

Саратовский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского

Введение в теорию теплообмена:

# **ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ**

Учебно-методическое пособие  
для студентов физического факультета

Саратов  
2015

УДК 536.2 (075); 621.382.017

Автор: *С. В. Овчинников*

**Введение в теорию теплообмена: ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ** : учеб.-метод. пособие для студентов физического факультета направлений подготовки 03.03.02 «Физика» (бакалавриат) и 03.04.02 «Физика» (магистратура) [Электронное издание] / С. В. Овчинников. – Саратов : СГУ имени Н.Г. Чернышевского, 2015.

Рекомендуют к опубликованию :

кафедра общей физики;  
доктор физико-математических наук, профессор *А.С. Шаповалов*  
(Саратовский государственный университет)

## СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ .....	5
ВВЕДЕНИЕ .....	6
1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ .....	7
2 ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ И ТЕПЛОВОЙ ПОТОК .....	8
3 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ, РАСПРЕДЕЛЕННОГО В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ЗА СЧЕТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ .....	11
3.1 Дифференциальное уравнение теплопроводности для однородного твердого тела.....	14
3.2 Условия, необходимые для однозначного решения уравнения теплопроводности .....	16
3.3 Принцип местного влияния в теории теплопроводности .....	21
3.4 Электротепловая аналогия и метод тепловой схемы .....	22
4 СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТЕЛАХ ПРОСТОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ .....	24
4.1 Стационарный перенос тепла через многослойную плоскую стенку .....	24
4.2 Стационарный перенос тепла через цилиндрическую стенку .....	28
4.3 Критический радиус цилиндрической стенки.....	32
4.4 Стационарный перенос тепла через шаровой слой .....	33
5 ИНТЕНСИФИКАЦИЯ ТЕПЛООБМЕНА ЗА СЧЕТ ОРЕБРЕНИЯ ТЕПЛООТДАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ .....	36
5.1 Перенос тепла через прямое ребро с постоянным поперечным сечением .....	38
5.2 Внешнее тепловое сопротивление оребренной плоской стенки .....	42
5.3 Ребро с минимальной массой .....	44
6 СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТЕЛАХ ПРОСТОЙ ГЕОМЕТРИИ С ВНУТРЕННИМИ ТЕПЛОВЫМИ ИСТОЧНИКАМИ.....	46
6.1 Плоская стенка с внутренним тепловыделением .....	46
6.2 Задача о температурном поле длинного одножильного прямого провода в изоляции .....	48

7	МНОГОМЕРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТЕЛАХ КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ .....	52
7.1	Решение краевой задачи теплопроводности методом интегральных преобразований .....	56
7.2	Стационарное температурное поле плоского прямоугольного тела с поверхностным локальным тепловыделением .....	70
7.3	Собственные значения и собственные функции линейной задачи теплопроводности .....	77
7.4	Стационарное температурное поле ограниченного цилиндра с локализованным торцевым источником .....	81
7.5	Нестационарное температурное поле плоского прямоугольного тела с поверхностным локальным тепловыделением .....	83
7.6	Замечание о вычислении тепловых сопротивлений элементов с многомерными теплофизическими моделями .....	85
8	ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ И ТЕПЛОВЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ .....	86
8.1	Обобщенная теплофизическая модель твердотельной системы, созданной по объемной многослойной технологии .....	86
8.2	Расчет тепловых сопротивлений цилиндрических элементов с локализованным тепловыделением .....	92
9	ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ .....	97
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	100
	Список использованных источников .....	101
	Приложение А. Теплофизические свойства некоторых твердых материалов .....	102
	Приложение Б. Подпрограммы расчета функций Бесселя первого рода нулевого и первого порядков и корней уравнения $J_1(x)=0$ .....	103

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

$x, y, z$  – пространственные переменные декартовой системы координат;  
 $r, \varphi, z$  – пространственные переменные цилиндрической системы координат;  
 $r, \varphi, \theta$  – пространственные переменные сферической системы координат;  
 $\tau$  – текущее время;  
 $\rho_B$  – весовая функция;  
 $T(x, y, z, \tau)$  – температурное поле;  
 $T_S$  – температура поверхности  $S$ ;  
 $T_{CP}$  – температура окружающей среды;  
 $t$  с индексами – температура по стоградусной шкале;  
 $P_T$  – тепловой поток (тепловая мощность);  
 $R_T$  – тепловое сопротивление;  
 $\vec{n}$  – единичный вектор нормали;  
 $\vec{q}$  – вектор плотности теплового потока;  
 $\alpha$  – коэффициент конвективной теплоотдачи;  
 $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  
 $\rho$  – массовая плотность;  
 $\rho_{\Omega}$  – удельное электрическое сопротивление;  
 $c$  – удельная массовая теплоемкость твердого тела (при постоянном давлении);  
 $a$  – коэффициент температуропроводности тела;  
 $\varepsilon$  – интегральная по спектру степень черноты теплорассеивающей поверхности;  
 $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) – постоянная Стефана-Больцмана;  
ИП – интегральное преобразование;  
МЭА – микроэлектронная аппаратура;  
РЭА – радиоэлектронная аппаратура.

## ВВЕДЕНИЕ

Наблюдаемое в настоящее время качественное улучшение характеристик радиоэлектронной аппаратуры связано с ее усложнением, с ростом количества используемых элементов, миниатюризацией элементной базы и увеличением плотности монтажа. Два последних фактора обуславливают рост удельной тепловой нагрузки на элемент и, естественно, приводят к требованию повышения надежности самих элементов. С другой стороны, рост удельных тепловых нагрузок и необходимость для многих устройств обеспечения больших выходных мощностей прямо связаны с проблемой отвода тепла.

Обеспечение оптимальных тепловых режимов радиоэлектронных аппаратов является одним из важнейших этапов конструкторских разработок изделий электронной техники. Повышенная рабочая температура элементов радиоэлектронных устройств является причиной как катастрофических, так и параметрических отказов устройства в целом. В частности, именно проблема отвода тепла является одним из физических ограничений повышения степени интеграции больших (и сверхбольших) интегральных схем как путем увеличения степени упаковки элементов на кристалле, так и путем перехода от планарной технологии изготовления микросхем к объемным многослойным структурам.

Предлагаемое учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров и магистров по направлениям 03.03.02 и 03.04.02, изучающих специальные курсы «Теория теплообмена» и «Теория теплопроводности», ориентированные, в первую очередь, на исследование тепловых процессов в радиоэлектронной аппаратуре. Данное учебно-методическое пособие основано на материалах известных монографий [1 – 4, 6, 8], некоторыми разработками автора пособия и неразрывно связано с двумя другими частями курса «Теория теплообмена»: конвективный теплообмен и теплообмен излучением.

## 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Тепломассообмен** – раздел технической физики, в котором рассматриваются процессы переноса энергии в форме теплоты и вещества (массы). Явления *массообмена* связаны с необратимым перемещением вещества из одной части пространства в другую и вызваны градиентами концентраций. Кроме того, массообмен может быть принудительным, то есть связанным с применением технических устройств, создающих потоки вещества.

*Самопроизвольный необратимый процесс переноса теплоты в теле или в системе тел из областей с большей температурой в области с меньшей температурой называется теплообменом.* Таким образом, необходимым условием теплообмена является неравномерное распределение температуры в теле или в системе тел.

Если явления массообмена и теплообмена сопутствуют друг другу, то их приходится рассматривать во взаимосвязи (тепломассообмен). Когда явления теплообмена и массообмена мало влияют друг на друга, их можно рассматривать порознь. Именно такая ситуация часто возникает при анализе *тепловых режимов радиоэлектронной аппаратуры (РЭА)*.

Теплообмен в природе осуществляется тремя основными способами: теплопроводностью, конвекцией (конвективный теплообмен) и электромагнитным излучением (лучистый теплообмен).

Процесс *теплопроводности* представляет собой перенос теплоты за счет движения структурных элементов физической системы (молекул, ионов, электронов), но при отсутствии результирующего переноса массы вещества. Способность тела передавать через свой объем тепловую энергию путем теплопроводности характеризуется коэффициентом теплопроводности  $\lambda$ , являющийся физическим параметром вещества.

Теплопроводность в газах осуществляется путем соударения молекул, когда более быстрые молекулы из области газового объема с большей температурой при упругих соударениях с менее быстрыми молекулами из областей с меньшей температурой обмениваются импульсами.

В твердых телах теплопроводность осуществляется, в основном, двумя способами: связанными колебаниями структурных элементов тела, когда по телу распространяются совокупность квазиупругих волн, имеющих различные

частоты и возбуждаемых в областях тела с большей температурой (фононная теплопроводность); передача тепловой энергии электронами проводимости (электронная теплопроводность). Фононный механизм теплопроводности присущ всем твердым телам. Электронная теплопроводность в той или иной степени наблюдается в металлах и полупроводниках, причем для ряда металлов (серебро, медь, золото, алюминий, платина) этот механизм теплопроводности является основным.

В жидкостях теплопроводность обусловлена как распространением по объему жидкости процесса колебаний ее структурных элементов, так и просто за счет столкновений этих элементов. Необходимо отметить, что процесс теплопроводности в газах и жидкостях, как правило, сопровождается *конвективным* теплообменом, который зачастую может оказаться более эффективным с точки зрения количества переносимой энергии в форме теплоты.

Передача теплоты, осуществляемая за счет движения макроскопических объемов вещества, называется *конвекцией*. Различают два вида конвекции – *естественную* (или *свободную*), когда макроскопические элементы массы жидкости или газа перемешиваются в поле силы тяжести из-за различия (по тепловым причинам) их плотности<sup>1</sup>, и вынужденную, при которой такое перемешивание массы происходит за счет специальных устройств. Очевидно, что конвективный теплообмен возможен только в жидких и газообразных средах. Интенсивность конвективного теплообмена характеризуется коэффициентом конвективной теплоотдачи  $\alpha$ , показывающим, какое количество тепловой энергии рассеивается в единицу времени с единичной поверхности твердого тела в окружающую среду (или воспринимается этой поверхностью) при перепаде температур между ними в 1 К.

*Лучистый теплообмен* связан со способностью тел поглощать, отражать, пропускать и излучать электромагнитное излучение. Любое тело, имеющее температуру выше абсолютного нуля, является источником электромагнитного излучения – тепловое излучение. С другой стороны, при прохождении электромагнитного излучения через поглощающую среду какая-то часть энергии электромагнитного излучения переходит в тепловую энергию структурных элементов тела – поглотителя электромагнитного излучения. Для

---

<sup>1</sup> В отсутствии поля силы тяжести возможна слабая естественная конвекция, обусловленная градиентами плотности жидкости или газа с соответствующим перемещением объема жидкости или газа за счет диффузии.

анализа влияния на температуру тела лучистого теплообмена между его поверхностью и его окружением необходимо рассчитать результирующий лучистый тепловой поток. Этот расчет базируется на законе Стефана-Больцмана и, часто, на понятии «серого» тела.

## 2 ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ И ТЕПЛОВЫЙ ПОТОК

Скалярная функция координат и времени, ставящая во взаимно однозначное соответствие каждой точке тела в каждый момент времени значение температуры этой точки, называется температурным полем тела:

$$T = T(x, y, z, \tau),$$

где  $x, y, z$  - декартовы координаты рассматриваемой точки тела,  $\tau$  - текущее время.

Особо отметим, что под точкой тела мы понимаем физически бесконечно малый объем этого тела, расположенный в указанном месте и содержащий достаточное для введения понятия «температуры точки» число структурных элементов.

Температурное поле называется стационарным, если оно является функцией только координат и не зависит от времени. В общем случае температурное поле является нестационарным.

Рассмотрим твердое тело, обладающее неравномерным распределением температуры в своем объеме – говорят, что тело обладает неравномерным температурным полем. Если в один и тот же момент времени соединить точки тела, обладающие определенным одинаковым значением температуры, то получим поверхность равной температуры – изотермическую поверхность. Так как одна и та же точка тела не может одновременно иметь различные температуры, то изотермические поверхности не могут пересекаться. Они либо оканчиваются на поверхности тела, либо целиком расположены внутри тела.

Пересечение изотермических поверхностей плоскостью дает на этой плоскости семейство линий, называемых изотермами. Они обладают теми же свойствами, что и изотермические поверхности, то есть не пересекаются, не обрываются внутри тела, оканчиваются на поверхности, либо целиком расположены внутри тела.

Температура в теле изменяется только в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. При этом наибольший перепад температуры на

единицу длины происходит в направлении нормали к изотермической поверхности.

Возрастание температуры в направлении нормали к изотермической поверхности характеризуется градиентом температуры.

Градиент температуры в точке с координатами  $(x, y, z)$  есть вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности, проходящей через данную точку, в сторону возрастания температуры и численно равный производной от температуры по этому направлению:

$$\text{grad}T(x, y, z, \tau) = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z} = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (2.1)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы координатных осей,  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к изотермической поверхности в рассматриваемой точке,  $\partial T / \partial n$  – производная по направлению ( $n$ ) или величина вектора  $\text{grad} T$ .

Таким образом, при феноменологическом описании процессов теплообмена в рассмотрение вводится в общем случае многомерная нестационарная функция, называемая температурным полем системы и показывающая значение температуры в данной точке физической системы и в данный момент времени. Внутри однородной физической системы эта функция дифференцируема, как минимум, дважды по каждому ее аргументу и может испытывать скачок (разрыв) 1-го рода на границе сопряжения двух разнородных частей физической системы.

Количество теплоты, проходящее в единицу времени через плоскую единичную изотермическую площадку  $dS$  в направлении нормали к ней, называется вектором *плотности теплового потока*  $\vec{q}$ :

$$\vec{q} = \frac{dQ}{dS \cdot d\tau} \cdot \vec{n} \quad (\text{Вт/м}^2). \quad (2.2)$$

Поток вектора  $\vec{q}$  через конечную поверхность  $S$  выражается общим определением потока векторного поля и называется *тепловым потоком*  $P_T$ :

$$P_T = \frac{dQ}{d\tau} = \int_S (\vec{q} d\vec{S}) = \int_S (\vec{q} \cdot \vec{n}_s) dS \quad (\text{Вт}), \quad (2.3)$$

где  $dS$  – элемент рассматриваемой поверхности,  $\vec{n}_s$  – единичный вектор нормали к элементу  $dS$ .

При анализе тепловых режимов радиоэлектронной аппаратуры величину теплового потока, рассеиваемого устройством в окружающую среду, называют *тепловой мощностью* или *мощностью рассеяния*.

### 3 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ, РАСПРЕДЕЛЕННОГО В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ЗА СЧЕТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ

С феноменологической точки зрения перенос теплоты теплопроводностью описывается законом Фурье:

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad}(T) = -\lambda \cdot \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (3.1)$$

где  $\vec{q}$  – вектор плотности теплового потока (2.3),  $\lambda$  – коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом теплопроводности*,  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к изотермической поверхности,  $\partial T / \partial n$  – производная по направлению.

Коэффициент теплопроводности  $\lambda$  является физическим параметром вещества. Именно в нем при описании процесса переноса тепла теплопроводностью скрыты физические механизмы этого процесса. Размерность коэффициента теплопроводности, как это видно из (3.1), есть Вт/(м·К): численно коэффициент теплопроводности равен количеству тепла, протекающему в единицу времени через единицу поверхности при условии, что перепад температур на единицу длины в направлении по нормали к этой поверхности составляет 1 К.

Знак " – " в формуле (3.1) обусловлен тем, что  $\text{grad}(T)$  направлен в сторону возрастания температуры, а тепловой поток распространяется из области с большей температурой в область с меньшей температурой, т. е. в сторону убывания температуры.

Теплопроводность или способность тела проводить тепло зависит от характера взаимодействия структурных элементов, составляющих тело, а, следовательно, от природы вещества и от внешних условий, в которых это вещество находится.

В твердых диэлектриках структурные элементы участвуют только в колебательном движении. В областях тела с повышенной температурой интенсивность таких колебаний выше. Поскольку структурные элементы в

твердом теле испытывают квазиупругие взаимодействия, передача теплоты в твердом теле происходит в виде распространения по телу квазиупругого колебательного процесса. Такой процесс переноса теплоты называется фононной теплопроводностью (фонон – формализованное понятие кванта механической волны, распространяющейся в теле по каким-то причинам). Причем чем правильнее и бездефектнее структура тела, тем с меньшими искажениями (потерями и рассеянием энергии) проходит по телу квазиупругая волна. Именно по этой причине среди природных материалов наилучшим проводником тепла является алмаз ( $\lambda \approx 2000 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ).

Специфический механизм процесса теплопроводности присущ металлам. Он связан с наличием в металлах высокой ( $10^{22} \dots 10^{23} \text{ см}^{-3}$ ) концентрации свободных электронов. "Электронный газ" в месте локального разогрева металла имеет более высокую кинетическую энергию по сравнению с остальной областью вещества. "Горячие" электроны за счет диффузии и последовательного взаимодействия с другими электронами переносят тепловую энергию в относительно холодную область металла. Такой механизм теплопроводности получил название электронной теплопроводности. В общем случае теплопроводность в металлах обусловлена как электронной, так и фононной составляющими. При обычных условиях в чистых металлах преобладает электронная составляющая теплопроводности, причем для серебра, золота, меди, алюминия, платины это преобладание подавляющее.

В полупроводниках при обычных условиях основной составляющей процесса переноса тепла является фононная теплопроводность. В несобственных полупроводниках *n*-типа с концентрацией свободных электронов более  $10^{18} \text{ см}^{-3}$  электронная составляющая теплопроводности становится заметной.

В общем случае теплопроводность твердых тел зависит от многих факторов: чистоты и структуры материала, температуры, наличия электрических и магнитных полей высокой напряженности и т.п. Наиболее сильно теплопроводность определенного материала зависит от температуры.

Многие строительные и так называемые **теплоизоляционные** материалы (материалы с низким значением коэффициента теплопроводности –  $0,25 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$  и менее, – обычно используемые для тепловой изоляции), имеют пористое строение (кирпич, бетон, стекловата и т.п.), и применение закона Фурье к ним является, в известной мере, физическим приближением. Наличие

пор в материале не позволяет рассматривать такие тела как сплошную среду. В этом смысле коэффициент теплопроводности указанных материалов рассматривается как некоторый эффективный коэффициент. Эффективный коэффициент теплопроводности пористых материалов сильно зависит от относительного размера пор и в меньшей степени от влажности и внешнего давления. Причем с ростом температуры возможно увеличение эффективного коэффициента теплопроводности пористых материалов за счет увеличения давления газа в порах.

Коэффициенты теплопроводности всех материалов, используемых в радиоэлектронике, известны, включая их температурные зависимости. Наиболее полные значения коэффициента теплопроводности различных материалов приведены в справочнике [5].

Значения коэффициентов теплопроводности некоторых материалов, используемых в твердотельной радиоэлектронике, представлены в Приложении А.

Замечание. В феноменологической теории теплопроводности предполагается, что распространение тепла в теле происходит с бесконечно большой скоростью. Однако при высокоинтенсивных нестационарных процессах теплообмена конечность скорости распространения тепла иногда необходимо учитывать. Скорость распространения теплового возмущения в твердом теле равна скорости звука в нем. В этом случае феноменологический закон Фурье (3.1) записывается в виде [1]:

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad}T - \tau_p \frac{\partial \vec{q}}{\partial \tau}, \quad (3.1, a)$$

где  $\tau_p$  – постоянная времени, зависящая от свойств вещества. Если характерные времена высокоинтенсивных процессов теплообмена заметно превышают  $\tau_p$ , то уточненное выражение (3.1,a) можно во внимание не принимать. Постоянную времени можно оценить из соотношения:

$$\tau_p = \frac{\lambda}{u_{зв}^2 c \rho},$$

где  $u_{зв}$  – скорость звука в данном теле,  $c$  – удельная теплоемкость тела,  $\rho$  – плотность материала тела. Так для алюминия при температуре порядка комнатной  $\tau_p \approx 10^{-11}$  с.

### 3.1 Дифференциальное уравнение теплопроводности для однородного твердого тела

Протекание теплового процесса в любой точке твердого тела в любой момент времени описывается дифференциальным уравнением теплопроводности. Решение этого дифференциального уравнения дает возможность определить распределение температуры в теле в любой момент времени, то есть определить температурное поле тела.

Вывод уравнения теплопроводности основан на законе сохранения энергии и на законе теплопроводности Фурье (3.1). Здесь мы не будем рассматривать вывод уравнения теплопроводности, а приведем лишь его окончательный вид для однородного тела с источниками тепла, произвольно распределенными в теле. С выводом уравнения теплопроводности можно ознакомиться с помощью классических и всемирно известных монографий [1, 2].

В декартовой системе координат уравнение теплопроводности для указанного тела будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + W = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (3.2)$$

где  $T(x, y, z, \tau)$  – температурное поле рассматриваемого тела,  $\lambda = \lambda(T)$  – коэффициент теплопроводности тела в его возможной зависимости от температуры,  $c = c(T)$  – удельная (по массе) теплоемкость тела  $\left( \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right)$ ,  $\rho$  – плотность материала тела ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ),  $W = W(x, y, z, \tau)$  – распределение в теле объемной плотности тепловыделения ( $\text{Вт}/\text{м}^3$ ), создаваемого действующими в теле источниками тепла.

Если принять, что в некотором интересующем нас диапазоне температур параметры  $\lambda$ ,  $c$  и  $\rho$  слабо зависят от температуры и этой зависимостью можно пренебречь, а рассматриваемое тело не только однородное, но и изотропное, то выражение (3.2) упростится и примет вид:

$$\lambda \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + W = \lambda \nabla^2 T + W = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (3.3)$$

где  $\nabla^2$  – обозначение оператора Лапласа через оператор «набла».

В цилиндрической системе координат оператор Лапласа записывается как:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3.4)$$

причем связь между декартовыми координатами и координатами цилиндрической системы определяется выражениями:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Для сферической системы координат будем иметь:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{r^2 (1 - \mu^2)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (3.5)$$

где  $r$  – радиус-вектор,  $\mu = \cos \theta$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  – полярный угол и долгота соответственно.

Если в теле отсутствуют источники тепла, то  $W=0$ , и уравнение (3.3) упрощается:

$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (3.6)$$

где  $a = \frac{\lambda}{c\rho} \left( \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right)$  – коэффициент температуропроводности материала тела.

Коэффициент температуропроводности характеризует способность материала повышать свою температуру с большей или меньшей скоростью  $\frac{\partial T}{\partial \tau}$  под действием притекающего тепла. Если в каком-либо слое материала тела происходит повышение температуры, то скорость этого повышения будет, прежде всего, определяться тем, какое количество тепла передается этому слою в единицу времени от соседних с ним слоев. Это последнее количество тепла определяется теплопроводностью материала, следовательно, скорость повышения температуры должна быть пропорциональна величине  $\lambda$ . С другой стороны, чем больше теплоемкость  $c\rho$  единицы объема материала, тем меньше будет повышаться температура рассматриваемого слоя, поэтому скорость повышения температуры слоя обратно пропорциональна величине  $c\rho$ . Отсюда имеем записанное выше выражение для коэффициента температуропроводности и можем высказать утверждение, что при прочих равных условиях выравнивание температуры в объеме тела будет происходить быстрее в том теле, коэффициент температуропроводности которого больше.

Наконец, при рассмотрении статических температурных полей, то есть неизменных во времени распределений температуры, будем иметь стационарное уравнение теплопроводности для однородного изотропного тела:

$$\lambda \nabla^2 T + W = 0. \quad (3.7)$$

### 3.2 Условия, необходимые для однозначного решения уравнения теплопроводности

Дифференциальное уравнение теплопроводности (3.2) описывает распределение температуры в теле в самом общем виде и при своем решении даст огромную совокупность возможных пространственно-временных распределений температуры. Чтобы из всей этой совокупности выделить одно и только одно решение, соответствующее конкретной поставленной задаче для конкретного тела к уравнению теплопроводности необходимо присоединить математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса. Эти частные особенности, которые вместе с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретного процесса, называются *условиями однозначности*.

Условия однозначности состоят из:

- физических условий, характеризующих физические свойства тела и окружающей его среды;
- геометрических условий, характеризующих конфигурацию и размеры тела, в котором протекает процесс теплопроводности;
- начального условия, описывающего распределение температуры в некоторый момент времени, принимаемый за начальный;
- граничных условий, характеризующих взаимодействие тела со своим окружением.

*Геометрическими условиями* задаются форма и размеры тела, в котором протекает процесс, в соответствии с той координатной системой, которая выбрана для математической постановки задачи теплопроводности.

*Физическими условиями* задаются требуемые физические параметры тела ( $\lambda$ ,  $c$ ,  $\rho$ ) и пространственно-временное распределение объемной плотности тепловыделения от внутренних источников в теле ( $W$ ).

*Начальное условие* необходимо при рассмотрении нестационарных процессов теплопроводности. Оно состоит в задании распределения

температуры в теле в некоторый момент времени  $\tau_0$ , который принимают за начальный. Математически начальное условие записывается в виде:

$$T|_{\tau=\tau_0} = T(x, y, z, \tau = 0) = f(x, y, z), \quad (3.8)$$

где  $f(x, y, z)$  – известная наперед функция. Очень часто для удобства математического описания начало отсчета времени принимают равным нулю:  $\tau_0 = 0$ .

Граничные условия в задачах теплопроводности задаются четырьмя различными способами в зависимости от условий теплообмена рассматриваемого тела с окружающей средой на каждом конечном сегменте своей поверхности.

**Граничные условия первого рода** состоят в задании известного наперед распределения температуры на поверхности  $S$  тела для каждого момента времени  $\tau$ :

$$T|_{(x,y,z) \in S} = T_S(x, y, z, \tau), \quad (3.9)$$

где  $T_S(x, y, z, \tau)$  – известное распределение температуры на поверхности  $S$ .

**Граничные условия второго рода** задают значения плотности теплового потока в каждой точке поверхности  $S$  тела в любой момент времени:

$$-\lambda \frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{(x,y,z) \in S} = q_S(x, y, z, \tau), \quad (3.10)$$

где  $q_S(x, y, z, \tau)$  – известная функция,  $\vec{n}$  – внешняя по отношению к телу нормаль к поверхности  $S$ .

**Граничные условия третьего рода** состоят в задании закона конвективного теплообмена на поверхности тела с окружающей средой с учетом теплового баланса: количество теплоты, отводимое с единицы поверхности тела в единицу времени в окружающую среду вследствие конвективной теплоотдачи должно равняться количеству теплоты, подводимому к единице поверхности тела в единицу времени вследствие теплопроводности из внутренних областей тела.

В инженерных задачах конвективный теплообмен между изотермической поверхностью  $S$  с температурой  $T_S$  и омывающей эту поверхность жидкой или газообразной средой с температурой  $T_{CP}$  описывается законом Ньютона: количество теплоты, отданное нагретой поверхностью окружающей среде в единицу времени (то есть мощность теплоотдачи  $P_T$ ), пропорционально

разности температур поверхности и среды и величине теплоотдающей поверхности:

$$P_T = \alpha(T_S - T_{CP}) \cdot S \quad \text{или} \quad q = \alpha(T_S - T_{CP}), \quad (3.11)$$

где  $\alpha$  – **коэффициент конвективной теплоотдачи** (Вт/(м<sup>2</sup>·К)) с поверхности в среду<sup>2</sup>,  $T_S - T_{CP}$  – температурный напор, обуславливающий процесс теплообмена.

Коэффициент конвективной теплоотдачи численно равен количеству тепла, отдаваемого (или поглощаемого) единицей площади поверхности тела в единицу времени при разности температур между поверхностью и окружающей средой в 1 К.

Поэтому математическая запись граничного условия третьего рода имеет вид:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_S = \alpha(T|_S - T_{CP}) \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) является частным случаем закона сохранения энергии для поверхности тела.

Замечание 1. При записи граничных условий (3.10) и (3.12) необходимо внимательно обращаться со знаком «–», принимая во внимание направление вектора плотности теплового потока в конкретной задаче и сопоставляя его с направлением внешней нормали.

Замечание 2. Если в (3.12) формально устремить значение коэффициента теплоотдачи к бесконечности ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), то граничное условие (3.12) перейдет в граничное условие первого рода (3.9) с постоянной температурой поверхности  $T_S = T_{CP}$ .

Замечание 3. Поверхность  $S$  рассматриваемого тела обязательно участвует еще в одном процессе теплообмена. Так как температура этой поверхности отлична от нуля, то с нее уходит лучистый тепловой поток, который в практических задачах определяется приближением закона Стефана–Больцмана для серых тел. Одновременно эта поверхность (и расположенный под ней объем тела) может поглощать падающее тепловое излучение (с учетом возможного отражения доли падающего излучения). Поэтому в общем случае граничное условие (3.12) должно учитывать в виде дополнительного слагаемого результирующий лучистый тепловой поток, уходящий или приходящий на поверхность  $S$ :

---

<sup>2</sup> Численные значения коэффициента конвективной теплоотдачи можно определить по методикам, изложенным, например, в [2, 4].

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_S = \alpha \cdot (T_S - T_{CP}) + \varepsilon \cdot \varphi \cdot \sigma \cdot (T_S^4 - T_{CP}^4). \quad (3.13)$$

Здесь  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) – постоянная Стефана-Больцмана,  $\varepsilon$  – интегральная по спектру степень черноты поверхности  $S$ ,  $\varphi$  – коэффициент взаимной облученности тел, участвующих в лучистом теплообмене.

