ (руб.)}$$

и у нее останется прибыль 4 800 000 – 3 700 000 =1 100 000 (руб.).

Найдем вероятность разорения компании. Собранных взносов хватает на на выплату 48 исков. Значит, вероятность разорения компании ε находится как

$\varepsilon=P(m>48)=1-P(m\leq 48)=$ (так же по теореме Лапласа)

$$=1-0{,}5-\Phi\left(\frac{48-M(m)}{\sqrt{D(m)}}\right)=0{,}5-\Phi\left(\frac{48-30}{5{,}4635}\right)=0{,}5-\Phi(3{,}3)=0{,}5-0{,}4988=0{,}0012.$$

Ответ. Прибыль компании 1 100 000 рублей, вероятность разорения 0,0012.

Брутто-премия(БП)

Пусть экономистами компании определено, что нагрузка составляет R% от тарифа, то есть

$$БП-100+R\ \%;\qquad НП-100\ \%.$$

Тогда $$БП=НП\cdot\frac{100+R}{100}=НП\left(1+\frac{R}{100}\right).$$

Итоговая формула

Собирая все полученные промежуточные результаты, выпишем общую формулу для определения страхового взноса:

$$БП=НП\left(1+\frac{R}{100}\right)=РП(1+\delta_0)(1+0{,}01R)=px_0\left(1+\sqrt{\frac{1-p}{np}}\Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon)\right)(1+0{,}01R),$$

где x_o – ожидаемая величина ущерба,

p – вероятность наступления страхового случая,

n – количество договоров данного вида, образующих портфель компании, причем $n\geq 100$ и $np(1-p)\geq 20$,

R – нагрузка,

ε – допустимая вероятность разорения,

Φ^{-1} – функция, обратная функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$, для которой имеются таблицы значений.

Это так называемая «правильная» формула для определения страхового взноса в самом простом случае страхования, когда нет никаких дополнительных условий.

1.6. Применение коллективной модели

Индивидуальная и коллективная модели рисков

Вернемся к вопросу об определении величины страхового взноса. Выше была использована так называемая индивидуальная модель риска: по данным об этом риске (о распределении величины возможного ущерба) и по количеству таких рисков у компании определялась величина страхового взноса, обеспечивающая заданный уровень надежности. Причем явное выражение для рисковой надбавки было найдено только для простейшего случая, когда пакет содержит n одинаковых договоров, и n достаточно велико, чтобы можно было, применяя теорему Муавра-Лапласа, заменить «стремиться» на «приближенно равно». В остальных случаях сложно получить явную формулу для нахождения рисковой надбавки, а, следовательно, и величины взноса.

Такая идеальная ситуация складывается далеко не всегда. Страховые договора, даже если они относятся к одной отрасли страхования, могут существенно отличаться как по величине возможного иска о возмещении, так и по вероятности страхового случая (например, страхование от пожара дачного домика и коттеджа отличается по цене имущества, а дома с печным отоплением и центральным – по вероятности пожара).

На самом деле компанию больше интересует вопрос о сумме всех возмещений, которые ей придется выплатить. Поэтому возможен другой подход к определению величины взноса: весь пакет договоров рассматривается как некий суммарный риск, и по распределению суммарного ущерба $F_{\Sigma}(V) = P(\text{сумма исков} \le V)$ определяется сумма V, необходимая компании для выплаты всех возмещений с заданным уровнем надежности η, удовлетворяющая условию $F_{\Sigma}(V) = \eta$. Этот суммарный взнос V распределяется между индивидуальными договорами. Это так называемая коллективная модель риска.

Естественно, что объединение рисков должно быть выгодно всем договорам, участвующим в объединении, то есть после объединения взнос по каждому из договоров должен уменьшаться.

Объединение дискретных рисков с применением свертки

Пример 9 (объединение рисков одного порядка).

Рассмотрим пакет договоров из двух рисков, имеющих распределения:

x	0	3	6	10
$P(x)$	0,9	0,06	0,03	0,01

y	0	6	16
$P(y)$	0,9	0,08	0,02

$M(x) = 3 \cdot 0{,}06 + 6 \cdot 0{,}03 + 10 \cdot 0{,}01 = 0{,}46$ $\qquad$ $M(y) = 6 \cdot 0{,}08 + 16 \cdot 0{,}02 = 0{,}8$.

Суммарный ущерб Z может принимать следующие значения:

Z=0	Z=3	Z=6	Z=9	Z=10	Z=12	Z=16	Z=19	Z=22	Z=26
x=0 y=0 p=0,81	x=3 y=0 p=0,054	x=6 y=0 p=0,027		x=10 y=0 p=0,009					
		x=0 y=6 p=0,072	x=3 y=6 p=0,0048		x=6 y=6 p=0,0024	x=10 y=6 p=0,0008			
						x=0 y=16 p=0,018	x=3 y=16 p=0,0012	x=6 y=16 p=0,0006	x=10 y=16 p=0,0002
вероятность суммарного ущерба $P(Z)$									
0,81	0,054	0,099	0,0048	0,009	0,0024	0,0188	0,0012	0,0006	0,0002
накопленная вероятность $P(x+y \le Z)$									
0,81	0,864	0,963	0,9678	0,9768	0,9792	0,998	0,9992	0,9998	1

Из таблицы видно, что для того, чтобы обеспечить надежность, например, 0,95, компания должна иметь возможность выплатить суммарное возмещение, равное 6 единицам. Следовательно, суммарная нетто премия равна 6, и, распределяя ее пропорционально математическим ожиданиям (то есть, рисковым премиям) рисков, получаем:

$$\begin{cases} a+b=6 \\ \dfrac{a}{0{,}46}=\dfrac{b}{0{,}8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \approx 2{,}2 \\ b \approx 3{,}8 \end{cases},$$

следовательно, нетто премия первого договора должна быть 2,2 единицы, второго 3,8.

Отметим, что рисковые премии договоров в 4,75 раз меньше, то есть рисковая надбавка 375%, что, конечно, очень много. Но если бы мы рассматривали риски по отдельности, то для обеспечения такой же надежности по первому договору надо было бы назначить нетто премию в размере 3 единиц (0,9+0,06>0,95), а по второму 6 единиц (0,9+0,08>0,95), то есть еще выше. Следовательно, объединение в один субпортфель даже двух договоров позволило снизить взнос для каждого из них при том же уровне надежности. Но эти два договора хоть и не совсем одинаковые, но и не принципиально разные, так как и возможный ущерб, и вероятности – величины одного порядка.

Пример 10 (объединение рисков разного порядка).

Рассмотрим пакет договоров, состоящий из двух дискретных рисков, имеющих принципиально разные ущербы с распределениями:

x	0	3	6	10
$P(x)$	0,9	0,06	0,03	0,01

$M(x) = 3 \cdot 0{,}06 + 6 \cdot 0{,}03 + 10 \cdot 0{,}01 = 0{,}46$

y	0	60	160
$P(y)$	0,9	0,08	0,02

$M(y) = 60 \cdot 0{,}08 + 160 \cdot 0{,}02 = 8$

Тогда суммарный ущерб Z может принимать следующие значения:

Z=0	Z=3	Z=6	Z=10	Z=60	Z=63	Z=66	Z=70	Z=160	Z=163	Z=166	Z=170
x=0 y=0 p=0,81	x=3 y=0 p= 0,054	x=6 y=0 p= 0,027	x=10 y=0 p= 0,009								
				x=0 y=60 p= 0,072	x=3 y=60 p= 0,0048	x=6 y=60 p= 0,0024	x=10 y=60 p= 0,0008				
								x=0 y=160 p= 0,018	x=3 y=160 p= 0,0012	x=6 y=160 p= 0,0006	x=10 y=160 p= 0,0002
вероятность суммарного ущерба $P(Z)$											
0,81	0,054	0,027	0,009	0,072	0,0048	0,0024	0,0008	0,018	0,0012	0,0006	0,0002
накопленная вероятность $P(x+y \le Z)$											
0,81	0,864	0,891	0,9	0,972	…	…	…	…	…	…	…

Из таблицы видно, что для того, чтобы обеспечить такую же надежность 0,95, компания должна иметь возможность выплатить суммарное возмещение, равное 60 единицам. Следовательно, суммарная нетто премия равна 60, и, распределяя ее пропорционально математическим ожиданиям (то есть, рисковым премиям) рисков, получаем:

$$\begin{cases} a+b=60 \\ \dfrac{a}{0{,}46}=\dfrac{b}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \approx 3{,}3 \\ b \approx 56{,}7 \end{cases},$$

следовательно, нетто премия первого договора должна быть 3,3 единицы, второго 56,7.

Если бы мы рассматривали риски по отдельности, то для обеспечения такой же надежности по первому договору надо было бы назначить нетто премию в размере 3 единиц, а по второму 60 единиц. То есть, для первого договора взнос после объединения повышается, для второго – понижается и если объединить эти риски, то первый клиент будет вынужден платить больше. Таким образом, с точки зрения выгоды клиента объединять следует только похожие риски, в которых ущербы – величины одного порядка.

Объединение дискретных рисков с применением производящей функции

Пример 11 (применение производящей функции).

Рассмотрим еще раз пакет из двух дискретных рисков с распределениями:

x	0	3	6	10
$P(x)$	0,9	0,06	0,03	0,01

y	0	6	16
$P(y)$	0,9	0,08	0,02

Поскольку обе случайные величины принимают целочисленные значения, можно составить для их распределений производящие функции:

$$\varphi_x(t) = 0{,}9t^0 + 0{,}06t^3 + 0{,}03t^6 + 0{,}01t^{10} \quad \text{и} \quad \varphi_y(t) = 0{,}9t^0 + 0{,}08t^6 + 0{,}02t^{16}.$$

А так как производящая функция суммы равна произведению производящих функций, получаем $\varphi_z(t) = \varphi_x(t)\varphi_y(t)$

$$= 0{,}81t^0 + 0{,}054t^3 + 0{,}099t^6 + 0{,}0048t^9 + 0{,}009t^{10} + 0{,}0024t^{12} + $$
$$+ 0{,}0188t^{16} + 0{,}0012t^{19} + 0{,}0006t^{22} + 0{,}0002t^{26}.$$

Следовательно, суммарный ущерб имеет распределение:

Z	0	3	6	9	10	12	16	19	22	26
$P(Z)$	0,81	0,054	0,099	0,0048	0,009	0,0024	0,0188	0,0012	0,0006	0,0002

Естественно, полученный результат и дальнейшие выводы такие же, как и выше.

Объединение непрерывных рисков

Рассмотрим пакет договоров, состоящий из двух непрерывных рисков x и у с плотностями вероятностей $f_x(t)$ и $g_y(t)$ соответственно.

Как известно из теории вероятностей, функция распределения вероятности суммы случайных величин имеет вид

$$h_{x+y}(z) = \int_{-\infty}^{z} f_x(t) g_y(z-t)\,dt$$

и если компания хочет обеспечить себе вероятность неразорения η, то она должна обладать суммой V, удовлетворяющей условию

$$F_{x+y}(V) = P(x+y<V) = \int_{-\infty}^{V} h_{x+y}(z)\,dz = \eta\,.$$

Пример 12 (объединение равномерно распределенных рисков).

Пусть первый риск принимает значения от 0 до 10, второй от 0 до 40 и оба риска распределены равномерно, то есть плотности распределения вероятности имеют вид соответственно

$$f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{если } t \in [0;10] \\ 0, & \text{если } t \notin [0;10], \end{cases} \quad \text{и} \quad g_y(t) = \begin{cases} \frac{1}{40}, & \text{если } t \in [0;40] \\ 0, & \text{если } t \notin [0;40], \end{cases}$$

и компания хочет обеспечить вероятность неразорения 0,9.

