Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Саратовский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского»

Балашовский институт (филиал)

Численные методы

Методические рекомендации по выполнению контрольных работ курса
для студентов факультета математики, экономики и информатики
направления 44.03.01 «Педагогическое образование» профиля «Математика»,
направления 44.03.05 «Педагогическое образование»
профилей «Математика и информатика», «Математика и физика»

Балашов 2015

УДК 51
ББК 22.1я73

Автор-составитель
М. А. Ляшко

Методические рекомендации по выполнению контрольных работ курса «Численные методы» для студентов направления 44.03.01 «Педагогическое образование» профиля «Математика», направления 44.03.05 «Педагогическое образование» профилей «Математика и информатика», «Математика и физика» составлены в соответствии с учебной программой и содержат образцы выполнения запланированных контрольных работ с подробными комментариями. Предполагается, что контрольные работы выполняются с использованием непрограммируемого калькулятора. Таблицы, рисунки и формулы нумеруются в пределах одной контрольной работы.

Рекомендуется к опубликованию в электронной библиотеке кафедрой математики Балашовского института (филиала) Саратовского государственного университета имени Н.Г.Чернышевского.

Работа представлена в авторской редакции.

Содержание

Контрольная работа №1
Решение уравнений с одной переменной. Интерполирование функций....................................4

Контрольная работа № 2
Методы интегрирования. Приближенное решение задачи Коши 1-го порядка 15

Рекомендуемая литература 22

Контрольная работа №1
Решение уравнений с одной переменной. Интерполирование функций

1. Дано уравнение $-4x^4-15x+7=0$. Отделите все корни уравнения аналитически и вычислите любой из них методом половинного деления (варианты: методом Ньютона, методом итераций) с точностью 10^{-3}. Ответ запишите со всеми верными цифрами и одной запасной.

2. С помощью данной таблицы функции $f(x)$ вычислите приближенно значение функции в указанных точках, используя интерполяционные многочлены Лагранжа (вариант: Ньютона) 1-й, 2-й и 3-й степени. Сравните значение интерполяционного многочлена с точным значением функции. Сделайте вывод.

x	–1	1	2	4
$f(x)$	0,01	1,05	2,12	6,79

Найти $f(0)$, $f(0{,}8)$, $f(1{,}3)$. $f(x)=e^{0{,}5x}-0{,}6$.

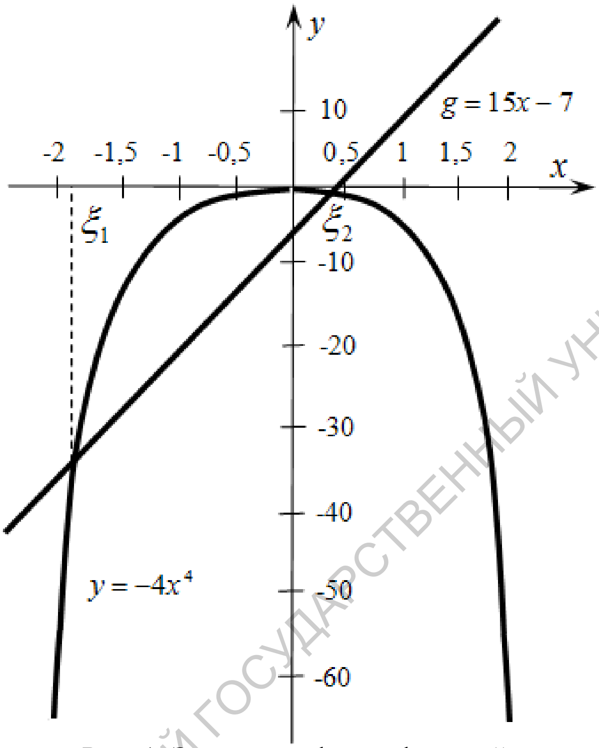

Рис. 1. Эскизы графиков функций

1. Решение. Отделим корни уравнения. Для этого найдем точки пересечения графиков $y=-4x^4$ и $y=15x-7$. Нарисуем примерные эскизы графиков функций и приблизительно определим отрезки, которым принадлежат точные значения корней исходного уравнения (рис. 1). Из рисунка видим, что $\xi_1\in[-2;-1{,}5]$ и $\xi_2\in[0;0{,}5]$. Действительно,