Граничное условие (3.13) делает задачу теплопроводности нелинейной.

Часто в инженерных задачах при не слишком большой разнице между температурами поверхности и среды лучистый поток учитывается заданием эффективного значения коэффициента конвективного теплообмена  $\alpha_{\text{эфф}}$  и использованием граничного условия (3.12), что позволяет оставить задачу теплопроводности линейной [4]. При небольшой разнице температур ( $T_S - T_{CP}$ ) лучистую составляющую в выражении (3.13) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot \varphi \cdot \sigma \cdot (T_S^4 - T_{CP}^4) &= \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_S^2 + T_{CP}^2) \cdot (T_S^2 - T_{CP}^2) = \\ &= [\varepsilon \cdot \varphi \cdot \sigma \cdot (T_S^2 + T_{CP}^2) \cdot (T_S + T_{CP})] \cdot (T_S - T_{CP}) = \\ &= \alpha_{\text{л}} \cdot (T_S - T_{CP}), \end{aligned}$$

где  $\alpha_{\text{л}} = \varepsilon \cdot \varphi \cdot \sigma \cdot (T_S^2 + T_{CP}^2) \cdot (T_S + T_{CP})$  – эквивалентный коэффициент лучистой теплоотдачи. В этом случае граничное условие (3.13) можно переписать в виде:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_S = (\alpha + \alpha_{\text{л}}) \cdot (T_S - T_{CP}) = \alpha_{\text{эфф}} \cdot (T_S - T_{CP}), \quad (3.13, a)$$

где  $\alpha_{\text{эфф}}$  учитывает как конвективную, так и лучистую составляющую теплообмена. Однако если разность температур ( $T_S - T_{CP}$ ) значительная, то от нелинейности в граничном условии (3.13) избавиться невозможно.

**Граничные условия четвертого рода** (или условия сопряженности) используются тогда, когда необходимо задать условия теплообмена между двумя разнородными твердыми телами, непосредственно контактирующими друг с другом. При этом должны выполняться условия равенства температур и тепловых потоков по обе стороны от границы их раздела. Условия сопряженности записываются в следующем виде:

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial n} \right|_S = \lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial n} \right|_S, \quad (3.14, a)$$

$$T_1(x_S, y_S, z_S, \tau) = T_2(x_S, y_S, z_S, \tau),$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – теплопроводности первого и второго тел соответственно,  $T_1$  и  $T_2$  – температурные поля первого и второго тел на поверхности сопряжения  $S$

соответственно, индекс  $S$  показывает на принадлежность использованных величин поверхности  $S$ ,  $\vec{n}$  – вектор общей нормали к поверхности  $S$ .

Выражение (3.14,  $a$ ) описывает идеальный тепловой контакт, когда одно тело непрерывно через поверхность  $S$  переходит в другое. В случае неидеального теплового контакта (сопрягаемые тела разделены тонкой прослойкой) используют понятие контактного теплового сопротивления  $R_{TK}$ , значение которого должно быть известно. В этом случае равенство тепловых потоков соблюдается, но появляется пропорциональный им температурный скачок через поверхность сопряжения, и граничные условия (3.14,  $a$ ) переписуются следующим образом:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{S_1} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{S_2} ;$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{S_1} = \frac{1}{R_{TK}} \cdot [T_2(x_{S_2}, y_{S_2}, z_{S_2}, \tau) - T_1(x_{S_1}, y_{S_1}, z_{S_1}, \tau)].$$
(3.14, б)

Здесь  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к контактной поверхности  $S_1$  тела 1.

Из условий (3.14) следует, что решение сопряженной задачи связано с нахождением температурных полей обоих тел.

Дифференциальное уравнение теплопроводности вместе с начальным и необходимыми граничными условиями носит название *краевой задачи теплопроводности*. Если рассматриваются стационарные температурные поля, то задачу их расчета называют *граничной задачей теплопроводности* – в ней отсутствует начальное условие.

Таким образом, чтобы рассчитать распределение температуры в каком-либо твердотельном элементе радиоэлектронной аппаратуры для этого элемента необходимо сформулировать и решить краевую задачу теплопроводности:

- 1 В выбранной координатной системе задать форму и размеры элемента, форму и размеры тепловых источников, действующих в нем.
- 2 Задать значения физических величин ( $\lambda$ ,  $a$ ), определяющих процесс теплопроводности в рассматриваемом элементе устройства.
- 3 Задать функцию объемной плотности тепловыделения в элементе.
- 4 Определить и задать в виде соответствующих граничных условий условия теплообмена между рассматриваемым элементом и его окружением.

- 5 Определить и задать начальное распределение температуры в рассматриваемом элементе. Необходимо помнить, что граничные и начальное условия должны быть согласованными.
- 6 Записать в выбранной координатной системе уравнение теплопроводности в виде, соответствующем вышеперечисленным пунктам 1) – 5) и решить его тем или иным способом с учетом выбранных условий однозначности.

*Замечание 4.* При тепловом моделировании элементов твердотельной электроники часто случается, что область тепловыделения в рассматриваемом элементе имеет толщину много меньшую толщины самого элемента и расположенную вблизи поверхности элемента. В такой ситуации проще и удобнее для расчетов не задавать функцию объемной плотности тепловыделения  $W$ , а учесть тепловыделение в элементе с помощью граничного условия второго рода, задав поверхностную плотность тепловыделения надлежащим выбором функции  $\Psi_s(x, y, z, \tau)$ .

### 3.3 Принцип местного влияния в теории теплопроводности

Принцип местного влияния формулируется следующим образом [4, 6]: любое местное возмущение температурного поля является локальным и не распространяется на удаленные участки поля. Благодаря этому принципу при теплофизическом моделировании сложной системы можно менее детально описывать процессы теплообмена в удаленных от интересующего нас участка системы ее областях. Отклонения истинных значений температуры от среднего уровня, определяемого в результате теплофизического моделирования при осредненных пространственных распределениях параметров процесса, рассматриваются как локальные возмущения.

Опираясь на принцип местного влияния при теплофизическом моделировании какой-то сложной системы, становится возможным упростить задачу следующими приемами [6]:

- сложные пространственные распределения тепловых источников заменить более простыми;
- многосоставные подсистемы с неоднородной структурой заменить квазиоднородными областями с некоторыми эффективными теплофизическими свойствами;
- пространственные распределения величин, описывающих теплообмен на границах системы или каких-то областей системы (температур

- поверхностей и окружающей среды, коэффициентов теплоотдачи, плотностей тепловых потоков) заменить их средними значениями;
- упростить форму реальных исследуемых систем с сохранением некоторых интегральных характеристик (некоторых характерных размеров, площадей, объемов).

Наконец, если при теплофизическом моделировании теплофизические параметры элементов системы (коэффициенты теплопроводности, плотности, теплоемкости и коэффициенты конвективного теплообмена) и мощности тепловых источников в ней не зависят от температуры, то для такой системы выполняется принцип суперпозиции температурных полей. Это позволяет ставить задачу теплопроводности в каком-то элементе системы не для определения распределения температуры в нем, а для определения распределения температурных перепадов относительно некоторого опорного значения. В некоторых случаях такой прием может заметно упростить решение задачи теплопроводности.

### 3.4 Электротепловая аналогия и метод тепловой схемы

Полная аналогия математического описания процессов стационарной теплопроводности и стационарного токопротекания дают возможность ввести в рассмотрение очень удобный метод поэлементного теплового моделирования электронной аппаратуры – метод тепловой схемы. В такой схеме электрический ток соответствует тепловому потоку  $P_T$  через элемент, падение напряжения на элементе схемы – перепаду температур  $\Delta T$  на соответствующем элементе тепловой схемы, а электрическое сопротивление элемента соответствует *тепловому сопротивлению*

$$R_T = \frac{\Delta T}{P_T} : \quad (3.15)$$

тепловое сопротивление есть перепад температур  $\Delta T$  между двумя изотермическими площадками при протекании между ними теплового потока  $P_T$ .

По аналогии с электрическим сопротивлением тепловое сопротивление однородного участка тепловой цепи в некоторых случаях можно вычислить с помощью известного выражения:

$$R_T = \int_1^2 \frac{dl}{\lambda S(l)}, \quad (3.16)$$

где  $dl$  – элемент координатной линии тепловой трубки тока,

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала,

$S(l)$  – сечение тепловой трубки, перпендикулярное тепловому потоку, в точке  $l$  координатной линии,

1 и 2 – изотермические зоны, между которыми вводится участок тела, характеризующийся тепловым сопротивлением.

Величина  $\sigma_T = 1/R_T$  называется **тепловой проводимостью** соответствующего участка тепловой цепи.

Также можно ввести тепловое сопротивление процессу конвективной теплоотдачи с поверхности  $S$  тела в окружающую среду:

$$R_{T\alpha} = \frac{1}{\alpha \cdot S}, \quad (3.17)$$

где  $\alpha$  – коэффициент конвективной теплоотдачи с поверхности тела,  $S$  – площадь теплоотдающей поверхности. Выражение (3.17) записано на основе приближения (3.11) Ньютона для конвективно рассеиваемого теплового потока.

Опираясь на принцип местного влияния, при теплофизическом моделировании сложную систему разбивают на ряд участков, теплообмен на границах которых описывают *усредненными по каждой границе параметрами*. Тогда для каждого участка можно тем или иным способом *определить свое значение теплового сопротивления*. В итоге получается тепловая схема рассматриваемой системы.

Для анализа тепловой схемы применяются правила Кирхгофа с очевидным упрощением: в тепловой схеме отсутствуют источники (аналогия ЭДС), препятствующие распространению теплового потока. В результате решения тепловой схемы определяются усредненные температурные перепады на элементах схемы. И если нас интересует более подробное описание распределения температуры в каком-то твердотельном элементе моделируемой системы, то для этого элемента ставится отдельная задача теплопроводности с граничными условиями, определенными из анализа тепловой схемы.

Иногда метод тепловой схемы применяют и для анализа нестационарных тепловых процессов. Это означает, что в рассмотрение вводятся тепловые емкости элементов схемы. Однако полная аналогия между тепловой и электрической емкостями не всегда возможна, да и характерные времена

процессов перезарядки тепловой и электрической емкостей в рамки электротепловой аналогии не укладываются.

## 4 СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТЕЛАХ ПРОСТОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

### 4.1 Стационарный перенос тепла через многослойную плоскую стенку

Рассмотрим тело, состоящее из  $N$  разнородных плоских слоев, контактирующих друг с другом (рис. 4.1,  $N=3$ ). Обозначим через  $\delta_i$  толщину, а через  $\lambda_i$  коэффициент теплопроводности материала  $i$ -го слоя тела ( $i=1,2,\dots,N$ ). Условимся, что в двух других пространственных направлениях размеры тела значительно больше суммарной толщины его слоев, то есть тело представляет собой многослойную плоскую стенку. С одной стороны стенка омывается средой с постоянной температурой  $T_{CP1}$  и коэффициентом конвективного теплообмена  $\alpha_1$ , а с другой – средой с постоянной температурой  $T_{CP2}$  и коэффициентом конвективного теплообмена  $\alpha_2$  (температуры  $T_{CP1}$  и  $T_{CP2}$  и коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  считаются известными). Пусть  $T_{CP1} > T_{CP2}$ , а внутренние тепловые источники в стенке отсутствуют.

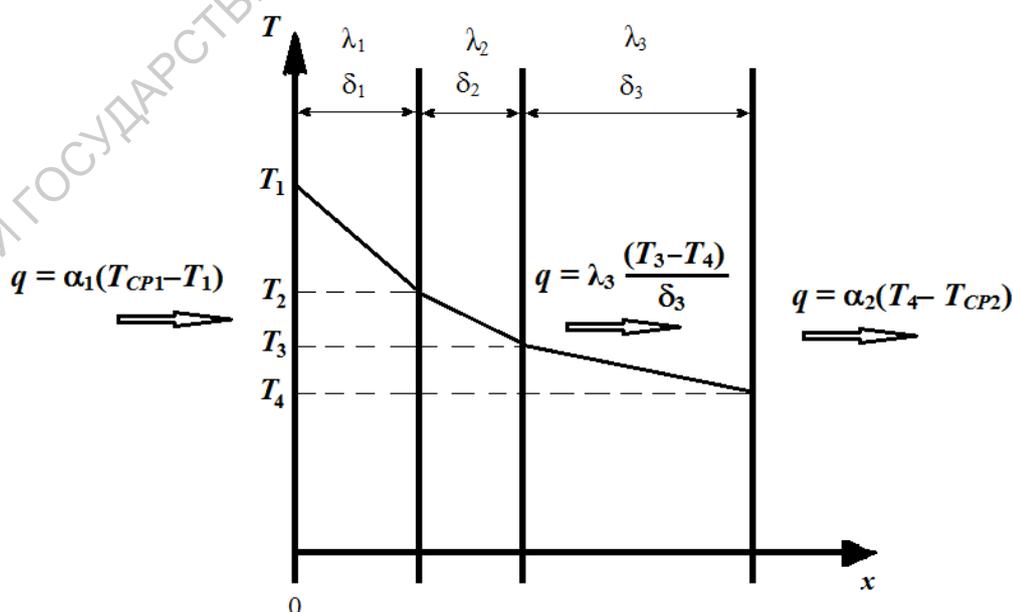


Рисунок 4.1 – Распределение температуры по толщине трехслойной стенки

Пренебрегая краевыми эффектами на торцевых границах стенки, можно утверждать, что по толщине стенки установятся неизменные во времени температурный перепад и соответствующий тепловой поток, обусловленные конвективным нагревом стенки первой средой и конвективным охлаждением стенки второй средой. При этом распределение температуры по стенке будет зависеть только от одной пространственной переменной  $x$ , направленной по толщине стенки, а плотность теплового потока  $q$  во всех текущих поверхностях стенки, параллельных ее внешним плоскостям, будет неизменной.

Направим ось  $Ox$  перпендикулярно стенке, поместив ее начало на левой внешней поверхности стенки, и введем в рассмотрение температуры  $T_1, T_2, \dots, T_N, T_{N+1}$ , где  $T_1$  и  $T_{N+1}$  – температуры внешних поверхностей стенки, а  $T_2, \dots, T_N$  – температуры поверхностей сопряжения разнородных слоев стенки. Для удобства разобьем ось  $Ox$  на  $N$  участков, соответствующих слоям стенки:

$$x_i = x - \sum_{j=0}^{i-1} \delta_j,$$

то есть:

$$0 \leq x_1 < \delta_1; \delta_1 \leq x_2 < \delta_2; \delta_2 \leq x_3 < \delta_3; \dots \delta_{N-1} \leq x_N < \delta_N. \quad (4.1)$$

Тогда температуры поверхностей стенки соответствуют следующим координатам  $x_i$ :

$$\begin{aligned} T_1 &= T(x_1 = 0); T_2 = T(x_1 = \delta_1) = T(x_2 = 0); \dots \\ T_i &= T(x_{i-1} = \delta_i) = T(x_i = 0); \dots T_{N+1} = T(x_N = \delta_N). \end{aligned} \quad (4.2)$$

В этих условиях температурное поле  $i$ -го слоя стенки будет описываться стационарным одномерным уравнением теплопроводности без внутренних источников:

$$\lambda_i \frac{d^2 T}{dx_i^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 T}{dx_i^2} = 0. \quad (4.3)$$

Решением уравнения (4.3) является линейная функция

$$T(x_i) = A_i x_i + B_i, \quad (4.4)$$

где  $A_i$  и  $B_i$  – постоянные интегрирования. Используя условия (4.2), получим:

$$\begin{aligned} x_i = 0 &\Rightarrow B_i = T_i; \quad x_i = \delta_i \Rightarrow T_{i+1} = A_i \delta_i + T_i \Rightarrow \\ T(x_i) &= T_i - (T_i - T_{i+1}) \frac{x_i}{\delta_i}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Таким образом, по толщине многослойной стенки установится кусочно-линейное распределение температуры.

Неизвестные температуры  $T_1, T_2, \dots, T_N, T_{N+1}$  определим из условия одинаковости плотности теплового потока для всех слоев стенки:

$$q = \alpha_1(T_{CP1} - T_1) = -\lambda_1 \frac{dT}{dx_1} = \dots = -\lambda_i \frac{dT}{dx_i} = \dots = -\lambda_N \frac{dT}{dx_N} = \alpha_2(T_{N+1} - T_{CP2}). \quad (4.6)$$

Значения  $\frac{dT}{dx_i}$  легко определяются из (4.5):  $\frac{dT}{dx_i} = -\frac{(T_i - T_{i+1})}{\delta_i}$ . Отсюда:

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \alpha_1(T_{CP1} - T_1) \Rightarrow T_{CP1} - T_1 = \frac{q}{\alpha_1}; \\ q = \lambda_1 \frac{T_1 - T_2}{\delta_1} \Rightarrow T_1 - T_2 = q \frac{\delta_1}{\lambda_1}; \\ \dots \\ q = \lambda_i \frac{T_i - T_{i+1}}{\delta_i} \Rightarrow T_i - T_{i+1} = q \frac{\delta_i}{\lambda_i}; \\ \dots \\ q = \lambda_N \frac{T_N - T_{N+1}}{\delta_N} \Rightarrow T_N - T_{N+1} = q \frac{\delta_N}{\lambda_N}; \\ q = \alpha_2(T_{N+1} - T_{CP2}) \Rightarrow T_{N+1} - T_{CP2} = \frac{q}{\alpha_2}. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Сложив правые уравнения системы (4.7), получим:

$$q = \frac{T_{CP1} - T_{CP2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (4.8)$$

Определив величину  $q$ , из (4.7) нетрудно последовательно вычислить температуры поверхностей многослойной стенки:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{q}{\alpha_1} + T_{CP1}; \dots \\ T_{i+1} &= q \frac{\delta_i}{\lambda_i} + T_i; \dots \\ T_{N+1} &= q \frac{\delta_N}{\lambda_N} + T_N = \frac{q}{\alpha_2} + T_{CP2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Формулы (4.9) и (4.5) позволяют вычислить распределение температуры по толщине многослойной плоской стенки. Для  $N=3$  такое распределение показано на рис. 4.1, причем из наклона линейных участков кусочно-линейного распределения температуры по толщине стенки следует, что в этом примере  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ .

Величина  $k_{TC} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}$  называется **коэффициентом**

**теплопередачи** или **тепловой проводимостью** многослойной плоской стенки. Этот коэффициент характеризует интенсивность передачи теплоты от одной среды к другой через единицу поверхности разделяющей их стенки и в данном случае имеет такую же размерность, как и коэффициент конвективной теплоотдачи ( $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$ ).

Величина, обратная тепловой проводимости, представляет собой **полное тепловое сопротивление** многослойной плоской стенки:

$$R_{TC} = \frac{1}{k_{TC}} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (4.10)$$

Тепловое сопротивление плоской стенки, определяемое по (4.10), относится к области стенки с единичной поверхностью и имеет размерность  $\text{К} \cdot \text{м}^2 / \text{Вт}$ . Из (4.10) следует, что полное тепловое сопротивление многослойной стенки есть сумма последовательных сопротивлений  $(\delta_i / \lambda_i)$  отдельных слоев стенки – внутреннее тепловое сопротивление стенки  $R_{T_{ВНУТ}} = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{\lambda_i}$  – и двух сопротивлений конвективному теплообмену на внешних поверхностях стенки ( $R_{T_{\alpha 1}} = 1/\alpha_1$  и  $R_{T_{\alpha 2}} = 1/\alpha_2$ ). Размерность величины  $R_{TC}$  есть  $\text{К} \cdot \text{м}^2 / \text{Вт}$ .

Выражение для  $R_{T_{ВНУТ}}$  стенки нетрудно получить непосредственно, используя электротепловую аналогию (3.15):

$$R_{T_{ВНУТ}i} = \int_0^{\delta_i} \frac{dl}{\lambda_i L^2} = \frac{\delta_i}{\lambda_i L^2} = \frac{\delta_i}{\lambda_i} \Big|_{L=1},$$

где  $L$  – размер ребра квадратной площадки, перпендикулярной направлению теплового потока (поперечное сечение трубки теплового тока),  $i=1, 2, \dots, N$ . Отсюда тепловое сопротивление любого плоского элемента с площадью основания  $S$  и толщиной  $\delta$  при направлении теплового потока перпендикулярно основанию равно  $R_{T_{ВНУТ}} = \frac{\delta}{\lambda S}$ . Отметим, что при задании площади основания стенки размерность ее теплового сопротивления становится равной  $\text{К} / \text{Вт}$ .

## 4.2 Стационарный перенос тепла через цилиндрическую стенку

Сначала рассмотрим однородную цилиндрическую стенку (трубу). Через  $R_1$  обозначим внутренний радиус трубы, а через  $R_2$  – ее внешний радиус;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала стенки. Будем считать, что внешний диаметр стенки  $d_2=2R_2$  значительно меньше ее длины  $L$ .

Изнутри стенка омывается средой с постоянной температурой  $T_{CP1}$  и коэффициентом конвективного теплообмена  $\alpha_1$ , а с наружи – средой с постоянной температурой  $T_{CP2}$  и коэффициентом конвективного теплообмена  $\alpha_2$  (температуры  $T_{CP1}$  и  $T_{CP2}$  и коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  считаются известными). Пусть  $T_{CP1} > T_{CP2}$ , а внутренние тепловые источники в стенке отсутствуют.

В этом случае потерями тепла с торцевых поверхностей трубы можно пренебречь. И все количество теплоты, поступившее в стенку в единицу времени за счет конвективного теплообмена с внутренней средой, будет рассеяно с внешней поверхности стенки за то же время, а тепловой поток через все текущие аксиальные поверхности стенки будет одинаковым:

$$P_T = \alpha_1(T_{CP1} - T_1) \cdot 2\pi R_1 L = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot 2\pi r L = \alpha_2(T_2 - T_{CP2}) \cdot 2\pi R_2 L, \quad (4.11)$$

где  $r$  – текущий радиус стенки,  $2\pi r L$  – площадь текущей поверхности стенки,  $T_1 = T|_{r=R_1}$  – температура внутренней поверхности стенки,  $T_2 = T|_{r=R_2}$  – температура внешней поверхности стенки

Распределение температуры по толщине стенки будет соответствовать следующей задаче теплопроводности в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} &= 0; \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_1} &= \alpha_1(T_{CP1} - T_1); \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_2} &= \alpha_2(T_2 - T_{CP2}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Отметим, что в силу условия (4.11)

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_1} \cdot R_1 = \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_2} \cdot R_2; \quad \alpha_1(T_{CP1} - T_1) \cdot R_1 = \alpha_2(T_2 - T_{CP2}) \cdot R_2. \quad (4.13)$$

Общее решение задачи (4.12) имеет вид:

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2, \quad (4.14)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования, определяемые с помощью граничных условий задачи. Учитывая, что  $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r}$ , получим следующую систему из двух алгебраических уравнений для определения  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{C_1}{R_1} &= \alpha_1(T_{CP1} - C_1 \ln R_1 - C_2); \\ -\lambda \frac{C_1}{R_2} &= \alpha_2(C_1 \ln R_2 + C_2 - T_{CP2}). \end{aligned}$$

Ее решение просто, но громоздко. Поэтому для удобства вычислений сначала предположим, что значения температур поверхностей стенки  $T_1$  и  $T_2$  известны. Тогда с учетом (4.14)

$$T_1 = C_1 \ln R_1 + C_2, \quad T_2 = C_1 \ln R_2 + C_2.$$

Отсюда  $C_1 = \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$ ;  $C_2 = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\ln R_1}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$ ,

и распределение температуры по толщине трубы выглядит следующим образом:

$$T(r) = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}. \quad (4.15)$$

Из условия одинаковости теплового потока в любой области стенки (4.11) будем иметь:

- для внутренней поверхности стенки  $P_T = \alpha_1(T_{CP1} - T_1) \cdot 2\pi R_1 L$ ,
- для внешней поверхности стенки  $P_T = \alpha_2(T_2 - T_{CP2}) \cdot 2\pi R_2 L$ ,
- для внутренней текущей поверхности стенки с радиусом  $r$

$$P_T = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot 2\pi r L = -2\lambda \pi r L \frac{C_1}{r} = \frac{2\lambda \pi L (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{P_T}{2\pi R_1 L \alpha_1} &= T_{CP1} - T_1; \\ \frac{P_T}{2\pi L \lambda} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) &= T_1 - T_2; \\ \frac{P_T}{2\pi R_2 L \alpha_2} &= T_2 - T_{CP2}.\end{aligned}\quad (4.16)$$

Складывая уравнения (4.16) между собой, получим:

$$P_T \cdot \left[ \frac{1}{2\pi L R_1 \alpha_1} + \frac{1}{2\lambda \pi L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{2\pi L R_2 \alpha_2} \right] = T_{CP1} - T_{CP2}. \quad (4.17)$$

Величина

$$R_{ТЦ} = \frac{1}{2\pi L R_1 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi L \lambda} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{2\pi L R_2 \alpha_2} \quad (4.18)$$

представляет собой полное тепловое сопротивление однослойной цилиндрической стенки с длиной  $L$  и толщиной  $\delta = R_2 - R_1$ . Вычислив эту величину по исходным данным задачи и используя (4.16), определим значения температур внутренней и внешней поверхностей стенки:

$$\begin{aligned}T_1 &= T_{CP1} - \frac{P_T}{2\pi R_1 L \alpha_1} = T_{CP1} - \frac{T_{CP1} - T_{CP2}}{2\pi L R_1 \alpha_1 R_{ТЦ}}, \\ T_2 &= \frac{P_T}{2\pi R_2 L \alpha_2} + T_{CP2} = T_{CP2} + \frac{T_{CP1} - T_{CP2}}{2\pi L R_2 \alpha_2 R_{ТЦ}} \quad \text{или} \\ T_2 &= T_1 - \frac{P_T}{2\pi L \lambda} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = T_1 - \frac{T_{CP1} - T_{CP2}}{2\pi L \lambda R_{ТЦ}} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).\end{aligned}\quad (4.19)$$

Таким образом, распределение температуры по толщине цилиндрической стенки определено полностью.

Размерность теплового сопротивления цилиндрической стенки, введенного с помощью (4.18), есть К/Вт. Иногда тепловое сопротивление цилиндрической стенки приводят к единице ее длины (то есть при  $L=1$  м в формуле (4.18)). Очевидно, что в этом случае размерность теплового сопротивления цилиндрической стенки будет равна К·м/Вт.

В выражении (4.18) слагаемое  $\frac{1}{2\pi L \lambda} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$  представляет собой тепловое сопротивление, создаваемое тепловому потоку материалом стенки (внутреннее тепловое сопротивление), а слагаемые  $\frac{1}{2\pi L R_1 \alpha_1}$  и  $\frac{1}{2\pi L R_2 \alpha_2}$  соответствуют тепловым сопротивлениям конвективной теплоотдаче (внешние

тепловые сопротивления). В соответствии с электротепловой аналогией и с учетом того, что указанные три сопротивления соединены последовательно, нетрудно записать выражение для теплового сопротивления многослойной цилиндрической стенки, в которой отдельные слои контактируют между собой идеально в тепловом отношении:

$$R_{TЦ} = \frac{1}{2\pi LR_1 \alpha_1} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\pi L \lambda_i} \ln\left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right) + \frac{1}{2\pi LR_{N+1} \alpha_2}, \quad (4.20)$$

где  $i=1,2, \dots, N$  – номер слоя многослойной стенки,  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности материала  $i$ -го слоя,  $R_i$  и  $R_{i+1}$  – внутренний и внешний радиусы  $i$ -го слоя. Тогда, как и в предыдущем случае, тепловой поток, протекающий через цилиндрическую стенку, определяется выражением:

$$P_T = \frac{T_{CP1} - T_{CP2}}{R_T}. \quad (4.21)$$

Распределение температуры по толщине  $i$ -го слоя будет иметь вид логарифмической зависимости, аналогичной (4.15)

$$T(r) = T_i - (T_i - T_{i+1}) \frac{\ln\left(\frac{r}{R_i}\right)}{\ln\left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right)}, \quad R_i \leq r \leq R_{i+1}, \quad (4.22)$$

а температуры поверхностей сопряжения разнородных слоев стенки легко определяются с помощью (4.19) с добавлением очевидного условия для  $i$ -го слоя:

$$\frac{P_T}{2\pi L \lambda_i} \ln\left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right) = T_i - T_{i+1} \Rightarrow T_{i+1} = T_i - \frac{T_{CP1} - T_{CP2}}{2\pi L \lambda_i R_{TЦ}} \ln\left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right). \quad (4.23)$$

Действительно, из (4.19) и (4.23) с учетом (4.20) следует:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_{CP1} - \frac{P_T}{2\pi L R_1 \alpha_1} = T_{CP1} - \frac{T_{CP1} - T_{CP2}}{2\pi L R_1 \alpha_1 R_{TЦ}}, \\ &\dots\dots \\ T_{i+1} &= T_i - \frac{T_{CP1} - T_{CP2}}{2\pi L \lambda_i R_{TЦ}} \ln\left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right); \\ &\dots\dots \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$T_{N+1} = \frac{P_T}{2\pi R_{N+1} L \alpha_2} + T_{CP2} = T_{CP2} + \frac{T_{CP1} - T_{CP2}}{2\pi L R_{N+1} \alpha_2 R_{TЦ}}.$$

Наконец, выражение для теплового сопротивления  $i$ -го слоя стенки можно получить, используя электротепловую аналогию:

$$R_{T_{ВНУТ}i} = \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{dr}{2\pi\lambda_i L r} = \frac{1}{2\pi\lambda_i L} \ln\left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right).$$

Величина

$$k_{TЦ} = \frac{1}{R_{TЦ}} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi L R_1 \alpha_1} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\pi L \lambda_i} \ln\left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right) + \frac{1}{2\pi L R_{N+1} \alpha_2}} \quad (4.25)$$

называется **коэффициентом теплопередачи** или **тепловой проводимостью** многослойной цилиндрической стенки.