Так как $g_y(z-t) = \begin{cases} \frac{1}{40}, & \text{если } t \in [z-40;z] \\ 0, & \text{если } t \notin [z-40;z] \end{cases}$, то

для $z \le 0$ $f_x(t) g_y(z-t) = 0$;

для $0 < z \le 10$ $\quad f_x(t)g_y(z-t) = \begin{cases} \frac{1}{400}, & \text{если } t \in [0; z], \\ 0, & \text{если } t \notin [0; z]; \end{cases}$

для $10 < z \le 40$ $\quad f_x(t)g_y(z-t) = \begin{cases} \frac{1}{400}, & \text{если } t \in [0;10], \\ 0, & \text{если } t \notin [0;10]; \end{cases}$

для $40 < z \le 50$ $\quad f_x(t)g_y(z-t) = \begin{cases} \frac{1}{400}, & \text{если } t \in [z-40;10], \\ 0, & \text{если } t \notin [z-40;10]; \end{cases}$

для $z > 50$ $\quad f_x(t)g_y(z-t) = 0;$

Следовательно, $\quad h_{x+y}(z) = \int\limits_0^z f_x(t)g_y(z-t)\,dt = \begin{cases} 0, & \text{если } z \le 0, \\ z/400, & \text{если } 0 < z \le 10, \\ 10/400, & \text{если } 10 < z \le 40, \\ (50-z)/400, & \text{если } 40 < z \le 50, \\ 0, & \text{если } z > 50. \end{cases}$

Поэтому, если $V \le 0$, то $F_{x+y}(V) = 0$;

если $0 < V \le 10$, то

$$F_{x+y}(V) = \int\limits_0^V \frac{z}{400}\,dz = \left.\frac{z^2}{800}\right|_0^V = \frac{V^2}{800} \le \frac{1}{8} < 0{,}9;$$

если $10 < V \le 40$, то

$$F_{x+y}(V) = \int\limits_0^{10} \frac{z}{400}\,dz + \int\limits_{10}^V \frac{1}{40}\,dz = \left.\frac{z^2}{800}\right|_0^{10} + \left.\frac{z}{40}\right|_{10}^V = \frac{1}{8} + \frac{V-10}{40} =$$

$$= \frac{V}{40} - \frac{1}{8} \le 1 - 0{,}125 = 0{,}875 < 0{,}9;$$

если $40 < V \le 50$, то

$$F_{x+y}(V) = \int\limits_0^{10} \frac{z}{400}\,dz + \int\limits_{10}^{40} \frac{1}{40}\,dz + \int\limits_{40}^{V} \frac{50-z}{400}\,dz = \left.\frac{z^2}{800}\right|_0^{10} + \left.\frac{z}{40}\right|_{10}^{40} - \left.\frac{(50-z)^2}{800}\right|_{40}^{V} =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{(50-V)^2}{800} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{(50-V)^2}{800};$$

если $V \ge 50$, то $F_{x+y}(V) = 1 > 0{,}9$.

Следовательно, уравнение $F_{x+y}(V) = 0{,}9$ имеет решение только при $40 < V \le 50$. В этом случае

$$1 - \frac{(50-V)^2}{800} = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad (50-V)^2 = 80 \quad \Rightarrow \quad V = 50 - \sqrt{80} \approx 42$$

(округлять можно только в большую сторону).

Следовательно, суммарная нетто премия равна 42, и, распределяя ее пропорционально рискам, получаем:

$$\begin{cases} a + b = 42 \\ \frac{a}{10} = \frac{b}{40} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \approx 8{,}4 \\ b \approx 33{,}6 \end{cases}.$$

Таким образом, нетто-премия первого договора должна быть 8,4 единицы, второго 33,6.

Подсчитаем нетто премии по каждому из договоров до объединения:

$$F_x(V) = \int_0^V f_x(t)dt = \int_0^V \frac{1}{10}dt = \frac{V}{10} = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad V = 9 > 8{,}4;$$

$$F_y(V) = \int_0^V g_x(t)dt = \int_0^V \frac{1}{40}dt = \frac{V}{40} = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad V = 36 > 33{,}6.$$

Для каждого из договоров объединение имеет смысл, так как взнос после объединения уменьшается. (Можно показать, что, как и при объединении дискретных договоров, если ущербы будут разного порядка, то для «маленького» договора объединение приведет к увеличению тарифа, а для «большого» к уменьшению)

Воспринимая суммарный иск по двум договорам как одно целое, к ним можно присоединить третий индивидуальный риск и т.д. Как и при применении индивидуальной модели, найденные величины взносов могут носить только рекомендательный характер. Они обеспечивают заданный уровень надежности, но не учитывают рыночные условия.

1.7. Особенности повторного страхования

Особенности страхования ответственности

Рассмотрим повторное страхование на примере ответственности водителя. Аналогичная ситуация возникает у хирургов, юристов и людей других специальностей, пытающихся застраховать себя от профессиональных ошибок.

Автомобили, очевидно, существенно различаются по классам и в каждом классе свои вероятности аварии. Так крупные автомобили чаще наносят ущерб третьим лицам, чем страдают сами от аварии, и их редко угоняют. Мелким автомобилям больше достается при аварии и угоняют их чаще, чем грузовики. Все это требует различной тарификации по классам автомобилей. Но эта тарификация не меняется из года в год, меняется только стоимость автомобиля за счет износа.

Водители, в зависимости от опыта, так же делятся на классы. И в зависимости от наступления или не наступления аварии этот класс может поменяться и на следующий год водитель не всегда может рассчитывать на заключения договора на тех же, или почти тех же, что и раньше условиях. Рассмотрим этот процесс.

Отнесение водителя к классу – это само по себе случайное событие A_i. Пусть событие B – это авария. Тогда

$P(A_i)$ – вероятность того, что водителя отнесли к i-ому классу;

$P(B \setminus A_i)$ – вероятность того, что водитель совершил аварию, если его отнесли к отнесли i-ому классу;

$P(A_i \setminus B)$ – вероятность того, что водитель (на следующий год) будет отнесен к i-ому классу, если (в этом году) он совершил аварию;

$P(\overline{B} \setminus A_i)$ – вероятность того, что водитель не совершил аварию, если его отнесли к отнесли i-ому классу;

$P(A_i \setminus \overline{B})$ – вероятность того, что водитель (на следующий год) будет отнесен к i-ому классу, если (в этом году) он не совершил аварию.

Сравним две величины: $|P(A_i)-P(A_i \setminus B)|$ и $|P(A_i)-P(A_i \setminus \overline{B})|$, которые показывают, насколько вероятность попасть в i-ый класс в следующем, после страхового году отличается от такой же вероятности в страховой год.

$$|P(A_i)-P(A_i \setminus B)| = \left|P(A_i)-\frac{P(A_i)P(B \setminus A_i)}{P(B)}\right| = P(A_i)\left|1-\frac{P(B \setminus A_i)}{P(B)}\right| =$$

$$= P(A_i)\left|\frac{P(B)-P(B \setminus A_i)}{P(B)}\right|;$$

$$|P(A_i)-P(A_i \setminus \overline{B})| = \left|P(A_i)-\frac{P(A_i)P(\overline{B} \setminus A_i)}{P(\overline{B})}\right| = P(A_i)\left|1-\frac{P(\overline{B} \setminus A_i)}{P(\overline{B})}\right| =$$

$$= P(A_i)\left|1-\frac{1-P(B \setminus A_i)}{1-P(B)}\right| = P(A_i)\left|\frac{P(B)-P(B \setminus A_i)}{1-P(B)}\right|.$$

А так как по смыслу $P(B)<0{,}5$ то $1-P(B)>0{,}5$ и вторая величина меньше первой. То есть, указанная вероятность для водителя, не совершившего аварию, меньше отличается от первоначальной вероятности, чем у водителя, совершившего аварию.

Пример 13 (изменение вероятности отнесения к классу).

По статистике известно, что 20% водителей – новички, и для них вероятность попасть в течении года в аварию равна 0,2; для 30% водителей, имеющих средний опыт, вероятность аварии 0,15; для опытных водителей, которых 40%, вероятность аварии 0,1; а 10% «асов» попадают в аварию с вероятностью 0,05.

По формуле полной вероятности

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(B \setminus A_i) = 0{,}2\cdot 0{,}2+0{,}3\cdot 0{,}15+0{,}4\cdot 0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}05=0{,}13;$$

$$P(\overline{B}) = 1-P(B) = 0{,}87.$$

Результаты остальных вычислений запишем в таблицу:

i	$P(A_i)$ (по условию)	$P(B \setminus A_i)$ (по условию)	$P(\overline{B} \setminus A_i) = 1-P(B \setminus A_i)$	$P(A_i \setminus B) = \frac{P(A_i)P(B \setminus A_i)}{P(B)}$	$P(A_i \setminus \overline{B}) = \frac{P(A_i)P(\overline{B} \setminus A_i)}{P(\overline{B})}$	$\lvert P(A_i) - P(A_i \setminus B)\rvert$	$\lvert P(A_i) - P(A_i \setminus \overline{B})\rvert$
1	0,2	0,20	0,80	0,31	0,18	0,11	0,02
2	0,3	0,15	0,85	0,35	0,29	0,05	0,01
3	0,4	0,10	0,90	0,31	0,41	0,09	0,01
4	0,1	0,05	0,95	0,04	0,11	0,06	0,01

Сравнение двух последних столбцов наглядно демонстрирует изложенные выше теоретические выводы.

Особенности многолетнего сотрудничества

Страховые компании часто используют следующий прием для привлечения клиентов: если за первый год после заключения договора не было страхового случая, то клиенту, заключающему договор на следующий год, предоставляется скидка. Понятно, что страхователю это выгодно, и он не станет обращаться к другой компании, так как там он будет вынужден заплатить полную сумму страхового взноса. Рассмотрим, в чем выгода страховщика.

Для простоты будем считать, что цена страхуемого имущества и характер риска не меняется от года к году, экономическая ситуация стабильна, а значит инфляцией можно пренебречь, объем и характер страхового портфеля, как и требования к надежности портфеля не претерпели заметных изменений. *ОРН* = δ и нагрузка *R*. Тогда за первый год страхователь заплатит $Р\Pi(1+\delta)(1+0{,}01R)$. При этом рисковая премия пойдет на то, чтобы уравновесить риски сторон, нагрузка будет использована на ведение дела, а рисковая надбавка $Р\Pi\delta$ пойдет в резерв (если суммарный ущерб был не выше среднего).

Это позволит страховщику на второй год взять с этого клиента не всю надбавку, а лишь ее часть $a\delta$, (a<1). Тогда взнос страхователя на второй год составит $Р\Pi(1+a\delta)(1+0{,}01R)$.

Найдем получаемую скидку по взносу:

$Р\Pi(1+\delta)(1+0{,}01R)$ – 100%,

$Р\Pi(1+a\delta)(1+0{,}01R) - x\%$, тогда скидка $= \mathbf{100 - x = 100 - 100\frac{1+a\delta}{1+\delta} = 100\frac{\delta(1-a)}{1+\delta}}$.

Страхователь же получает в резерв уже $Р\Pi\delta + Р\Pi a\delta = Р\Pi\delta(1+a)$.

Если и на второй год страховой случай не произошел, *ОРН* можно еще уменьшить и т.д. Схема скидок может быть разной, рассмотрим вариант, когда при не наступлении страхового случая *ОРН* ежегодно уменьшается в a раз.

Тогда через *n* лет взнос страхователя составит $Р\Pi(1+a^n\delta)(1+0{,}01R)$, а скидка

по отношению к первому году $\mathbf{100 - 100\frac{1+a^n\delta}{1+\delta} = 100\frac{\delta(1-a^n)}{1+\delta}}$,

а по отношению к предыдущему $\mathbf{100 - 100\frac{1+a^n\delta}{1+a^{n-1}\delta} = 100\frac{\delta a^{n-1}(1-a)}{1+a^{n-1}\delta}}$

Страхователь через *n* лет получит в резерв $Р\Pi\delta(1+a+a^2+\ldots+a^n) = Р\Pi\delta\,\frac{\mathbf{1-a^{n+1}}}{\mathbf{1-a}}$.

Посмотрим, как изменяются эти величины на конкретном числовом примере:

Пример 14 (результат скидки за многолетнее сотрудничество).

Проведем расчеты для модели, рассмотренной выше при *ОРН*=30% и a=0,8.

	2-й год	3-й год	4-й год	5-й год	6-й год
скидка страхователя относительно первоначального взноса	4,6	8,3	11,3	13,6	15,5
резерв страховщика	0,54*РП*	0,73*РП*	0,87*РП*	*РП*	1,1*РП*

Из таблицы видно, что уже через четыре года резерв, накопленный страховщиком, становится равным рисковой премии, и на пятый год «по справедливости» рисковую надбавку с клиента уже брать вообще не следует, так как уплаченные им ранее деньги на обеспечение надежности позволяют компании при необходимости оплатить ущерб его же деньгами, не привлекая взносы других клиентов.

Таким образом, многолетнее сотрудничество выгодно и страховщику. Он не только получает надежного клиента, который платит страховые взносы, но не предъявляет иск о возмещении ущерба, но, кроме того, за его счет повышает свою надежность.

2. Договора с дополнительными условиями

2.1. Учет банковской процентной ставки

Нарушение принципа эквивалентности ответственности

Вернемся к примеру 1: автомобиль ценой S=400 т.р. страхуется от угона на полную стоимость на 1 год, вероятность угона p=0,01.

Без учета времени и банковской ставки *РП* = $px_0 = pS$ =0,01·400=4 т.р., в среднем собранные премии равны выплаченным возмещениям и за счет РП компания никакой прибыли не получает.