$$f(-2)=-4\cdot(-2)^4-15\cdot(-2)+7=-27<0,$$
$$f(-1{,}5)=-4\cdot(-1{,}5)^4-15\cdot(-1{,}5)+7=9{,}25>0,$$
$$f(0)=-4\cdot 0^4-15\cdot 0+7=7>0,$$
$$f(0{,}5)=-4\cdot(0{,}5)^4-15\cdot 0{,}5+7=-0{,}75<0.$$

По графикам видно, что корня два, но в более сложных случаях надо проводить дополнительное исследование, выясняя знак производной и устанавливая промежутки монотонности.

Найдем промежутки монотонности функции $f(x)=-4x^4-15x+7$:

$f'(x)=-16x^3-15$, $-16x^3-15=0$ при $x=-\sqrt[3]{15/16}=-\sqrt[3]{0{,}9375}$, и $f'(x)>0$ при $x<-\sqrt[3]{0{,}9375}$, $f'(x)<0$ при $x>-\sqrt[3]{0{,}9375}$. Значит, на отрезке $[-2;-1{,}5]$ функция $f(x)$ монотонно возрастает, а на отрезке $[0;0{,}5]$ — монотонно убывает, и каждый из этих отрезков содержит единственный корень уравнения $-4x^4-15x+7=0$. Поскольку производная функции меняет знак только один раз, других корней нет.

После того, как отделены корни (то есть выявлены все отрезки, содержащие ровно по одному корню), можно приступать к реализации алгоритма любого из трёх предложенных методов.

Метод половинного деления

Рассмотрим $\xi_1 \in [-2; -1{,}5]$. Найдем несколько приближений к корню методом половинного деления, оценим погрешность последнего. Следуя алгоритму метода половинного деления, в качестве начального приближения к корню выбираем середину отрезка: $c = \frac{-2-1{,}5}{2} = -1{,}75$.

Находим значения функции $f(x) = -4x^4 - 15x + 7$ на концах полученных отрезков $[-2; -1{,}75]$ и $[-1{,}75; -1{,}5]$:

$$f(-2) = -4\cdot(-2)^4 - 15\cdot(-2) + 7 = -27 < 0,$$
$$f(-1{,}75) = -4\cdot(-1{,}75)^4 - 15\cdot(-1{,}75) + 7 \approx -4{,}26 < 0,$$
$$f(-1{,}5) = -4\cdot(-1{,}5)^4 - 15\cdot(-1{,}5) + 7 = 9{,}25 > 0.$$

Получаем, что надо отбросить отрезок $[-2; -1{,}75]$, так как на его концах функция принимает значения одного знака. Таким образом, $\xi_1 \in [-1{,}75; -1{,}5]$. Снова делим отрезок пополам:

$$c_1 = \frac{-1{,}75-1{,}5}{2} = -1{,}625$$

и находим значения функции $f(x)$ на концах полученных отрезков $[-1{,}75; -1{,}625]$ и $[-1{,}625; -1{,}5]$: $f(-1{,}75) \approx -4{,}26 < 0$, $f(-1{,}625) \approx 3{,}48 > 0$, $f(-1{,}5) = 9{,}25 > 0$. Следуя методу, отбрасываем отрезок $[-1{,}625; -1{,}5]$. Теперь $\xi_1 \in [-1{,}75; -1{,}625]$. Погрешность $c_2 = \frac{-1{,}75-1{,}625}{2} = -1{,}6875$ не превосходит половины длины отрезка $\frac{-1{,}625-(-1{,}75)}{2} = 0{,}0625$, но гарантировать, что она меньше $\varepsilon = 10^{-3}$ нельзя. Вычисления необходимо продолжить.