### 4.3 Критический радиус цилиндрической стенки

Рассмотрим выражение (4.18) для теплового сопротивления цилиндрической стенки как функцию внешнего радиуса  $R_2$  при неизменности остальных параметров ( $R_1$ ,  $L$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ). Из (4.18) следует, что с ростом  $R_2$  внутреннее сопротивление стенки растет по логарифмическому закону, а внешнее тепловое сопротивление на поверхности с радиусом  $R_2$  падает по гиперболическому закону.

Исследуем функцию  $R_{TЦ} = f(R_2)$  на экстремум:

$$\frac{dR_{TЦ}}{dR_2} = \frac{1}{2\pi L \lambda R_2} - \frac{1}{2\pi L \alpha_2 R_2^2} = 0 \Rightarrow R_2 = R_{2КР} = \frac{\lambda}{\alpha_2}. \quad (4.26)$$

Величина  $R_{2КР}$  называется критическим радиусом цилиндрической стенки [2]. Такое значение внешнего радиуса соответствует **минимальному полному тепловому сопротивлению** цилиндрической стенки. С ростом  $R_2$  в диапазоне изменения значений  $R_2$  до  $R_{2КР}$  полное тепловое сопротивление стенки падает, так как увеличение внешней поверхности стенки оказывает на ее полное тепловое сопротивление большее влияние, чем увеличение ее толщины. При увеличении  $R_2$  в диапазоне значений  $R_2 > R_{2КР}$  рост внутреннего теплового сопротивления стенки за счет увеличения ее толщины превзойдет падение внешнего сопротивления, обусловленного развитием внешней поверхности стенки, и полное тепловое сопротивление будет расти.

Очевидно, что для  $N$ -слойной цилиндрической стенки критический радиус определяется параметрами теплообмена на внешней поверхности и теплопроводностью внешнего слоя стенки:  $R_{N+1KP} = \frac{\lambda_N}{\alpha_2}$ .

Наличие критического значения внешнего радиуса цилиндрической стенки необходимо учитывать при анализе процессов теплопереноса в таких цилиндрических системах, поскольку минимальное значение теплового сопротивления соответствует максимальному тепловому потоку.

#### 4.4 Стационарный перенос тепла через шаровой слой

Рассмотрим однородный шаровой слой с внутренним радиусом  $R_1$ , внешним радиусом  $R_2$  и коэффициентом теплопроводности материала слоя  $\lambda$ . Внутренняя поверхность шарового слоя омывается средой с постоянной температурой  $T_{CP1}$  и коэффициентом конвективного теплообмена  $\alpha_1$ , а внешняя – средой с постоянной температурой  $T_{CP2}$  и коэффициентом конвективного теплообмена  $\alpha_2$  (температуры  $T_{CP1}$  и  $T_{CP2}$  и коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  считаются известными). Пусть  $T_{CP1} > T_{CP2}$ , а внутренние тепловые источники в шаровой стенке отсутствуют.

Как и в предыдущем случае, все количество теплоты, поступившее в шаровой слой в единицу времени за счет конвективного теплообмена с внутренней средой, будет рассеяно с внешней поверхности слоя за то же время, а тепловой поток через все текущие поверхности слоя будет одинаковым:

$$P_T = \alpha_1(T_{CP1} - T_1) \cdot 4\pi R_1^2 = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot 4\pi r^2 = \alpha_2(T_2 - T_{CP2}) \cdot 4\pi R_2^2, \quad (4.27)$$

где  $r$  – текущий радиус стенки ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ),  $4\pi r^2$  – площадь текущей сферической поверхности шарового слоя,  $T_1 = T|_{r=R_1}$  – температура внутренней поверхности слоя,  $T_2 = T|_{r=R_2}$  – температура внешней поверхности слоя.

В этих условиях температурное поле шарового слоя будет изменяться только в радиальном направлении, и задача теплопроводности в сферических координатах будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = 0; \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}
-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_1} &= \alpha_1 (T_{CP1} - T_1); \\
-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_2} &= \alpha_2 (T_2 - T_{CP2}).
\end{aligned}
\tag{4.29}$$

Решение уравнения теплопроводности (4.28) имеет вид:

$$T(r) = C_2 - \frac{C_1}{r}, \tag{4.30}$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования, определяемые с помощью граничных условий (4.29). Поскольку  $\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$ , то граничные условия (4.29) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
-\lambda \frac{C_1}{R_1^2} &= \alpha_1 \left( T_{CP1} - C_2 + \frac{C_1}{R_1} \right); \\
-\lambda \frac{C_1}{R_2^2} &= \alpha_2 \left( C_2 - \frac{C_1}{R_2} - T_{CP2} \right).
\end{aligned}
\tag{4.31}$$

Упростим решение поставленной задачи, воспользовавшись условием (4.27) и предположив, что температуры поверхностей шарового слоя  $T_1$  и  $T_2$  известны.

Тогда  $T_1 = C_2 - \frac{C_1}{R_1}$ ,  $T_2 = C_2 - \frac{C_1}{R_2}$ , откуда:

$$C_1 = -\frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}; \quad C_2 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \cdot \frac{1}{r}.$$

Следовательно,

$$T(r) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right). \tag{4.32}$$

Тепловой поток, переносимый теплопроводностью через текущую сферическую поверхность шарового слоя, одинаков для любой такой поверхности и, в соответствии с законом Фурье, равен

$$P_T = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\lambda \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = 4\pi\lambda R_1 R_2 \frac{T_1 - T_2}{R_2 - R_1}.$$

Величина  $R_{ТШ\ ВНУТ} = \frac{T_1 - T_2}{P_T} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\lambda R_1 R_2}$  есть внутреннее тепловое сопротивление шарового слоя. Его можно вычислить и с помощью электротепловой аналогии:

$$R_{ТШ\ ВНУТ} = \int \frac{d\ell}{\lambda S(\ell)} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\lambda \cdot 4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\lambda R_1 R_2}.$$

Теперь, используя условие (4.27), можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{P_T}{4\pi R_1^2 \alpha_1} &= T_{CP1} - T_1; \\ P_T \frac{(R_2 - R_1)}{4\pi\lambda R_1 R_2} &= T_1 - T_2; \\ \frac{P_T}{4\pi R_2^2 \alpha_2} &= T_2 - T_{CP2}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Складывая почленно уравнения в системе (4.33), получим

$$P_T \left[ \frac{1}{4\pi R_1^2 \alpha_1} + \frac{R_2 - R_1}{4\pi\lambda R_1 R_2} + \frac{1}{4\pi R_2^2 \alpha_2} \right] = T_{CP1} - T_{CP2}.$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, есть полное тепловое сопротивление шарового слоя:

$$R_{ТШ} = \frac{1}{4\pi R_1^2 \alpha_1} + \frac{R_2 - R_1}{4\pi\lambda R_1 R_2} + \frac{1}{4\pi R_2^2 \alpha_2}. \tag{4.34}$$

Пользуясь методом тепловых схем (цепочка последовательно соединенных сопротивлений), выражение (4.34) нетрудно обобщить для случая многослойной шаровой стенки:

$$R_{ТШ} = \frac{1}{4\pi R_1^2 \alpha_1} + \sum_{i=1}^N \frac{R_{i+1} - R_i}{4\pi\lambda_i R_i R_{i+1}} + \frac{1}{4\pi R_{N+1}^2 \alpha_2}, \tag{4.35}$$

где  $i = 1, 2 \dots N$  – номер слоя шаровой стенки,  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности слоя с номером  $i$ ,  $R_1$  – радиус внутренней поверхности стенки,  $R_{N+1}$  – радиус внешней ( $N+1$ ) поверхности стенки.

Дополняя систему (4.33) уравнением  $P_T \frac{(R_{i+1} - R_i)}{4\pi\lambda_i R_i R_{i+1}} = T_i - T_{i+1}$ ,

определяющим тепловой поток в  $i$ -м шаровом слое, нетрудно с ее помощью определить значения  $T_i$  температур всех поверхностей сопряжения многослойной шаровой стенки, а потом с помощью (4.32) вычислить распределение температуры по толщине каждого слоя.

В заключении еще раз отметим, что выражения (4.10), (4.20) и (4.35) для полных тепловых сопротивлений плоской, цилиндрической и шаровой стенок можно получить без решения соответствующих задач теплопроводности, используя определение теплового сопротивления однородного участка

тепловой цепи  $R_T = \int_1^2 \frac{dl}{\lambda S(l)}$  и тот факт, что, согласно закону Ньютона,

тепловое сопротивление конвективной теплоотдаче есть  $R_{T\alpha} = \frac{1}{\alpha S}$ , где  $\alpha$  – коэффициент конвективной теплоотдачи,  $S$  – площадь соответствующей теплоотдающей поверхности, а отдельные тепловые сопротивления элементов рассмотренных стенок соединены последовательно.

## 5 ИНТЕНСИФИКАЦИЯ ТЕПЛООБМЕНА ЗА СЧЕТ ОРЕБРЕНИЯ ТЕПЛООТДАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Тепловое сопротивление конвективной теплоотдаче  $R_{T\alpha}$  определяется из закона Ньютона (3.11):

$$P_T = \alpha(T_S - T_{CP}) \cdot S \Rightarrow R_{T\alpha} = \frac{T_S - T_{CP}}{P_T} = \frac{1}{\alpha S}, \quad (5.1)$$

где, как и ранее,  $T_S$  – температура теплоотдающей поверхности,  $T_{CP}$  – температура среды,  $\alpha$  – коэффициент конвективной теплоотдачи с поверхности  $S$  в окружающую среду.

Из (5.1) следует, что для уменьшения теплового сопротивления конструкции электронного устройства, уменьшение величины  $R_{T\alpha}$ , как конечного теплового сопротивления тепловой цепи, возможно следующими путями: 1) увеличением коэффициента  $\alpha$ , например, за счет увеличения скорости омывающей среды; 2) развитием поверхности  $S$  теплообмена за счет ее оребрения; 3) обоими путями совместно.

Первый путь связан с применением дополнительных технических устройств, обеспечивающих вынужденную конвекцию. Второй путь связан с ростом габаритов и массы устройства. На практике оба указанных технических приема часто применяют совместно.

Оребренные поверхности или *радиаторы* изготавливаются из высоко теплопроводного металла (дюралюминий, медь, силумин, латунь) штамповкой или отливкой (реже фрезерованием). Высокая теплопроводность материала

ребра необходима для минимизации его внутреннего теплового сопротивления процессу теплопроводности.

Конкретное конструктивное исполнение радиатора зависит от его предназначения в конкретном устройстве. Типовые радиаторы, используемые в радиоэлектронной аппаратуре, показаны на рис. 5.1. Видно, что в таких радиаторах развитие поверхности теплообмена осуществлено ребрами в виде пластин и штырьков цилиндрической или конусообразной формы.



Рисунок 5.1 – Примеры конструктивного исполнения радиаторов для твердотельных радиоэлектронных устройств (*Internet* – источники)

Строгое решение задачи о распространении тепла в оребренной поверхности громоздко и сложно. Поэтому при тепловом моделировании для расчета теплового сопротивления радиатора применяют некоторые допущения, которые позволяют получить результат относительно простым путем. Ниже будут рассмотрены задачи о распространении тепла в радиаторах с ребрами простой геометрической формы.

## 5.1 Перенос тепла через прямое ребро с постоянным поперечным сечением

Рассмотрим ребро в виде прямоугольного параллелепипеда с размерами:  $B$  и  $\delta_p$  – ширина и толщина ребра,  $L$  – высота ребра, см. рис. 5.2. Ребро изготовлено из материала с теплопроводностью  $\lambda$  и идеально в тепловом отношении закреплено на некоторой поверхности своим основанием с площадью  $S = B \cdot \delta_p$  – площадью поперечного сечения ребра. Величина  $p = 2(B + \delta_p)$  есть периметр этого поперечного сечения.

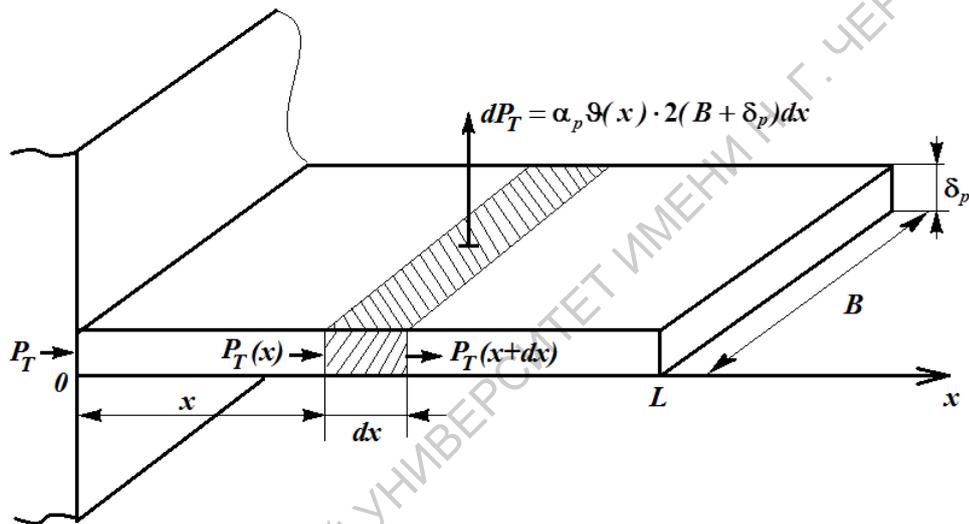


Рисунок 5.2 – Прямоугольное ребро с постоянным поперечным сечением

Для решения задачи о переносе тепла через такое ребро введем в рассмотрение координатную ось  $0x$ , направленную по высоте ребра, и предположим, что ребро омывает среда с постоянной температурой  $T_{CP}$  и коэффициентом конвективного теплообмена  $\alpha_p$ , а температура основания ребра (при  $x=0$ ) равна  $T_S$  – температуре поверхности, на которой ребро закреплено ( $T_S > T_{CP}$ ). Также предположим, что размер  $\delta$  (толщина ребра) мал настолько, что, в силу высокой теплопроводности материала ребра, перепадом температур в каждом поперечном сечении ребра можно пренебречь. Тогда температура ребра является функцией только координаты  $x$ :  $T = T(x)$ .

Определим избыточную текущую температуру ребра как величину  $\vartheta(x) = T(x) - T_{CP}$ . Тогда избыточная температура основания ребра  $\vartheta_0 = \vartheta|_{x=0} = T_S - T_{CP}$ .

На расстоянии  $x$  от основания ребра выделим его элемент с высотой  $dx$  – заштрихованная область на рис. 5.2. Составим для этого элемента уравнение теплового баланса. В выделенный элемент теплопроводностью поступает тепловой поток  $P_T(x)$ , с внешней поверхности выделенного элемента в среду конвекцией рассеивается тепловой поток  $dP_T$ , малый в силу малости внешней теплоотдающей поверхности выделенного элемента, наконец, в оставшуюся часть ребра из выделенного элемента теплопроводностью поступает поток  $P_T(x+dx)$ . Следовательно,  $P_T(x) - P_T(x+dx) = dP_T$ .

Тепловой поток определяется законом теплопроводности Фурье

$$P_T(x) = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} S. \quad (5.2)$$

Разлагая в формуле (5.2) избыточную температуру в ряд Тейлора для определения ее в точке  $x+dx$  и ограничиваясь в нем двумя слагаемыми, получим

$$P_T(x+dx) = -\lambda \frac{d}{dx} \left( \vartheta(x) + \frac{d\vartheta}{dx} \cdot dx \right) \cdot S = -\lambda S \left( \frac{d\vartheta}{dx} + \frac{d^2\vartheta}{dx^2} dx \right).$$

Следовательно, с одной стороны,  $dP_T = P_T(x) - P_T(x+dx) = \lambda S \frac{d^2\vartheta}{dx^2} dx$ , а с другой, согласно закону конвективного теплообмена Ньютона,  $dP_T = \alpha_p \vartheta(x) \cdot p dx$ , где  $p dx$  – площадка конвективной теплоотдачи выделенного элемента (на рисунке 5.2  $p dx = 2(B + \delta_p) \cdot dx$ ).

Таким образом, дифференциальное уравнение, описывающее распределение температуры в прямом ребре с постоянным прямоугольным поперечным сечением, выглядит следующим образом:

$$\lambda S \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \alpha_p \vartheta(x) p \quad \text{или} \quad \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = m^2 \vartheta, \quad (5.3)$$

где  $m = +\sqrt{\frac{\alpha_p p}{\lambda S}}$  – вспомогательный параметр, имеющий размерность 1/м и введенный в рассмотрение для удобства. Решение уравнения (5.3) имеет вид:

$$\vartheta(x) = C_1 \cdot e^{-mx} + C_2 \cdot e^{-m(L-x)}, \quad (5.4)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования. Определим их, исходя из следующего:

- 1) температура основания ребра известна, то есть  $\vartheta|_{x=0} = \vartheta_0 = C_1 + C_2 \cdot e^{-mL}$ ,

2) тепловым потоком, рассеиваемым в среду с противоположного торца ребра (при  $x=L$ ) можно пренебречь в силу малости поверхности торца, то есть  $-\lambda \frac{d\vartheta}{dx}\Big|_{x=L} = 0$  или  $-C_1 \cdot e^{-mL} + C_2 = 0$ .

Используя эти граничные условия, нетрудно определить произвольные постоянные и записать в явном виде распределение избыточной температуры ребра по его высоте:

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \frac{e^{-mx} - e^{-m(2L-x)}}{1 + e^{-2mL}}. \quad (5.5)$$

Тепловой поток, рассеиваемый ребром в среду, равен потоку, поступающему в ребро через его основание:

$$P_T = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx}\Big|_{x=0} \cdot S = \lambda m S \cdot \vartheta_0 \frac{1 - e^{-2mL}}{1 + e^{-2mL}} = \lambda m S \cdot \vartheta_0 th(mL). \quad (5.6)$$

Подставляя в (5.6) выражение для параметра  $m$ , получим окончательное выражение для тепловой мощности, рассеиваемой ребром в окружающую среду:

$$P_T = \vartheta_0 \sqrt{\alpha_p \lambda p S} \cdot th(mL). \quad (5.7)$$

Опираясь на выражение (5.7), можно ввести в рассмотрение величину теплового сопротивления ребра:

$$R_{TP} = \frac{\vartheta_0}{P_T} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_p \lambda p S} \cdot th(mL)} = \frac{1 + e^{-2mL}}{\sqrt{\alpha_p \lambda p S} \cdot (1 - e^{-2mL})}. \quad (5.8)$$

Замечания.

1. Теплоотдачу с торца ребра, противоположного его основанию, можно учесть, применяя в формулах (5.5) – (5.8) вместо длины  $L$  ребра его эффективную длину  $L^*$ , увеличивающую площадь его боковой поверхности на величину площади торца [4]:

$$L^* = L + \frac{S}{p}. \quad (5.9)$$

2. Выражения (5.5) – (5.8) могут быть применены к прямому ребру с любой по конфигурации, но постоянной по величине площади поперечного сечения. В частности, эти выражения справедливы для часто используемых на практике ребер в виде прямых цилиндров (штыревые радиаторы). Необходимо только, чтобы размеры сечения удовлетворяли требованию малости температурных перепадов между любыми точками сечения. Сделать это можно с помощью так называемого критерия Био [1, 2]:

$$Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda} = \frac{\delta / \lambda}{1 / \alpha}, \quad (5.10)$$

где  $\delta$  – характерный размер твердого тела, в направлении которого распространяется тепловой поток,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности данного тела,  $\alpha$  – коэффициент конвективной теплоотдачи с поверхности тела, рассеивающей тепловой поток в окружающую среду.

Критерий Био, как это видно из (5.10), представляет собой отношение внутреннего теплового сопротивления твердого тела к тепловому сопротивлению конвективной теплоотдаче (внешнему тепловому сопротивлению). Поэтому, если значение критерия Био мало (практически  $Bi < 0,1$ ), то внутреннее тепловое сопротивление тела существенно меньше его внешнего теплового сопротивления. Следовательно, и перепад температур по телу много меньше температурного перепада между поверхностью тела и окружающей средой. Таким образом, требование к толщине ребра  $\delta$  на основе условия о практической изотермичности поперечного сечения можно выразить следующим образом:

$$\frac{\alpha_p}{\lambda} \cdot \frac{\delta_p}{2} < 0,1. \quad (5.11)$$

Значение  $\delta_p/2$  введено в (5.11) по той причине, что максимальная температура каждого поперечного сечения, очевидно, достигается в его центре.

Если значение критерия Био велико (практически  $Bi > 100$ ), то внешнее тепловое сопротивление тела мало по сравнению с внутренним, температура поверхности тела практически равна температуре окружающей среды, и подавляющая доля температурного перепада сосредоточена внутри тела.

3. Для плоского ребра его толщина значительно меньше ширины ( $\delta_p \ll B$ ). Тогда периметр ребра  $p \approx 2B$  и значение параметра  $m$  приближенно можно представить как

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_p p}{\lambda S}} \approx \sqrt{\frac{2\alpha_p B}{\lambda \delta_p B}} = \sqrt{\frac{2\alpha_p}{\lambda \delta_p}}. \quad \text{Подставим это выражение в формулу (5.6) для расчета}$$

тепловой мощности, рассеиваемой ребром, и умножим на единицу вида  $\frac{2L\delta_p\alpha_p}{2L\delta_p\alpha_p}$ .

Получим:

$$\begin{aligned}
P_T &= \lambda m S \cdot \mathfrak{G}_0 th(mL) \approx \lambda B \delta_p \sqrt{\frac{2\alpha_p}{\lambda \delta_p}} \cdot \left( \frac{2L\delta_p\alpha_p}{2L\delta_p\alpha_p} \right) \mathfrak{G}_0 th \left( L \frac{\delta_p}{\delta_p} \sqrt{\frac{2\alpha_p}{\lambda \delta_p}} \right) = \\
&= \mathfrak{G}_0 \alpha_p (2BL) \frac{th \left( \frac{L}{\delta_p} \sqrt{\frac{2\alpha_p \delta_p}{\lambda}} \right)}{\frac{L}{\delta_p} \sqrt{\frac{2\alpha_p \delta_p}{\lambda}}}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Величина, стоящая в (5.12) под знаком корня, представляет собой критерий Био для ребра, а значение  $S_{\text{БОК}} = 2BL$  есть площадь боковой теплоотдающей поверхности ребра (с учетом малости его толщины). Поэтому формулу (5.12) перепишем в виде

$$P_T = \mathfrak{G}_0 \alpha_p S_{\text{БОК}} \frac{th \left( \frac{L}{\delta_p} \sqrt{2Bi} \right)}{\frac{L}{\delta_p} \sqrt{2Bi}}.$$

Величина  $E = \frac{th \left( \frac{L}{\delta_p} \sqrt{2Bi} \right)}{\frac{L}{\delta_p} \sqrt{2Bi}}$  называется коэффициентом эффективности ребра.

Она стремится к максимальному значению, равному единице, при  $\frac{L}{\delta_p} \sqrt{2Bi} \rightarrow 0$ .

Следовательно, одно из главных требований для повышения эффективности оребрения есть требование изготовления ребер из материала с высокой теплопроводностью.

Пользуясь коэффициентом эффективности, можно записать выражения для теплового потока, рассеиваемого ребром, и теплового сопротивления ребра следующим образом:

$$P_T = \mathfrak{G}_0 \alpha_p S_{\text{БОК}} E; \quad R_{TP} = \frac{1}{\alpha_p S_{\text{БОК}} E}. \tag{5.13}$$

## 5.2 Внешнее тепловое сопротивление оребренной плоской стенки

Пусть на одной поверхности плоской стенки с площадью  $S_{\text{П}}$  расположено  $N$  плоских ребер, аналогичных рассмотренным в предыдущем разделе, см. рис. 5.3. На противоположной поверхности стенки действует тепловой источник с мощностью  $P_T$ . Вся эта мощность конвективно рассеивается в среду с оребренной поверхности. Введем в рассмотрение два коэффициента конвективной теплоотдачи:  $\alpha_p$  – коэффициент теплоотдачи с поверхности ребра

и  $\alpha_c$  – коэффициент теплоотдачи с неоребренной поверхности стенки с площадью  $S_c = S_{II} - N \cdot S$ , где  $S$  площадь поперечного сечения одного ребра.

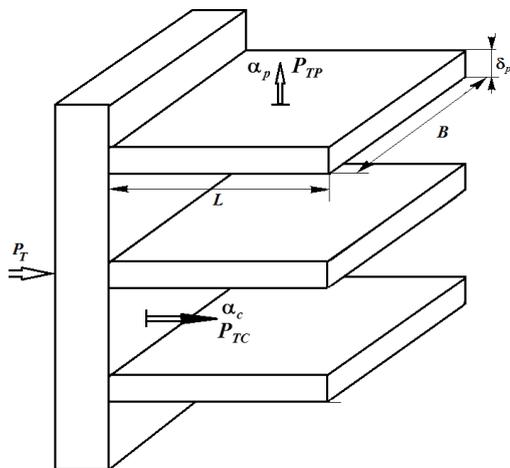


Рисунок 5.3 – Модель стенки с прямыми ребрами

Тепловую мощность  $P_T$  можно представить в виде суммы тепловой мощности  $P_{TP}$ , рассеиваемой в среду всеми ребрами, и тепловой мощности  $P_{TC}$ , рассеиваемой в среду свободной от оребрения поверхностью стенки:

$$\begin{aligned} P_{TP} &= N \cdot \vartheta_0 \sqrt{\alpha_p \lambda p S} \cdot th(mL); \\ P_{TC} &= \alpha_c \cdot \vartheta_0 \cdot S_{II}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где сохранены все введенные ранее обозначения. Если учесть, что тепловое сопротивление одного плоского ребра определяется выражением (5.8), тепловое сопротивление потоку  $P_{TC}$  определяется выражением (5.1) и эти сопротивления в тепловой схеме конвективной теплоотдачи соединены параллельно, то результирующее внешнее тепловое сопротивление оребренной стенки можно выразить в виде:

$$R_{T\alpha \text{ рез}} = \frac{\left( \frac{R_{TP}}{N} \right) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_c S_c} \right)}{\left( \frac{R_{TP}}{N} \right) + \left( \frac{1}{\alpha_c S_c} \right)} = \frac{R_{TP}}{\alpha_c S_c R_{TP} + N}. \quad (5.15)$$

Или для поверхности, оребренной плоскими ребрами:

$$R_{T\alpha \text{ рез}} = \frac{1}{N \cdot \sqrt{\alpha_p \lambda p S} \cdot th(mL) + \alpha_c S_c}. \quad (5.15 a)$$

Отметим, что выражение (5.15) справедливо и при оребрении стенки одинаковыми ребрами любой конфигурации. Необходимо только конкретизировать величину теплового сопротивления  $R_{TP}$  отдельного ребра.

Для решения задачи теплопроводности с граничными условиями 3-го рода в теле, теплоотдающая поверхность  $S_{II}$  которого оребрена, удобно ввести в рассмотрение эффективный коэффициент конвективной теплоотдачи  $\alpha_{\text{ЭФ}}$ , усреднённо учитывающий наличие оребрения. Для этого  $R_{T\alpha_{\text{рез}}}$  нужно

представить в виде  $R_{T\alpha_{\text{рез}}} = \frac{1}{\alpha_{\text{ЭФ}} S_{II}}$ , откуда

$$\alpha_{\text{ЭФ}} = \frac{N + \alpha_c S_c R_{TP}}{R_{TP} \cdot S_{II}}. \quad (5.16)$$

Тогда для оребрения плоскими ребрами

$$\alpha_{\text{ЭФ}} = \frac{N \cdot \sqrt{\alpha_p \lambda p S} \cdot th(mL) + \alpha_c S_c}{S_{II}}. \quad (5.16 a)$$

#### 5.4 Ребро с минимальной массой

Эффективное ребро можно определить как ребро, каждая часть которого рассеивала бы тепловой поток с одинаковым эффектом. Это означает, что во всех поперечных сечениях ребра плотность теплового потока  $q$  остается постоянной, а линии тока теплового потока должны быть параллельными оси ребра. В этом случае из закона теплопроводности Фурье следует, что температура по оси (высоте) ребра будет изменяться по линейному закону. Определим для данных условий конфигурацию боковой поверхности ребра [2].

Для удобства вычислений, как и ранее, ось  $Ox$  направим по высоте ребра, но начало отсчета перенесем из основания ребра в его вершину. Обозначим через  $\lambda$  коэффициент теплопроводности материала ребра. При заданной температуре основания ребра  $T_S$  (температура стенки) и при температуре вершины ребра, практически равной температуре окружающей среды  $T_{CP}$  в силу предполагаемой его эффективности, для любого поперечного сечения ребра можно записать:

$$T(x) - T_{CP} = \frac{x}{L} (T_S - T_{CP}), \quad (5.17)$$

где  $L$  – высота ребра. Действительно, если  $q = const$ , то  $\frac{dT}{dx} = const$ , и распределение температуры по высоте ребра с отсчетом координаты  $x$  от вершины меняется по линейному закону (5.17).