В действительности ситуация иная. Пусть банковская %-ая ставка составляет 12% годовых, проценты начисляются в конце каждого месяца, при этом проценты простые, то есть 1% в месяц без начисления процентов на процент, вероятность угона одинакова для каждого месяца. Взнос находится у компании, значит, процент с капитала так же принадлежит ей. Рассмотрим таблицу:

Угон происходит в течение	Цена *РП* с учетом банковской ставки	Потери клиента	Потери компании
1 месяца	4	4	400-4=396
2 месяца	4(1+0,01)=4,04	4,04	400-4,04=395,96
3 месяца	4(1+0,02)=4,08	4,08	400-4,08=395,92
………..	…….	…….	…….
12 месяцев	4(1+0,11)=4,44	4,44	400-4,44=395,56

Риск клиента – потерять свой взнос, если угон не произойдет. Вероятность этого за год $1-p$ = 1 – 0,01=0,99, за месяц $\frac{1-p}{12} = \frac{0,99}{12} = 0,0825$. Таким образом, среднее ожидаемое значение взноса, потерянного клиентом

$$0,0825\cdot(4 + 4,04 + 4,08 + \ldots + 4,44) = 4,1778 \text{ т.р.}$$

Риск компании – потерять возмещение, если угон произойдет. Вероятность потери в каждый месяц $\frac{p}{12} = \frac{0,01}{12} = 0,00083$. Таким образом, среднее ожидаемое значение потери компании

$$0,00083\cdot(396 + 395,96 + 395,92 + \ldots + 395,56) = 3,9420 \text{ т.р.}$$

Таким образом, средние потери клиента 4,1778 т.р.$\neq$3,9420 т.р. – средним потерям компании. Разница составляет $\frac{4,1778 - 3,9420}{4} = 0,05895 \approx 6\%$ от определенной в 4 т.р. *РП*, а при сложных процентах этот эффект еще сильнее (но в практике страхования сложные проценты практически не применяются). В условиях дикого рынка, тем более, неискушенному отечественному клиенту подобная «несправедливость» не слишком заметна. Однако при переходе к цивилизованному рынку такие ошибки, приводящие к завышенному тарифу, снижают конкурентоспособность компании.

Нахождение рисковой премии с учетом процентной ставки

Выясним, какой должна быть *РП*, чтобы риски сторон были равны. Пусть банковская ставка составляет *i%* годовых и величина возможного ущерба равна сумме договора: $x_0 = S$.

Подсчитаем математическое ожидание потерь клиента:

$$M_{клиент} = \frac{1-p}{12}\left(РП + РП(1+\frac{i}{100\cdot 12}) + РП(1+\frac{2i}{100\cdot 12}) + ... + РП(1+\frac{11i}{100\cdot 12})\right) =$$

$$= \frac{1-p}{12}РП\left(12 + \frac{i}{100\cdot 12}(1+2+...+11)\right) = (1-p)РП\left(1+\frac{11i}{2400}\right).$$

Подсчитаем математическое ожидание потерь компании:

$$M_{компания} =$$

$$= \frac{p}{12}\left((S-РП) + (S-РП(1+\frac{i}{100\cdot 12})) + (S-РП(1+\frac{2i}{100\cdot 12})) + ... + (S-РП(1+\frac{11i}{100\cdot 12}))\right) =$$

$$= \frac{p}{12}\left(12S - РП\left(12+\frac{i}{100\cdot 12}(1+2+...+11)\right)\right) = p\left(S - РП\left(1+\frac{11i}{2400}\right)\right).$$

Таким образом, мы получаем уравнение:

$$(1-p)РП\left(1+\frac{11i}{2400}\right) = p\left(S - РП\left(1+\frac{11i}{2400}\right)\right) \Rightarrow \quad РП\left(1+\frac{11i}{2400}\right) = pS \Rightarrow$$

$$(\text{т.к. } \frac{11}{2400} \approx 0{,}0046) \qquad РП = \frac{pS}{1+0{,}0046i}.$$

Аналогично при распределенном ущербе

$$РП = \frac{p\overline{x}_0}{1+0{,}0046i},$$

где $\overline{x}_0$ – среднее взвешенное значение величины возможного ущерба.

Замечание. Изменение цены денег нарушал принцип эквивалентности обязательств сторон, за которые отвечает именно *РП*, а не остальные составляющие взноса (*РН* и нагрузка). Поэтому при учете банковской ставки пересчитывается именно *РП*, а не весь взнос.

2.2. Договора с распределенным риском

Основное содержание условия распределения риска

Кроме классической схемы, когда компания принимает на себя весь риск и при возникновении страхового случая выплачивает возмещение в полном объеме, по согласованию сторон возможны и такие договора, в которых клиент участвует в возмещении части ущерба в обмен на снижение суммы страхового взноса. Это снижение происходит, прежде всего, за счет снижения рисковой премии, потому что компания рискует возмещением, который меньше суммы договора и формула для определения величины рисковой премии принимает вид

$$РП = \frac{p\cdot\overline{y}}{1+0{,}0046i},$$

где $\overline{y}$ – среднее возмещение, p – вероятность страхового случая, i – банковский процент.

Типы договоров с распределенным риском

Различают следующие схемы договоров с распределенным риском:

(1) *Пропорциональное возмещение ущерба.*

И сумма договора, и размер возмещения пропорционально уменьшаются. Если объект реальной стоимостью C страхуется на сумму S ($S< C$), то при наступлении страхового случая, приведшего к ущербу x_o, компания выплачивает клиенту возмещение $y = x_o \frac{S}{C}$.

(2) *Правило первого риска.*

Оговаривается верхняя граница возмещения *S*. Если страховой случай приводит к ущербу $x_o < S$, то он компенсируется полностью. Если страховой случай приводит к ущербу $x_o \geq S$, то компания выплачивает клиенту только сумму *S*. То есть возмещение $y = \min(x_o; S)$.

(3) *Безусловная франшиза.*

Все иски уменьшаются на одну и ту же сумму. В договоре определяется величина *F*, называемая франшизой. При наступлении ущерба x_o выплачивается возмещение $x_o - F$, то есть возмещение $y = \max(0; x_o - F)$.

(4) *Условная франшиза.*

Маленькие ущербы не оплачиваются. В договоре определяется величина франшизы *F* и если ущерб $x_o \leq F$, то он не оплачивается, а если $x_o > F$, то возмещение оплачивается полностью. То есть возмещение $y = \begin{cases} 0, & x_o \leq F; \\ x_o, & x_o > F. \end{cases}$

Естественно, договора вида (2) и (4) могут применяться только в случае распределенного ущерба.

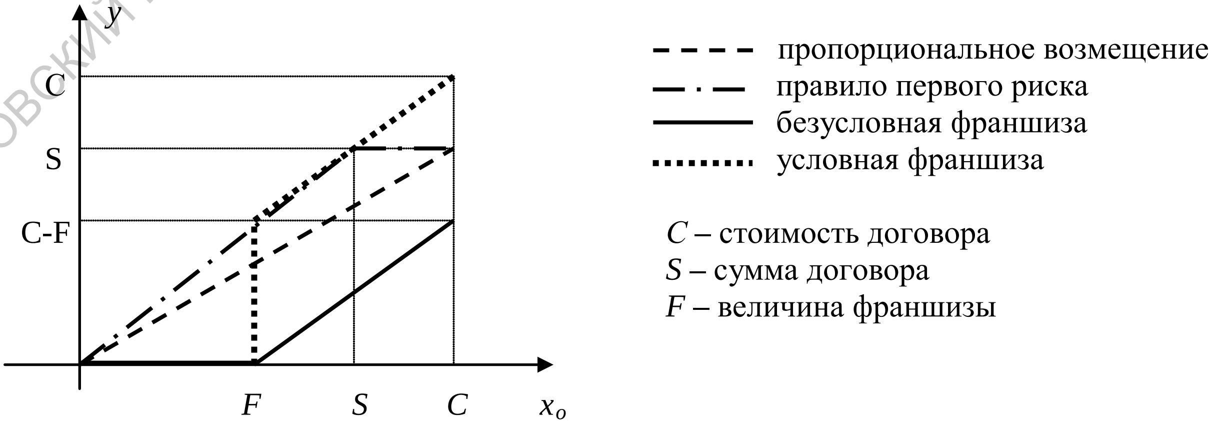
При договорах с правилом первого риска клиент надеется на то, что больших ущербов не будет. Например, при страховании автомобиля от аварии можно рассчитывать, что в результате аварии полного уничтожения машины не произойдет. Более вероятен частичный ущерб и применение правила первого риска вполне оправдано.

При договорах с франшизой игнорируются малые убытки. На практике франшиза может покрывать, например, расходы по определению ущерба. Эти договора особенно часто применяются при автомобильном страховании – ведь не вызывать же страхового инспектора из-за каждой царапины. Проще оплатить мелкую аварию самому, но зато заплатить меньший взнос.

В реальной ситуации возможно и дальнейшее комбинирование договоров, например договор с правилом первого риска, надеясь, что полной потери не произойдет, и договора с франшизой, отказываясь от возмещения мелких ущербов.

<u>*Графическая интерпретация*</u>

Рассмотрим зависимость величины возмещения *y* от суммы ущерба x_o при различных типах договоров:



Графически ответственность компании можно интерпретировать как площадь фигуры под графиком возмещения $y = y(x)$. Как видно из графиков, самая маленькая площадь в случае безусловной франшизы, следовательно, и взносы в этом случае будут меньше всего.

Расчет взноса для договоров с распределенным риском

В договорах с распределенным риском возмещение не равно ущербу или сумме договора. Так как риск компании определяется именно величиной возмещения, при расчете рисковой премии вместо величины среднего ущерба используется именно величина среднего возмещения, в остальном все рассуждения аналогичны.

Пример 15 (взносы по договорам с распределенным риском).

Рассмотрим страхование имущества стоимостью 100 т.р.

Пусть банковский процент 5% годовых, относительная рисковая надбавка взята 10%, нагрузка составляет 25%, вероятность страхового случая p=0,1 и величина ущерба имеет следующее распределение:

ущерб x_o	10	25	40	70	100
вероятность	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

Рассмотрим различные договора:

$У_0$ – договор на полное возмещение ущерба (для сравнения);
$У_1$ – пропорциональное возмещение ущерба, составляющее 80%;
$У_2$ – правило первого риска с ограничением возмещения 80 т.р. (=80%);
$У_3$ – безусловная франшиза 20 т.р.;
$У_4$ – условная франшиза 20 т.р.

Составим таблицу распределения ущерба и возмещений:

Ущерб x_o	10	25	40	70	100
Вероятность	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1
Возмещение $y_o = x_o$	10	25	40	70	100
Возмещение $y_1 = x_o \dfrac{S}{C}$	8	20	32	56	80
Возмещение $y_2 = \min(x_o; S)$	10	25	40	70	80
Возмещение $y_3 = \max(0; x_o - F)$	0	5	20	50	80
Возмещение $y_4 = \begin{cases} 0, & x_o \le F \\ x_o, & x_o > F \end{cases}$	0	25	40	70	100

Подсчитаем среднее взвешенное возмещение по каждому договору:

$\overline{y}_0 = 10 \cdot 0{,}3 + 25 \cdot 0{,}3 + 40 \cdot 0{,}2 + 70 \cdot 0{,}1 + 100 \cdot 0{,}1 = 35{,}5$ т.р.;

$\overline{y}_1 = 8 \cdot 0{,}3 + 20 \cdot 0{,}3 + 32 \cdot 0{,}2 + 56 \cdot 0{,}1 + 80 \cdot 0{,}1 = 28{,}4$ т.р.;

$\overline{y}_2 = 10 \cdot 0{,}3 + 25 \cdot 0{,}3 + 40 \cdot 0{,}2 + 70 \cdot 0{,}1 + 80 \cdot 0{,}1 = 33{,}5$ т.р.;

$\overline{y}_3 = 5 \cdot 0{,}3 + 20 \cdot 0{,}2 + 50 \cdot 0{,}1 + 80 \cdot 0{,}1 = 18{,}5$ т.р.;

$\overline{y}_4 = 25 \cdot 0{,}3 + 40 \cdot 0{,}2 + 70 \cdot 0{,}1 + 100 \cdot 0{,}1 = 32{,}5$ т.р.

В соответствии с полученными выше формулами,

$$РП = \frac{p \cdot \overline{y}}{1 + 0{,}0046i} = 0{,}098\overline{y}; \qquad НП = РП(1+\delta_0) = 1{,}01\ РП;$$

$$БП = НП(1 + 0{,}01R) = НП \cdot 1{,}25.$$

Запишем в таблицу результаты вычислений:

Договор	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
$\overline{y}$	35,5	28,4	33,5	18,5	32,5
РП	3,479	2,783	3,283	1,813	3,185
НП	3,514	2,811	3,316	1,831	3,217
БП	4,3925	3,51375	4,145	2,28875	4,02125
в % к y_0	100%	80%	94%	52%	96%

Из приведенной таблицы видно, что ожидаемое среднее возмещение в договорах с правилом первого риска и условной франшизой мало отличается от классического договора с полным возмещением, но и понижение тарифа в этих случаях так же незначительное.

Отметим, что в договоре с условной франшизой ничего не измениться, если в качестве франшизы взять любое значение из [10; 25). Возмещения, а значит и *РП*, *НП*, *БП* останутся такими же. Поэтому для дискретных распределений ущерба играют роль только значения франшизы, равные значениям возможных ущербов.