Используем формулу $n > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1$ для расчета количества шагов, необходимых для достижения точности $\varepsilon = 10^{-3}$, и увидим, сколько вообще делений пополам предстоит сделать:

$$n > \log_2 \frac{|-2-(-1{,}5)|}{10^{-3}} - 1 = \log_2 500 - 1 \approx 8{,}966 - 1,\ n \ge 8.$$

Это результат говорит о том, что середина 8-го отрезка будет иметь заданную точность $\varepsilon = 10^{-3}$. Результаты вычислений на калькуляторе удобно оформить в виде таблицы, оставляя в расчетах по 4 знака после запятой или больше (таблица 1).

Таблица 1. Нахождение первого корня уравнения

a_i	b_i	c_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(c_i)$	погрешность
–2	–1,5	–1,75	–27	9,25	–4,26563	0,25
–1,75	–1,5	–1,625	–4,26563	9,25	3,483398	0,125
–1,75	–1,625	–1,6875	–4,26563	3,483398	–0,12408	0,0625
–1,6875	–1,625	–1,65625	–0,12408	3,483398	1,743954	0,03125
–1,6875	–1,65625	–1,67188	–0,12408	1,743954	0,826313	0,015625
–1,6875	–1,67188	–1,67969	–0,12408	0,826313	0,355247	0,007813
–1,6875	–1,67969	–1,68359	–0,12408	0,355247	0,116619	0,003906
–1,6875	–1,68359	–1,68555	–0,12408	0,116619	–0,00347	0,001953
–1,68555	–1,68359	–1,68457	–0,00347	0,116619	0,056638	0,000977

Ответ: $\xi_1 \approx -1,6846$. Ответ записываем со всеми верными цифрами и одной запасной.

Метод Ньютона (метод касательных)

Далее вычислим еще один корень уравнения $-4x^4 - 15x + 7 = 0$ методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Теорема (теорема сходимости метода Ньютона). Пусть

1) $f(a)\cdot f(b) < 0$*;*

2) $f(x)$ *дважды дифференцируемая функция на* $[a; b]$*, и* $f'(x)$*,* $f''(x)$ *не меняют знака на* $[a; b]$ *и не равны нулю;*

3) $x_0 \in [a; b]$ *и выбрано так, что* $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$.

Тогда существует конечный предел последовательности $\{x_n\}$*, заданной формулой*

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\ n = 1, 2, \ldots,\ x_0 \in [a; b], \qquad (1)$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$*, где* ξ *— корень уравнения* $f(x) = 0$.

Погрешность метода Ньютона определяется формулой:

$$|x_n - \xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1},\ \text{где}\ m_1 = \min_{x\in[a;\,b]} |f'(x)|. \qquad (2)$$

Если выполняются условия теоремы сходимости, то $f'(x)$ существует на $[a; b]$ и непрерывна, и, следовательно, достигает на $[a; b]$ своего наименьшего по модулю значения $m_1 > 0$. Для точного нахождения или оценки m_1 можно использовать как аналитические, так и численные методы. Значит, процедуру уточнения корня надо продолжать до тех пор, пока для заданной точности ε не будет выполняться неравенство

$$\frac{|f(x_n)|}{m_1} < \varepsilon, \qquad (3)$$

тогда в силу неравенства (2) и $|x_n - \xi| < \varepsilon$.

Существует и еще один признак окончания вычислений по формуле (1): если

$$|x_n - x_{n-1}| \le \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}},\ \text{где}\ M_2 = \max_{x\in[a;\,b]} |f''(x)|, \qquad (4)$$

то $|x_n - \xi| < \varepsilon$.

Корни этого уравнения были уже отделены: $\xi_1 \in [-2; -1{,}5]$ и $\xi_2 \in [0; 0{,}5]$. Для проверки условий теоремы сходимости метода Ньютона, реализации формулы (1), проверки условия достижения заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$ по формулам (3) или (4) найдем производную и вторую производную:

$f'(x) = -16x^3 - 15$,

$f''(x) = -48x^2$.