Рассмотрим элемент поверхности ребра, расположенный на расстоянии  $x$  от вершины. Пусть этот участок образует с осью ребра угол  $\varphi$ . Тогда плотность теплового потока через данный элемент поверхности ребра будет равна  $q \sin \varphi$  и именно она будет конвективно рассеяна с этого элемента в окружающую среду, то есть  $q \sin \varphi = \alpha_p (T(x) - T_{CP}) = \frac{\alpha_p}{L} x (T_S - T_{CP})$ . Из последнего равенства следует, что угол  $\varphi$  является функцией только координаты  $x$ :

$$\sin \varphi = \frac{\alpha_p}{qL} x (T_S - T_{CP}) = \frac{\alpha_p \vartheta_0}{qL} x.$$

Тогда контур боковой поверхности ребра должен представлять собой дугу окружности с радиусом  $r = \frac{x}{\sin \varphi} = \frac{qL}{\alpha_p \vartheta_0}$ .

Данное ребро показано на рис. 5.4,а. В силу сложности изготовления таких ребер в радиоэлектронике используются ребра треугольного или трапециевидального профиля (рисунок 5.4,б). Тепловая мощность, рассеиваемая ребром треугольного профиля, определяется выражением

$$P_{Tp} = \frac{\alpha_p \delta_0 \vartheta_0 L}{\sqrt{z_0} \cdot \sin \varphi} \cdot \left[ \frac{I_1(2\sqrt{z_0})}{I_0(2\sqrt{z_0})} \right], \quad (5.18)$$

где введен вспомогательный параметр  $z_0 = \frac{\alpha_p L}{\lambda \sin \varphi}$ ,  $\delta_0$  – толщина ребра при основании,  $\vartheta_0$  – избыточная температура основания ребра, а  $I_0$  и  $I_1$  – модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков соответственно [7]. Ширина ребра (аналог размера  $B$  плоского ребра) в выражение (5.18) не входит.

Из (5.18) следует, что тепловое сопротивление треугольного ребра

$$R_{Tp} = \frac{\sqrt{z_0} \cdot \sin \varphi}{\alpha_p \delta_0 L} \cdot \frac{I_0(2\sqrt{z_0})}{I_1(2\sqrt{z_0})}. \quad (5.19)$$

Наконец, максимальный тепловой поток через ребро треугольного профиля заданной массы будет иметь место при выполнении следующего условия [3]:

$$\frac{2L}{\delta_0} = 1,309 \cdot \sqrt[3]{\frac{2\lambda}{\alpha_p \delta_0}}. \quad (5.19)$$

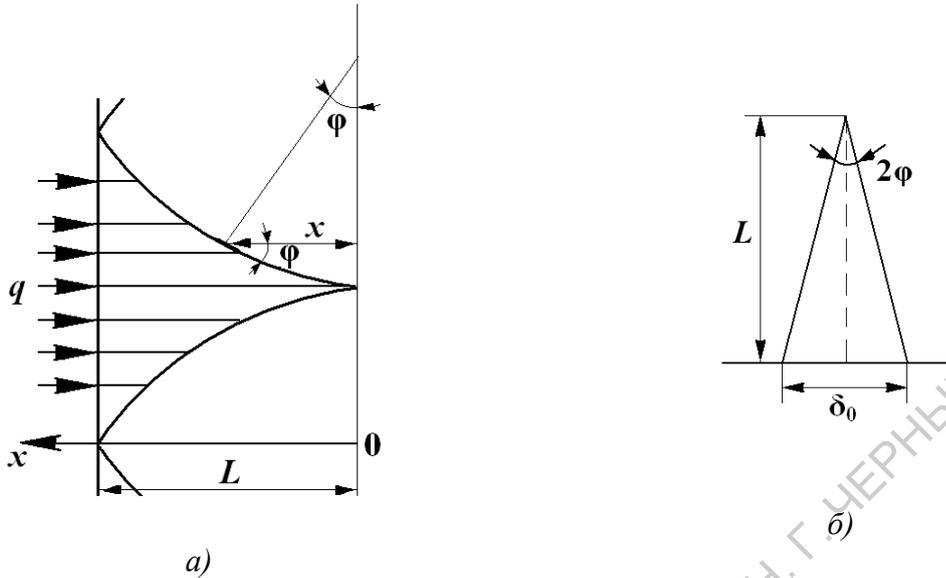


Рисунок 5.4 – Ребро с цилиндрической огибающей поверхностью (а) и ребро треугольного профиля (б)

## 6 СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТЕЛАХ ПРОСТОЙ ГЕОМЕТРИИ С ВНУТРЕННИМИ ТЕПЛОВЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

### 6.1 Плоская стенка с внутренним тепловыделением

Рассмотрим плоскую однородную стенку толщиной  $\delta$ . Как и ранее (параграф 4.1) будем считать, что толщина стенки много меньше двух других ее размеров и краевыми эффектами на удаленных границах стенки можно пренебречь. Однако теперь в стенке действуют внутренние источники тепла, равномерно распределенные по ее объему.

Выделим в стенке ее элемент с площадью боковой поверхности  $S$  (с одной стороны). Пусть в этом элементе выделяется тепловая мощность  $P_T$ . Следовательно, объемная плотность тепловыделения в стенке  $W = P_T / (\delta \cdot S)$ .

Боковые поверхности стенки омываются жидкой или газообразной средой с температурой  $T_{CP}$ . Поэтому тепловая мощность, выделяемая в стенке, конвективно рассеивается в окружающую среду, причем коэффициент конвективной теплоотдачи ( $\alpha_1$ ) на одной поверхности стенки примем отличным от такового на другой поверхности ( $\alpha_2$ ).

В этих условиях температурное поле стенки будет зависеть только от одной пространственной переменной  $x$ , изменяющейся в направлении по

толщине стенки. Начало отсчета по оси  $Ox$  поместим на левой поверхности стенки, тогда координата ее правой поверхности будет  $x=\delta$  (рис. 6.1).

Для определения температурного поля стенки необходимо решить уравнение (3.7) в одномерном приближении с граничными условиями 3-го рода (3.11) на поверхностях стенки:

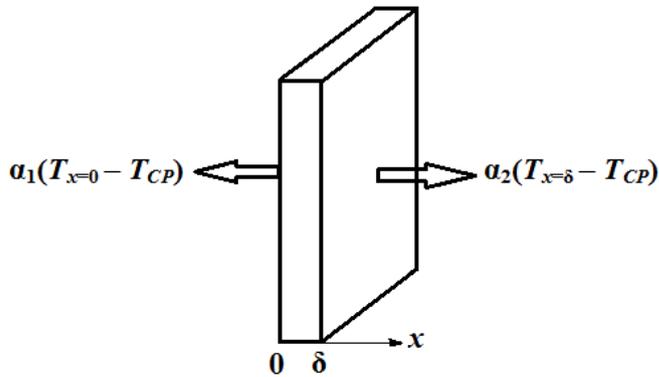


Рисунок 6.1 – К определению температурного поля однородной плоской стенки с внутренним тепловыделением

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + W = 0; \quad (6.1)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_1 \cdot (T|_{x=0} - T_{CP}); \quad (6.2)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = \alpha_2 \cdot (T|_{x=\delta} - T_{CP}).$$

Заметим, что температура среды, омывающей рассматриваемую стенку, задана одинаковой со всех ее сторон. В подобных ситуациях при решении задач теплопроводности удобно вводить так называемую избыточную по отношению к окружающей среде температуру рассматриваемого объекта. Воспользуемся этим приемом и введем избыточную температуру стенки:

$$\vartheta(x) = T(x) - T_{CP}. \quad (6.3)$$

Тогда (6.1) и (6.2) можно переписать следующим образом:

$$\lambda \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + W = 0; \quad (6.4)$$

$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_1 \cdot \vartheta|_{x=0}; \quad (6.5)$$

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = \alpha_2 \cdot \vartheta|_{x=\delta}.$$

Видно, что путем введения избыточной температуры в граничных условиях (6.5) мы избавились от лишних постоянных слагаемых – сравнить с (6.2).

Решение дифференциального уравнения (6.4) не вызывает сложностей и представляет собой параболическую функцию координаты  $x$ . Действительно:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dx} &= -\frac{W \cdot x}{\lambda} + C_1; \\ \vartheta(x) &= -\frac{W \cdot x^2}{2\lambda} + C_1 x + C_2, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования, определяемые с помощью граничных условий (6.5). Подставляя (6.6) в (6.5), получим систему из двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{aligned} \lambda \cdot C_1 &= \alpha_1 \cdot C_2; \\ W \cdot \delta - \lambda \cdot C_1 &= -\frac{W \cdot \delta^2}{2\lambda} \alpha_2 + C_1 \cdot \delta \cdot \alpha_2 + \alpha_2 \cdot C_2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

После определения можно записать распределение избыточной температуры по толщине стенки:

$$\vartheta(x) = \frac{W \cdot \delta \cdot (2\lambda + \alpha_2 \cdot \delta)}{2\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\delta \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2} \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} x + 1 \right) - \frac{W \cdot x^2}{2\lambda}. \quad (6.8)$$

Или:

$$T(x) = \frac{W \cdot \delta \cdot (2\lambda + \alpha_2 \cdot \delta)}{2\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\delta \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2} \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} x + 1 \right) - \frac{W \cdot x^2}{2\lambda} + T_{CP}. \quad (6.8,a)$$

## 6.2 Задача о температурном поле длинного одножильного прямого провода в изоляции

Пусть имеется одножильный прямой провод в изоляционной оболочке. По проводу протекает постоянный ток силой  $I$ . Удельное электрическое сопротивление провода  $\rho_{\Omega}$ . Требуется определить стационарное распределение температуры по сечению провода, если он находится в жидкой или газообразной среде с температурой  $T_{CP}$ , а коэффициент конвективной теплоотдачи с его поверхности в среду (с поверхности изоляции) равен  $\alpha$ .

Теплофизическая модель провода представляет собой прямой сплошной цилиндр (центральная жила провода), охваченный цилиндрической стенкой (изоляция), см. рис. 6.2.

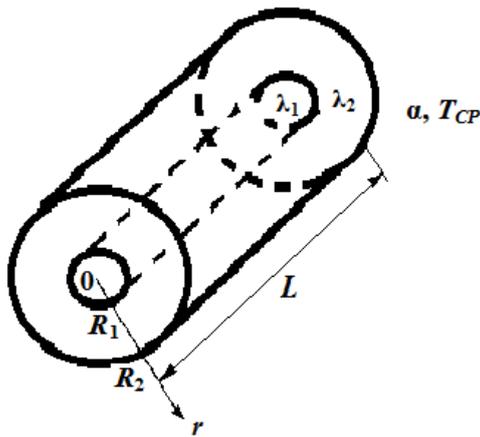


Рисунок 6.2 – Теплофизическая модель прямого провода в изоляции

Зададим геометрические и теплофизические параметры модели:

$R_1$  – радиус металлической жилы провода,

$R_2$  – внешний радиус изоляции,

$L$  – длина выбранного элемента провода,

$\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности металлической жилы и изоляции соответственно,

$W = \frac{P_T}{\pi \cdot R_1^2 \cdot L}$  – объемная плотность тепловыделения в выбранном элементе

провода, где  $P_T = I^2 \cdot \frac{\rho_{\text{Э}} \cdot L}{\pi \cdot R_1^2}$ .

В этих условиях температурное поле провода будет изменяться только в радиальном направлении, и задача теплопроводности в цилиндрической системе координат будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT_1(r)}{dr} + \frac{W}{\lambda} &= 0 \text{ для } 0 \leq r \leq R_1; \\ \frac{d^2 T_2(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT_2(r)}{dr} &= 0 \text{ для } R_1 \leq r \leq R_2, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где  $T_1(r)$  описывает распределение температуры в центральной жиле провода, а  $T_2(r)$  – в слое изоляции.

На оси симметрии провода зададим граничное условие в виде формального условия адиабатичности:

$$\left. \frac{dT_1}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (6.10)$$

На поверхности контакта металлического проводника с изоляцией при  $r=R_1$  задаются граничные условия 4-го рода:

$$\begin{aligned} T_1|_{r=R_1} &= T_2|_{r=R_1}; \\ \lambda_1 \frac{dT_1}{dr} \Big|_{r=R_1} &= \lambda_2 \frac{dT_2}{dr} \Big|_{r=R_1}; \end{aligned} \quad (6.11)$$

Наконец, на внешней поверхности изоляции необходимо задать условие конвективного теплообмена провода с окружающей средой:

$$-\lambda_2 \frac{dT_2}{dr} \Big|_{r=R_2} = \alpha \cdot (T_2|_{r=R_2} - T_{CP}). \quad (6.12)$$

Переформулируем граничную задачу (6.10) – (6.12) в терминах избыточной температуры  $\vartheta_1(r) = T_1(r) - T_{CP}$  и  $\vartheta_2(r) = T_2(r) - T_{CP}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vartheta_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\vartheta_1(r)}{dr} + \frac{W}{\lambda} &= 0 \text{ для } 0 \leq r \leq R_1; \\ \frac{d^2\vartheta_2(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\vartheta_2(r)}{dr} &= 0 \text{ для } R_1 \leq r \leq R_2; \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\frac{d\vartheta_1}{dr} \Big|_{r=0} = 0; \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_1|_{r=R_1} &= \vartheta_2|_{r=R_1}; \\ \lambda_1 \frac{d\vartheta_1}{dr} \Big|_{r=R_1} &= \lambda_2 \frac{d\vartheta_2}{dr} \Big|_{r=R_1}; \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$-\lambda_2 \frac{d\vartheta_2}{dr} \Big|_{r=R_2} = \alpha \cdot \vartheta_2|_{r=R_2}. \quad (6.16)$$

Как и в предыдущем случае (подраздел 6.1) это избавляет от лишнего слагаемого в граничном условии 3-го рода.

Решение задачи (6.13) – (6.16) достаточно простое. Поскольку

$$\frac{d^2\vartheta(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\vartheta(r)}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\vartheta}{dr} \right), \text{ то:}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_1(r) &= -\frac{Wr^2}{4\lambda_1} + C_1 \cdot \ln(r) + C_2; \\ \vartheta_2(r) &= C_3 \cdot \ln(r) + C_4. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Постоянные  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$  определяются из граничных условий (6.14) – (6.16). Прямая подстановка решения (6.17) в данные граничные условия приводит к системе алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными. Правда для данной задачи условие (6.14) сразу определяет:  $C_1=0$ . Тем не менее, остается система из трех уравнений:

$$\begin{aligned}
-\frac{W \cdot R_1^2}{4\lambda_1} + C_2 &= C_3 \cdot \ln(R_1) + C_4; \\
-\frac{W \cdot R_1}{2} &= \lambda_2 \cdot C_3 \cdot \ln(R_1); \\
-\lambda_2 \frac{C_3}{R_2} &= \alpha \cdot (C_3 \cdot \ln(R_2) + C_4).
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Конечно, решение системы (6.18) не является сложным. Тем не менее, для ее упрощения воспользуемся материалом параграфа 4.2.

Тепловое сопротивление слоя изоляции с учетом теплового сопротивления конвективной теплоотдаче имеет вид:

$$R_{T2} = R_{T \text{ изоляции}} = \frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{2\pi\alpha \cdot L \cdot R_2}. \tag{6.19}$$

Следовательно, поскольку величина тепловой мощности  $P_T$ , проходящий через этот слой, известна, нам известна и температура внутренней поверхности изоляции:

$$\vartheta_1|_{r=R_1} = T_1|_{r=R_1} - T_{CP} = P_T \cdot \left[ \frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{2\pi\alpha \cdot L \cdot R_2} \right]. \tag{6.20}$$

Но тогда из решения (6.17) с учетом  $C_1=0$  получаем:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(r=R_1) &= -\frac{W \cdot R_1^2}{4\lambda_1} + C_2 \Rightarrow \\
\Rightarrow C_2 &= \frac{W \cdot R_1^2}{4\lambda_1} + \vartheta_1|_{r=R_1}.
\end{aligned}$$

Или

$$C_2 = \frac{W \cdot R_1^2}{4 \cdot \lambda_1} + P_T \cdot \left[ \frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{2\pi\alpha \cdot L \cdot R_2} \right], \tag{6.21}$$

где для рассматриваемого примера  $P_T = \frac{I^2 \cdot \rho_{\text{Э}} \cdot L}{\pi \cdot R_1^2}$  и  $W = \frac{P_T}{\pi \cdot R_1^2 \cdot L}$ .

Поэтому распределение температуры по сечению центральной жилы провода для  $0 \leq r \leq R_1$  будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(r) &= \frac{W \cdot (R_1^2 - r^2)}{4 \cdot \lambda_1} + P_T \cdot \left[ \frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{2\pi\alpha \cdot L \cdot R_2} \right] \text{ или} \\
T_1(r) &= T_{CP} + P_T \cdot \left[ \frac{R_1^2 - r^2}{4 \cdot \pi \cdot R_1^2 \cdot L \cdot \lambda_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{2\pi\alpha \cdot L \cdot R_2} \right].
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Распределение температуры по толщине слоя изоляции ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ) легко найти по формуле (4.22) раздела 4:

$$T_2(r) = T|_{r=R_1} - \left( T|_{r=R_1} - T|_{r=R_2} \right) \cdot \frac{\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}, \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad (6.23)$$

где  $T|_{r=R_1} = \vartheta_1|_{r=R_1} + T_{CP}$  определяется по (6.20), а  $T|_{r=R_2}$  определяется из условия конвективного теплообмена на поверхности изоляции по известной тепловой мощности рассеяния:

$$P_T = \alpha \cdot \left( T|_{r=R_2} - T_{CP} \right) \cdot S \Rightarrow T|_{r=R_2} = \frac{P_T}{\alpha \cdot S} + T_{CP}. \quad (6.24)$$

## 7 МНОГОМЕРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТЕЛАХ КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

При анализе тепловых режимов радиоэлектронных систем отдельным классом выделяют микроэлектронную аппаратуру (МЭА). Эта аппаратура имеет ярко выраженную иерархическую структуру (от микросхемы и микросборки до блока или стойки) и при работе в земных условиях ее температура обычно не превышает  $150^\circ\text{C}$ . Поэтому при описании процессов теплообмена можно использовать линейные модели МЭА (то есть модели с физическими параметрами, считающимися независимыми от температуры) с разной степенью детализации: от определения средней температуры блоков до расчета трехмерных температурных полей в микросхемах и микросборках, – не детализируя процессы лучистого теплообмена.

Выделяют 4 основных уровня компоновки МЭА [6]:

- 1) микросхемы, микросборки, дискретные элементы;
- 2) функциональные ячейки – обычно, печатные платы, на которых компонуются элементы первого уровня;
- 3) блоки, объединяющие в одной несущей конструкции пакет функциональных ячеек;
- 4) многоблочные конструкции (стойки, монтажные рамы и т.п.), в котором блоки компонуются в общем несущем основании.

Отвод тепла от активных элементов первого уровня осуществляется путем теплопроводности. Конвективным и лучистым теплообменом во внутренней полости корпуса микросборки пренебрегают. Задача анализа теплового режима таких конструкций сводится к расчету пространственных температурных полей в них. Задача оптимизации теплового режима состоит в выборе толщин и материалов различных слоев, способах крепления навесных элементов, размещения элементов на подложке и т.п., что обеспечит минимизацию температурных перепадов между активными элементами устройства и теплоотдающей поверхностью его корпуса.

Задача отвода тепла от корпуса решается либо самостоятельно, либо на следующем уровне компоновки.

Следовательно, для решения обеих задач необходимо определить температурное поле рассматриваемого объекта, то есть поставить и решить краевую задачу теплопроводности для него.

Рассмотрим следующий пример. На рис. 7.1 изображена сильно упрощенная модель транзистора в корпусном исполнении: активный кристалл припаян (приклеен) к подложке, которая, в свою очередь, размещена на основании корпуса. Вся конструкция закрыта герметизирующей крышкой, под которую, возможно, закачивается инертный газ. Разнообразные навесные элементы (построечные резисторы, емкости и индуктивности) на рисунке не показаны. Основная тепловая мощность  $P_T$  выделяется вблизи верхней поверхности полупроводникового кристалла. Температура этой области выше температуры окружающей среды, и тепловой поток  $P_T$  через элементы конструкции всеми возможными способами будет уходить в окружающую среду.

Условимся, что транзистор функционирует достаточно долго и находится в состоянии динамического равновесия с окружающей средой, а величина  $P_T$  соответствует значению непрерывной мощности тепловыделения. В этом приближении температурные перепады по элементам конструкции транзистора будут определяться условиями стационарной теплопередачи.

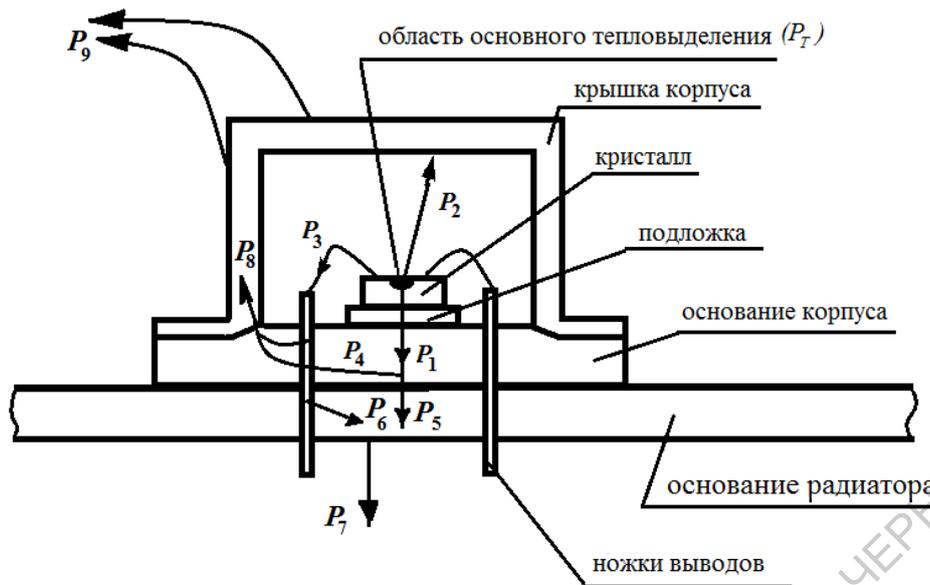


Рисунок 7.1 – Упрощенная модель транзистора в корпусном исполнении на радиаторе

Тепловая мощность  $P_T$ , выделяемая в локальной области полупроводникового кристалла, разделяется на три параллельных тепловых потока:  $P_1$  – тепловой поток, проходящий последовательно через тело полупроводникового кристалла и подложку и входящий в основание корпуса;  $P_2$  – тепловой поток, уходящий через газовую прослойку в крышку корпуса;  $P_3$  – тепловой поток, отводящий тепло от кристалла через выводы и ножки выводов. Проникнув в основание корпуса, тепловой поток  $P_1$  разделяется на две части: поток  $P_4$ , уходящий через основание корпуса в крышку корпуса, и поток  $P_5$ , уходящий в радиатор. Поток  $P_3$  также делится на две части: одна часть (на рисунке обозначена только стрелкой без символа  $P$ ) через основание корпуса уходит в крышку корпуса и совместно с потоком  $P_4$  образует результирующий поток  $P_8$ , поступающий из основания корпуса в крышку, а оставшаяся часть ( $P_6$ ) поступает в основание радиатора и вместе с потоком  $P_5$  образует поток  $P_7$ , рассеиваемый радиатором в окружающую среду. Потоки  $P_2$  и  $P_8$  образуют суммарный поток  $P_9$ , рассеиваемый крышкой корпуса.

Замечание 1. Распайка выводов в дискретных приборах, как правило, производится тонкой золотой проволокой. В принципе, часть тепловой мощности  $P_3$ , протекающей по проволоке, рассеивается в газовую среду. Кроме того, проволока обладает собственным омическим сопротивлением и, следовательно, является источником тепла. Однако собственным тепловыделением подводящих контактов и теплом, рассеиваемым ими в газовую среду, обычно пренебрегают. Отметим, что часто пренебрегают и всем потоком  $P_3$  по сравнению с потоком  $P_1$ . Тепловой поток  $P_2$  через газовую прослойку также существенно меньше потока  $P_1$ , так как условий

для эффективной конвекции в малом объеме пространства под крышкой корпуса нет, и перенос тепла по такой газовой прослойке осуществляется за счет ее теплопроводности.

Тепловая схема модели транзистора приведена на рис. 7.2.

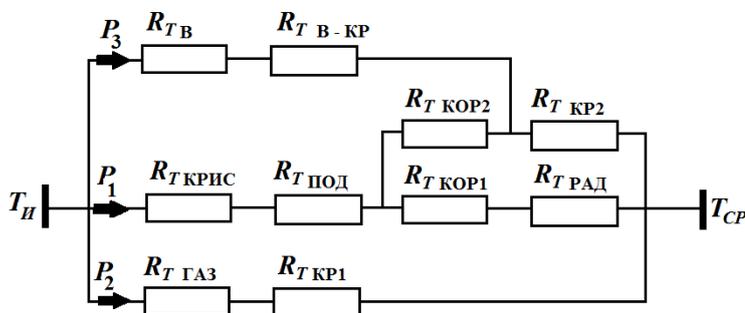


Рисунок 7.2 – Тепловая схема модели транзистора

На этом рисунке через  $T_{И}$  обозначена температура активной области полупроводникового кристалла (температура источника), а через  $T_{СР}$  – температура окружающей среды. Тепловые сопротивления элементов конструкции транзистора имеют следующие обозначения:

$R_{Т КРИС}$  – тепловое сопротивление полупроводникового кристалла,

$R_{Т ПОД}$  – тепловое сопротивление подложки (слоя припоя или клея),

$R_{Т КОР1}$  – тепловое сопротивление основания корпуса в направлении от подложки к радиатору,

$R_{Т РАД}$  – тепловое сопротивление радиатора с учетом сопротивления конвективному теплообмену с окружающей средой,

$R_{Т КОР2}$  – тепловое сопротивление основания корпуса в направлении от подложки к крышке,

$R_{Т ГАЗ}$  – тепловое сопротивление газовой прослойки под крышкой корпуса,

$R_{Т КР1}$  – тепловое сопротивление крышки корпуса в направлении от внутреннего объема к окружающей среде,

$R_{Т КР2}$  – тепловое сопротивление крышки корпуса в направлении от ее посадочного места до окружающей среды,

$R_{Т В}$  – результирующее тепловое сопротивление выводов,

$R_{Т В-КР}$  – тепловое сопротивление участка основания корпуса от вывода до посадочного места крышки.

Замечание 2. Величины  $R_{ТВ}$  и  $R_{ТВ-КР}$  представляют собой значения, определяемые параллельными соединениями соответствующих тепловых сопротивлений отдельных выводов.

Таким образом, рассчитав тепловые сопротивления отдельных конструктивных элементов транзистора и зная температуру окружающей среды

в условиях эксплуатации, можно определить температуру активной области полупроводникового кристалла. Расчетным путем можно провести и тепловую оптимизацию конструкции, исходя из требования, чтобы значение  $T_{II}$  не превосходило предельно допустимого для данного типа транзисторов.

Для оценочного расчета некоторых из перечисленных тепловых сопротивлений можно воспользоваться материалом разделов 4 – 6 настоящего пособия. Однако распределение температуры по телу полупроводникового кристалла потребует решения трехмерной задачи теплопроводности в силу значительной локализации тепловыделения в нем. Тепловые сопротивления подложки и основания корпуса часто тоже нельзя рассчитать, исходя из одномерной теплофизической модели. Наконец, исследование нестационарных тепловых процессов в элементах радиоэлектронных устройств также потребует постановку и решение краевой задачи теплопроводности типа (3.6) с соответствующими начальным и граничными условиями.

Один из методов аналитического решения задачи теплопроводности в частных производных рассмотрен ниже.

### **7.1 Решение краевой задачи теплопроводности методом интегральных преобразований**

Для *метода интегральных преобразований* (ИП) характерна та же область применения, что и для метода разделения переменных Фурье: метод применим только к линейным задачам с линейными граничными условиями, рассматриваемыми в простейших областях изменения независимых переменных. С этой точки зрения метод ИП не имеет преимуществ по сравнению с методом разделения переменных. Однако, методу ИП свойственна, во-первых, более простая техника вычисления и, во-вторых, возможность представления решения в нескольких формах (в смысле асимптотических решений), что часто бывает принципиально важным. В первом приближении идея метода ИП – это с помощью некоторого преобразования избавиться от дифференцирования по какой-либо переменной.

Интегральные преобразования делятся на два больших класса:

1. *ИП с бесконечными пределами интегрирования.* При решении уравнения типа уравнения теплопроводности среди этих преобразований чаще всего используют *преобразование Лапласа (по времени)*.

2. ИП с конечными пределами интегрирования. Этот класс преобразований связан только с пространственными переменными.