2.3. Договора комбинированного страхования

Основное содержание условия комбинированного страхования

Комбинированное страхование – это страхование одного и того же имущества на одну и ту же сумму от двух и более взаимоисключающих событий (например, автомобиль от угона и от пожара).

Как мы видели, при определении величины рисковой премии, а, следовательно, и всего взноса существенную роль играла вероятность страхового случая.

Пусть вероятность одного страхуемого события p_1, а второго p_2. Если рассматривать отдельно страхование от каждого события, то суммарная рисковая премия будет считаться исходя из суммарной вероятности $p_1 + p_2$.

Пусть клиент решил заключить оба договора в одной компании. Так как события взаимоисключающие, вероятность наступления страхового случая p – это вероятность того, что одно из событий произошло, а второе не произошло, то есть

$$p = p_1(1 - p_2) + (1 - p_1)p_2 = p_1 + p_2 - 2p_1p_2 .$$

Очевидно, что это меньше суммарной вероятности. Если страхуются одновременно больше двух событий, то эффект, естественно, еще сильнее. Следовательно, при комбинированном страховании вероятность страхового случая, а значит и всего взноса будет меньше, чем при отдельном страховании каждого из событий.

Расчет взноса при комбинированном страховании

При комбинированном страховании расчет взноса проводится по тем же правилам, что и при классическом страховании, но для новой вероятности страхового случая, которая, как было показано, не равна сумме вероятностей событий. Уже отмечалось, что относительная рисковая надбавка, полученная при расчетах, может носить лишь рекомендательный характер. Но поскольку «правильная» *ОРН* зависит от вероятности страхового случая, то и фактическая *ОРН* может оказаться другой. Для сравнения приведем пример расчета «правильного» взноса.

Пример 16 (сравнение обычного и комбинированного страхования).

Рассмотрим двух клиентов. Пусть первый застраховал свое имущество на сумму 100 т.р.

а). в компании I от пожара – событие *A* с вероятностью 0,02;

б). в компании II от порчи в результате аварии водоснабжения – событие B с вероятностью 0,01;
в). в компании III от кражи – событие C с вероятностью 0,03.

Второй клиент застраховал свое имущество на тех же условиях, но в одной компании IV.

Пусть во всех договорах процентная ставка не учитывается, все компании имеют пакеты 10000 аналогичных договоров, нагрузка составляет 8% и вероятность разорения $\varepsilon = 0{,}03$.

Для I договора $p = p(A) = 0{,}02$.

Для II договора $p = p(B) = 0{,}01$.

Для III договора $p = p(C) = 0{,}03$.

Для IV договора страховой случай – это событие

$$D = (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C) \Rightarrow$$

$$p(D) = 0{,}02 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}97 + 0{,}98 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}97 + 0{,}98 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}03 = 0{,}057818.$$

Подсчитаем рисковую премию, относительную рисковую надбавку и брутто-премию для каждого договора. Результаты вычислений запишем в таблицу:

	Договор I	Договор II	Договор III	Сумма I+II+III	Договор IV
Вероятность страхового случая	0,02	0,01	0,03		0,57818
$РП = 100 \cdot p$	2	1	3	6	5,7818
$ОРН = \sqrt{\frac{1-p}{np}}\Phi^{-1}(0{,}5-0{,}03) = \sqrt{\frac{1-p}{p}}0{,}0188$	0,1316 =14%	0,1871 =19%	0,1069 =11%		0,076 =8%
$НП = РП(1+ОРН)$	2,2632	1,1871	3,3207	6,771	6,2212
$БП = 1{,}08 \cdot НП$	2,444	1,282	3,586	7,313	6,719

Таким образом первый клиент заплатит суммарно взносов на сумму 7,313 т.р., а второй на 6,719 т.р. Относительное уменьшение составит $\frac{7{,}313 - 6{,}719}{7{,}313} \approx 8\%$.

(Естественно, агент компании будет стремиться представить это снижение как скидку «солидному» клиенту за сотрудничество. Но это не скидка, а просто грамотный подход к расчету вероятности страхового случая.)

2.4. Договора с рассроченным взносом

<u>Основное содержание условия рассроченного взноса</u>

Пусть заключается страховой договор, определена его брутто-премия. Если клиент готов заплатить всю сумму сразу, то все расчеты на этом закончены. Однако возможна ситуация, когда взнос вносится по частям. Такие договора и называются договорами с рассроченным взносом.

Нарушение принципа равенства риска сторон

Предположим, что клиент хочет вносить взнос по частям, ежеквартально. Возникает вопрос: какова величина этих частей? На первый взгляд кажется, что ежеквартальный взнос должен равняться одной четвертой части общего взноса, но это не верно, так как в этом случае не учитываются два обстоятельства:

(1) За счет инфляции цена денег, а, следовательно, и цена взноса уменьшается с каждым кварталом. (Справедливости ради стоит заметить, что и цена возмещения, на которое может рассчитывать клиент, так же уменьшается. Но клиент рискует взносом, а не возмещением, так что его риск, если он платит меньше, так же уменьшается.)

(2) Компания обязательно, то есть с вероятностью 1, получит только первый взнос (иначе договор не вступит в силу и ответственность компании не наступит). Если страховой случай произойдет в течении первого квартала, то компания выплатит возмещение, действие договора прекращается и остальные взносы компания уже не получит.

Нахождение рассроченной рисковой премии

Найдем, какой должна быть рассроченная рисковая премия, чтобы риски сторон были равны. Пусть клиент и компания договорились, что взнос будет выплачиваться равными частями через равные промежутки времени m раз за год. Обозначим w величину разовой рисковой премии.

Предположим, компания рассчитывает, что темпы инфляции составят j % в год. Тогда за каждый промежуток цена рисковой премии уменьшается в $v = \frac{1}{1+{}^{j}\!/_{100\cdot m}}$ раз.

Пусть, как и раньше p – вероятность наступления страхового случая. Тогда вероятность страхового случая за каждый промежуток между платежами есть $\frac{p}{m}$, следовательно, с каждым промежутком вероятность получения следующего взноса уменьшается на $\frac{p}{m}$.

Итак, мы имеем:

Промежуток	1-й	2-й	3-й	……	m-й
Цена *РП*	w	wv	wv^2	……	wv^{m-1}
Вероятность получения *РП*	1	$1-\frac{p}{m}$	$1-\frac{2p}{m}$	……	$1-\frac{(m-1)p}{m}$

Таким образом, математическое ожидание полученных рисковых премий

$$M_{премий} = w\sum_{k=0}^{m-1} v^k (1-\frac{kp}{m}).$$

Пусть, как и раньше, i – годовая банковская ставка, y – ожидаемое возмещение (для договоров без распределенного риска это то же самое, что и сумма договора). Тогда математическое ожидание выплат на момент заключения договора составляет

$$M_{выплат} = \frac{py}{1+0{,}0046i},$$

Для обеспечения эквивалентности рисков сторон должно выполняться соотношение

$$M_{премий} = M_{выплат} \qquad \Rightarrow \qquad w = \frac{py}{(1+0{,}0046i)\sum_{k=0}^{m-1} v^k (1-\frac{kp}{m})}.$$

Отметим, что так как $v^k (1-\frac{kp}{m}) < 1$, то и $\sum_{k=0}^{m-1} v^k (1-\frac{kp}{m}) < m$ и $mw > \frac{py}{1+0{,}0046i}$. Таким образом, суммарная рисковая премия окажется больше, чем при единовременной уплате взноса. Причем, чем больше m, тем сильнее разница. То есть суммарная рисковая премия увеличивается при переходе от единовременной к ежеквартальной и от ежеквартальной к ежемесячной.

Дадим другое представление для суммы, стоящей в знаменателе, которое будет более удобным при больших m:

$$\sum_{k=0}^{m-1} v^k (1-\frac{kp}{m}) = \sum_{k=0}^{m-1} v^k - \frac{p}{m}\sum_{k=1}^{m-1} k v^k = \frac{v^m-1}{v-1} - \frac{pv}{m}\sum_{k=1}^{m-1} k v^{k-1} = \frac{v^m-1}{v-1} - \frac{pv}{m}\left(\sum_{k=1}^{m-1} v^k\right)' =$$

$$= \frac{v^m-1}{v-1} - \frac{pv}{m}\left(\frac{v(v^{m-1}-1)}{v-1}\right)' = \frac{v^m-1}{v-1} - \frac{pv}{m}\frac{(mv^{m-1}-1)(v-1)-(v^m-v)}{(v-1)^2} =$$

$$= \frac{v^m-1}{v-1} - \frac{pv}{m}\frac{mv^m - mv^{m-1} + 1 - v^m}{(v-1)^2} = \frac{v^m-1}{v-1} - \frac{pv^m}{v-1} + \frac{pv(v^m-1)}{m(v-1)^2} =$$

$$= \frac{v^m(1-p)-1}{v-1} + \frac{pv(v^m-1)}{m(v-1)^2}.$$

Нахождение рассроченной рисковой надбавки

При рассрочке платежа меняется не только рисковая премия, но и рисковая надбавка (речь, конечно, идет о «правильной» рисковой надбавке). Для относительной рисковой надбавки имеется формула:

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{1-p}{np}}\Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon),$$

которая справедлива и при единовременном взносе, и при рассроченном. Но при рассроченном взносе уменьшается вероятность страхового случая: $p_{период} = \frac{p}{m}$. А так как функция $f(p) = \frac{1-p}{np} = \frac{1}{np} - \frac{1}{n}$, очевидно, убывающая, то и относительная рисковая надбавка с уменьшением p увеличивается. С другой стороны

$$\delta_{0\ период} = \sqrt{\frac{1-p_{период}}{np_{период}}}\Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon) = \sqrt{\frac{m-p}{np}}\Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon),$$

откуда видно, что чем больше число периодов, тем выше *ОРН*. То есть рисковая надбавка так же, как и рисковая премия, увеличивается при переходе от единовременной к ежеквартальной и от ежеквартальной к ежемесячной.

Сравнение единовременного, ежеквартального и ежемесячного взносов

Рассмотрим конкретный пример:

Пример 17 (вычисление взноса при рассроченных платежах).

Заключается договор на 1 год на сумму 250 т.р. о страховании дома от пожара. Вероятность пожара (за год) 0,04. Банковская ставка 12% годовых, прогнозируемая инфляция 15% в год, нагрузка 10% тарифа. Компания планирует заключить 2500 таких договоров и допускает для себя вероятность разорения 0,05.

Клиент А выплачивает весь взнос сразу при подписании договора.

Клиент В будет платить ежеквартально.

Клиент С будет платить ежемесячно.

Подсчитаем рисковые премии каждого взноса:

$$РП_A = \frac{pS}{1+0{,}0046i} = \frac{0{,}04\cdot 250}{1+0{,}0046\cdot 12} = 9{,}477;$$

$$РП_B = \frac{pS}{(1+0{,}0046i)\sum\limits_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{1+\frac{j}{100\cdot m}}\right)^k\left(1-\frac{kp}{m}\right)} = \frac{9{,}477}{\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{1+\frac{15}{400}}\right)^k(1-0{,}01\cdot k)} =$$

$$= \frac{9{,}477}{1+0{,}96\cdot 0{,}99+0{,}96^2\cdot 0{,}98+0{,}96^3\cdot 0{,}97} = 2{,}55;$$

$$РП_C = \frac{pS}{(1+0{,}0046i)} : \left(\frac{v^m(1-p)-1}{v-1}+\frac{pv(v^m-1)}{m(v-1)^2}\right) = \quad (\text{так как } v = \frac{1}{1+\frac{15}{100\cdot 12}} = 0{,}988)$$

$$= 9{,}477 : \left(\frac{0{,}988^{12}(1-0{,}04)-1}{0{,}988-1}+\frac{0{,}04\cdot 0{,}988(0{,}988^{12}-1)}{12(0{,}988-1)^2}\right) = 0{,}858.$$

Подсчитаем рисковые надбавки для каждого взноса:

$$ОРН_A = \sqrt{\frac{1-p}{np}}\Phi^{-1}(0{,}5-0{,}05) = \sqrt{\frac{1-0{,}04}{2500\cdot 0{,}04}}\cdot 1{,}6 = 0{,}1568 = 16\%,$$

$$РН_A = 9{,}477\cdot 0{,}1568 = 1{,}486.$$

$$ОРН_B = \sqrt{\frac{1-\frac{p}{4}}{n\frac{p}{4}}}\Phi^{-1}(0{,}5-0{,}05) = \sqrt{\frac{1-0{,}01}{2500\cdot 0{,}01}}\cdot 1{,}6 = 0{,}3184 = 32\%,$$

$$РН_B = 2{,}55\cdot 0{,}3184 = 0{,}812.$$

$$ОРН_C = \sqrt{\frac{1-\frac{p}{12}}{n\frac{p}{12}}}\Phi^{-1}(0{,}5-0{,}05) = \sqrt{\frac{1-0{,}003}{2500\cdot 0{,}003}}\cdot 1{,}6 = 0{,}5834 = 59\%,$$

$$РН_C = 0{,}858\cdot 0{,}5834 = 0{,}5.$$

Найдем взнос каждого клиента:

$$БП_A = РП_A(1+ОРН_A)1{,}1 = 9{,}477(1+0{,}1568)1{,}1 = 12{,}06;$$

$$БП_B = РП_B(1+ОРН_B)1{,}1 = 2{,}55(1+0{,}3184)1{,}1 = 3{,}698;$$

$$БП_C = РП_C(1+ОРН_C)1{,}1 = 0{,}858(1+0{,}5834)1{,}1 = 1{,}494.$$

Рассмотрим сравнительную таблицу:

	Клиент А (разовый взнос)		Клиент В (ежеквартальный взнос)		Клиент С (ежемесячный взнос)	
	1 взнос	сумма за год	1 взнос	сумма за год	1 взнос	сумма за год
РП	9,477	9,477	2,55	10,2	0,858	10,296
РН	1,486	1,486	0,812	3,248	0,5	6
БП	12,06	12,06	3,698	14,792	1,494	17,928

Из таблицы видно, что, платя ежемесячно, в результате придется заплатить почти в полтора раза больше, чем при единовременной уплате взноса. В данном примере в увеличении суммарного взноса сыграла даже не рисковая премия, а рисковая надбавка. Если пакет договоров будет крупнее, то увеличение за счет рисковой надбавки будет проходить медленнее, но сам эффект увеличения все равно сохраниться.