Имеем:

$f(-2) = -27 < 0,$

$f(-1{,}5) = 9{,}25 > 0,$
$f(0) = 7 > 0,$
$f(0{,}5) = -0{,}75 < 0,$
$f'(x) > 0$ при $x \in [-2; -1{,}5],$
$f'(x) < 0$ при $x \in [0; 0{,}5].$

Ясно, что $f''(x) < 0$ при $x \in [-2; -1{,}5]$ и $f''(x) < 0$ при $x \in [0; 0{,}5]$. Тогда для уточнения корня на отрезке $[-2; -1{,}5]$ в качестве x_0 надо выбрать –2, так как $f(-2)\cdot f''(-2) > 0$, а на отрезке $[0; 0{,}5]$ в качестве x_0 надо выбрать 0,5, так как $f(0{,}5)\cdot f''(0{,}5) > 0$.

На отрезке $[-2; -1{,}5]$ $m_1 = \min\limits_{x\in[-2;\,-1{,}5]} \left|-16x^3 - 15\right| = f'(-1{,}5) = -16\cdot(-1{,}5)^3 - 15 = 39$, на отрезке $[0; 0{,}5]$ $m_1 = \min\limits_{x\in[0;\,0{,}5]} \left|-16x^3 - 15\right| = \left|f'(0)\right| = 15$.

На отрезке $[-2; -1{,}5]$ $M_2 = \max\limits_{x\in[-2;\,-1{,}5]} \left|-48x^2\right| = \left|f''(-2)\right| = 192$, на отрезке $[0; 0{,}5]$ $M_2 = \max\limits_{x\in[0;\,0{,}5]} \left|-48x^2\right| = \left|f''(0{,}5)\right| = 12$.

Продолжать уточнение корня на отрезке $[-2; -1{,}5]$ надо до тех пор, пока для x_n не выполнится неравенство $\dfrac{|f(x_n)|}{39} < 10^{-3}$ или $|x_n - x_{n-1}| \le \sqrt{\dfrac{2\cdot 39\cdot 10^{-3}}{192}}$, а на отрезке $[0; 0{,}5]$ — $\dfrac{|f(x_n)|}{15} < 10^{-3}$ или $|x_n - x_{n-1}| \le \sqrt{\dfrac{2\cdot 15\cdot 10^{-3}}{12}}$.

Пусть $x_0 = 0{,}5$. Тогда $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0{,}5 - \dfrac{-0{,}75}{-17} = 0{,}455882353\ldots$,

$\dfrac{|f(x_1)|}{39} = \dfrac{|-0{,}011006401|}{39} = 0{,}00073376\ldots < 10^{-3}$, и заданная точность достигнута.

Ответ: $\xi_2 \approx 0{,}4559$. Ответ записываем со всеми верными цифрами и одной запасной.

Метод итераций

Теорема (теорема сходимости метода итераций). *Пусть уравнение* $x = \varphi(x)$ *имеет единственный корень на отрезке* $[a; b]$, *и выполнены условия:*

1) $\varphi(x)$ *определена и дифференцируема на* $[a; b]$;
2) $\varphi(x) \in [a; b]$ *для всех x из отрезка* $[a; b]$;
3) *существует такое действительное число* $0 < \alpha < 1$, *что все значения производной функции* $\varphi(x)$ *на отрезке* $[a; b]$ *ограничены по модулю сверху этим числом:* $|\varphi'(x)| \le \alpha$ *для всех* $x \in [a; b]$.

Тогда итерационная последовательность

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\quad x_0 \in [a; b],\ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

сходится к корню уравнения $x = \varphi(x)$ *при любом начальном приближении* $x_0 \in [a; b]$.