Определение: Преобразование, с помощью которого функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$  вещественных переменных  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ставится в соответствии функция

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \dots, x_n) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho_B(\xi) \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, \dots, x_n) \cdot K(\xi, \gamma) \cdot d\xi, \quad (7.1)$$

называют *интегральным преобразованием по переменной  $x_j$* . Функция  $F$  есть функция  $n-1$  вещественных переменных и параметра  $\gamma$ , который может быть и комплексным. Под интегралом переменная  $x_j$  обозначена через  $\xi$  для ее выделения. Пределы интегрирования  $\xi_1$  и  $\xi_2$  соответствуют области изменения переменной  $x_j$ :  $\xi_1 \leq x_j \leq \xi_2$ . Они могут быть конечными и бесконечными. Функция  $K(\xi, \gamma)$  называется *ядром преобразования*, а функция  $\rho_B(\xi)$  является *весовой функцией* и определяется координатной системой, в которой производится преобразование.

Функцию  $F$  называют *изображением* функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а саму функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называют *оригиналом* функции  $F$ . Преобразование (7.1) называется *прямым*, а преобразование, с помощью которого функция  $F$  снова преобразуется в функцию  $f$ , называется *обратным*.

В том случае, если существует как прямое, так и обратное преобразования, можно установить *взаимно-однозначное соответствие* между двумя классами функций: классом функций-оригиналов  $\{f\}$  и классом функций изображений  $\{F\}$ . При этом также устанавливается соответствие между операциями на обоих классах функций. Тогда решение задачи, заданной для функций исходного класса, можно преобразовать к задаче для функций второго класса, и эта последняя задача может оказаться намного проще. Решив ее, с помощью обратного преобразования находят решение первоначальной задачи.

В задачах с уравнениями с частными производными стремятся выбрать такое ИП, которое дало бы возможность дифференциальные операции по переменной преобразования в области оригиналов заменить алгебраическими операциями в области изображений. Если такое преобразование найдено, преобразованная задача становится легче исходной. Найдя решение этой более простой задачи, с помощью обратного преобразования находят решение исходной задачи.

Конечные интегральные преобразования применимы только к пространственным переменным. Попробуем с их помощью решить

многомерное уравнение теплопроводности для простых тел классической формы – прямоугольный параллелепипед и ограниченный цилиндр. Именно такими телами наиболее часто моделируют элементы твердотельных микроэлектронных систем.

Теория и описание схемы проведения конечных ИП изложены в соответствии с замечательной учебной монографией [3].

Сначала напомним некоторые определения.

а) Говорят, что система функций  $\{U_i(x)\}$  ( $i=1, 2 \dots n$ ) является ортогональной с весом  $\rho_B(x)$  на отрезке  $[\xi_1, \xi_2]$ , если

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho_B(x) \cdot U_i(x) \cdot U_j(x) \cdot dx = \begin{cases} 0, & \text{для } i \neq j \\ Const, & \text{для } i = j \end{cases}$$

б) величина  $C_i^2 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho_B(x) \cdot U_i^2(x) \cdot dx$  называется *квадратом нормы функции*  $U_i(x)$ .

в) Система ортогональных функций  $\left\{ \frac{U_i(x)}{C_i} \right\} = \{V_i(x)\}$ , где

$$C_i = \sqrt{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho_B(x) \cdot U_i^2(x) \cdot dx}, \quad \text{называется нормированной к единице.}$$

Действительно:

$$\int_a^b \rho(x) \frac{U_i(x)}{C_i} \cdot \frac{U_j(x)}{C_j} \cdot dx = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j; \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

В соответствии с (7.1) *интегральным преобразованием функции*  $f(x, y, z, \tau)$  по пространственной переменной  $x$  называется следующая операция:

$$F(\gamma, y, z, \tau) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x, y, z, \tau) \cdot K(x, \gamma) \cdot dx, \quad (7.2)$$

где  $x \in [\xi_1, \xi_2]$ ;  $K(x, \gamma)$  – ядро преобразования,  $\gamma$  – параметр преобразования,  $\rho_B=1$ .

Если взять не декартову, а произвольную систему ортогональных координат  $(q_1, q_2, q_3)$ , то для преобразования по переменной (для определенности)  $q_1 \in [\xi_1, \xi_2]$  будем иметь следующее выражение:

$$F(\gamma, q_2, q_3, \tau) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho_B(q_1) \cdot f(q_1, q_2, q_3, \tau) \cdot K(q_1, \gamma) \cdot dq_1, \quad (7.3)$$

где  $\rho_B$  – весовая функция в выбранной координатной системе. В декартовой системе координат  $(x, y, z) \rightarrow \rho_B \equiv 1$ ; в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z) \rightarrow \rho_B \equiv r$ ; в сферической системе координат  $(r, \varphi, \theta) \rightarrow \rho_B \equiv r^2$ .

Теперь рассмотрим общую схему решения линейной задачи теплопроводности (3.3) – (3.12) для прямоугольного тела в декартовой системе координат:

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + W(x, y, z, \tau) = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (7.4)$$

где, как и ранее,  $T(x, y, z, \tau)$  – искомое нестационарное температурное поле объекта,  $\lambda, c, \rho$  – коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность материала тела соответственно,  $W(x, y, z, \tau)$  – функция источников тепла, которая в общем случае зависит от всех пространственных переменных  $(x, y, z)$  и времени  $\tau$ .

Пусть  $X_1 \leq x \leq X_2, Y_1 \leq y \leq Y_2, Z_1 \leq z \leq Z_2$  – области изменения пространственных переменных. Граничные условия запишем в обобщенном виде:

– по переменной  $x$

$$A_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=X_1} + B_1 T \Big|_{x=X_1} = \Psi_1; \quad (7.5 a)$$

$$A_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=X_2} + B_2 T \Big|_{x=X_2} = \Psi_2; \quad (7.5 б)$$

– по переменной  $y$

$$C_1 \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=Y_1} + D_1 T \Big|_{y=Y_1} = \Phi_1; \quad (7.6 a)$$

$$C_2 \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=Y_2} + D_2 T \Big|_{y=Y_2} = \Phi_2; \quad (7.6 б)$$

– по переменной  $z$

$$E_1 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=Z_1} + J_1 T \Big|_{z=Z_1} = H_1; \quad (7.7 a)$$

$$E_2 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=Z_2} + J_2 T \Big|_{z=Z_2} = H_2. \quad (7.7 \text{ б})$$

Начальное условие зададим в виде

$$T(x, y, z, \tau) \Big|_{\tau=0} = T_0(x, y, z). \quad (7.8)$$

Здесь  $T_0(x, y, z)$  – начальное распределение температуры в теле в момент  $\tau = 0$ .

Значения  $A, B, C, D, E, J, \Psi, \Phi, H$  с индексами 1 и 2 должны быть известными. При этом для линейных задач теплопроводности величины  $A, B, C, D, E, J$  с индексами есть величины постоянные, а для граничных условий первого и второго родов величины  $\Psi_1, \Psi_2, \Phi_1, \Phi_2$  и  $H_1, H_2$  могут являться, в общем случае, функциями соответствующих нефиксированных переменных и не должны зависеть от искомой функции, то есть от температуры.

Обобщенность записи граничных условий (7.5) – (7.7) заключается в том, что заданием значений  $A, B, C, D, E, J$  и  $\Psi, \Phi, H$  любое из этих граничных условий можно привести к конкретному виду условий первого, второго или третьего рода. Например, если в условии (7.5 а) значение  $A_1$  положить равным нулю, а  $B_1$  равным единице, то условие (7.5 а) будет являться граничным условием 1-го рода, в котором  $\Psi_1$  будет иметь смысл наперед заданного распределения температуры по поверхности  $x = X_1$  рассматриваемого прямоугольного тела. Если же  $A_1 = \pm \lambda$ ,  $B_1 = 0$ , а  $\Psi_1$  представляет распределение плотности теплового потока по поверхности  $x = X_1$ , то (7.5 а) будет являться граничным условием 2-го рода. Наконец, если  $A_1 = \pm \lambda$ ,  $B_1 = -\alpha$  и  $\Psi_1 = -\alpha \cdot T_{CP}$ , то (7.5 а) станет граничным условием 3-го рода. Выбор знака “+” или “-” для  $A_1 = \pm \lambda$  зависит от положения границы  $x = X_1$  тела в конкретной задаче и направления внешней (по отношению к телу) нормали к ней: сонаправлена она с ортом оси  $Ox$  или противоположна ему.

Для решения конкретной задачи нужно, очевидно, конкретизировать все условия (7.5) – (7.7).

Применим к задаче (7.4) – (7.8) интегральное преобразование по переменной  $x$ . В соответствии с (7.2) определим изображение  $\bar{T}(\gamma, y, z, \tau)$  температурного поля  $T(x, y, z, \tau)$  как:

$$\bar{T}(\gamma, y, z, \tau) = \int_{X_1}^{X_2} T(x, y, z, \tau) \cdot K(x, \gamma) \cdot dx. \quad (7.9)$$

Поскольку операции дифференцирования и интегрирования по независимым друг от друга переменным можно менять местами, то, применяя ИП к уравнению (7.4), получим:

$$\frac{c\rho}{\lambda} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T}{\partial \tau} \cdot K(x, \gamma) \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{W(x, y, z)}{\lambda} \right] \cdot K(x, \gamma) \cdot dx$$

или

$$\begin{aligned} \frac{c\rho}{\lambda} \cdot \frac{\partial \bar{T}(\gamma, y, z, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \bar{T}(\gamma, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}(\gamma, y, z, \tau)}{\partial z^2} + \frac{\bar{W}(\gamma, y, z, \tau)}{\lambda} + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot K(x, \gamma) \cdot dx. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Здесь учтено, что  $\frac{c\rho}{\lambda} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T}{\partial \tau} \cdot K(x, \gamma) \cdot dx = \frac{c\rho}{\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{x_1}^{x_2} T \cdot K(x, \gamma) \cdot dx = \frac{c\rho}{\lambda} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau}$ ,

$$\frac{\partial K(x, \gamma)}{\partial y} = \frac{\partial K(x, \gamma)}{\partial z} = 0, \text{ поэтому}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \cdot K(x, \gamma) \cdot dx = \frac{\partial^2 \bar{T}(\gamma, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}(\gamma, y, z, \tau)}{\partial z^2},$$

и обозначено:  $\bar{W}(\gamma, y, z) = \int_{x_1}^{x_2} W(x, y, z) \cdot K(x, \gamma) \cdot dx$ .

Таким образом, исходное уравнение (7.4) после преобразования по переменной  $x$  приняло вид (7.10).

Рассмотрим последнее слагаемое в (7.10). Этот интеграл возьмём два раза по частям:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot K(x, \gamma) \cdot dx &= \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cdot K(x, \gamma) \right) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial K}{\partial x} \cdot dx = \\ &= \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cdot K(x, \gamma) - T \cdot \frac{\partial K}{\partial x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} T \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} dx. \end{aligned} \quad (7.11)$$

До сих пор мы не накладывали никаких условий на ядро  $K(x, \gamma)$ . Теперь потребуем, чтобы ядро  $K(x, \gamma)$  удовлетворяло следующему равенству:

$$\boxed{\frac{\partial^2 K(x, \gamma)}{\partial x^2} = -s^2 \cdot K(x, \gamma)}. \quad (7.12)$$

Выражение (7.12) мы будем рассматривать как уравнение для определения ядра преобразования. Но тогда

$$\int_{X_1}^{X_2} T \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} dx = -s^2 \int_{X_1}^{X_2} T \cdot K \cdot dx = -s^2 \cdot \bar{T}(\gamma, y, z, \tau),$$

и (7.11) можно переписать как:

$$\int_{X_1}^{X_2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} K(x, \gamma) \cdot dx = \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cdot K(x, \gamma) - T \cdot \frac{\partial K}{\partial x} \right) \Big|_{X_1}^{X_2} - s^2 \cdot \bar{T}(\gamma, y, z, \tau). \quad (7.13)$$

В этом равенстве и заключен смысл интегрального преобразования: операция дифференцирования по одной из переменных в пространстве оригиналов перешла в алгебраическую операцию в пространстве изображений. И теперь исходное уравнение (7.4) в пространстве изображений выглядит следующим образом

$$\boxed{\frac{\partial^2 \bar{T}(\gamma, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}(\gamma, y, z, \tau)}{\partial z^2} - s^2 \cdot \bar{T}(\gamma, y, z, \tau) + \frac{\bar{W}(\gamma, y, z, \tau)}{\lambda} + N_{X_2} - N_{X_1} = \frac{c \cdot \rho}{\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \tau^2}} \quad (7.14)$$

где  $N_{X_1} = \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cdot K(x, \gamma) - T \cdot \frac{\partial K}{\partial x} \right) \Big|_{x=X_1}$ ;  $N_{X_2} = \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cdot K(x, \gamma) - T \cdot \frac{\partial K}{\partial x} \right) \Big|_{x=X_2}$ .

В  $N_{X_1}$  и  $N_{X_2}$  входят значения температуры  $T$  и её производной  $\frac{\partial T}{\partial x}$  в точках  $x = X_1$  и  $x = X_2$ . Эти значения не могут быть заданы произвольно и, очевидно, определяются граничными условиями задачи. Следовательно, необходимо наложить такие дополнительные данные на ядро  $K(x, \gamma)$ , чтобы вид слагаемого  $N_{X_1} - N_{X_2}$  в (7.14) допускал выражения через известные граничные условия. Поскольку уравнение (7.12) есть дифференциальное уравнение второго порядка, то таких дополнительных условий должно быть два. Граничные условия по переменной преобразования  $x$  заданы выражениями (7.5 а) и (7.5 б).

Рассмотрим границу  $x = X_2$ . Для нее выполняется (7.5 б) и должна быть определена величина  $N_{X_2}$ . Запишем два этих выражения совместно:

$$A_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=X_2} + B_2 T \Big|_{x=X_2} = \psi_2; \quad (*)$$

$$N_{X_2} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot K(x, \gamma) \Big|_{x=X_2} - T \cdot \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{x=X_2}. \quad (**)$$

Умножая равенство (\*) на  $K(x=X_2, \gamma)$ , получим

$$A_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=X_2} K(X_2, \gamma) + B_2 \cdot T(X_2) \cdot K(X_2, \gamma) = \Psi_2 \cdot K(X_2, \gamma);$$

из равенства (\*\*) можно получить:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=X_2} K(X_2, \gamma) = N_{X_2} + T(X_2) \cdot \frac{\partial K(x, \gamma)}{\partial x} \Big|_{x=X_2}.$$

Отсюда:

$$\left[ T \cdot \left( A_2 \cdot \frac{\partial K}{\partial x} + B_2 \cdot K \right) \right] \Big|_{x=X_2} + A_2 \cdot N_{X_2} = \Psi_2 \cdot K(X_2, \gamma). \quad (7.15)$$

Теперь умножим равенство (\*) на  $\frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{x=X_2}$ :

$$\left( A_2 \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial K}{\partial x} + B_2 \cdot T \cdot \frac{\partial K}{\partial x} \right) \Big|_{x=X_2} = \Psi_2 \cdot \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{x=X_2}. \quad (***)$$

Величину  $T \cdot \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{x=X_2}$  найдём из (\*\*):

$$T \cdot \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{x=X_2} = \frac{\partial T}{\partial x} K \Big|_{x=X_2} - N_{X_2}.$$

Подставляя это в (\*\*\*), имеем:

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \left( A_2 \cdot \frac{\partial K}{\partial x} + B_2 \cdot K \right) \right] \Big|_{x=X_2} - B_2 \cdot N_{X_2} = \Psi_2 \cdot \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{x=X_2}. \quad (7.16)$$

Из выражений (7.15) и (7.16) интуитивно ясно, какое первое условие лучше всего наложить на ядро преобразования:

$$\left( A_2 \cdot \frac{\partial K}{\partial x} + B_2 \cdot K \right) \Big|_{x=X_2} = 0.$$

Тогда величина  $N_{X_2}$  просто определяется из (7.15) и (7.16):

$$N_{X_2} = \begin{cases} \frac{\Psi_2 \cdot K(x = X_2, \gamma)}{A_2} & \text{для } A_2 \neq 0, \\ -\frac{\Psi_2 \cdot \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{x=X_2}}{B_2} & \text{для } B_2 \neq 0. \end{cases} \quad (7.17)$$

Совершенно аналогично поступаем с другой граничной точкой  $x = X_1$ .

Используя точно такие же выкладки и требуя, чтобы

$$\left( A_1 \cdot \frac{\partial K}{\partial x} + B_1 \cdot K \right) \Big|_{x=X_1} = 0,$$

получим:

$$N_{X_1} = \begin{cases} \frac{\Psi_1}{A_1} \cdot K(x = X_1, \gamma) & \text{для } A_1 \neq 0, \\ -\frac{\Psi_1}{B_1} \cdot \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{x=X_1} & \text{для } B_1 \neq 0. \end{cases} \quad (7.18)$$

Осталось преобразовать начальное условие:

$$\bar{T}_0(\gamma, y, z) = \int_{X_1}^{X_2} T_0(x, y, z) \cdot K(x, \gamma) \cdot dx.$$

Мы полностью определили как все величины, входящие в преобразованное уравнение (7.14), так и правила определения ядра преобразования: ядро находится из уравнения (7.12) и из однородных частей граничных условий по переменной преобразования исходной задачи с формальной заменой в них функции  $T$  на ядро  $K$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K(x, \gamma)}{\partial x^2} &= -s^2 \cdot K(x, \gamma); \\ \left( A_1 \cdot \frac{\partial K}{\partial x} + B_1 \cdot K \right) \Big|_{x=X_1} &= 0; \\ \left( A_2 \cdot \frac{\partial K}{\partial x} + B_2 \cdot K \right) \Big|_{x=X_2} &= 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Задача (7.19), определяющие ядро преобразования  $K(x, \gamma)$ , представляют собой граничную задачу Штурма - Лиувилля. Тогда:

- 1) Задача (7.19) имеет решения, отличные от тождественного нуля только при определённых вещественных значениях параметра  $s^2$  – собственных чисел задачи, которые образуют бесконечную возрастающую последовательность (спектр собственных чисел)  $s^2_0 < s^2_1 < s^2_2 < s^2_3 < \dots$ .
- 2) Каждому собственному числу  $s^2_i$  задачи соответствует одно и только одно линейно независимое решение  $K(x, \gamma) = K_\gamma(x)$  задачи (7.19) – собственная функция, принадлежащая собственному числу  $s^2_i$ . Следовательно  $\gamma \equiv i$ .

3) Собственные функции  $K_i(x)$ ,  $i=1, 2, 3, \dots$ , попарно ортогональны с весом  $\rho_B$  (для декартовой системы координат  $\rho_B \equiv 1$ ) на отрезке  $[X_1, X_2]$ , откуда следует, что нормированные с тем же весом собственные функции удовлетворяют условию:

$$\int_{X_1}^{X_2} K_i(x) \cdot K_j(x) \cdot \rho_B \cdot dx = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

В дальнейшем везде будем предполагать, что собственные функции  $K_i(x)$  уже нормированы к единице, то есть

$$K_i(x) := \frac{K_i(x)}{\sqrt{\int_{X_1}^{X_2} \rho_B \cdot K_i(x) \cdot K_i(x) \cdot dx}}.$$

С другой стороны, любая интегрируемая функция может быть представлена в виде ряда по полной системе ортогональных функций. Следовательно, можно записать:

$$T(x, (y, z, \tau)) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \cdot K_i(x), \quad (7.20)$$

где  $A_i$  – некоторые коэффициенты, а переменные, не участвующие в преобразовании, помечены внутренними скобками.

Умножим равенство (7.20) на  $\rho_B \cdot K_i(x)$  и проинтегрируем его почленно.

Тогда  $\int_{X_1}^{X_2} \rho_B \cdot T(x) \cdot K_i(x) \cdot dx = \int_{X_1}^{X_2} \rho_B \cdot K_i(x) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot K_i(x) \cdot dx$ . Но, поскольку

$K_i \cdot K_j = 0$  для  $i \neq j$ , то  $\int_{X_1}^{X_2} \rho_B \cdot K_i(x) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot K_i(x) \cdot dx = A_i$  в силу условия

нормировки. Отсюда следует, что с учетом (7.3)

$$\bar{T}(\gamma) = \int_{X_1}^{X_2} \rho_B \cdot T(x) \cdot K_i(x) \cdot dx = \bar{T}_i(y, z, \tau) = A_i.$$

Поэтому, чтобы от изображения перейти к функции-оригиналу, то есть, по найденным функциям  $\bar{T}(\gamma, y, z, \tau) = \bar{T}_i(y, z, \tau)$  определить искомую функцию  $T(x, y, z, \tau)$ , надо воспользоваться выражением (7.20):

$$\boxed{T(x, y, z, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{T}_i(y, z, \tau) \cdot K_i(x)}, \quad (7.21)$$

Последняя формула даёт решение исходной задачи и называется *формулой обращения*.

Функция-изображение  $\bar{T}(\gamma, y, z, \tau)$ , входящая в (7.21), является решением краевой задачи (7.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{T}(\gamma, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}(\gamma, y, z, \tau)}{\partial z^2} - s^2 \cdot \bar{T}(\gamma, y, z, \tau) + \frac{\bar{W}(\gamma, y, z, \tau)}{\lambda} + N_{X_2} - N_{X_1} = \\ = \frac{c\rho}{\lambda} \cdot \frac{\partial \bar{T}(\gamma, y, z, \tau)}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

В ней граничные условия по переменной преобразования  $x$  учтены. Однако при ее решении необходимо учитывать граничные условия (7.6) и (7.7) по другим пространственным переменным и начальное условие (7.8).

Граничные условия по переменным, не являющимися переменными преобразования, преобразуются очевидным образом. Рассмотрим это на примере граничного условия (7.6 а):

$$\begin{aligned} \int_{X_1}^{X_2} \left( C_1 \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=Y_1} + D_1 T \Big|_{y=Y_1} \right) \cdot K_i(x) \cdot dx = \int_{X_1}^{X_2} \Phi_1 \cdot K_i(x) \cdot dx \Rightarrow \\ \Rightarrow C_1 \frac{\partial \bar{T}_i(y, z)}{\partial y} \Big|_{y=Y_1} + D_1 \bar{T}_i(y, z) \Big|_{y=Y_1} = \bar{\Phi}_{1,i}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $\bar{\Phi}_{1,i} = \int_{X_1}^{X_2} \Phi_1 \cdot K_i(x) \cdot dx$  по определению, операции

интегрирования и дифференцирования по независимым переменным можно менять местами и что весовая функция в декартовой системе есть единица ( $\rho_B=1$ ). Другие граничные условия преобразуются совершенно аналогично.

Поэтому эти преобразованные граничные условия будут иметь вид:

$$C_1 \frac{\partial \bar{T}_i(y, z)}{\partial y} \Big|_{y=Y_1} + D_1 \bar{T}_i(y, z) \Big|_{y=Y_1} = \bar{\Phi}_{1,i}; \quad (7.22 \text{ а})$$

$$C_2 \frac{\partial \bar{T}_i(y, z)}{\partial y} \Big|_{y=Y_2} + D_2 \bar{T}_i(y, z) \Big|_{y=Y_2} = \bar{\Phi}_{2,i}; \quad (7.22 \text{ б})$$

$$E_1 \frac{\partial \bar{T}_i(y, z)}{\partial z} \Big|_{z=Z_1} + J_1 \bar{T}_i(y, z) \Big|_{z=Z_1} = \bar{H}_{1,i}; \quad (7.23 \text{ а})$$

$$E_2 \frac{\partial \bar{T}_i(y, z)}{\partial z} \Big|_{z=Z_2} + J_2 \bar{T}_i(y, z) \Big|_{z=Z_2} = \bar{H}_{2,i}. \quad (7.23 \text{ б})$$

То есть мы произвели совершенно формальную замену всех функций, входящих в граничные условия (7.6) и (7.7) на функции с чёрточкой.

Наконец, как уже было записано выше, начальное условие (7.8) преобразуется в полном соответствии с определением (7.2):

$$\int_{X_1}^{X_2} T_0(x, y, z) \cdot K(x, \gamma) \cdot dx = \bar{T}_0(\gamma, y, z). \quad (7.24)$$

Таким образом, в результате приведённых выше выкладок мы избавились от одной дифференциальной операции и в области изображений получили уравнение с числом частных производных на одну меньше. Решив каким-либо образом это уравнение в изображениях, с помощью формулы обращения мы можем определить интересующее нас решение уже в оригинале. Но *интегральные преобразования можно применять несколько раз последовательно*, например, к уравнению (7.14) в изображениях с граничными условиями (7.22), (7.23) и начальным условием (7.24) можно применить ИП по координате  $y$ , затем по координате  $z$ , и в результате получится дифференциальное уравнение первого порядка по времени в пространстве изображений. Причём схема вторичного и т.д. применения ИП точно такая же.

Выпишем схему применения конечных интегральных преобразований в кратком виде по пунктам, причём учтём, что в общем случае весовая функция отлична от 1 в цилиндрических и сферических координатах.

1) В исходном уравнении теплопроводности выбираем пространственную переменную, по которой будем производить ИП. Пусть это  $q_1 \in [\xi_1, \xi_2]$ . Тогда по определению

$$\bar{T}_\gamma(q_2, q_3, \tau) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho_B(q_1) \cdot T(q_1, q_2, q_3, \tau) \cdot K(q_1, \gamma) \cdot dq_1.$$

2) Операцию двойного дифференцирования температурного поля по этой переменной в уравнении теплопроводности заменяем на  $(-s^2 \cdot \bar{T})$ , то есть

$$\frac{\partial^2 T}{\partial q_1^2} \rightarrow -s^2 \cdot \bar{T}.$$

Над всеми функциями, входящим в преобразованное уравнение, чисто формально ставим черту, означающую, что это уже изображение.

3) Разбиваем граничные условия на две группы:

- а) по переменной преобразования,
- б) не включающие переменную преобразования.

Граничные условия группы  $a$ ) будут служить для определения функции-ядра и свободного члена  $N_{\xi_2} - N_{\xi_1}$  преобразованного уравнения.

В граничных условиях группы  $b$ ) и начальном условии входящие в них функции формально заменяются их изображениями (ставим над ними черту).

4) В линейном уравнении теплопроводности, включая уже преобразованные, дифференциальный оператор по переменной преобразования можно записать в следующем общем виде:

$$\chi(q_1) \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \eta(q_1) \frac{\partial}{\partial q_1} + Q(q_1), \quad (7.25)$$

где  $\chi(q_1)$  – коэффициент при старшей производной;  $\eta(q_1)$  – коэффициент при младшей производной,  $Q(q_1)$  – коэффициент при искомой функции. Тогда ядро  $K(q_1, \gamma)$  преобразования ищется из следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \chi \cdot \rho_B \cdot \frac{\partial K}{\partial q_1} \right) + Q \cdot \rho_B \cdot K &= -s^2 \rho_B \cdot K, \\ \left( A_{\xi_1} \cdot \frac{\partial K}{\partial q_1} + B_{\xi_1} \cdot K \right) \Big|_{q_1=\xi_1} &= 0, \\ \left( A_{\xi_2} \cdot \frac{\partial K}{\partial q_1} + B_{\xi_2} \cdot K \right) \Big|_{q_1=\xi_2} &= 0. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Система (7.26) записана совершенно аналогично системе (7.19), только переменная  $x$  заменена на обобщенную переменную  $q_1 \in [\xi_1, \xi_2]$  и учтены отличие в общем случае весовой функции  $\rho_B$  от единицы и обобщенная запись (7.25) дифференциально оператора.

Из (7.25) находим спектр значений собственных чисел  $\{s_i^2\}$  и систему нормированных собственных функций  $\{K_i(q_1)\}$ .

5) После того, как найдены нормированные функции-ядра, необходимо найти слагаемое  $N_{X_2} - N_{X_1} = N_{\xi_2} - N_{\xi_1}$  преобразованного уравнения. Разность  $N_{\xi_2} - N_{\xi_1}$  ищется из следующих формул, аналогичных (7.17) и (7.18), но с учетом указанных обобщений:

$$N_{\xi_2} = \begin{cases} \frac{\Phi_{\xi_2}}{A_{\xi_2}} \cdot \rho_B(\xi_2) \cdot \chi(\xi_2) \cdot K(q_1 = \xi_2, \gamma) & \text{для } A_{\xi_2} \neq 0, \\ -\frac{\Phi_{\xi_2}}{B_{\xi_2}} \cdot \rho_B(\xi_2) \cdot \chi(\xi_2) \cdot \frac{\partial K}{\partial q_1} \Big|_{q_1=\xi_2} & \text{для } B_{\xi_2} \neq 0. \end{cases} \quad (7.27)$$

$$N_{\xi_1} = \begin{cases} \frac{\Phi_{\xi_1}}{A_{\xi_1}} \cdot \rho_B(\xi_1) \cdot \chi(\xi_1) \cdot K(q_1 = \xi_1, \gamma) & \text{для } A_{\xi_1} \neq 0, \\ -\frac{\Phi_{\xi_1}}{B_{\xi_1}} \cdot \rho_B(\xi_1) \cdot \chi(\xi_1) \cdot \left. \frac{\partial K}{\partial q_1} \right|_{q_1=\xi_1} & \text{для } B_{\xi_1} \neq 0. \end{cases}$$

б) После того, как найдено ядро преобразования и определена разность  $N_{\xi_2} - N_{\xi_1}$  необходимо выписать все функции-изображений, встречающиеся в задаче, в развёрнутом виде согласно определению (7.3), то есть получить явный вид изображений начального и граничных условий группы б) в смысле их правой части по аналогии с (7.22) – (7.24) и функции плотности объемного тепловыделения.