Замечание о тактике страхового агента

В процессе продажи страхового продукта опытный агент никогда не начнет предложения с единовременного взноса, так как для него психологически это очень не выгодная позиция. Если клиент услышит, что при выплате в рассрочку его суммарный взнос возрастет, он может решить, что его пытаются наказать за то, что он не хочет отдать всех денег сразу. И если довод об изменении цены денег еще более-менее может быть воспринят клиентом, то объяснить ему риск недополучения взноса достаточно трудно. Для агента тактически значительно удобнее начать разговор с ежемесячного взноса, тогда переход к ежеквартальному, и, тем более, к разовому взносу можно представить как скидку «солидному» клиенту.

Интересный эффект может возникнуть при разговоре с грамотным клиентом. Он имеет представление об изменении цены денег, и о банковской процентной ставке, поэтому может сравнить два варианта: заплатить сразу весь годовой взнос или положить деньги в банк под проценты и из этого вклада оплачивать страховые взносы в рассрочку. Для него будет приятным открытием, что «скидка», предоставляемая ему агентом несколько больше банковского процента, то есть исключается ситуация, когда агент берет деньги и «прокручивает» их через банк.

Но конечно, как видно из приведенных расчетов, никакой скидки компания не предоставляет и при периодических взносах она берет с клиентов больше, чтобы остаться «при своих интересах».

2.5. Алгоритм расчета брутто-премии

Обобщим все полученные выше результаты.

Для расчета брутто-премии необходимы следующие исходные данные:

i – годовая банковская ставка (в %),

j – ожидаемые темпы инфляции (в %), только для договоров с рассрочкой платежа,

ε – вероятность разорения компании,

m – число частей, на которые разбивается уплата страхового взноса,

n – число аналогичных договоров в портфеле компании ($n \geq 100$)

R – величина нагрузки (в %),

S – сумма договора и C – стоимость страхуемого имущества для договоров пропорционального возмещения и с правилом первого риска,

F – величина франшизы,

p_k, $k = \overline{1,r}$ – вероятности взаимоисключающих страхуемых событий,

Распределение величины возможного ущерба:

величина ущерба	x_1	x_2	………..	x_l
вероятность ущерба	$P(x_1)$	$P(x_2)$	………..	$P(x_l)$

1. Подсчитаем вероятность страхового случая:

$$p = \sum_{k=1}^{r} \frac{p_k}{1 - p_k} \prod_{k=1}^{r} (1 - p_k)$$

(должно быть $np(1 - p) \geq 20$).

2. Составим распределение возможного возмещения:

величина ущерба	x_1	x_2	………..	x_l
величина возмещения	y_1	y_2	………..	y_l
вероятность ущерба	$P(x_1)$	$P(x_2)$	………..	$P(x_l)$

где y_k находится по формулам:

$y_k = x_k$ для договоров без распределения риска,

$y_k = x_k \dfrac{S}{C}$ для договоров с пропорциональным возмещением ущерба,

$y_k = \min(x_k; S)$ для договоров с правилом первого риска,

$y_k = \max(0; x_k - F)$ для договоров с безусловной франшизой,

$y_k = \begin{cases} 0, & x_k \le F; \\ x_k, & x_k > F. \end{cases}$ для договоров с условной франшизой.

3. Найдем среднее взвешенное значение возмещения:

$$\overline{y} = \sum_{k=1}^{l} y_k \cdot P(x_k).$$

4. Найдем рисковую премию:

$$РП = \frac{p \cdot \overline{y}}{(1 + 0{,}0046i) \sum\limits_{k=0}^{m-1} \left(\dfrac{1}{1 + \frac{j}{100 \cdot m}} \right)^k \left(1 - \dfrac{kp}{m} \right)}.$$

5. Найдем относительную рисковую надбавку:

$$ОРН = \sqrt{\frac{m-p}{np}} \Phi^{-1}(0{,}5 - \varepsilon).$$

6. Найдем брутто-премию:

$$БП = РП(1 + ОРН)(1 + 0{,}01R).$$

Это значение взноса получено на основе актуарных расчетов, обеспечивает принцип равенства рисков сторон, но не учитывает экономические составляющие, такие как конкуренция и цена аналогичных договоров у других компаний. Оно должно быть представлено руководству компании, как рекомендация при определении тарифной политики.

В действительности, *ОРН* должна определяться не только из строгих математических расчетов, основанных на требуемых границах доверительного интервала, но и с учетом ситуации на страховом рынке, и в реальности может быть как выше, так и ниже «правильной». Величина нагрузки вообще рассчитывается не математиками, а экономистами и зависит не от вида и условий договора, не от количественных и качественных характеристик страхового портфеля компании, а от других условий. Строго рассчитываемой является лишь величина рисковой премии. Она же фактически определяет и величину всего взноса. И нетто-премия, и брутто-премия считаются как некоторый процент относительно *РП*.

3. Повышение надежности компании

3.1. Постановка актуарной задачи

Первая задача актуария – расчет правильной, вероятностно обоснованной величины страхового взноса подробно обсуждалась выше. Как уже говорилось, взнос состоит из рисковой премии, рисковой надбавки и нагрузки.

Рисковая премия – основная составляющая страхового взноса, обеспечивающая принцип эквивалентности ответственности сторон страхового договора. Ни одна страховая компания не назначит взноса ниже рисковой премии, так как это означает разорение с вероятностью 100%. Нагрузка – экономическая составляющая, которая складывается из затрат на ведение дела, и компания так же не может ее существенно изменить. Рисковая надбавка обеспечивает оплату взносов, число которых превышает среднее, и, собственно, она и характеризует надежность компании.

Рассмотрим ситуацию, когда актуарно правильная, рассчитанная из соображений надежности, *ОРН*= δ_0, а фактическая, назначенная компанией с учетом конкуренции, δ^* и $\delta_0 \neq \delta^*$. Если $\delta_0 \leq \delta^*$, то компании можно не беспокоится о разорении, так как собранных взносов с требуемой вероятностью (обычно 0,99) хватит для выплаты возникших исков. Если же $\delta_0 > \delta^*$, то надежность компании не удовлетворяет требованиям, и необходимы меры по ее повышению. (Иначе компании просто не позволят работать контролирующие органы).

Можно выделит три основных направления повышения надежности компании: :

(1) объединение портфелей для увеличения количества договоров, и, как следствие, уменьшения «правильной» рисковой надбавки;
(2) создание резерва, то есть свободных средств для оплаты исков, на которые может не хватить собранных взносов;
(3) перестрахование, то есть страхование от слишком больших исков в другой страховой компании.

Задача актуария, зная правильную и фактическую *ОРН*, оценить величину необходимого резерва, определить актуарно обоснованную стоимость перестраховочного договора, найти те же величины для предложенных к объединению портфелей.

3.2. Объединение портфелей

<u>Субпорфели и портфель компании</u>

Как уже отмечалось, страховые договора могут существенно отличаться как по величине возможного иска о возмещении, так и по вероятности страхового случая.

Если у компании заключено достаточно большое количество договоров, то среди них, наверное, есть и одинаковые, или «почти» одинаковые. Такой пакет однородных рисков будем называть субпортфелем. Каждый субпортфель в свою очередь можно рассматривать как один общий риск с распределением суммарного ущерба, которое строится по известному распределению отдельного риска. Эти общие риски по субпортфелям в свою очередь объединяются (если только компания не хочет избавиться от какого-либо «неудобного» для нее риска, например, передав его на перестрахование) и образуют портфель компании.

<u>Понятие коэффициента риска</u>

Пусть компания провела все возможные (с точки зрения понижения взносов) объединения рисков и получила набор пакетов одинаковых, или почти одинаковых договоров. В каждом из этих пакетов установлена своя величина рисковой надбавки, одинаковая для всех договоров пакета. Каждый из этих пакетов, или субпортфелей, компания может рассматривать как отдельный суммарный риск со своими параметрами и рассматривать вопрос об их объединении (уже без пересчета установленных в субпортфеле надбавок) или не объединении. Один из возможных подходов в решении этого вопроса – использование параметра

$$K = \frac{\sqrt{D(Y)}}{M(Y)},$$

где Y – средняя величина суммарного иска.

При изучении рисковой надбавки в большом пакете одинаковых договоров была получена формула:

$$\delta_O = \frac{\sqrt{D(x)}}{\sqrt{n}M(x)}\Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon)$$

где x – средняя величина индивидуального иска по n договорам иска, ε – вероятность разорения (1-ε – вероятность неразорения). И так как $D(Y)=nD(x)$, $M(Y)=nM(x)$, то в этом случае $\delta_O = K\Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon)$. Множитель $\Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon)$ не зависит от характеристик пакета. Он определяется только требованиями к надежности компании. Множитель K зависит от характеристик пакета. Чем меньше K, тем меньше правильная *ОРН* δ_O отличается от фактической δ^* (если, конечно $\delta_O > \delta^*$) и, следовательно, выше надежность компании при установленной величине страхового взноса. Если пакет недостаточно крупный для применения теоремы Муавра-Лапласа, или состоит не из абсолютно одинаковых договоров, последнее равенство, конечно, не имеет места, но смысл коэффициента K остается таким же.

Параметр K называется степенью или коэффициентом риска (*КР*). Эмпирически установлено, что для финансовой устойчивости достаточно, чтобы K<0,33.

<u>Изменение КР при объединении одинаковых пакетов</u>

Рассмотрим портфели *А* и *Б*, состоящие из абсолютно одинаковых пакетов однородных договоров: для *А* $M_A(Y) = M$, $D_A(Y) = D$, $K_A = \frac{\sqrt{D}}{M}$;

для *Б* $M_Б(Y) = M$, $D_Б(Y) = D$, $K_Б = \frac{\sqrt{D}}{M}$.

Пусть компания решила объединить портфели. Тогда для $A+Б$

$$M_{A+Б}(Y) = 2M, \quad D_{A+Б}(Y) = 2D, \quad K_{A+Б} = \frac{\sqrt{2D}}{2M} \approx 0{,}7\frac{\sqrt{D}}{M}.$$

Таким образом, объединение одинаковых пакетов договоров снижает коэффициент риска примерно на 30%, то есть объединение, безусловно, выгодно обоим портфелям.

<u>Изменение КР при объединении неодинаковых пакетов</u>

Рассмотрим пример объединения двух существенно разных портфелей:

Пример18 (коэффициент риска объединенных портфелей).

Пусть к объединения предлагаются портфели:

А – 100 000 договоров с суммами по 2 тыс.руб. и вероятностями 0,0015;

Б – 20 договоров с суммами по 10 тыс.руб. и вероятностями 0,02.

Тогда $$K_A = \sqrt{\frac{1-0{,}0015}{100000\cdot 0{,}0015}} = 0{,}0816; \qquad K_Б = \sqrt{\frac{1-0{,}02}{20\cdot 0{,}02}} = 1{,}57.$$

$K_A << 0{,}33$, то есть портфель A имеет низкий коэффициент риска и чувствует себя на рынке достаточно устойчиво. $K_Б$ существенно превышает 0,33, следовательно его положение на рынке не слишком устойчивое.