Погрешность метода итераций оценивается сверху по формуле

$$\left|x_n - \xi\right| \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\left|x_n - x_{n-1}\right| \tag{6}$$

или по формуле

$$\left|x_n - \xi\right| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\left|x_1 - x_0\right|. \tag{7}$$

Приведем данное уравнение $-4x^4 - 15x + 7 = 0$ к равносильному, записанному в виде $x = \varphi(x)$, например, так: $x = \dfrac{-4x^4 + 7}{15}$. Проверим выполнение условий теоремы сходимости, например, на втором отрезке.

1. $x \in [0;\, 0{,}5]$, $\varphi(x) = \dfrac{-4x^4 + 7}{15}$, функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[0;\, 0{,}5]$, и $\varphi'(x) = -\dfrac{16}{15}x^3 \le 0$ при $x \in [0;\, 0{,}5]$, обращаясь в ноль только в одной точке. Поэтому $\varphi(x)$ монотонно убывает на отрезке $[0;\, 0{,}5]$. Проверим условие 2 теоремы только на концах отрезка:

$$\varphi(0) = \frac{-4(0)^4 + 7}{15} = \frac{7}{15} \in [0;\, 0{,}5],$$

$$\varphi(0{,}5) = \frac{-4(0{,}5)^4 + 7}{15} = \frac{6{,}75}{15} \in [0;\, 0{,}5].$$

Значит, и все промежуточные значения функции $\varphi(x)$ попадают в отрезок $[0;\, 0{,}5]$. Далее, $\max\limits_{x\in[0;0{,}5]}\left|\varphi'(x)\right| = \max\limits_{x\in[0;0{,}5]}\left|-\dfrac{16}{15}x^3\right| = \left|\varphi'(0{,}5)\right| = \dfrac{16}{15}\cdot 0{,}5^3 = \dfrac{2}{15} < 1$. Поэтому в качестве числа α, где $0 < \alpha < 1$, можно взять $\dfrac{2}{15}$ или любое другое число, удовлетворяющее неравенству $\dfrac{2}{15} \le \alpha < 1$, например, $\alpha = 0{,}15$.

Таким образом, все условия теоремы сходимости метода итераций на отрезке $[0;\, 0{,}5]$ выполнены, и можно строить итерационную последовательность для любого начального приближения $x_0 \in [0;\, 0{,}5]$:

$x_0 = 0$,

$x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(0) = \dfrac{-4(0)^4 + 7}{15} = 0{,}4(6)$,

$x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(0{,}4(6)) = \dfrac{-4(0{,}4(6))^4 + 7}{15} \approx 0{,}45402$ и так далее. Здесь оставлено 5 знаков после запятой, так как требуемая точность — 10^{-3}.

Оценим погрешность x_2:

по формуле (6) $\left|x_2 - \xi\right| \le \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\left|x_2 - x_1\right| \approx \dfrac{0{,}15}{1-0{,}15}\cdot\left|0{,}45402 - 0{,}46667\right| = 0{,}00253$,

по формуле (7) $\left|x_2 - \xi\right| \le \dfrac{0{,}15^2}{1-0{,}15}\cdot\left|\dfrac{7}{15} - 0\right| = 0{,}014$.

В любом случае погрешность больше заданной точности, итерации надо продолжить:

$x_3 = \varphi(x_2) \approx 0{,}45534$ и $\left|x_3 - \xi\right| \le \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\left|x_3 - x_2\right| \approx \dfrac{0{,}15}{1-0{,}15}\cdot\left|0{,}45534 - 0{,}45402\right| = 0{,}000264 < 10^{-3}$.

Таким образом, приближенное значение корня ξ_2, найденное методом итераций и записанное с тремя верными цифрами и одной запасной, равно 0,4553.

Ответ: $\xi_2 \approx 0,4553$.

В данном примере продемонстрирована возможностью удачного перехода к виду, удобному для итераций: уравнение $f(x)=0$ было приведено к виду $x=\varphi(x)$, и итерационная последовательность оказалась сходящейся. Покажем универсальный переход к виду $x=\varphi(x)$ с выполнением всех условий теоремы сходимости. Оказывается, для непрерывно дифференцируемой монотонной функции $f(x)$, у которой производная $f'(x)$ сохраняет знак на $[a;b]$, такой переход возможен всегда.