7) После выполнения пунктов 1–6 преобразованная задача полностью определена. Решаем её каким-либо образом. Найдя решение преобразованной задачи, воспользуемся формулой обращения (7.21) для нахождения оригинала.

8) При решении многомерных задач теплопроводности интегральные преобразования могут последовательно применяться несколько раз. Тогда преобразованная на первом этапе задача будет исходной для второго преобразования. После окончательного решения преобразованной задачи формулу обращения необходимо применять последовательно для каждой обратной операции. Поэтому окончательное решение поставленной задачи в пространстве оригиналов будет выглядеть в виде многомерных бесконечных рядов.

Замечание. Стационарное трехмерное уравнение теплопроводности после последовательных применений интегрального преобразования ко всем пространственным переменным сводится к алгебраическому уравнению в пространстве изображений. Но, возвращаясь в пространство оригиналов, в соответствии с (7.21) будем иметь тройной бесконечный ряд, каждый индекс суммирования в котором будет соответствовать своим функциям-ядрам. Поэтому при решении таких задач теплопроводности необходимо анализировать возможность решения исходной задачи с минимумом необходимых переменных для проведения ИП, чтобы не связываться с проблемами сходимости рядов-решений по каждому индексу суммирования и временем счета. Такие примеры мы разберем ниже.

## 7.2 Стационарное температурное поле плоского прямоугольного тела с поверхностным локальным тепловыделением

Рассмотрим модель в виде прямоугольного однородного тела, см. рис. 7.2, на верхней поверхности которого расположен локализованный тепловой источник прямоугольной формы с мощностью  $P_T$ . Такая модель может быть принята для теплофизического описания полупроводникового кристалла и его подложки.

Начало координатной системы удобно разместить в одном из углов рассматриваемого тела, как это сделано на рис. 7.2. Символами  $L$ ,  $B$  и  $h$  на этом рисунке обозначены размеры тела по осям  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ ,  $l$  и  $b$  – размеры источника тепла,  $\xi$  и  $\eta$  – координаты центра теплового источника по осям  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. Коэффициент теплопроводности модели  $\lambda$ .

Сначала рассмотрим самый простой случай. Будем считать, что вся тепловая мощность, выделяемая в источнике, уходит через нижнюю поверхность тела ( $z = 0$ ), и эта поверхность изотермическая с температурой  $T_S$ . Вся остальная поверхность тела адиабатическая за исключением области теплового источника. Это означает, что мы пренебрегаем рассеянием тепла с указанной поверхности (пренебрегаем тепловыми потоками  $P_2$  и  $P_3$  на рис. 7.1).

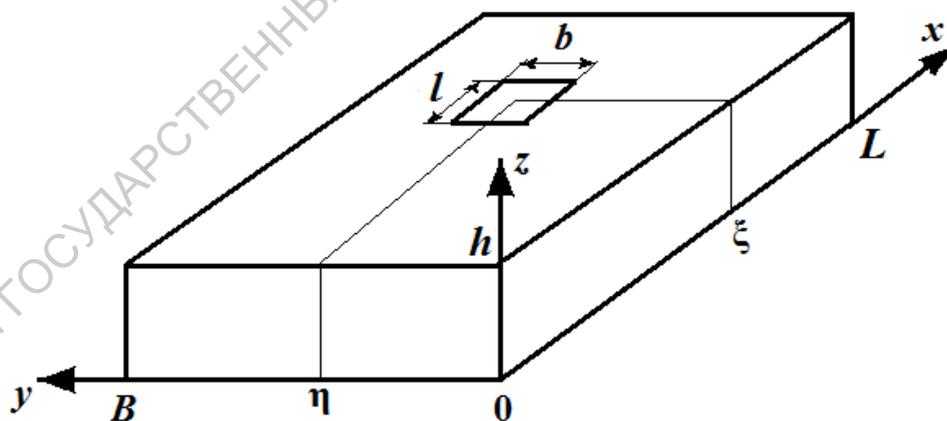


Рисунок 7.2 – Модель прямоугольного тела с поверхностным локализованным тепловым источником

Введем избыточную (по отношению к температуре нижней поверхности) температуру тела:

$$\vartheta(x, y, z) = T(x, y, z) - T_S.$$

Тогда стационарная задача теплопроводности для рассматриваемой модели будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0, \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=B} = 0, \quad (7.29)$$

$$\vartheta \Big|_{z=0} = 0, \quad (7.30)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{z=h} = H(x, y) = \begin{cases} \frac{P_T}{l \cdot b \cdot \lambda} & \text{для } \left| \xi - \frac{l}{2} \right| \leq x \text{ и } \left| \eta - \frac{b}{2} \right| \leq y, \\ 0 & \text{для } \left| \xi - \frac{l}{2} \right| > x \text{ и } \left| \eta - \frac{b}{2} \right| > y. \end{cases} \quad (7.31)$$

Граничные условия (7.29) описывают отсутствие тепловых потоков с соответствующих граней модели, граничное условие (7.30) задает изотермичность нижней грани, а граничное условие (7.31) локализует тепловыделение областью источника и обнуляет тепловой поток в области вне источника.

Решим задачу (7.28) – (7.31) методом конечных интегральных преобразований.

Проведем преобразование по переменной  $x$ .

Ядро преобразования  $K_1(x, \gamma)$  ищем в соответствии с (7.19):

$$\frac{\partial^2 K_1(x, \gamma)}{\partial x^2} = -s^2 \cdot K_1(x, \gamma); \quad (7.32)$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial K_1}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0.$$

Решая (7.32), имеем:

$$K_{1n}(x) = \frac{1}{C_n} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right), \quad s_n^2 = \left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$C_n^2 = \begin{cases} L/2 & \text{для } n = 1, 2, 3, \dots \\ L & \text{для } n = 0. \end{cases} \quad (7.33)$$

Поэтому

$$\gamma = n = 0, 1, 2, \dots, \quad K_{10}(x) = \sqrt{\frac{1}{L}}; \quad K_{1n}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right). \quad (7.34)$$

Обозначим  $\bar{\mathfrak{G}}(n, y, z) = \bar{\mathfrak{G}}_n(y, z) = \int_0^L \mathfrak{G}(x, y, z) \cdot K_{1n}(x) \cdot dx$  и перепишем исходное

уравнение (7.28) после первого преобразования:

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{G}}_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{G}}_n}{\partial z^2} - s_n^2 \bar{\mathfrak{G}}_n = 0. \quad (7.35)$$

Отметим, что в силу однородности условий (7.29) дополнительное слагаемое  $N_{X_2} - N_{X_1} = N_L - N_0$  в преобразованном уравнении в нашем случае будет нулевым.

Граничные условия (7.29) и (7.30) преобразуем формально:

$$\left. \frac{\partial \bar{\mathfrak{G}}_n}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \bar{\mathfrak{G}}_n}{\partial y} \right|_{y=B} = 0, \quad (7.36)$$

$$\bar{\mathfrak{G}}_n \Big|_{z=0} = 0. \quad (7.37)$$

Граничное условие (7.31) преобразуется следующим образом. Сначала рассмотрим случай  $n=0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{\mathfrak{G}}_0}{\partial z} \right|_{z=h} &= \int_0^L \mathfrak{H}(x, y) \cdot K_{10} \cdot dx = \sqrt{\frac{1}{L}} \cdot \int_{\xi-\frac{l}{2}}^{\xi+\frac{l}{2}} \mathfrak{H}(x, y) \cdot dx = \\ &= \bar{H}_0(y) = \begin{cases} \frac{P_T}{\sqrt{L} \cdot b \cdot \lambda} & \text{для } \left| \eta - \frac{b}{2} \right| \leq y, \\ 0 & \text{для } \left| \eta - \frac{b}{2} \right| > y. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.38)$$

Теперь рассмотрим ситуацию для  $n \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{\mathfrak{G}}_n}{\partial z} \right|_{z=h} &= \int_0^L \mathfrak{H}(x, y) \cdot K_{1n}(x) \cdot dx = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \int_{\xi-\frac{l}{2}}^{\xi+\frac{l}{2}} \mathfrak{H}(x, y) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) dx = \\ &= \bar{H}_n(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \frac{2P_T \cdot \cos(s_n \xi) \cdot \sin\left(s_n \frac{l}{2}\right)}{l \cdot b \cdot \lambda \cdot s_n} & \text{для } \left| \eta - \frac{b}{2} \right| \leq y, \quad s_n = \frac{n \cdot \pi}{L}. \\ 0 & \text{для } \left| \eta - \frac{b}{2} \right| > y. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.39)$$

В преобразованной задаче (7.35) – (7.39) определены все ее составляющие. Теперь эта задача – задача для двух пространственных переменных  $(y, z)$  и параметра  $\gamma = n = 0, 1, 2, \dots$ .

Продолжим решение. Выберем переменную, по которой будем проводить следующее ИП. Из анализа граничных условий (7.36) – (7.39) вытекает, что

преобразование по независимой переменной  $y$  выполнять проще, чем по переменной  $z$  – оно будет совершенно аналогично проведенному на первом этапе. Действительно, ядро преобразования  $K_2$  определяется из:

$$\frac{\partial^2 K_2(y, \gamma)}{\partial y^2} = -\mu^2 \cdot K_2(y, \gamma);$$

$$\left. \frac{\partial K_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial K_2}{\partial y} \right|_{y=B} = 0. \quad (7.40)$$

Отсюда:

$$K_{2m}(x) = \frac{1}{C_m} \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{B}\right), \quad \mu_m^2 = \left(\frac{m \cdot \pi}{B}\right)^2, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$C_m^2 = \begin{cases} B/2 & \text{для } m = 1, 2, 3, \dots \\ B & \text{для } m = 0, \end{cases}$$

или

$$\gamma = m = 0, 1, 2, \dots, \quad K_{20}(y) = \sqrt{\frac{1}{B}}; \quad K_{2m}(y) = \sqrt{\frac{2}{B}} \cdot \cos(\mu_m y). \quad (7.41)$$

Обозначим  $\bar{\mathfrak{G}}_{n,m}(z) = \int_0^B \bar{\mathfrak{G}}_n(y, z) \cdot K_{2m}(y) \cdot dy$ . Тогда преобразованное на первом этапе уравнение (7.35) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{G}}_{n,m}}{\partial z^2} - (s_n^2 + \mu_m^2) \cdot \bar{\mathfrak{G}}_{n,m} = 0. \quad (7.42)$$

В силу однородности граничных условий по переменной преобразования дополнительного слагаемого в уравнении (7.42) опять не будет.

Граничное условие (7.37) преобразуется формально:

$$\bar{\mathfrak{G}}_{n,m} \Big|_{z=0} = 0. \quad (7.43)$$

а каждое из граничных условий (7.38) и (7.39) необходимо преобразовывать с учетом различия норм функции-ядра  $K_2$  для  $m = 0$  и  $m \neq 0$ . Рассмотрим это более подробно.

С учетом определения функций  $\bar{H}_0(y)$  из (7.38),  $\bar{H}_n(y)$  из (7.39) и выражения (7.41) для ядра преобразования имеем:

1)  $n=0, m = 0$ .

$$\left. \frac{\partial \bar{\mathfrak{G}}_{0,0}}{\partial z} \right|_{z=h} = \int_0^B \bar{H}_0(y) \cdot K_{20} \cdot dy = \sqrt{\frac{1}{B}} \cdot \int_{\eta^{-b/2}}^{\eta^{+b/2}} \bar{H}_0(y) \cdot dy = \bar{H}_{0,0} = \frac{P_T}{\lambda \cdot \sqrt{L \cdot B}}. \quad (7.44)$$

2)  $n = 0, m > 0$ .

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{\mathfrak{G}}_{0,m}}{\partial z} \right|_{z=h} &= \int_0^B \bar{H}_0(y) \cdot K_{2m}(x) \cdot dx = \sqrt{\frac{2}{L \cdot B}} \cdot \frac{P_T}{\lambda \cdot b} \cdot \int_{\eta^{-b/2}}^{\eta^{+b/2}} \cos\left(\frac{m \cdot \pi}{B} \cdot y\right) \cdot dy = \\ &= \sqrt{\frac{2}{L \cdot B}} \cdot \frac{2P_T \cdot \cos(\mu_m \eta) \cdot \sin\left(\mu_m \frac{b}{2}\right)}{b \cdot \lambda \cdot \mu_m} = \bar{H}_{0,m}; \mu_m = \frac{m \cdot \pi}{B}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

3)  $n > 0, m = 0$ .

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{\mathfrak{G}}_{n,0}}{\partial z} \right|_{z=h} &= \int_0^B \bar{H}_n(y) \cdot K_{20} \cdot dy = \sqrt{\frac{1}{B}} \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \frac{2P_T \cdot \cos(s_n \xi) \cdot \sin\left(s_n \frac{l}{2}\right)}{l \cdot b \cdot \lambda \cdot s_n} \int_{\eta^{-b/2}}^{\eta^{+b/2}} dy = \\ &= \sqrt{\frac{2}{L \cdot B}} \cdot \frac{2P_T \cdot \cos(s_n \xi) \cdot \sin\left(s_n \frac{l}{2}\right)}{l \cdot \lambda \cdot s_n} = \bar{H}_{n,0}, s_n = \frac{n \cdot \pi}{L}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

4)  $n > 0, m > 0$ .

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{\mathfrak{G}}_{n,m}}{\partial z} \right|_{z=h} &= \int_0^B \bar{H}_n(y) \cdot K_{2m}(y) \cdot dy = \sqrt{\frac{2}{B}} \cdot \int_{\eta^{-b/2}}^{\eta^{+b/2}} \bar{H}_n(y) \cdot \cos(\mu_m y) \cdot dy = \\ &= \bar{H}_{n,m} = \sqrt{\frac{4}{L \cdot B}} \cdot \frac{4P_T \cdot \cos(s_n \xi) \cdot \sin\left(s_n \frac{l}{2}\right) \cdot \cos(\mu_m \cdot \eta) \cdot \sin\left(\mu_m \frac{b}{2}\right)}{l \cdot b \cdot \lambda \cdot s_n \cdot \mu_m}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Таким образом, после применения второго ИП исходная задача теплопроводности преобразовалась к виду (7.42) – (7.47), где остается зависимость только от одной пространственной переменной. Решение уравнения (7.42) известно.

Введем обозначение:  $v_{n,m}^2 = s_n^2 + \mu_m^2$ . Перепишем (7.42) следующим образом:  $\frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{G}}_{n,m}}{\partial z^2} - v_{n,m}^2 \cdot \bar{\mathfrak{G}}_{n,m} = 0$ . Тогда для  $v_{n,m}^2 = v_{0,0}^2 = 0$

$$\bar{\mathfrak{G}}_{0,0}(z) = C \cdot z + D, \quad (7.48)$$

а для  $v_{n,m}^2 > 0$

$$\bar{\mathfrak{G}}_{n,m}(z) = C \cdot \exp(-v_{n,m} \cdot z) + D \cdot \exp(-v_{n,m} \cdot (h - z)). \quad (7.49)$$

Здесь  $C$  и  $D$  – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий (7.43) и (7.44 – 7.47). Для решения (7.48) из граничных условий (7.43) и

(7.44) имеем  $D = 0$  и  $C = \frac{P_T}{\lambda \cdot \sqrt{L \cdot B}}$  или  $\bar{\mathfrak{G}}_{0,0} = \frac{P_T \cdot z}{\lambda \cdot \sqrt{L \cdot B}}$ .

Для решения (7.49) получим

$$\bar{\mathfrak{G}}_{n,m}(z=0) = C + D \cdot \exp(-v_{n,m} \cdot h) = 0;$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\mathfrak{G}}_{n,m}}{\partial z} \right|_{z=h} = -v_{n,m} \cdot C \cdot \exp(-v_{n,m} \cdot h) + v_{n,m} \cdot D = \bar{H}_{n,m}.$$

Отсюда

$$\bar{\mathfrak{G}}_{n,m}(z) = \frac{\bar{H}_{n,m} \cdot [\exp(-v_{n,m} \cdot (h-z)) - \exp(-v_{n,m} \cdot (h+z))]}{v_{n,m} \cdot [1 + \exp(-2 \cdot v_{n,m} \cdot h)]}. \quad (7.50)$$

Выражение (7.50) обобщает три случая:  $n = 0, m > 0$  ( $v_{n,m} = \mu_m$ );  $n > 0, m = 0$  ( $v_{n,m} = s_n$ ) и  $n, m > 0$  ( $v_{n,m} = \sqrt{s_n^2 + \mu_m^2}$ ). Соответственно величины  $\bar{H}_{n,m}$  должны принимать значения, определяемые формулами (7.45), (7.46) и (7.47).

Решение задачи теплопроводности в пространстве изображений найдено. Перейдем из пространства изображений в пространство оригиналов. Согласно (7.21), получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(x, y, z) = & \frac{1}{\sqrt{L \cdot B}} \cdot \bar{\mathfrak{G}}_{0,0}(z) + \sqrt{\frac{2}{L \cdot B}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathfrak{G}}_{n,0}(z) \cos(s_n \cdot x) + \\ & + \sqrt{\frac{2}{L \cdot B}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\mathfrak{G}}_{0,m}(z) \cos(\mu_m \cdot y) + \\ & + \frac{2}{\sqrt{L \cdot B}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\mathfrak{G}}_{n,m}(z) \cdot \cos(\mu_m \cdot y) \cdot \cos(s_n \cdot x). \end{aligned} \quad (7.51)$$

Исходная задача (7.28) – (7.31) решена.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. После второго этапа преобразований получившуюся задачу (7.42) – (7.47) можно решить с помощью еще одного интегрального преобразования по переменной  $z$ . Ядро преобразования  $K_{3k}(z)$  находится из условия

$$\frac{\partial^2 K_{3k}(z)}{\partial z^2} = -\beta_k^2 \cdot K_{3k}(z); \quad (7.52)$$

$$K_{3k}|_{z=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial K_{3k}}{\partial z} \right|_{z=h} = 0.$$

Тогда

$$K_{3k}(z) = \sqrt{\frac{2}{h}} \cdot \sin(\beta_k \cdot z); \quad \beta_k = \frac{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi}{2 \cdot h}; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.53)$$

Обозначим  $\bar{\mathfrak{G}}_{n,m,k} = \int_0^h \bar{\mathfrak{G}}_{n,m}(z) \cdot K_{3k}(z) \cdot dz$ . Тогда полностью преобразованное уравнение будет иметь вид:

$$-(s_n^2 + \mu_m^2 + \beta_k^2) \cdot \bar{\mathfrak{G}}_{n,m,k} + N_{Z2} - N_{Z1} = 0. \quad (7.54)$$

В (7.54) появляется дополнительное слагаемое  $N_{Z2} - N_{Z1}$ .  $N_{Z2}$  не равно нулю, поскольку граничные условия (7.44) – (7.47) при  $z = h$  не являются однородными, а  $N_{Z1} = 0$  в силу однородности граничного условия (7.43). Определим  $N_{Z2}$  с помощью (7.17):

$$N_{X_2} = \begin{cases} \frac{\Psi_2}{A_2} \cdot K(x = X_2, \gamma) & \text{для } A_2 \neq 0, \\ -\frac{\Psi_2}{B_2} \cdot \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{x=X_2} & \text{для } B_2 \neq 0. \end{cases}$$

Напомним, что исходное граничное условие (7.5,б) имеет общий вид:

$$A_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=X_2} + B_2 T \Big|_{x=X_2} = \Psi_2.$$

Сравним его с граничными условиями (7.44) – (7.47). Видно, что формально  $A_2 = 1$ ,  $B_2 = 0$  и  $\Psi_2 = \bar{H}_{n,m}$ . Следовательно:

$$\begin{aligned} N_{Z_2} &= N_{Z2n,m,k} = \bar{H}_{n,m} \cdot K_{3k}(z = h) = \\ &= \bar{H}_{n,m} \cdot \sqrt{\frac{2}{h}} \cdot \sin\left((2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \cdot \sqrt{\frac{2}{h}} \cdot \bar{H}_{n,m}. \end{aligned}$$

Отсюда окончательно имеем решение полностью преобразованной задачи:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{G}}_{0,0,k} &= \frac{(-1)^k}{\beta_k^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{h}} \cdot \bar{H}_{0,0}; \\ \bar{\mathfrak{G}}_{n,0,k} &= \frac{(-1)^k}{s_n^2 + \beta_k^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{h}} \cdot \bar{H}_{n,0}; \\ \bar{\mathfrak{G}}_{0,m,k} &= \frac{(-1)^k}{\mu_m^2 + \beta_k^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{h}} \cdot \bar{H}_{0,m}; \\ \bar{\mathfrak{G}}_{n,m,k} &= \frac{(-1)^k}{s_n^2 + \mu_m^2 + \beta_k^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{h}} \cdot \bar{H}_{n,m}. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Следовательно, решение исходной задачи можно представить еще в одном виде, отличном от (7.51):

$$\vartheta(x, y, z) = \frac{2}{h \cdot \sqrt{L \cdot B}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \left[ \frac{\bar{H}_{0,0}}{\beta_k^2} + \sqrt{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_{n,0} \cos(s_n \cdot x)}{s_n^2 + \beta_k^2} + \right. \\ \left. + \sqrt{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_{0,m} \cos(\mu_m \cdot y)}{\mu_m^2 + \beta_k^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_{n,m} \cdot \cos(\mu_m \cdot y) \cdot \cos(s_n \cdot x)}{s_n^2 + \mu_m^2 + \beta_k^2} \right] \cdot \sin(\beta_k \cdot z). \quad (7.55)$$

Очевидно, что решение (7.55) с вычислительной точки зрения существенно хуже решения (7.51). Именно это обстоятельство мы и отметили в замечании к общей схеме применения ИП. Так же очевидно, что при необходимости применения ИП в несколько этапов начинать преобразования нужно по той пространственной переменной, по которой граничные условия задачи теплопроводности наиболее простые. Наконец, при решении задачи теплопроводности часто бывает очень полезно вводить понятие избыточной температуры. Это дает возможность сделать некоторые из граничных условий либо нулевыми, либо однородными. Однородные граничные условия облегчают решение преобразованной задачи, поскольку дополнительное слагаемое  $N_{X_1}$  или  $N_{X_2}$  в преобразованном уравнении будет нулевым.

### 7.3 Собственные значения и собственные функции линейной задачи теплопроводности

Аналитическим методам решения задачи теплопроводности посвящена известная учебная монография [8]. В ней рассматриваются и метод разделения переменных (Фурье), и метод интегральных преобразований, и метод функций Грина и некоторые другие методы решения различных типов задач теплопроводности.

Ниже приведены взятые из указанной монографии таблицы собственных чисел и собственных функций линейных задач теплопроводности для прямоугольного тела в декартовой системе координат (таблица 7.1) и для однородного сплошного цилиндра с осесимметричным температурным полем в цилиндрической системе координат (таблица 7.2) с различными вариантами граничных условий 1-го, 2-го и 3-го родов на границе тела. В таблицах используется дополнительное обозначение для граничных условий 3-го рода:  $h = \alpha/\lambda$ , где  $\alpha$ , как и ранее, коэффициент теплоотдачи с соответствующей границы тела, а  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала тела. Знание собственных функций – ядер преобразований и собственных чисел для различных вариантов

условий на границах превращает процедуру проведения ИП и возврат в пространство оригиналов в пошаговые действия по известному шаблону.

В таблице 7.2  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$  – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков соответственно. Их подробное описание, таблицы значений и формулы аппроксимации многочленами с погрешностью не хуже  $10^{-7}$  приведены в справочнике по специальным функциям [7]. Листинги подпрограмм вычислений функций  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$  по таким аппроксимациям, а также корней уравнения  $J_1(\mu)=0$  приведены в Приложении Б.

**Таблица 7.1** – Собственные значения и собственные функции задачи теплопроводности для однородного прямоугольного тела при различных граничных условиях на противоположных поверхностях ( $0 \leq x \leq L$ ,  $\rho_B = 1$ ).

Обозначение:  $h = \frac{\alpha}{\lambda}$ .

Граничные условия		Собственные числа $s_n^2$	Собственные функции $K_n(x)$
При $x = 0$	При $x = L$		
$K=0$	$dK/dx + hK=0$	$s_n^2 = \mu_n^2/A^2$	$K_n(x) = \frac{1}{C_n} \cdot \sin\left(\frac{\mu_n x}{A}\right),$ $C_n^2 = \frac{A}{2} \cdot \frac{(\mu_n^2 + h^2 A^2) + hA}{\mu_n^2 + h^2 A^2},$ $\mu_n > 0 \text{ – корни уравнения}$ $ctg(\mu) = -hA/\mu, \quad n = 1, 2, 3, \dots$
$K=0$	$dK/dx = 0$	$s_n^2 = \mu_n^2/A^2,$ $\mu = (2n-1)\frac{\pi}{2},$ $n = 1, 2, 3, \dots$	$K_n(x) = \frac{1}{C_n} \cdot \sin\left(\frac{\mu_n x}{A}\right),$ $C_n^2 = A/2.$
$K=0$	$K=0$	$s_n^2 = \mu_n^2/A^2,$ $\mu = n \cdot \pi,$ $n = 1, 2, 3, \dots$	$K_n(x) = \frac{1}{C_n} \cdot \sin\left(\frac{\mu_n x}{A}\right),$ $C_n^2 = A/2.$
$dK/dx = 0$	$dK/dx + hK=0$	$s_n^2 = \mu_n^2/A^2,$ $n = 1, 2, 3, \dots$	$K_n(x) = \frac{1}{C_n} \cdot \cos\left(\frac{\mu_n x}{A}\right),$ $C_n^2 = \frac{A}{2} \cdot \frac{(\mu_n^2 + h^2 A^2) + hA}{\mu_n^2 + h^2 A^2},$ $\mu_n > 0 \text{ – корни уравнения}$ $ctg(\mu) = \mu/(h \cdot A), \quad n = 1, 2, 3, \dots$

$dK/dx = 0$	$dK/dx = 0$	$s_n^2 = (n\pi/A)^2,$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$	$K_n(x) = \frac{1}{C_n} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{A}\right),$ $C_n^2 = \begin{cases} A/2 & \text{для } n = 1, 2, 3, \dots \\ A & \text{для } n = 0. \end{cases}$
$dK/dx - hK = 0$	$K = 0$	$s_n^2 = \mu_n^2/A^2,$ $n = 1, 2, 3, \dots$	$K_n(x) = \frac{1}{C_n} \cdot \left[ \mu_n \cdot \cos\left(\frac{\mu_n x}{A}\right) + A \cdot h \cdot \sin\left(\frac{\mu_n x}{A}\right) \right],$ $C_n^2 = \frac{A}{2} \cdot \left[ (\mu_n^2 + h^2 \cdot A^2) + hA \right],$ $\mu_n > 0$ – корни уравнения $ctg(\mu) = -hA/\mu, \quad n = 1, 2, 3, \dots$
$dK/dx = 0$	$K = 0$	$s_n^2 = \mu_n^2/A^2,$ $\mu = (2n-1)\frac{\pi}{2},$ $n = 1, 2, 3, \dots$	$K_n(x) = \frac{1}{C_n} \cdot \cos\left(\frac{\mu_n x}{A}\right),$ $C_n^2 = A/2.$
$dK/dx - hK = 0$	$dK/dx = 0$	$s_n^2 = \mu_n^2/A^2,$ $n = 1, 2, 3, \dots$	$K_n(x) = \frac{1}{C_n} \cdot \left[ \mu_n \cdot \cos\left(\frac{\mu_n x}{A}\right) + A \cdot h \cdot \sin\left(\frac{\mu_n x}{A}\right) \right],$ $C_n^2 = \frac{A}{2} \cdot \left[ (\mu_n^2 + h^2 \cdot A^2) + hA \right],$ $\mu_n > 0$ – корни уравнения $ctg(\mu) = \mu/(h \cdot A), \quad n = 1, 2, 3, \dots$

**Таблица 7.2** – Собственные значения и собственные функции задачи теплопроводности для однородного цилиндра ( $0 \leq r \leq R$ ,  $\rho_B = r$ ) при различных граничных условиях.

Обозначение:  $h = \frac{\alpha}{\lambda}$ .

Замечание: так как точка  $r = 0$  для цилиндрической системы особая, то для задачи теплопроводности в ней всегда ставится условие  $\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0$  (или  $|T|_{r=0} < \infty$ ).

Граничные условия при $r = R$	Собственные числа $s_n^2$	Собственные функции $K_n(r)$
$K=0$	$s_n^2 = \mu_n^2/R^2$ , $n = 1, 2, 3, \dots$	$K_n(r) = \frac{1}{C_n} \cdot J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$ $C_n^2 = \frac{R^2}{2} \cdot J_1^2(\mu_n),$ $\mu_n > 0$ – корни уравнения $J_0(\mu) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$
$dK/dr = 0$	$s_n^2 = \mu_n^2/R^2$ , $n = 0, 1, 2, 3, \dots$	$K_n(r) = \frac{1}{C_n} \cdot J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$ $C_n^2 = \frac{R^2}{2} \cdot J_1^2(\mu_n),$ $\mu_n \geq 0$ – корни уравнения $J_1(\mu) = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$ Для $n=0$ $K_0(r) = \frac{\sqrt{2}}{R} = const$ , так как $\mu_0 = 0$ и $J_0(0) = 1$ .
$dK/dr + hK = 0$	$s_n^2 = \mu_n^2/R^2$ , $n = 1, 2, 3, \dots$	$K_n(r) = \frac{1}{C_n} \cdot J_0\left(\frac{\mu_n \cdot r}{R}\right),$ $C_n^2 = (R^2/2) \cdot J_0^2(\mu_n) \cdot (1 + h^2 \cdot R^2 \cdot \mu_n^2).$ $\mu_n > 0$ – корни уравнения $\mu \cdot J_1(\mu) - h \cdot R \cdot J_0(\mu) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

## 7.4 Стационарное температурное поле ограниченного цилиндра с локализованным торцевым источником

Имеем однородный цилиндр с радиусом  $R$  и высотой  $H$ . На одном его торце расположен тепловой источник в виде центрально расположенного пятна с радиусом  $r_{и}$ . Отвод тепла производится конвективным образом с противоположного торца цилиндра и его боковой поверхности. Свободная от источника тепла соответствующая торцевая поверхность цилиндра адиабатически изолирована. Графическое представление тепловой модели объекта показано на рисунке 7.3.