Подсчитаем $K_{A+Б}$:

$M_A(Y) = npS = 100000\cdot 0{,}0015\cdot 2 = 300$ тыс.руб.;

$M_Б(Y) = npS = 20\cdot 0{,}02\cdot 10 = 4$ тыс.руб.;

$M_{A+Б}(Y) = M_A(Y) + M_Б(Y)$=300+4=304 тыс.руб.;

$D_A(Y) = np(1-p)S^2 = 100000\cdot 0{,}0015\cdot(1-0{,}0015)\cdot 4 = 599{,}1$;

$D_Б(Y) = np(1-p)S^2 = 20\cdot 0{,}02\cdot(1-0{,}02)\cdot 100 = 39{,}2$;

$D_{A+Б}(Y) = D_A(Y) + D_Б(Y)$=599,1+39,2=638,3;

$$K_{A+Б} = \frac{\sqrt{D_{A+Б}(Y)}}{M(Y)} = \frac{\sqrt{638{,}3}}{304} = 0{,}0831.$$

Так как $K_A < K_{A+Б}$, портфелю *А* это объединение не выгодно, если исходить только из актуарных соображений. Но ухудшение коэффициента риска не слишком большое, поэтому решение объединяться или не объединяться в данном случае для портфеля *А* зависит не от формальных результатов, а от дополнительных соображений (например, таких, как заинтересованность в работе с этими новыми клиентами).

$K_Б > K_{A+Б}$, причем существенно. То есть для портфеля *Б* объединение безусловно выгодно.

Максимальная величина принимаемого риска

Пусть компания уже имеет портфель договоров с характеристиками

$$M(Y) = M, \qquad D(Y) = D, \qquad K_o = \frac{\sqrt{D}}{M}.$$

Обозначим *X* – суммарный риск нового портфеля, предлагаемого компании для объединения. Вероятность нового риска *p*. Дадим оценку *X* исходя из условия, чтобы коэффициент риска после объединения не увеличивался.

Для объединенного портфеля

$$K_{\cup} = \frac{\sqrt{D(Y)+D(X)}}{M(Y)+M(X)} = \frac{\sqrt{D+p(1-p)X^2}}{M+pX}.$$

И так как требуется, чтобы $K_{\cup} \le K_o$ получаем:

$$\frac{\sqrt{D+p(1-p)X^2}}{M+pX} \le \frac{\sqrt{D}}{M} \quad\Rightarrow\quad D+p(1-p)X^2 \le \frac{D}{M^2}(M^2+2MpX+p^2X^2) \quad\Rightarrow$$

$$pX^2 - p^2X^2 \le 2\frac{D}{M}pX + \frac{D}{M^2}p^2X^2 \quad\Rightarrow\quad X - pX \le 2\frac{D}{M} + \frac{D}{M^2}pX \quad\Rightarrow$$

$$X(1-p-\frac{D}{M^2}p) \le 2\frac{D}{M} \quad\Rightarrow\quad X(1-p(1+K_o^2)) \le 2\frac{D}{M}.$$

Если $X \le 2\frac{D}{M}$, то последнее неравенство тем более выполняется. А так как p как правило мало, то множителем при X вполне можно пренебречь. Кроме того, для новых рисков возможна ошибка в определении *p*, поэтому вполне оправдано брать максимально возможную величину принимаемого риска $X_{\max} = 2\frac{D}{M} = 2K_o^2 M$.

3.3. Резерв

Понятие резерва

Пусть с вероятностью, соответствующей требуемому уровню надежности, число возможных исков находится в доверительном интервале $[n_1;n_2]$. Компания собрала взносов, которых хватает на оплату m исков и $m<n_2$. Значит, для обеспечения оплаты m+1-го, m +2-го, …, n_2-го исков, компания должна иметь дополнительные средства, которые создаются или из собственных средств учредителей компании или берутся в кредит.

Пример 19 (величина необходимого резерва).

Рассмотрим компанию, которой 1000 страхователей (то есть n=1000) платят взнос 50 у.е. за страховку ценой 20 000 у.е., вероятность страхового случая p=0,001. Будем считать достоверной вероятность 0,99. Обозначим m – число исков. Применяя формулу Бернулли:

$$P(m=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},$$

получим:

$$P(m=0)=0{,}37,\ \ P(m=1)=0{,}37,\ \ P(m=2)=0{,}18,\ \ P(m=3)=0{,}06,\ \ P(m=4)=0{,}015,\ \ldots$$

$$\Rightarrow\quad P(m\le 1)=0{,}37+0{,}37=0{,}74<0{,}99;$$

$$P(m\le 2)=0{,}74+0{,}18=0{,}92<0{,}99;$$

$$P(m\le 3)=0{,}92+0{,}06=0{,}98<0{,}99;$$

$$P(m\le 4)=0{,}98+0{,}015=0{,}995>0{,}99.$$

То есть почти наверное (с вероятностью больше достоверной) число исков не превысит 4-х, следовательно, страхователь должен иметь средства для оплаты четырех исков, то есть 80 000 у.е. – это и есть необходимый резерв. Собранные взносы составляют 50 000 у.е. Недостающие 30 000 у.е.

Зависимость вероятности разорения от резерва на примере двух договоров

Рассмотрим страхование от ущерба двух объектов. Пусть для первого объекта максимально возможный ущерб a, для второго b (для определенности $a<b$) и в обоих случаях ущерб распределен равномерно, то есть плотности распределения ущерба имеют вид

$$f(x)=\begin{cases}1/a, & x\in[0;a],\\ 0, & x\notin[0;a];\end{cases}\quad \text{и}\quad g(x)=\begin{cases}1/b, & x\in[0;b],\\ 0, & x\notin[0;b];\end{cases}\quad \text{соответственно.}$$

Согласно теории вероятности плотность распределения совместного ущерба z имеет вид:

$$h(z)=\int_0^z f(x)g(z-x)\,dx=\int_{\max(0;z-b)}^{\min(a;z)}\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\,dx=\frac{\min(a;z)-\max(0;z-b)}{ab},$$

то есть

$$h(z)=\begin{cases}\frac{z}{ab}, & z\le a;\\ \frac{1}{b}, & a\le z\le b;\\ \frac{a+b-z}{ab}, & z\ge b.\end{cases}$$

Пусть U имеющийся резерв. Тогда вероятность разорения $\varepsilon=P(z>U)=\int_U^{a+b}h(z)\,dz$.

Если $0 \le U \le a$, то $\varepsilon = \int_U^a \frac{z}{ab}dz + \int_a^b \frac{1}{b}dz + \int_b^{a+b}\left(\frac{a+b}{ab} - \frac{z}{ab}\right)dz \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(U) = 1 - \frac{U^2}{2ab}$. Это уравнение параболы, ветви которой направлены вниз, а так как $\varepsilon'(U) < 0$, то это часть параболы правее вершины.

Если $a \le U \le b$, то $\varepsilon = \int_U^b \frac{1}{b}dz + \int_b^{a+b}\left(\frac{a+b}{ab} - \frac{z}{ab}\right)dz \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(U) = 1 + \frac{a}{2b} - \frac{U}{b}$. Это линейная убывающая функция.

Если $U > b$, то $\varepsilon = \int_U^{a+b}\left(\frac{a+b}{ab} - \frac{z}{ab}\right)dz \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(U) = \frac{(a+b)^2}{2ab} - \frac{(a+b)U}{ab} + \frac{U^2}{2ab}$. Это уравнение параболы, ветви которой направлены вверх, а так как $\varepsilon'(U) = \frac{U-(a+b)}{ab} < 0$, то это часть параболы левее вершины.

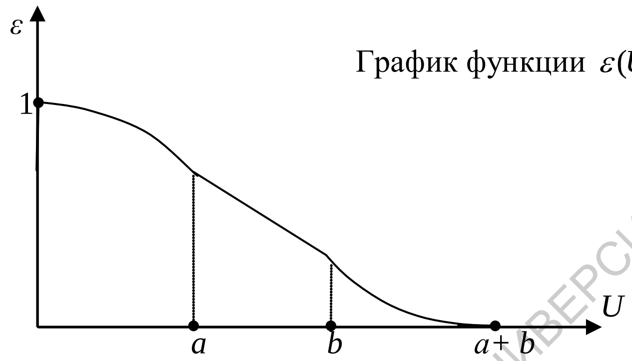


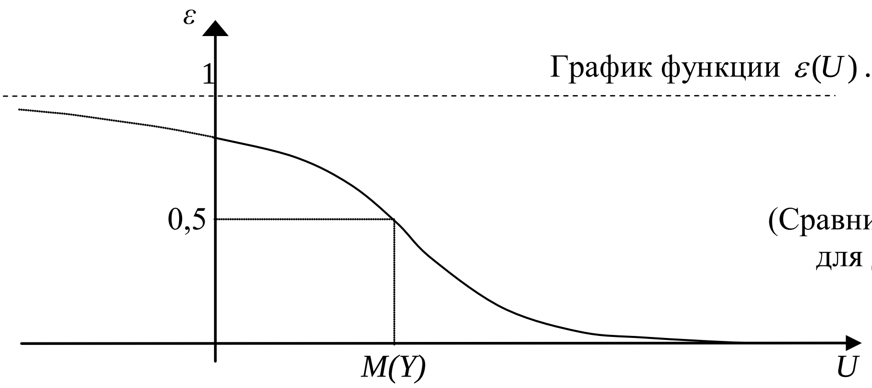
График функции $\varepsilon(U)$.

Зависимость вероятности разорения от резерва для крупного пакета договоров

Обозначим суммарную величину всех предъявленных исков *Y*, величину резерва, как и выше, *U*. Для обеспечения вероятности разорения не выше ε должно быть выполнено условие $P(Y \le U) = 1 - \varepsilon$, которое может быть заменено равносильным условием $P\left(\frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \le \frac{U - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right) = 1 - \varepsilon$.

По предельной теореме Лапласа $P\left(\frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \le a\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-t^2/2}dt$.

Пусть пакет достаточно крупный, чтобы «→» можно было заменить на «≈». Так как $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{2} + \Phi(a)$, где *Ф(a)* – функция Лапласа, получаем уравнение $\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{U - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right) = 1 - \varepsilon \Rightarrow \varepsilon(U) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{U - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right)$.



(Сравните с формой графика для двух договоров.)

Как и ожидалось, вероятность разорения уменьшается с ростом резерва.

Из полученной выше формулы для $\varepsilon(U)$ найдем обратную зависимость:

$$U = \sqrt{D(Y)}\,\Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon) + M(Y),$$

которая позволяет находить необходимую величину резерва для обеспечения заданной надежности.

Резерв объединения портфелей

При изучении резерва, необходимого для обеспечения заданной надежности, была получена формула $U = a\sqrt{D(Y)} + M(Y)$,

где Y – суммарная величина иска;

$a = \Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon)$, ε – вероятность разорения, Φ^{-1} – обратная функция Лапласа.

Рассмотрим два субпорфеля с резервами

$$U_1 = a\sqrt{D(Y_1)} + M(Y_1) \quad \text{и} \quad U_2 = a\sqrt{D(Y_2)} + M(Y_2).$$

Тогда для их объединения

$$U_{1+2} = a\sqrt{D(Y_1+Y_2)} + M(Y_1+Y_2) = a\sqrt{D(Y_1)+D(Y_2)} + M(Y_1) + M(Y_2).$$

Отметим, что

$$U_1 + U_2 = a\left(\sqrt{D(Y_1)} + \sqrt{D(Y_2)}\right) + M(Y_1) + M(Y_2),$$

а так как $\sqrt{D(Y_1)+D(Y_2)} < \sqrt{D(Y_1)} + \sqrt{D(Y_2)}$, в чем легко убедиться, возведя в квадрат обе части неравенства, то $U_{1+2} < U_1 + U_2$. То есть, резерв объединенного портфеля меньше суммы резервов субпортфелей.

Пример 20 (изменение резерва при объединении).

Рассмотрим объединение портфелей:

А – 10 000 договоров с суммами по 2 тыс.руб. и вероятностями 0,01;

Б – 5000 договоров с суммами по 3 тыс.руб. и вероятностями 0,02.

Пусть требуемая вероятность ε=0,05. Тогда $a = \Phi^{-1}(0{,}5-\varepsilon) = \Phi^{-1}(0{,}45) = 1{,}645$.

$M_А = 10000 \cdot 2 \cdot 0{,}01 = 200$ тыс.руб.; $D_А = 10000 \cdot 0{,}01 \cdot (1-0{,}01) \cdot 4 = 396$;

$$U_А = 1{,}645 \cdot \sqrt{396} + 200 = 232{,}735 \text{ тыс.руб.}$$

$M_Б = 5000 \cdot 3 \cdot 0{,}02 = 300$ тыс.руб.; $D_Б = 5000 \cdot 0{,}02 \cdot (1-0{,}02) \cdot 9 = 882$;

$$U_Б = 1{,}645 \cdot \sqrt{882} + 300 = 348{,}854 \text{ тыс.руб.}$$

$M_{А+Б} = 200 + 300 = 500$ тыс.руб.; $D_{А+Б} = 396 + 882 = 1278$;

$$U_{А+Б} = 1{,}645\sqrt{1278} + 500 = 558{,}807 \text{ тыс.руб.}$$

Отметим, что $U_А + U_Б = 581{,}589$ тыс.руб. (> 558,807)

3.4. Перестрахование

Основные положения перестрахования

Рассмотрим ситуацию, когда компания вынуждена назначить рисковую надбавку ниже, чем того требует заданная надежность, а резерва для обеспечения требуемого уровня неразорения недостаточно. То есть, у компании есть риск, что объем предъявленных ей исков превысит сумму собранных взносов и имеющегося резерва. Как и любой риск, этот риск может быть застрахован в другой страховой компании. Эта процедура и называется перестрахование: страховая компания-перестрахователь (цедент) выступает в роли клиента у другой страховой компании-перестраховщика.