Пусть корень уравнения $f(x)=0$ отделен на отрезке $[a;b]$, $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая на $[a;b]$ функция, $f'(x)$ сохраняет знак на $[a;b]$. Уравнение $f(x)=0$ равносильно уравнению

$$x = x + c\cdot f(x), \tag{8}$$

где c — некоторая константа. Выясним, каким условиям должна удовлетворять константа c, чтобы для функции $\varphi(x)=x+c\cdot f(x)$ выполнялись все условия теоремы сходимости.

1. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, значит, и функция $\varphi(x)=x+c\cdot f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Поскольку $f(x)$ — дифференцируемая на $[a;b]$ функция и $\varphi'(x)=1+c\cdot f'(x)$, то и $\varphi(x)$ — дифференцируемая на $[a;b]$ функция. Для выполнения условия $|\varphi'(x)|<1$ для всех x из отрезка $[a;b]$ необходимо, чтобы $1+c\cdot f'(x)<1$ или $c\cdot f'(x)<0$, а значит, константа c имеет на $[a;b]$ знак, противоположный знаку $f'(x)$:

$$\operatorname{sign} c = -\operatorname{sign} f'(x), \tag{9}$$

где $\operatorname{sign} x$ — функция знака. Напомним, $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, \text{если } x>0, \\ 0, \text{если } x=0, \\ -1, \text{если } x<0. \end{cases}$ Тогда

$$c = \operatorname{sign} c \cdot |c|. \tag{10}$$

Поскольку $f'(x)$ сохраняет знак на $[a;b]$, тогда знак c определим из равенства (3.7).

2. Оценим $|c|$. Выясним, при каких значениях $|c|$ выполняется условие $|\varphi'(x)|\le\alpha<1$ для некоторого пока еще неизвестного числа α, где $0<\alpha<1$:

$$|1+c\cdot f'(x)|\le\alpha,$$

$$-\alpha\le 1+c\cdot f'(x)\le\alpha,$$

$$-\alpha-1\le c\cdot f'(x)\le\alpha-1.$$

Все три части этого двойного неравенства отрицательные. Возьмем входящие в них величины по модулю:

$$1-\alpha\le|c|\cdot|f'(x)|\le\alpha+1,$$

$$\frac{1-\alpha}{|f'(x)|}\le|c|\le\frac{1+\alpha}{|f'(x)|}. \tag{11}$$

Найдем самую узкую «вилку» возможных значений $|c|$. Наибольшего значения положительная дробь $\dfrac{1-\alpha}{|f'(x)|}$ достигает при наименьшем значении знаменателя $|f'(x)|$. Найдем $m = \min\limits_{x\in[a;\,b]}|f'(x)|$. Наименьшего значения положительная дробь $\dfrac{1+\alpha}{|f'(x)|}$ достигает при наибольшем значении знаменателя $|f'(x)|$. Найдем $M = \max\limits_{x\in[a;\,b]}|f'(x)|$. Обе величины — m и M — достигаются на $[a;b]$, так как $|f'(x)|$ — непрерывная положительная функция. Значит,

$$\frac{1-\alpha}{m} \le |c| \le \frac{1+\alpha}{M}. \tag{12}$$

Решим неравенство (12) сначала относительно α, а затем определим вилку для $|c|$:

$$\frac{1-\alpha}{m} \le \frac{1+\alpha}{M},$$

$$M\cdot(1-\alpha) \le m\cdot(1+\alpha),$$

$$M-\alpha M \le m+\alpha m,$$

$$M-m \le \alpha M+\alpha m,$$

$$\frac{M-m}{M+m} \le \alpha. \tag{13}$$

Поскольку числитель этой дроби меньше знаменателя, то дробь меньше 1. Поэтому удастся подобрать α такое, что

$$\frac{M-m}{M+m} \le \alpha < 1. \tag{14}$$

Зная α, подставим его в неравенство (12) и определим величину $|c|$, подходящую для выполнения условия 3 теоремы сходимости.