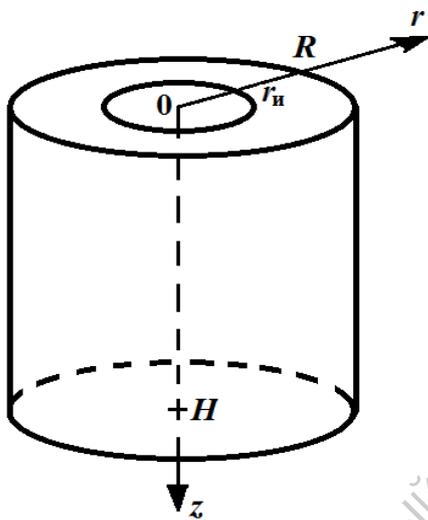


Рисунок 7.3 – Представление тепловой модели цилиндра с локальным круговым тепловым источником

Задачу теплопроводности сформулируем для избыточной по отношению к температуре среды температуры цилиндра  $\vartheta(r, z) = T(r, z) - T_{CP}$ :

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0, \quad (7.56)$$

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right|_{r=R} + \frac{\alpha_1}{\lambda} \cdot \vartheta \Big|_{r=R} = 0, \quad (7.57)$$

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{z=H} + \frac{\alpha_2}{\lambda} \cdot \vartheta \Big|_{z=H} = 0, \quad (7.58)$$

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{z=0} = \begin{cases} \frac{P_T}{\pi \cdot r_{и}^2 \cdot \lambda} & \text{для } r \leq r_{и}, \\ 0 & \text{для } r > r_{и}. \end{cases} \quad (7.59)$$

Здесь  $\alpha_1$  – коэффициент конвективной теплоотдачи с боковой поверхности цилиндра,  $\alpha_2$  – коэффициент конвективной теплоотдачи с торцевой поверхности цилиндра при  $z=H$ ,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности

материала цилиндра,  $P_T$  – тепловая мощность, выделяющаяся в тепловом источнике.

С помощью такой модели можно рассчитать, например, распределение температуры в цилиндрическом основании корпуса дискретного полупроводникового прибора, а под  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  понимать эффективные значения коэффициентов теплоотдачи, учитывающие возможное наличие оребрения. При этом граничное условие (7.59) записано в предположении о слабости конвективного теплообмена в малом объеме газовой среды под крышкой корпуса дискретного прибора.

Интегральное преобразование проведем по переменной  $r$ , не забывая о том, что теперь  $\rho_B = r$ . Обратимся к таблице 7.2 для определения ядра преобразования. В силу граничных условий (7.57) находим, что

$$K_n(r) = \frac{1}{C_n} \cdot J_0\left(\frac{\mu_n \cdot r}{R}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$C_n^2 = \left(\frac{R^2}{2}\right) \cdot J_0^2(\mu_n) \cdot \left(1 + \left(\frac{\alpha_1}{\lambda}\right)^2 \cdot R^2 \cdot \mu_n^2\right),$$
(7.60)

где  $\mu_n$  – корни уравнения  $\mu \cdot J_1(\mu) - \frac{\alpha_1}{\lambda} \cdot R \cdot J_0(\mu) = 0$ ,  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$  – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков соответственно.

Обозначим  $\bar{\mathfrak{G}}_n(z) = \int_0^R r \cdot \mathfrak{G}(r, z) \cdot K_n(r) \cdot dr$ . Тогда исходное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{G}}_n(z)}{\partial z^2} - \frac{\mu_n^2}{R^2} \cdot \bar{\mathfrak{G}}_n(z) = 0.$$
(7.61)

Граничное условие (7.58) преобразуется формально:

$$\left. \frac{\partial \bar{\mathfrak{G}}_n}{\partial z} \right|_{z=H} + \frac{\alpha_2}{\lambda} \cdot \bar{\mathfrak{G}}_n \Big|_{z=H} = 0.$$
(7.62)

Преобразуем граничное условие (7.59):

$$\left. \frac{\partial \bar{\mathfrak{G}}_n}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{P_T}{\pi \cdot r_{\text{и}}^2 \cdot \lambda \cdot C_n} \cdot \int_0^{r_{\text{и}}} r \cdot J_0\left(\frac{\mu_n \cdot r}{R}\right) \cdot dr =$$

$$= \frac{P_T \cdot R}{\pi \cdot r_{\text{и}} \cdot \lambda \cdot \mu_n \cdot C_n} \cdot J_1\left(\frac{\mu_n \cdot r_{\text{и}}}{R}\right) = \bar{H}_n.$$
(7.63)

При выводе (7.63) использован табличный интеграл  $\int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x)$ , где  $J_n$  – функция Бесселя первого рода  $n$ -ного порядка ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Решение задачи (7.61) – (7.63) очевидно:

$$\bar{\vartheta}_n(z) = C \cdot \exp\left(-\frac{\mu_n}{R} \cdot z\right) + D \cdot \exp\left(-\frac{\mu_n}{R} \cdot (H - z)\right). \quad (7.64)$$

Постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  определим из следующей системы, проистекающей из (7.62) и (7.63):

$$\begin{aligned} C \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{\mu_n}{R}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\mu_n \cdot H}{R}\right) + D \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\lambda} + \frac{\mu_n}{R}\right) &= 0; \\ -C + D \cdot \exp\left(-\frac{\mu_n \cdot H}{R}\right) &= \bar{H}_n \cdot \frac{R}{\mu_n}. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Наконец, применяя формулу обращения, можно записать:

$$\vartheta(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n} \cdot \bar{\vartheta}_n(z) \cdot J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \cdot r\right). \quad (7.66)$$

Предоставляю студентам возможность для закрепления материала самим полностью раскрыть выражение (7.66), решив систему (7.65) и записав (7.64) с уже определенными постоянными  $C$  и  $D$ .

## 7.5 Нестационарное температурное поле плоского прямоугольного тела с поверхностным локальным тепловыделением

Рассмотрим ту же модель в виде пластины с локальным поверхностным тепловым источником, стационарное температурное поле которой было рассчитано в подразделе 7.2 (рис.7.2), и определим нестационарное распределение температуры в ней при условии, что в начальный момент времени в источнике тепла начинает генерироваться тепловая мощность  $P_T$  постоянного уровня.

Краевая задача теплопроводности для избыточной температуры пластины будет иметь вид:

$$\frac{c\rho}{\lambda} \cdot \frac{\partial \vartheta(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta(x, y, z, \tau)}{\partial z^2}, \quad (7.67)$$

с начальным условием

$$\vartheta(x, y, z)|_{\tau=0} = 0 \quad (7.68)$$

и граничными условиями

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_{y=B} = 0, \quad (7.69)$$

$$\vartheta|_{z=0} = 0, \quad (7.70)$$

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{z=h} = H(x, y, \tau) = \begin{cases} \frac{P_T}{l \cdot b \cdot \lambda} & \text{для } \left| \xi - \frac{l}{2} \right| \leq x \text{ и } \left| \eta - \frac{b}{2} \right| \leq y, \tau > 0, \\ 0 & \text{для } \left| \xi - \frac{l}{2} \right| > x \text{ и } \left| \eta - \frac{b}{2} \right| > y, \tau = 0. \end{cases} \quad (7.71)$$

Здесь  $c$  и  $\rho$  – удельная теплоемкость и плотность материала пластины. В задаче (7.67) – (7.71) предполагается, что в начальный момент времени ( $\tau=0$ ) модель изотермическая с температурой, равной температуре нижнего основания, с которого производится отвод тепла.

При решении данной краевой задачи методом конечных ИП преобразования по пространственным переменным будут полностью тождественны проведенным в подразделе (7.2) с учетом преобразования и по переменной  $z$ . Однако преобразованное уравнение в отличие от (7.54) будет содержать производную по времени:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial \bar{\vartheta}_{n,m,k}}{\partial \tau} = - (s_n^2 + \mu_m^2 + \beta_k^2) \cdot \bar{\vartheta}_{n,m,k} + (-1)^k \cdot \sqrt{\frac{2}{h}} \cdot \bar{H}_{n,m}, \quad (7.72)$$

где  $a = \frac{\lambda}{c\rho}$  – коэффициент температуропроводности модели, а все  $\bar{H}_{n,m}$  определяются по формулам (7.44) – (7.47). Кроме того, мы не преобразовали начальное условие. В соответствии с (7.24) и с учетом (7.68)

$$\bar{\vartheta}_{n,m,k}|_{\tau=0} = \int_0^h K_{3k}(z) \int_0^B K_{2m}(y) \int_0^L \vartheta|_{\tau=0} \cdot K_{1n}(x) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0. \quad (7.73)$$

Отметим следующее обстоятельство. В общем случае полностью преобразованное по пространственным переменным нестационарное уравнение теплопроводности можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}_{n,m,k}}{\partial \tau} = -a \cdot v_{n,m,k}^2 \cdot \bar{\vartheta}_{n,m,k} + a \cdot C_{n,m,k} \cdot f(\tau), \quad (7.74)$$

где для краткости введено обозначение  $v_{n,m,k}^2 = s_n^2 + \mu_m^2 + \beta_k^2$ ,  $C_{n,m,k}$  имеют смысл постоянных в разложении функции источника, а  $f(\tau)$  – некоторая безразмерная функция, определяющая зависимость тепловыделения от времени. Решение уравнения (7.74) имеет общий вид

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_{n,m,k}(\tau) = & \bar{\vartheta}_{n,m,k}|_{\tau=0} \cdot \exp(-a \cdot v_{n,m,k}^2 \cdot \tau) + \\ & + a \cdot C_{n,m,k} \cdot \int_0^{\tau} f(t) \cdot \exp(-a \cdot v_{n,m,k}^2 \cdot (\tau - t)) \cdot dt. \end{aligned} \quad (7.75)$$

В нашем случае  $\bar{\vartheta}_{n,m,k}|_{\tau=0} = 0$ ,  $C_{n,m,k} = (-1)^k \cdot \sqrt{\frac{2}{h}} \cdot \bar{H}_{n,m}$ , а  $f(\tau) = 0$  при  $\tau \leq 0$  и  $f(\tau) = 1$  при  $\tau > 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_{n,m,k}(\tau) = & a \cdot (-1)^k \cdot \sqrt{\frac{2}{h}} \cdot \bar{H}_{n,m} \cdot \int_0^{\tau} \exp(-a \cdot v_{n,m,k}^2 \cdot (\tau - t)) \cdot dt = \\ = & (-1)^k \cdot \sqrt{\frac{2}{h}} \cdot \bar{H}_{n,m} \cdot \frac{[1 - \exp(-a \cdot v_{n,m,k}^2 \cdot \tau)]}{v_{n,m,k}^2}. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Тогда по аналогии с (7.55) получаем решение исходной задачи (7.67) – (7.71):

$$\begin{aligned} \vartheta(x, y, z, \tau) = & \frac{2}{h \cdot \sqrt{L \cdot B}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \left\{ \frac{\bar{H}_{0,0}}{\beta_k^2} \cdot [1 - \exp(-a \cdot \beta_k^2 \cdot \tau)] + \right. \\ & + \sqrt{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_{n,0} \cos(s_n \cdot x)}{s_n^2 + \beta_k^2} \cdot [1 - \exp(-a \cdot (s_n^2 + \beta_k^2) \cdot \tau)] + \\ & + \sqrt{2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_{0,m} \cos(\mu_m \cdot y)}{\mu_m^2 + \beta_k^2} \cdot [1 - \exp(-a \cdot (\mu_m^2 + \beta_k^2) \cdot \tau)] + \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_{n,m} \cdot \cos(\mu_m \cdot y) \cdot \cos(s_n \cdot x)}{s_n^2 + \mu_m^2 + \beta_k^2} \cdot [1 - \exp(-a \cdot (s_n^2 + \mu_m^2 + \beta_k^2) \cdot \tau)] \right\} \cdot \sin(\beta_k \cdot z). \end{aligned} \quad (7.77)$$

Нетрудно убедиться, что при  $\tau \rightarrow \infty$  данное выражение переходит в (7.55).

## 7.6 Замечание о вычислении тепловых сопротивлений элементов с многомерными теплофизическими моделями

В соответствии с определением (3.15) под тепловым сопротивлением понимается разность температур между двумя изотермическими площадками при протекании между ними единичной тепловой мощности. Поэтому под тепловым сопротивлением элемента с локализованными тепловыми источником и стоком в общем случае понимается разность средних по области источника и области стока температур (при соответствующем единичном тепловом потоке), причем конкретное тепловое сопротивление соответствует одному источнику и одному стоку тепловой энергии. В силу этого обстоятельства, если в тепловой модели присутствует несколько областей

рассеяния тепла, то для нее приходится вводить соответствующее количество тепловых сопротивлений, которые определяют соотношение долей теплового потока от теплового источника, рассеиваемых с указанных областей.

Тепловое сопротивление  $R_{ТПл}$  прямоугольной пластины с локальным поверхностным источником, рассмотренной в подразделе 7.2, определяется одним источником и одним изотермическим стоком тепловой энергии. Поэтому

$$R_{ТПл} = \frac{\langle \vartheta \rangle_{ИСТ}}{P_T}, \quad \langle \vartheta \rangle_{ИСТ} = \frac{1}{l \cdot b} \int_{l-\xi/2}^{l+\xi/2} dx \int_{b-\eta/2}^{b+\eta/2} \vartheta(x, y, z=h) \cdot dy, \quad (7.78)$$

где  $\langle \vartheta \rangle_{ИСТ}$  – средняя избыточная температура теплового источника.

Аналогичным образом определяется и тепловое сопротивление цилиндрической модели, рассмотренной в подразделе 7.4.

В следующем разделе пособия будут рассмотрены две обобщенные теплофизические модели, используемые для анализа тепловых режимов твердотельных электронных устройств. В них учтены многие возможные источники и стоки тепловой энергии. При этом для каждой пары источник–сток необходимо рассчитывать свое значение теплового сопротивления, иначе невозможно построить подробную тепловую схему анализируемого устройства.

## **8 ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ И ТЕПЛОВЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ**

### **8.1 Обобщенная теплофизическая модель твердотельной системы, созданной по объемной многослойной технологии**

Здесь рассмотрена аналитическая теплофизическая модель слоистой прямоугольной структуры с объемным тепловыделением, обобщающая разработанные ранее многими авторами теплофизические модели элементов твердотельной электроники [9]. Модель применима для расчета стационарных температурных полей в кристаллах монокристаллических микросхем и дискретных устройствах, тепловых сопротивлений конструктивных прямоугольных элементов устройств со специфической конфигурацией тепловых источников и стоков и, наконец, для приближенного расчета распределения температуры в области стыковки полупроводникового кристалла с основанием (подложкой,

контактной пластиной и т. п.). Последнее важно в тех ситуациях, когда источник тепла расположен близко к теплоотводу, что типично, например, для полупроводниковых лазерных диодов.

Графическое представление модели показано на рис. 8.1. Прямоугольная  $N$ -слойная структура имеет размер  $A$  по оси  $0x$  и  $B$  по оси  $0y$ . Ось  $z$  направлена перпендикулярно плоскости слоев и для удобства введена для каждого слоя своя:

$$0 \leq z_1 < H_1; \dots 0 \leq z_i < H_i; \dots 0 \leq z_N \leq H_N,$$

где  $H_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) – толщина слоя.

В каждом слое  $H_i$  модели может действовать тепловой источник с объемной плотностью тепловыделения  $w_i(x, y)$ , произвольно распределенной в плоскости  $xu$ , но постоянной по направлению  $z_i$ . Данное упрощение облегчает аналитическое решение задачи теплопроводности для рассматриваемой модели, а если распределение объемной плотности по вертикальной координате нельзя представить как равномерное, то можно искусственно ввести в модель несколько дополнительных слоев.

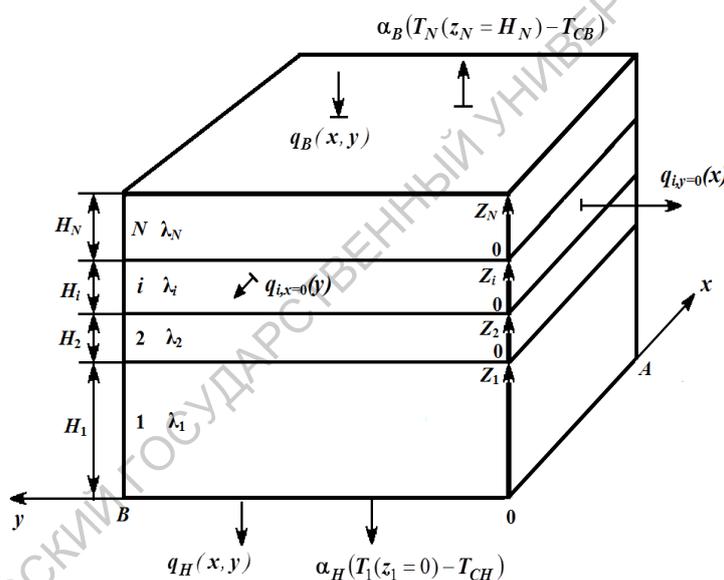


Рисунок 8.1 – Графическое представление теплофизической модели прямоугольной многослойной структуры с произвольными источниками и стоками тепла

На верхней поверхности модели ( $z_N = H_N$ ) также может действовать тепловой источник с поверхностной плотностью  $q_B(x,y)$ , а на нижней ( $z_1 = 0$ ) – тепловой сток с поверхностной плотностью  $q_H(x,y)$ . Кроме того, стоки тепла предусмотрены на боковых поверхностях модели: на поверхности  $x = 0$  в пределах  $i$ -го слоя расположен сток тепла с плотностью  $q_{i, x=0}(y)$ , на поверхности

$x = A$  в пределах того же слоя – сток тепла с плотностью  $q_{i, x=A}(y)$ ; аналогичным образом в пределах  $i$ -го слоя задаются стоки тепла на поверхности  $y = 0$  и  $y = B$ :  $q_{i, y=0}(x)$  и  $q_{i, y=B}(x)$ . Последние четыре функции плотностей стоков тепловой энергии считаются равномерно распределенными по вертикальной координате ( $z_i$ ) и зависят только от одной пространственной переменной –  $x$  или  $y$ . Данное упрощение введено по той же причине, что и для функции  $w_i(x, y)$ .

Наконец, на верхней и нижней поверхностях модели могут быть заданы условия конвективного теплообмена с окружающими средами. На нижней поверхности коэффициент конвективной теплоотдачи в среду с температурой  $T_{CH}$  имеет значение  $\alpha_H$ , а на верхней поверхности задаются значения  $\alpha_B$  и  $T_{CB}$ .

Таким образом, для рассматриваемой модели стационарная задача теплопроводности формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 T_i(x, y, z_i)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i(x, y, z_i)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_i(x, y, z_i)}{\partial z_i^2} + \frac{w_i(x, y)}{\lambda_i} = 0; \quad (8.1)$$

$$\left. \frac{\partial T_i}{\partial z_i} \right|_{z_i=0} = \frac{\alpha_H}{\lambda_i} (T_i|_{z_i=0} - T_{CH}) + \frac{1}{\lambda_i} q_H(x, y); \quad (8.2)$$

$$T_i|_{z_i=H_i} = T_{i+1}|_{z_{i+1}=0}; \quad \lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial z_i} \right|_{z_i=H_i} = \lambda_{i+1} \left. \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z_{i+1}} \right|_{z_{i+1}} = 0; \quad (8.3)$$

$$\left. \frac{\partial T_N}{\partial z_N} \right|_{z_N=H_N} = -\frac{\alpha_B}{\lambda_N} (T_N|_{z_N=H_N} - T_{CB}) + \frac{1}{\lambda_N} q_B(x, y); \quad (8.4)$$

$$\lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial x} \right|_{x=0} = q_{i, x=0}(y); \quad \lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial x} \right|_{x=A} = -q_{i, x=A}(y); \quad (8.5)$$

$$\lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial y} \right|_{y=0} = q_{i, y=0}(x); \quad \lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial y} \right|_{y=B} = -q_{i, y=B}(x). \quad (8.6)$$

В задаче (8.1)–(8.6)  $T_i(x, y, z_i)$  – температурное поле в  $i$ -м слое модели;  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности материала  $i$ -го слоя.

Формальное решение задачи (8.1)–(8.6) получено методом конечных интегральных преобразований:

$$\begin{aligned}
T_i(x, y, z_i) = & D_i + C_i z_i + \frac{1}{2} \Phi_i z_i^2 + \sum_{m=1}^{\infty} [C_{mi} \exp(-\gamma_m z_i) + \\
& + D_{mi} \exp(-\gamma_m (H_i - z_i))] \times \cos(\gamma_m y) + \sum_{n=1}^{\infty} [C_{ni} \exp(-\mu_n z_i) + \\
& + D_{ni} \exp(-\mu_n (H_i - z_i))] \times \cos(\mu_n x) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [C_{mni} \exp(-v_{mn} z_i) + \\
& + D_{mni} \exp(-v_{mn} (H_i - z_i))] \times \cos(\mu_n x) \cos(\gamma_m y)
\end{aligned} \tag{8.7}$$

где приняты следующие вспомогательные обозначения:

$$\gamma_m = \frac{m\pi}{B}, \quad m = 1, 2, \dots;$$

$$\mu_n = \frac{n\pi}{B}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$v_{mn} = \sqrt{\gamma_m^2 + \mu_n^2};$$

$$\begin{aligned}
\Phi_i = & \frac{1}{AB\lambda_i} \int_0^B [q_{i,x=0}(y) + q_{i,x=A}(y)] dy + \frac{1}{AB\lambda_i} \int_0^A [q_{i,y=0}(x) + q_{i,y=B}(x)] dx - \\
& - \frac{1}{AB\lambda_i} \int_0^A \int_0^B w_i(x, y) dy dx;
\end{aligned} \tag{8.8}$$

$$Q_H = \frac{1}{AB\lambda_1} \int_0^A \int_0^B q_H(x, y) dy dx; \quad Q_B = \frac{1}{AB\lambda_1} \int_0^A \int_0^B q_B(x, y) dy dx; \tag{8.9}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{i,m} = & \frac{2}{AB\lambda_i} \left\{ \int_0^B [q_{i,x=0}(y) + q_{i,x=A}(y)] \cos(\gamma_m y) dy + \right. \\
& \left. + \int_0^A [q_{i,y=0}(x) + (-1)^m q_{i,y=B}(x)] dx \right\} - \frac{2}{AB\lambda_i} \int_0^A \int_0^B w_i(x, y) \cos(\gamma_m y) dy;
\end{aligned} \tag{8.10}$$

$$\begin{aligned}
Q_{H,m} = & \frac{2}{AB\lambda_1} \int_0^A dx \int_0^B q_H(x, y) \cos(\gamma_m y) dy; \\
Q_{Bm} = & \frac{2}{AB\lambda_N} \int_0^A dx \int_0^B q_B(x, y) \cos(\gamma_m y) dy;
\end{aligned} \tag{8.11}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{i,n} = & \frac{2}{AB\lambda_i} \left\{ \int_0^A [q_{i,y=0}(x) + q_{i,y=B}(x)] \cos(\mu_n x) dx + \right. \\
& \left. + \int_0^B [q_{i,x=0}(y) + (-1)^n q_{i,x=A}(y)] dy \right\} - \frac{2}{AB\lambda_i} \int_0^B dy \int_0^A w_i(x, y) \cos(\mu_n x) dx;
\end{aligned} \tag{8.12}$$

$$Q_{H,n} = \frac{2}{AB\lambda_1} \int_0^B dy \int_0^A q_H(x,y) \cos(\mu_n x) dx;$$

$$Q_{B,n} = \frac{2}{AB\lambda_N} \int_0^B dy \int_0^A q_B(x,y) \cos(\mu_n x) dx;$$
(8.13)

$$\Phi_{i,mn} = \frac{4}{AB\lambda_i} \int_0^A [q_{i,y=0}(x) + (-1)^n q_{i,y=B}(x)] \cos(\mu_n x) dx +$$

$$+ \frac{4}{AB\lambda_i} \int_0^B [q_{i,x=0}(y) + (-1)^m q_{i,x=A}(y)] \cos(\gamma_m y) dy -$$

$$- \frac{4}{AB\lambda_i} \cdot \int_0^A \int_0^B w_i(x,y) \cos(\mu_n x) \cos(\gamma_m y) dy dx;$$
(8.14)

$$Q_{H,mn} = \frac{4}{AB\lambda_1} \cdot \int_0^A \int_0^B q_H(x,y) \cos(\mu_n x) \cos(\gamma_m y) dy dx;$$

$$Q_{B,mn} = \frac{4}{AB\lambda_N} \cdot \int_0^A \int_0^B q_B(x,y) \cos(\mu_n x) \cos(\gamma_m y) dy dx.$$
(8.15)

Постоянные интегрирования  $C_i$  и  $D_i$  с соответствующими индексами суммирования ищутся из систем алгебраических уравнений, проистекающих из граничных условий (8.2)–(8.4). Для нулевых членов суммирования ( $n = 0, m = 0$ ) имеем

$$C_1 - \frac{\alpha_H}{\lambda_1} D_1 = Q_H - \frac{\alpha_H}{\lambda_1} T_{CH};$$

$$\dots \dots$$

$$C_i H_i + D_i - D_{i+1} = -\frac{1}{2} \Phi_i H_i^2;$$

$$C_i - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} C_{i+1} = -\Phi_i H_i; \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$
(8.16)

$$\dots \dots$$

$$C_N \left( 1 + \frac{\alpha_B H_N}{\lambda_N} \right) + \frac{\alpha_B}{\lambda_N} D_N = Q_B + \frac{\alpha_B}{\lambda_N} T_{CB} - \Phi_N H_N \left( 1 + \frac{\alpha_B H_N}{2\lambda_N} \right).$$

Для определения постоянных, стоящих под знаками суммирования, имеем три однотипных системы линейных алгебраических уравнений для случаев ( $n = 0, m > 0$ ), ( $n > 0, m = 0$ ) и ( $n, m > 0$ ). В общем случае для ( $n, m > 0$ ):

$$C_{1,mn} \left( 1 + \frac{\alpha_H}{\lambda_1 v_{mn}} \right) - D_{1,mn} \left( 1 + \frac{\alpha_H}{\lambda_1 v_{mn}} \right) \cdot \exp(-v_{mn} H_1) = \frac{\alpha_H}{\lambda_1 v_{mn}^3} \Phi_{1,mn} - \frac{Q_{H,mn}}{v_{mn}};$$

$$\dots \dots$$

$$C_{i,mn} \exp(-v_{mn} H_i) - C_{i+1,mn} + D_{i,mn} - D_{i+1,mn} \exp(-v_{mn} H_{i+1}) = \frac{\Phi_{i,mn} - \Phi_{i+1,mn}}{v_{mn}^2};$$
(8.17)

$$\begin{aligned}
& -C_{i,mn} \exp(-v_{mn} H_i) + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} C_{i+1,mn} + D_{i,mn} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} D_{i+1,mn} \exp(-v_{mn} H_{i+1}) = 0; \\
& C_{N,mn} \left( \frac{\alpha_B}{\lambda_N v_{mn}} - 1 \right) \cdot \exp(-v_{mn} H_N) + D_{1,mn} \left( 1 + \frac{\alpha_B}{\lambda_N v_{mn}} \right) = \\
& = \frac{\alpha_B}{\lambda_N v_{mn}^3} \Phi_{N,mn} - \frac{Q_{B,mn}}{v_{mn}},
\end{aligned}$$

где  $i = 1, 2, \dots, N-1$ .

В частных случаях, когда  $(n = 0, m > 0)$  или  $(n > 0, m = 0)$ , значение  $v_{mn}$  в последней системе нужно заменить на  $\gamma_m$  или  $\mu_n$  и соответственным образом заменить  $\Phi_{i,mn}$ ,  $Q_{H,mn}$  и  $Q_{B,mn}$  на (8.10)–(8.13).

Системы (8.16)–(8.17) легко решаются методом Гаусса с выбором ведущего элемента.

Решение (8.7)–(8.17) задачи (8.1)–(8.6) формализовано в том смысле, что в нем может не выполняться условие теплового баланса из-за использования функций стоков тепловой энергии вместе с условием конвективной теплоотдачи. При применении рассматриваемой модели к конкретной ситуации указанные условия необходимо разделять.

Число слагаемых в рядах Фурье, входящих в решение (8.7), при практических расчетах ограничивается по признаку Лейбница сходимости знакопеременных рядов. В компьютерных программах, реализующих алгоритм (8.7)–(8.17) в различных модификациях, слагаемые в рядах группируются в последовательные знакопеременные члены, а ошибка вычислений определяется первым из отбрасываемых таких членов ряда.