По типу передаваемых на перестрахование рисков можно выделить следующие типы перестраховочных программ:

- облигаторное страхование, при котором на перестрахование передаются риски по всему портфелю или субпортфелю;
- факультативное страхование, при котором на перестрахование передаются конкретные риски;
- перестрахование наибольших убытков, при котором на перестрахование передается определенное число наибольших возмещений за год.

По виду передаваемой ответственности выделим два типа перестраховочных договоров:

- квотные договора, в которых на перестрахование передается определенный процент с каждого риска;
- эксцедентные договора, в которых на перестрахование передаются риски из определенного интервала от G_1 (приоритет или первый риск) до G_2 (второй риск).

Естественно, возможны комбинированные договора, в которых часть риска передается на эксцедентной основе, а следующая часть на квотной, как и более сложные варианты.

Поскольку перестраховочный договор, по сути, договор о страховании компании от ущерба (слишком большого предъявленного суммарного иска), который может наступить с некоторой вероятностью, то принципы расчета составляющих страхового взноса (рисковой премии, рисковой надбавки и нагрузки) ничем не отличаются от обыкновенного страхования.

Заметим, что за перестрахование, конечно, цеденту приходится платить из средств, которые могли бы быть присоединены к резерву, причем, чем больший риск передается на перестрахование, тем, очевидно, больше должна быть плата за перестрахование. Следовательно, возникает задача оптимизации между величиной резерва и платой за перестраховочный договор. В этом пункте эта задача обсуждаться не будет, будем считать, что компания определилась с тем, какой риск она обеспечивает резервом, а какой передает на перестрахование.

РП и возмещение квотного договора

Квотный договор, как уже говорилось, это передача фиксированного процента от каждого риска портфеля на перестрахование.

Обозначим $\overline{РП}$ – суммарную рисковую премию по всему портфелю;
$\overline{Z}$ – суммарный предъявленный иск;
a – объявленный в квотном договоре процент предаваемого риска.

Тогда рисковая премия перестраховочного договора $\overline{РП}^* = \frac{a}{100}\overline{РП}$; а возмещение, уплачиваемое перестраховщиком цеденту $\overline{V} = \frac{a}{100}\overline{Z}$.

То есть, по сути, цедент отдает перестраховщику a% с собранных взносов (это и есть премия перестраховочного договора), а перестраховщик оплачивает указанный процент от предъявленных рисков.

ОРН и оптимальная доля передаваемого риска квотного договора

Рассмотрим договор квотного перестрахования, при котором цедент передает на перестрахование долю риска a. Пусть цедент имеет резерв U (недостаточный для обеспечения требуемой надежности), суммарный иск по портфелю Y и $ОРН=\delta_1$, а перестрахователь – $ОРН=\delta_2$. Будем считать, что нагрузка перестрахователя по одному договору мала, и ей можно пренебречь.

Цедент до перестрахования имел:
суммарный иск Y;
капитал (резерв + собранные взносы) $U+(1+\delta_1)M(Y)$;
доход (разница между собранными взносами и возмещениями) $(1+\delta_1)M(Y)-Y$.

После перестрахования цедент получает:
суммарный иск $(1-a)Y$;
капитал (резерв + собранные взносы – плата за перестрахование)

$$U+(1+\delta_1)M(Y)-a(1+\delta_2)M(Y)=U+M(Y)[\delta_1-\delta_2+(1-a)(1+\delta_2)];$$

доход $(1+\delta_1)M(Y)-a(1+\delta_2)M(Y)-(1-a)Y$;
ожидаемый доход $M((1+\delta_1)M(Y)-a(1+\delta_2)M(Y)-(1-a)Y)=$

$$=(1+\delta_1)M(Y)-a(1+\delta_2)M(Y)-(1-a)M(Y)=[\delta_1-a\delta_2]\,M(Y).$$

Цедент разорится, если $(1-a)Y>U+M(Y)[\delta_1-\delta_2+(1-a)(1+\delta_2)]$,

или

$$Y>M(Y)\left[1+\delta_2+\frac{\frac{U}{M(Y)}+\delta_1-\delta_2}{1-a}\right]=f(a).$$

Если $\delta_2=\frac{U}{M(Y)}+\delta_1$, то вероятность разорения не зависит от a.

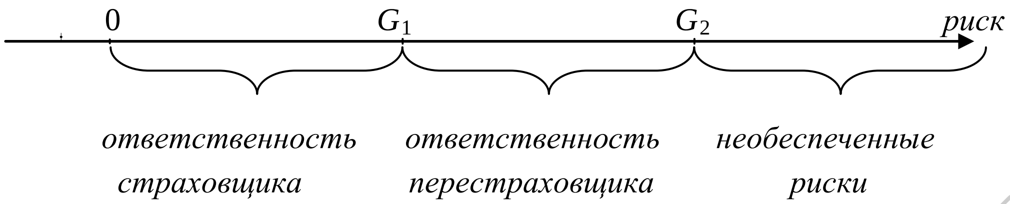
Если $\delta_2>\frac{U}{M(Y)}+\delta_1$, то функция $f(a)$ убывает, следовательно, вероятность разорения увеличивается с ростом a и перестрахование теряет смысл, так как оптимальное значение передаваемой доли риска $a=0$.

Таким образом, $ОРН$ перестраховшика не может быть больше, чем $\frac{U}{M(Y)}+\delta_1$, в этом случае $f(a)$ возрастает, следовательно, вероятность разорения уменьшается с ростом a, но при этом уменьшается и ожидаемый доход. Чтобы он не стал отрицательным (иначе перестрахование теряет смысл), должно выполняться условие $\delta_1\geq a\delta_2$, то есть $a\leq\frac{\delta_1}{\delta_2}$. А так как по смыслу $a\leq 1$, то $\delta_1\leq\delta_2$.

Обобщая все вышеизложенное, приходим к выводу: квотное перестрахование имеет смысл, если $ОРН$ перестраховщика из интервала $(\delta_1;\frac{U}{M(Y)}+\delta_1]$, а максимальное значение доли передаваемого риска $a=\delta_1:\delta_2$.

<u>*РП и возмещение эксцедентного договора*</u>

В эксцедентных договорах определяется граница ответственности основного страховщика G_1 и граница ответственности перестраховщика G_2:



величина ущерба x	ответственность страховщика	ответственность перестраховщика	необеспеченный риск
$x \in [0; G_1]$	x	—	—
$x \in (G_1; G_2]$	G_1	$x - G_1$	—
$x \in (G_2; \infty)$	G_1	G_2 - G_1	x - G_2

Для портфеля, к которому применяется эксцедентный договор перестрахования, введем следующие обозначения:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – риски (величины возможных исков, предъявляемых клиентом страховщику по k-му договору, k=1, 2, …, n);

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ –риски перестраховщика (величины возможных исков, предъявляемых цедентом перестраховщику по k-му договору, k=1, 2, …, n),

$$y_k = \begin{cases} 0, \text{ если } x_k \le G_1, \\ x_k - G_1, \text{ если } G_1 < x_k \le G_2, \\ G_2 - G_1, \text{ если } x_k > G_2; \end{cases} \quad \text{то есть, } y_k = \max\{\ 0;\ \min(x_k; G_2) - G_1\};$$

$z_1, z_2, \ldots, z_n$ – величины фактического ущерба по k-му договору (k=1, 2, …, n);

$\overline{РП}$ – суммарная рисковая премия в основных договорах, $\overline{РП} = \sum_{k=1}^{n} x_k P(x_k)$;

$\overline{РП}*$ – рисковая премия перестраховочного договора;

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ –величины возмещений, выплачиваемых перестраховщиком цеденту по k-му договору (k=1, 2, …, n);

$\overline{V}$ – суммарное возмещение, выплачиваемое перестраховщиком цеденту.

По способу назначения границ ответственности различают следующие типы эксцедентных договоров:

- эксцедентный пропорциональный договор:
  G_1 определяется для каждого договора (или класса договоров), то есть, $G_1 = G_1(k)$;
  $G_2 = a\, G_1$, коэффициент a определяется договором перестрахования;

$\overline{РП}^* = \sum_{k=1}^{n} y_k P(x_k)$, то есть рисковая премия перестраховочного договора считается как суммарная рисковая премия по договорам с рисками y_k и вероятностями рисков $P(x_k)$;

$\overline{V} = \sum_{k=1}^{n} v_k$, где $v_k = \frac{y_k}{x_k} z_k$ (возмещение по каждому случаю пропорционально принятой ответственности);

- эксцедент убытка:
  G_1 одинаковая величина для всех договоров портфеля;
  $G_2=a + G_1$, коэффициент a определяется договором перестрахования;

  $\overline{РП}^* = \sum_{k=1}^{n} y_k P(x_k)$;

  $\overline{V} = \sum_{k=1}^{n} v_k$, где $v_k=0$, если $x_k \le G_1$, то есть сумма договора меньше первого риска,

  $v_k= z_k - G_1$, если $x_k > G_1$, а $z_k \le G_2$, то есть сумма договора больше первого риска, а ущерб меньше второго риска,

  $v_k= G_2 - G_1$, если $z_k > G_2$, ущерб больше второго риска;
- эксцедент убыточности:
  G_1 величина, определяемая по отношению ко всему портфелю, как целому;
  $G_2=a + G_1$, коэффициент a определяется договором перестрахования;

  $\overline{РП}^* = \frac{G_2 - G_1}{\overline{X}} \overline{РП}$; $\quad \overline{V} = \sum_{k=1}^{n} z_k - G_1$.

Пример 21 (нахождение РП и возмещения в эксцедентных договорах).

Рассмотрим портфель договоров, данные о которых приведены в таблице ниже и три перестраховочных программы:

I – эксцедентный пропорциональный договор с максимумом 4 линии сверх первого риска (то есть, $G_2= G_1+4\,G_1=5\,G_1$): $G_1=1$ для рисков A,B,C, $G_2=5$;
$G_1=5$ для риска D, $G_2=25$;
$G_1=25$ для рисков E,F, $G_2=125$;

II – эксцедент убытка 40 тыс. руб., превышающего 10 тыс. руб., то есть, $G_1=10$, $G_2=10+40=50$;

III – эксцедент убыточности 80 тыс. руб. сверх 20 тыс. руб., то есть, $G_1=20$, $G_2=20+80=100$.

Результаты вычислений и данные по договорам представлены в следующей таблице:

Название риска		A	B	C	D	E	F	
Величина риска x_k (тыс. руб.)		1	2	3	20	100	200	$\bar{X}$= 326
Вероятность риска $P(x_k)$		0,001	0,001	0,001	0,002	0,003	0,003	
Рисковая премия $РП = x_k \cdot P(x_k)$ (тыс. руб.)		0,001	0,002	0,003	0,04	0,3	0,6	$\overline{РП}$= 0,946
Фактический ущерб z_k (тыс. руб.)		—	1,5	—	—	25,5	—	$\bar{Z}$= 27
Эксцедентный пропорциональный договор	Ответственность перестраховщика	—	(1;2]	(1;3]	(5;20]	(25;100]	(25;125]	
	Риск перестраховщика y_k (тыс. руб.)	—	1	2	15	75	100	
	Рисковая премия перестраховщика $РП^* = y_k\, P(x_k)$ (тыс. руб.)	—	0,001	0,002	0,03	0,225	0,3	$\overline{РП^*}$= 0,558
	Возмещение $v_k = \frac{y_k}{x_k} z_k$ (тыс. руб.)	—	1/2·1,5=0,75	—	—	75/100·25,5 =19,125	—	$\bar{V}$= 19,875
Эксцедент убытка	Ответственность перестраховщика	—	—	—	(10;20]	(10;50]	(10;50]	
	Риск перестраховщика y_k (тыс. руб.)	—	—	—	10	40	40	
	Рисковая премия перестраховщика $РП^* = y_k\, P(x_k)$ (тыс. руб.)	—	—	—	0,02	0,12	0,12	$\overline{РП^*}$= 0,26
	Возмещение v_k (тыс. руб.)	—	—	—	—	25,5-10= 15,5	—	$\bar{V}$= 15,5
Эксцедент убыточности	Ответственность перестраховщика							(20;100]
	Риск перестраховщика Y (тыс. руб.)							80
	Рисковая премия перестр-ка $\overline{РП}^* = \frac{Y}{\bar{X}} \overline{РП}$ (тыс. руб.)							80/326·0,946 =0,232
	Возмещение $\bar{V} = \frac{G_2 - G_1}{\bar{X}} \bar{Z}$ (тыс. руб.)							80/326·27 =6,626

Рассмотрим простейшую модель: страховая компания имеет пакет n договоров, по которым может наступить либо частичный ущерб x_1 с вероятностью p_1, либо полный ущерб x_2 с вероятностью p_2. И *ОРН*, установленная этой компанией, δ_1. Тогда суммарная нетто премия, собранная этой компанией

$$\overline{НП} = n(x_1 p_1 + x_2 p_2)(1+\delta_1)\,.$$

Для повышения надежности компания обратилась к перестраховщику для заключения эксцедентного договора о перестраховании иска, превышающего t ($x_1<t<x_2$).

После заключения перестраховочного договора страховщику может быть предъявлен иск x_1 с вероятностью p_1, или иск t с вероятностью p_2. Следовательно, ожидаемый суммарный иск основного страховщика Y, для которого

$$M(Y) = n(x_1 p_1 + t p_2) \quad \text{и} \quad D(Y) = n\left(x_1^2 p_1 + t^2 p_2 - (x_1 p_1 + t p_2)^2\right).$$

Перестраховщику может быть предъявлен иск $x_2 - t$ с вероятностью p_2. Следовательно, ожидаемый суммарный иск перестраховщика Z, для которого

$$M(Z) = n(x_2 - t)p_2\,.$$

Если перестраховщик установил для себя $ОРН=\delta^*$ и нагрузку R, то взнос, уплаченный цедентом за перестрахование составит

$$\overline{БП}^* = M(Z)\cdot(1+\delta^*)(1+0{,}01R) = M(Z)\cdot(1+\delta_2), \quad \text{где} \quad \delta_2 \approx ОРН\,.$$

Таким образом, основной страховщик получит доход

$$H(t) = \overline{НП} - \overline{БП}^* = n\left[(x_1 p_1 + x_2 p_2)(1+\delta_1) - (x_2 - t)p_2(1+\delta_2)\right].$$

(Для страховщика берется $\overline{НП}$ а не $\overline{БП}$, так как нагрузку он потратит на ведение дела.)

Вероятность разорения страховщика ε – это вероятность того, что полученный доход окажется меньше суммарного иска, то есть

$\varepsilon = P(H<Y) = 1 - P(Y\le H) \to$ (если применима нормальная аппроксимация) $\to$

$$\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{H - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right).$$

Так как Φ возрастающая функция, то для того, чтобы уменьшить ε, необходимо увеличить

$$\frac{H - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} = \frac{n\left[(x_1 p_1 + x_2 p_2)(1+\delta_1) - (x_2 - t)p_2(1+\delta_2) - (x_1 p_1 + t p_2)\right]}{\sqrt{n\left(x_1^2 p_1 + t^2 p_2 - (x_1 p_1 + t p_2)^2\right)}} = \sqrt{n}\cdot h(t),$$

где $h(t) = \dfrac{at+b}{\sqrt{ct^2 - dt + e}}$; $a = p_2\delta_2$; $b = x_1 p_1 \delta_1 + x_2 p_2(\delta_1 - \delta_2)$; $c = p_2(1-p_2)$;

$$d = 2x_1 p_1 p_2; \quad e = x_1^2 p_1(1-p_1)\,.$$

Так как $h'(t) = \dfrac{(2ae+bd) - t(ad+2bc)}{2(ct^2 - dt + e)^{3/2}}$, то, очевидно, $h(t)$ имеет максимум (а ε минимум)

в точке $t_{\max} = \dfrac{2ae+bd}{ad+2bc} \approx \dfrac{ae}{bc}$, так как по смыслу обозначений p_1 и p_2 малы и $d \approx 0$.

Таким образом, оптимальная величина удержания в эксцедентном договоре, при которой достигается максимальная надежность

$$t_{\max} = \frac{x_1^2 p_1(1-p_1)\delta_2}{\left[x_1 p_1 \delta_1 + x_2 p_2(\delta_1 - \delta_2)\right](1-p_2)}\,.$$

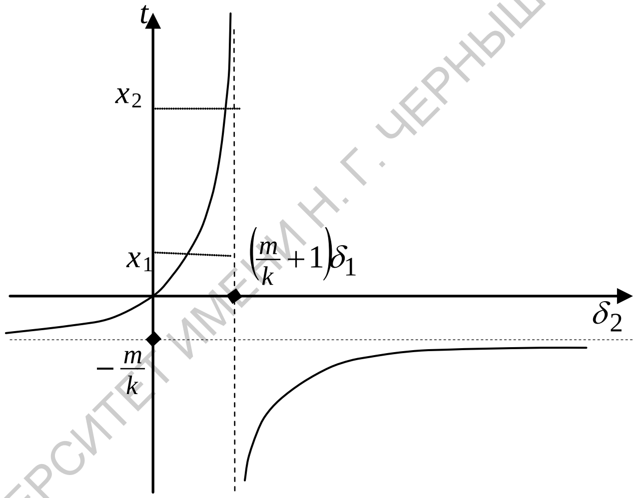
ОРН перестраховщика в эксцедентном договоре

Выше был найден оптимальный с точки зрения надежности уровень удержания риска эксцедентного договора:

$$t=\frac{{x_1}^2 p_1\delta_2}{\left[x_1 p_1\delta_1+x_2 p_2(\delta_1-\delta_2)\right]}\frac{1-p_1}{1-p_2},$$

Обозначим $\dfrac{x_2}{x_1}=k$ и $\dfrac{p_1}{p_2}=m$ (по смыслу вероятность полного уничтожения имущества меньше, чем частичного, то есть $m>1$). Тогда $t=x_1\dfrac{m\delta_2}{m\delta_1+k(\delta_1-\delta_2)}\dfrac{1-p_1}{1-p_2}$.

Зависимость t от δ_2 имеет вид (см. рис.):



Из графика видно, что при слишком большом значении δ_2 либо $t>x_2$, либо $t<0$, то есть либо уровень удержания больше возможного ущерба, либо вообще становится отрицательным. Следовательно, при слишком большой *ОРН* перестраховщика перестрахование теряет смысл.

С другой стороны, если $\delta_1\le\delta_2$, то $\dfrac{m\delta_2}{m\delta_1+k(\delta_1-\delta_2)}\le 1$, а так как и $\dfrac{1-p_1}{1-p_2}<1$, то $t<x_1$, то есть ценденту следует для оптимальной надежности весь риск отдать перестраховщику, что тоже бессмысленно.

Для определения границ δ_2 решим двойное неравенство:

$$x_1<x_1\frac{m\delta_2}{m\delta_1+k(\delta_1-\delta_2)}\frac{1-p_1}{1-p_2}<x_2 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} m\delta_1+k(\delta_1-\delta_2)<m\delta_2\frac{1-p_1}{1-p_2}\\ km\delta_1+k^2(\delta_1-\delta_2)>m\delta_2\frac{1-p_1}{1-p_2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}(m+k)\delta_1<\delta_2\left(m\frac{1-p_1}{1-p_2}+k\right)\\ (m+k)k\delta_1>\delta_2\left(m\frac{1-p_1}{1-p_2}+k^2\right)\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}\delta_2>\delta_1\frac{m+k-mp_2-kp_2}{m+k-mp_1-kp_2}\approx\delta_1\\ \delta_2<\delta_1\frac{mk+k^2-mp_2-k^2p_2}{m+k^2-mp_1-k^2p_2}\approx k\delta_1=\frac{x_2}{x_1}\delta_1\end{cases}$$

Таким образом, приходим к выводу, что *ОРН* перестраховщика должна быть в интервале $(\delta_1;\frac{x_2}{x_1}\delta_1)$.

Сравнение квотного и эксцедентного договоров

Обозначим Y – возможный иск, предъявленный основному страховщику, Z – возможный иск к перестраховщику. Тогда, так как величины Y и Z зависимые,

$$D(Y+Z)=D(Y)+D(Z)+2\operatorname{cov}(Y;Z),\qquad \operatorname{cov}(Y;Z)=M(YZ)-M(Y)M(Z).$$

Для квотного договора $Z=kY$, следовательно,

$$\operatorname{cov}(Y;Z)=\operatorname{cov}(Y;kY)=k\,M(Y^2)-kM^2(Y)=kD(Y^2)>0,$$

поэтому $D(Y+Z)>D(Y)+D(Z)$ и $D(Z)<D(Y+Z)-D(Y)$.

Для эксцедентного договора $Z=a-Y$, следовательно,

$$\operatorname{cov}(Y;Z) = \operatorname{cov}(Y;\, a-Y) = M(Y(a-Y)) - M(Y)\, M(a-Y) =$$
$$= aM(Y) - M(Y^2) - aM(Y) - M^2(Y) = -D(Y^2) < 0$$

поэтому $\qquad D(Y+Z)<D(Y)+D(Z)$ и $D(Z)> D(Y+Z) - D(Y)$.

Откуда получаем, что $D(Z_{\text{квотн.}}) < D(Z_{\text{эксцедентн.}})$, следовательно и $ОРН$, а значит и цена договора при квотном перестраховании ниже, чем при эксцедентном.

Но в эксцедентном договоре на перестрахование передаются самые большие, а следовательно, и самые опасные риски. (Однако, если цедент передает на перестрахование действительно только самые опасные риски с большой дисперсией, то ему придется очень дорого заплатить за перестраховочный договор. Поэтому приходится идти на компромисс и вместе с опасными, а потому дорогими рисками передать на перестрахование и некоторую часть рисков, выгодных для перестраховщика.)

<u>Взаимное перестрахование</u>

Рассмотрим две страховые компании, которые оказывают друг другу услуги по перестрахованию: первая имеет портфель с общим убытком X_1 и суммарной рисковой премией $РП_1$, вторая – X_2 с суммарной рисковой премией $РП_2$. В этой ситуации естественно, что компании ищут в перестраховании не дополнительный доход, а средство повышения собственной надежности, следовательно должны выполнятся два основных условия:

(1) ожидаемый доход от обмена перестраховочными договорами должен равняться нулю, следовательно, рисковые премии договоров должны быть равными: $РП_1^*=РП_2^*$;

(2) «правильные» $ОРН$ обоих договоров должны быть минимально возможными, следовательно, дисперсия риска для обеих компаний должна быть минимальной: $D_1^* \to \min$ и $D_2^* \to \min$.

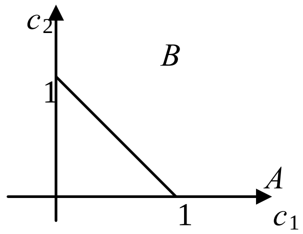
Как было показано выше, $D_{\text{квотн.}} < D_{\text{эксцедентн.}}$, следовательно, договора должны быть квотными. Пусть c_1 – доля риска, передаваемая первой компанией, c_2 – доля риска, передаваемая второй компанией. Тогда

(1) $\quad \Leftrightarrow \quad c_1 РП_1 = c_2 РП_2$,

(2) $\quad \Leftrightarrow \quad D((1-c_1)X_1 + c_2 X_2) = (1-c_1)^2 D(X_1) + c_2^{\,2} D(X_2) = D_1(c_1, c_2) \to \min,$

$$D(c_1 X_1 + (1-c_2) X_2) = c_1^{\,2} D(X_1) + (1-c_2)^2 D(X_2) = D_2(c_1, c_2) \to \min.$$

Функция D_1 достигает минимума в точке $A(1;0)$ (первая компания передает весь риск, и ничего не принимает), а функция D_2 – в точке $B(0;1)$ (так же хотела бы поступить и вторая компания). Очевидно, «точка компромисса», должна лежать на отрезке AB, то есть $c_1 + c_2 =1$.



Таким образом c_1 и c_2 должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} c_1 РП_1 = c_2 РП_2, \\ c_1 + c_2 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 РП_1 = (1-c_1) РП_2, \\ (1-c_2) РП_1 = c_2 РП_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{РП_2}{РП_1 + РП_2}, \\ c_2 = \dfrac{РП_1}{РП_1 + РП_2}. \end{cases}$$

Это и есть оптимальные доли передаваемого риска при взаимном перестраховании.

Обозначим a_1 – долю удерживаемого риска, то есть, $a_1 = 1 - c_1 = \dfrac{РП_1}{РП_1 + РП_2}$. Этот результат можно обобщить на случай n компаний, которые объединяются в страховое сообщество, называемое пулом. Каждый из участников пула отдает на перестрахование в пул долю риска $a_i = \dfrac{РП_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} РП_i}$. В соответствии с этой долей определяется доля ответственности каждого участника в возмещении по всем договорам, переданным в пул.

Список литературы

1. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983.
2. Корнилов И.А. Основы страховой математики. – М.: ЮНИТИ, 2004.
3. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики. Методы расчета кредитных, инвестиционных, пенсионных, страховых схем. – М.: Дело, 1998.
4. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1982.
5. Штрауб Э. актуарная математика имущественного страхования. – М.: КРОКУС-Т, 1993.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Значения функции $\Phi\ (x)$

	сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0200	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3437	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4838	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4881	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4985	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990