Приведем несколько примеров применения указанной модели.

Для расчета температурных перегревов в полупроводниковых лазерных диодах полосковой геометрии модель значительно упрощается и в первом приближении становится двумерной, если перепад температур по длине резонатора нас не интересует. На нижней поверхности модели (поверхности контакта с теплоотводом) задается изотермическое условие. Остальные внешние поверхности полагаются адиабатически изолированными, т. е. все поверхностные источники и стоки тепла обнуляются. Источник тепла располагается в активном слое и имеет прямоугольную форму, соответствующую форме активной области диода. Такая модель представлена, например, в [10].

Для расчета температурного поля типовой монолитной интегральной схемы, расположенной на теплоотводе, необходимо на верхней поверхности модели задать прямоугольные конфигурации тепловых источников и их мощности. Объемные источники тепла отсутствуют, а боковые поверхности модели, как и в предыдущем случае, считаются адиабатически изолированными. Такое модельное представление микросхемы описано в [11].

С помощью предлагаемой модели можно рассчитать тепловое сопротивление структуры, закрепленной методом «перевернутого монтажа». Для этого в условиях соблюдения теплового баланса на верхней (или нижней) поверхности модели задаются граничные условия только второго рода, моделирующие источник и стоки тепловой энергии. Остальную поверхность модели необходимо считать адиабатически изолированной. Напомним, что в этом случае тепловое сопротивление моделируемой структуры будет рассчитываться как разность средних температур источника и стоков тепла, отнесенную к величине тепловой мощности, протекающей через структуру.

## 8.2 Расчет тепловых сопротивлений цилиндрических элементов с локализованным тепловыделением

Модель многослойной цилиндрической структуры показана на рис. 8.2 [12]. Цилиндрическая  $N$ -слойная структура имеет внешний радиус  $R$ . Ось  $z$  направлена перпендикулярно плоскости слоев и для удобства введена для каждого слоя своя:

$$0 \leq z_1 < H_1; \dots 0 \leq z_i < H_i; \dots 0 \leq z_N < H_N,$$

где  $H_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) – толщина  $i$ -го слоя.

Вся поверхность модели считается адиабатически изолированной, за исключением трех локализованных областей на торцах цилиндра:

- область стока тепла в виде кольца на нижнем торце (при  $z_1 = 0$ ) с внутренним радиусом  $r_{10}$  и внешним радиусом  $r_{20}$ ;

- круговой источник тепла на верхнем торце цилиндра (при  $z_N = H_N$ ) с радиусом  $r_{II}$ ;

– кольцевой сток тепла на верхнем торце с внутренним радиусом  $r_{1N}$  и внешним радиусом  $r_{2N}$ .

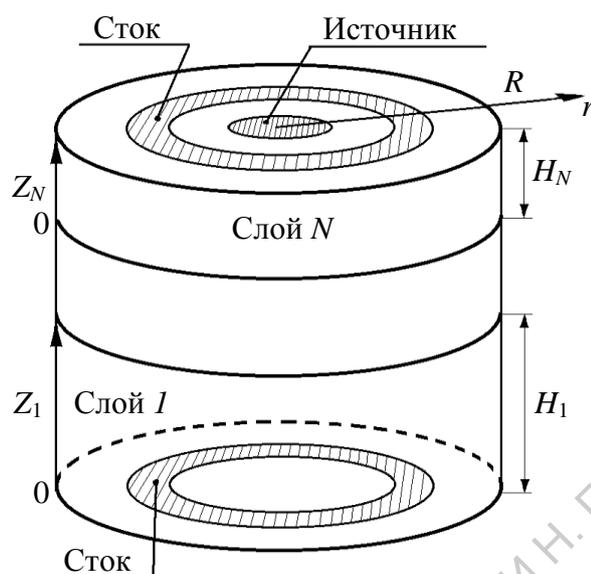


Рисунок 8.1 – Графическое представление теплофизической модели цилиндрического элемента с кольцевыми источником и стоками тепла

В круговом источнике тепла выделяется тепловая мощность  $P_T$ , часть которой ( $P_1$ ) уходит из модели через нижнее кольцо, а другая часть ( $P_N$ ) – через верхнее кольцо. Очевидно, что  $P_T = P_1 + P_N$ . Таким образом, для рассматриваемой модели стационарная задача теплопроводности формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 T_i(r, z_i)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_i(r, z_i)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_i(r, z_i)}{\partial z_i^2} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (8.18)$$

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial z_1} \right|_{z_1=0} = \begin{cases} \frac{P_1}{\pi \lambda_1 (r_{20}^2 - r_{10}^2)}, & r_{10} \leq r \leq r_{20}; \\ 0, & \text{вне стока;} \end{cases} \quad (8.19)$$

$$T_i|_{z_i=H_i} = T_{i+1}|_{z_{i+1}=0}; \quad \lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial z_i} \right|_{z_i=H_i} = \lambda_{i+1} \left. \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z_{i+1}} \right|_{z_{i+1}=0} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (8.20)$$

$$\text{для всех } i \quad \left. \frac{\partial T_i}{\partial r} \right|_{r=R} = 0; \quad (8.21)$$

$$\left. \frac{\partial T_N}{\partial z_N} \right|_{z_N=H_N} = \begin{cases} \frac{P_T}{\pi \lambda_N r_H^2}, & 0 \leq r \leq r_H; \\ \frac{-P_N}{\pi \lambda_N (r_{2N}^2 - r_{1N}^2)}, & r_{1N} \leq r \leq r_{2N}; \\ 0, & \text{вне источника и стока.} \end{cases} \quad (8.22)$$

В задаче (8.18) – (8.22)  $T_i(r, z_i)$  – температурное поле в  $i$ -м слое модели;  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности материала  $i$ -го слоя.

Формальное решение задачи (8.18) – (8.22) получено методом конечных интегральных преобразований:

$$T_i(r, z_i) = D_{0i} + C_{0i} z_i + \sum_{n=1}^{\infty} [C_{ni} \exp(-\mu_n z_i/R) + D_{ni} \exp(-\mu_n (H_i - z_i)/R)] \cdot J_0(\mu_n r/R), \quad (8.23)$$

где  $\mu_n$  – корни характеристического уравнения  $J_1(\mu) = 0$ ;  $J_0$  и  $J_1$  – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков.

Постоянные интегрирования  $D_{0i}$ ,  $C_{0i}$ ,  $D_{ni}$  и  $C_{ni}$  ищутся из систем алгебраических уравнений, проистекающих из граничных условий (8.19) – (8.20).

Необходимо отметить, что при принятых граничных условиях решение (8.23) определено с точностью до произвольной постоянной  $D_{01}$ . Однако для вычисления тепловых сопротивлений как температурного перепада между двумя областями модели при единичном тепловом потоке между ними величина этой постоянной не имеет значения. Поэтому формально положим  $D_{01} = 0$ .

Тогда для определения указанных произвольных постоянных будем иметь следующие системы линейных алгебраических уравнений.

Для нулевых членов суммирования ( $n = 0$ ):

$$D_{01} = 0; \quad C_{01} = \frac{P_1}{\pi \lambda_1 R^2};$$

.....

$$C_{0i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} C_{0i};$$

(8.24)

$$D_{0i+1} = D_{0i} + C_{0i} H_i; \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$

.....

$$C_{0N} = \frac{P_N}{\pi \lambda_N R^2}.$$

Для определения постоянных под знаком суммы ( $n > 0$ ):

$$\begin{aligned}
-C_{n1}D_{n1} \cdot \exp(-\mu_n H_1 / R) &= \frac{2P_1 \cdot [r_{02}J_1(\mu_n r_{02} / R) - r_{01}J_1(\mu_n r_{01} / R)]}{\pi\lambda_1(r_{02}^2 - r_{01}^2)\mu_n^2 J_0^2(\mu_n)}, \\
&\dots\dots\dots \\
C_{ni}\exp(-\mu_n H_i / R) - C_{ni+1} + D_{ni} - D_{ni+1}\exp(-\mu_n H_{i+1} / R) &= 0; \\
-C_{ni}\exp(-\mu_n H_i / R) + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}C_{ni+1} + D_{ni} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}D_{ni+1}\exp(-\mu_n H_{i+1} / R) &= 0; \\
&\dots\dots\dots i = 1, 2, \dots, N-1; \\
C_{nN} \cdot \exp(-\mu_n H_N / R) + D_{nN} &= \frac{2}{\pi\lambda_N\mu_n^2 J_0^2(\mu_n)} \cdot \left[ \frac{P_T}{r_H} J_1(\mu_n r_H / R) - \right. \\
&\left. - \frac{P_N \cdot [r_{2N}J_1(\mu_n r_{2N} / R) - r_{1N}J_1(\mu_n r_{1N} / R)]}{r_{2N}^2 - r_{1N}^2} \right].
\end{aligned} \tag{8.25}$$

Система (8.24) решается путем прямой подстановки, а система (8.25) – методом Гаусса с выбором ведущего элемента.

Число слагаемых в ряду (8.23) при практических расчетах ограничивается по признаку сходимости Лейбница знакопеременных рядов. В компьютерной программе, реализующей алгоритм (8.23), слагаемые группируются в последовательные знакопеременные члены в соответствии с переменной знака функции  $J_0(\mu_n r/R)$ , а абсолютная погрешность вычислений определяется величиной первого из отбрасываемых таких сгруппированных членов ряда.

На основе выражения (8.23) можно вычислить 3 характерных тепловых сопротивлений:

- на участке «круговой источник–кольцевой сток на противоположном торце»;
- на участке «круговой источник–кольцевой сток на этом же торце модели»;
- на участке «кольцевой источник–кольцевой сток на противоположном торце».

Для этого вычисляются средние температуры по областям соответствующих источников/стоков тепла.

Средняя температура центрального источника на верхнем торце модели

$$\langle T_{\text{ист}} \rangle = D_{0N} + C_{0N}H_N + \frac{2R}{r_H} \sum_{n=1}^{\infty} [C_{nN} \exp(-\mu_n H_N / R) + D_{nN}] \frac{J_1(\mu_n r_H / R)}{\mu_n}. \tag{8.26}$$

Средняя температура кольцевого источника на верхнем торце модели

$$\begin{aligned} \langle T_{\text{СТОК}} \rangle_{z_N=H_N} &= D_{0N} + C_{0N} H_N + \frac{2R}{r_{2N}^2 - r_{1N}^2} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} [C_{nN} \exp(-\mu_n H_N / R) + D_{nN}] \cdot \frac{r_{2N} J_1(\mu_n r_{2N} / R) - r_{1N} J_1(\mu_n r_{1N} / R)}{\mu_n}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Средняя температура кольцевого источника на нижнем торце модели

$$\begin{aligned} \langle T_{\text{СТОК}} \rangle_{z_1=0} &= D_{01} + \frac{2R}{r_{20}^2 - r_{10}^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [C_{n1} + D_{n1} \exp(-\mu_n H_1 / R)] \times \\ &\times \frac{r_{20} J_1(\mu_n r_{20} / R) - r_{10} J_1(\mu_n r_{10} / R)}{\mu_n}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Тогда тепловое сопротивление модели на участке «круговой источник–кольцевой сток на противоположном торце»

$$R_{T1} = \frac{1}{P_T} \left| \langle T_{\text{ИСТ}} \rangle - \langle T_{\text{СТОК}} \rangle_{z_1=0} \right| \text{ при } P_N = 0 \text{ и } P_0 = P_T.$$

Тепловое сопротивление на участке «круговой источник–кольцевой сток на этом же торце модели»

$$R_{T2} = \frac{1}{P_T} \left| \langle T_{\text{ИСТ}} \rangle - \langle T_{\text{СТОК}} \rangle_{z_N=H_N} \right| \text{ при } P_0 = 0 \text{ и } P_N = P_T.$$

Наконец, тепловое сопротивление на участке «кольцевой источник–кольцевой сток на противоположном торце» вычисляется при условии, что круговой источник отсутствует ( $P_T = 0$ ), в качестве теплового источника выступает кольцо на верхнем торце модели, причем численно должно выполняться условие  $P_N = -P_0$  – смена знака необходима для формального перехода от стока тепла к источнику. Тогда

$$R_{T3} = \frac{1}{|P_N|} \left| \langle T_{\text{СТОК}} \rangle_{z_N=H_N} - \langle T_{\text{СТОК}} \rangle_{z_0=0} \right|.$$

Отметим, что при компьютерной реализации предлагаемой модели удобно проводить вычисления функций Бесселя первого рода с помощью полиномиальных аппроксимации, приведенных в [7] и имеющих абсолютную погрешность не более  $10^{-7}$ , как уже отмечалось в 7.3. Там же представлены аналитические процедуры нахождения корней характеристических уравнений  $J_0(\mu) = 0$  и  $J_1(\mu) = 0$ , см. Приложение Б.

## 9 ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

### Задачи к разделу 4.

- 1) Имеется трехслойная плоская стенка с площадью боковой поверхности  $100 \text{ см}^2$  (с одной стороны). По очень тонкому центральному слою стенки (его толщиной можно пренебречь) протекает электрический ток, что приводит к выделению в нем тепловой мощности  $P_T = 50 \text{ Вт}$ . Внешние слои стенки выполнены из одинаковой керамики с  $\lambda = 20 \text{ Вт/(м·К)}$ , но имеют разные толщины:  $1,0 \text{ см}$  и  $1,5 \text{ см}$ . Определить температуру центрального слоя, если стенка находится в воздухе с температурой  $t_{CP} = 20^\circ\text{C}$ , а коэффициент теплоотдачи с обеих боковых поверхностей одинаков и равен  $\alpha = 5,7 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ .
- 2) Трубу внешним диаметром  $20 \text{ мм}$  необходимо покрыть тепловой изоляцией. В качестве изоляции предлагается асбест с коэффициентом теплопроводности  $\lambda = 0,1 \text{ Вт/(м·К)}$  и толщиной  $5 \text{ мм}$ . Целесообразно ли использовать такую тепловую изоляцию, если коэффициент конвективной теплоотдачи в среду с поверхности изоляции составляет  $5 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ ?
- 3) По стальной трубе внешним диаметром  $d_2 = 50 \text{ мм}$  и толщиной стенки  $\delta_1 = 5 \text{ мм}$  (длина трубы  $L = 30 \text{ м}$ ) протекает вода со скоростью  $0,5 \text{ м/с}$ . Температура воды на входе в трубу  $t_{ВХ} = 200^\circ\text{C}$ . Труба покрыта тепловой изоляцией с теплопроводностью  $\lambda = 0,1 \text{ Вт/(м·К)}$  и толщиной стенки  $\delta_2 = 100 \text{ мм}$ . Температура окружающего воздуха  $t_{CP} = 0^\circ\text{C}$ , коэффициент конвективной теплоотдачи с поверхности изоляции в воздух  $\alpha_2 = 20 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ , коэффициент конвективного теплообмена между горячей водой и внутренней стенкой трубы  $\alpha_1 = 4000 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ . Определить температуру воды  $t_{ВЫХ}$  на выходе из трубы. Целесообразно ли использовать такую тепловую изоляцию?
- 4) Рассчитать тепловое сопротивление усеченной пирамиды квадратного поперечного сечения в предположении, что тепловой источник находится на верхней грани пирамиды, а съём тепла производится с ее нижней грани, см. рис. 1. Использовать формулу (3.16).

*Пример расчета.*

Имеем  $R_T = \int_0^H \frac{dl}{\lambda S(l)}$ . Далее:  $tg\alpha = \frac{b-a}{H}$  и площадь текущего поперечного сечения

пирамиды  $S(l) = (a + l \cdot 2 \cdot tg\alpha)^2$ . Введем  $\gamma = \frac{a \cdot H}{2(b-a)}$ . Тогда

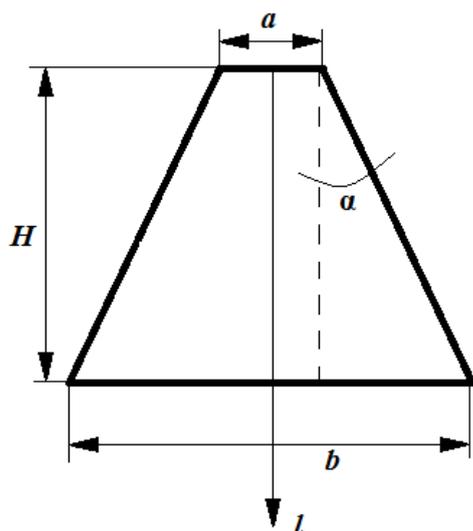


Рисунок 1 – Теплофизическая модель объекта в виде усеченной пирамиды.

Тепловой источник на верхнем торце.  
Съем тепла с нижнего основания.

$$\begin{aligned}
 R_T &= \frac{1}{\lambda} \int_0^H \frac{dl}{(a + l \cdot 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2} = \frac{1}{\lambda} (2 \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2 \cdot \int_0^H \frac{dl}{\left(l + \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}\right)^2} = \\
 &= \frac{H^2}{4\lambda(b-a)^2} \int_0^H \frac{dl}{(l + \gamma)^2} = \\
 &= \frac{H^2}{4\lambda(b-a)^2} \frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{H}{\gamma} = \frac{H^2}{4\lambda(b-a)^2} \frac{2(b-a)}{a \cdot H} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{H \cdot 2(b-a)}{a \cdot H} \right) = \\
 &= \frac{H}{2\lambda a(b-a)} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{2(b-a)}{a} \right).
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом рассчитать тепловое сопротивление усеченного прямого конуса с высотой  $H$ , диаметром верхнего основания  $a$  и диаметром нижнего основания  $b$ .

### Задания к разделу 6.

1) Решить систему (6.7), определив явные выражения для  $C_1$  и  $C_2$ , и на этой основе проверить правильность записи решения (6.8).

2) Самостоятельно решить задачу о нахождении температурного поля плоской стенки с внутренним тепловыделением и известными одинаковыми температурами поверхностей стенки (граничные условия 1-го рода):

$$\lambda \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + W = 0; \quad T|_{x=0} = T_1; \quad T|_{x=\delta} = T_1.$$

$$T(x) = ?$$

Указание. Ввести избыточную температуру стенки по аналогии с (6.3):

$$\vartheta(x) = T(x) - T_1.$$

3) В задаче о проводе в изоляции решить систему (6.18), определить постоянные  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$  в явном виде и затем записать выражения (6.17) для избыточных температур в окончательном виде через указанные постоянные. Полученное выражение сравнить с распределением температуры (6.22) и (6.23).

4) Алюминиевый электропровод диаметром  $d_1=4$  мм покрыт изоляцией с теплопроводностью  $\lambda=0,15$  Вт/(м·К). По проводу пропускают ток с силой  $I=100$  А. Удельное электрическое сопротивление алюминия  $\rho_{\text{э}}=0,0281$  Ом·мм<sup>2</sup>/м. Какой должна быть толщина  $\delta_2$  изоляции, если допустимая температура ее наружной поверхности  $t_2=60^\circ\text{C}$  при температуре окружающего воздуха  $t_{\text{CP}}=20^\circ\text{C}$  и коэффициенте конвективной теплоотдачи с ее поверхности в воздух  $\alpha_2=10$  Вт/(м<sup>2</sup>·К)?

### Задания к разделу 7.

1) Рассчитать нестационарное распределение температуры в однослойной плоской стенке с граничными условиями 1-го рода (рис. 6.1):

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + W;$$

$$T|_{x=0} = T_1; \quad T|_{x=\delta} = T_1;$$

$$T|_{\tau=0} = T_1.$$

Тепловой источник с объемной плотностью  $W=P_T/(\delta \cdot S)$  начинает действовать в начальный момент времени  $\tau=0$ . Тепловая мощность  $P_T$  поддерживается на постоянном уровне.

Указание. При решении ввести избыточную температуру стенки  $\vartheta(x, \tau) = T(x, \tau) - T_1$ .

В соответствии с табл. 7.1 собственные функции данной задачи теплопроводности имеют вид:

$$K_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\delta}} \cdot \sin\left(\frac{\mu_n x}{A}\right), \text{ где } \mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n=1,2,3,\dots, \quad s_n^2 = \frac{\mu_n^2}{\delta^2}.$$

В итоговом распределении нестационарной температуры произвести предельный переход при  $\tau \rightarrow \infty$ . Сравнить получившееся стационарное распределение температуры с распределением из задания 2 к разделу 6.

2) Раскрыть выражение (7.66), решив систему (7.65) относительно постоянных  $C$  и  $D$ , и записать (7.64) в явном виде.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем учебно-методическом пособии изложены начала аналитической теории теплопроводности в твердых телах. Рассмотрены относительно простые теплофизические задачи по расчету температурных полей в однородных телах прямоугольной и цилиндрической формы. Приведена методика решения краевой задачи теплопроводности методом конечных интегральных преобразований.

Из-за ограниченного объема пособия многие интересные вопросы аналитической теории теплопроводности остались нераскрытыми. Студентам, заинтересованным в более глубоком изучении материала, автор пособия рекомендует обратиться к монографии А.В. Лыкова [1], в которой проводится подробный качественный и количественный анализ температурных распределений, полученных из решения краевой задачи теплопроводности для тел классической формы, подробно изложен метод интегрального преобразования по времени (преобразование Лапласа), рассмотрено понятие температурных волн и многое другое. Также можно рекомендовать учебную монографию Э.М. Карташова [8], где представлен обширный математический аппарат разных типов аналитических решений краевой задачи теплопроводности. Однако монография [8] потребует от студента базовых знаний методов математической физики.

Также в настоящем пособии не затронуты вопросы численных решений краевой задачи теплопроводности. Этой проблеме необходимо посвятить отдельную разработку, поскольку применение численных методов к анализу температурных полей конкретных объектов потребует и конкретных обоснований возможности их использования, включая проблемы устойчивости и сходимости. Тут необходимо отметить, что корректное аналитическое решение задачи теплопроводности, примененное к некоторой тестовой модели, может служить критерием правильности использования численного метода для решения задач аналогичного типа.

### Список использованных источников

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
2. Теплопередача: Учебник для вузов / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: «Высшая школа», 1970. – 712 с.
4. Дульнев Г.Н., Семяшкин Э.М. Теплообмен в радиоэлектронных аппаратах. – Л.: Энергия, 1968. – 360 с.
5. Охотин А.С. Теплопроводность твердых тел: справочник / А.С. Охотин, Р.П. Боровикова, Т.В. Нечаева, А.С. Пушкарский. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 320 с.
6. Дульнев Г.Н. и др. Методы расчете теплового режима приборов / Г.Н. Дульнев, В.Г. Парфенов, А.В. Сигалов. – М.: Радио и связь, 1990. – 312 с.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. Пер. с англ. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. Литературы, 1979. – 832 с.
8. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: «Высшая школа», 1985. – 480 с.
9. С. В. Овчинников, А. В. Ляшенко. Обобщенная модель для аналитического расчета температурных полей и тепловых сопротивлений элементов твердотельной радиоэлектроники // Гетеромагнитная микроэлектроника: сб. науч. тр. / под ред. проф. А.В. Ляшенко. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2012. – Вып. 12: Гетеромагнитная микро- и наноэлектроника. Методические аспекты физического образования. Экономика в промышленности. – С. 11 – 18.
10. Алавердян С. А., Новоселов В. В., Овчинников С. В. Исследование теплового режима и оценка теплового разброса длин волн излучения монолитной линейки лазерных диодов // ЖТФ. 1992. Т. 61, вып. 6. С. 188–192.
11. Кандалов П. И., Мадера А. Г. Моделирование температурных полей в многослойных структурах // Программные продукты и системы. 2008. № 4. С. 46–49.
12. Овчинников С. В., Солопов А. А. Формулы для аналитического расчета тепловых сопротивлений цилиндрических элементов твердотельной радиоэлектроники с локализованным тепловыделением // Гетеромагнитная микроэлектроника : сб. науч. тр. / под ред. проф. А. В. Ляшенко. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2013. – Вып. 15: Гетеромагнитная микро- и наноэлектроника. Методические аспекты физического образования. С. 32 – 37.

**Теплофизические свойства некоторых твердых материалов**

по данным следующих источников: [2, 4, <http://thermalinfo.ru/publ/>]

**Таблица А1 – Усредненные теплофизические свойства технических материалов**

Материал	Температура, °С	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Коэффициент теплопроводности $\lambda$ , Вт/(м·К)	Удельная теплоемкость $c$ , Дж/(кг·К)
Алюминий	0 – 100	2700	210	900
Дюралюминий*	0 – 100	2750	160 – 180	920
Латунь*	0	8600	86,5	376
Медь	0 – 100	8930	380 – 390	380
Золото	20	19300	320	128,7
Никель	0	8900	67,5	425
Олово	0	7300	66,5	222
Серебро	0	10500	420	234
Сталь*	20	7900	45	470
Компаунд ЭК-16А	50 – 100	1350	0,3 – 0,35	1200 – 1400
Текстолит	20	1300 – 1400	0,22 – 0,33	1460 – 1510
Кремний монокристаллический	20	2330	118 – 145 в зависимости от чистоты	710
GaAs	20	5316	46	360

\* – усредненные данные по различным маркам сплавов

**Таблица А2 – Температурные зависимости коэффициента теплопроводности некоторых чистых металлов**

(данные из справочника: Зиновьев В.Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. Справочное издание. – М.: Металлургия, 1989. – 384 с.)

Металл	Температура, К					
	300	400	500	600	700	800
	Значения коэффициента теплопроводности $\lambda$ , Вт/(м·К)					
Золото	317,7	309,5	302,9	296,3	289,2	281,8
Серебро	429,5	424,1 – 425	418,6 – 419	412 – 414	404 – 406,9	396 – 398,3
Медь	401 – 401,9	391,5 – 393	385,4 – 386	376,9 – 379	369,7 – 373	360,8 – 366
Никель	90,4	79,7	72,1	63,3	60,9	64,3
Алюминий	235,9 – 237	238,2 – 240	234,4 – 236	230	224,4 – 225	218 – 220,4

**Таблица А3 – Теплофизические свойства монокристаллического кремния**

По данным сайта <http://thermalinfo.ru/>

Температура, К	250	300	350	400
Теплопроводность $\lambda$ , Вт/(м·К)	191	148	119	98,4
Температуропроводность $a \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	127	89	67	54

Подпрограммы расчета функций Бесселя первого рода  
нулевого и первого порядков и корней уравнения  $J_1(x)=0$

FORTRAN

Метки Позиции 1 – 5	6	Операторы Позиции 7 - 72
		<b><u>function bess0(x)</u></b>
c		подпрограмма расчета функции Бесселя
c		первого рода нулевого порядка $J_0(x)$
c		if(x.gt.8.5) goto 3 a=1. s=a
		do 1 n=1,1000 y=x/2./n an=-a*y*y a=an s=s+an
		if(abs(s).lt.0.1e-20) goto 1 if(abs(an/s).lt..1e-06) goto 2
1		continue
2		bess0=s return
3		p0=1.+0.0703125/x/x*(-1.+1.595052082/x/x*(1.+ + 5.1046875/x/x*(-1.+10.60965401/x/x*(1.+18.1126736/x/x* * (-1.+27.61470168/x/x)))) q0=0.125/x/x*(-1.+0.5859375/x/x*(1.+33.10078125/x/x*(-1.+ + 7.607514879/x/x*(1.+14.11132812/x/x*(-1.+22.61137784/x/x)))) s=x-0.785398162 bess0=sqrt(0.636619773/x)*(p0*cos(s)-q0*sin(s)) return end
c		<b><u>function bess1(x)</u></b>
c		подпрограмма расчета функции Бесселя
c		первого рода и первого порядка $J_1(x)$
c		if (x.gt.8.5) goto 3 x2=x/2. a0=x2 s=a0
		do 1 k=1,4000 j=k+1 ak=-a0*x2/k*x2/j s=s+ak
		if(abs(s).lt.0.1e-20) goto 1 if(abs(ak/s).lt..1e-06) goto 2 a0=ak
1		continue
2		bess1=s return
3		p1=1.+0.1171875/x/x*(1.+1.23046875/x/x*(-1.+4.6921875/x/x*

	* +	<pre> (1.+ 10.17438615/x/x*(-1.+17.6640625/x/x*(1.-27.15731532/x/x)))) q1=0.375/x*(1.+0.2734375/x/x*(-1.+2.70703125/x/x*(1.+ 7.181919642/ /x/x*(-1.+13.66861979/x/x*(1.+22.16036931/x/x)))) s=x-2.356194487 bess1=sqrt(0.636619773/x)*(p1*cos(s)-q1*sin(s)) return end </pre>
c		
c		
c		<p><b>function amu1(n)</b> корни функции Бесселя первого рода <math>J_1(\text{amu})=0</math></p> <pre> real a(10) if(n.eq.0) goto 3 if(n.gt.10) goto 2 a(1)=3.83171 a(2)=7.01559 a(3)=10.17347 a(4)=13.32369 a(5)=16.47063 a(6)=19.61586 a(7)=22.76008 a(8)=25.90367 a(9)=29.04683 a(10)=32.18968 amu1=a(n) return </pre>
2		<pre> j=n*4+1 i=j*j amu1=(n+.25-0.151982/j+0.015399/i-j-0.245271/i/i/j)*3.14159265 return </pre>
3		<pre> amu1=0 return end </pre>

Учебное электронное издание

Введение в теорию теплообмена:

## ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Учебно-методическое пособие

для студентов физического факультета

Автор:

**Овчинников Сергей Владимирович**