Итак, алгоритм перехода от уравнения $f(x)=0$ к уравнению $x = x + c\cdot f(x)$ следующий.

1. Находим $f'(x)$ и определяем знак $f'(x)$ на $[a;b]$.
2. Используя равенство (9), находим знак c.
3. Находим $m = \min\limits_{x\in[a;\,b]}|f'(x)|$ и $M = \max\limits_{x\in[a;\,b]}|f'(x)|$.
4. Определяем α из неравенства (13).
5. Находим $|c|$ из неравенства (12).
6. Находим c из равенства (10).
7. Переходим от вида $f(x)=0$ к виду $x = x + c\cdot f(x)$.

Продемонстрируем работу этого алгоритма на примере перехода от уравнения $-4x^4-15x+7=0$ к уравнению $x = x + c\cdot(-4x^4-15x+7)$, для которого выполняются все условия теоремы сходимости, например, на отрезке $[-2;-1{,}5]$.

1. $f'(x) = -16x^3-15$. Производная меняет знак в точке, в которой она обращается в ноль: $-16x^3-15=0$. Отсюда $x=\sqrt[3]{-15/16}$, $f'(x)>0$ при $x<\sqrt[3]{-15/16}$ и $f'(x)<0$

при $x > \sqrt[3]{-15/16}$. Видим, что отрезок $[-2; -1{,}5]$ целиком входит в решение неравенства $x < \sqrt[3]{-15/16}$, поэтому $f'(x) > 0$ на $[-2; -1{,}5]$.

2. $\operatorname{sign} c = -\operatorname{sign} f'(x) = -1$.
3. $m = \min\limits_{x\in[-2;\,-1,5]} \left|-16x^3 - 15\right| = f'(-1{,}5) = 39$, так как $f'(x) = -16x^3 - 15$ — монотонно убывающая положительная на $[-2; -1{,}5]$ функция. $M = \max\limits_{x\in[-2;\,-1,5]} \left|-16x^3 - 15\right| = f'(-2) = 113$.
4. $\dfrac{113-39}{113+39} \le \alpha < 1$ или $\dfrac{74}{152} \le \alpha < 1$. Выберем $\alpha = 0{,}5$.
5. $\dfrac{1-\alpha}{m} \le |c| \le \dfrac{1+\alpha}{M}$ или $\dfrac{1-0{,}5}{39} \le |c| \le \dfrac{1+0{,}5}{113}$. Получили $0{,}0128205\ldots \le |c| \le 0{,}0132743\ldots$. Выберем $|c| = 0{,}013$.
6. $c = \operatorname{sign} c \cdot |c| = -1 \cdot 0{,}013 = -0{,}013$.
7. Уравнение $-4x^4 - 15x + 7 = 0$ равносильно уравнению $x = x - 0{,}013 \cdot (-4x^4 - 15x + 7)$.

Реализация метода итераций для последнего уравнения с оценкой погрешности на каждом шаге происходит точно также, как рассмотрено выше. Проведите вычисления самостоятельно.

2. Решение.

Решим поставленную задачу с помощью общей формулы интерполяционного многочлена Лагранжа

$$f(\bar{x}) \approx L_n(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)\ldots(\bar{x}-x_{i-1})(\bar{x}-x_{i+1})\ldots(\bar{x}-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}. \qquad (15)$$

Для получения значения $L_1(\bar{x})$ по формуле (15)

$$L_1(x) = \sum_{i=0}^{1} y_i l_i(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}, \qquad (16)$$

из трех точек таблицы необходимо выбрать две: $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$ и такие что $x_0 < \bar{x} < x_1$. Будем выбирать ближайшие к промежуточной точке узлы интерполирования.

1. $\bar{x} = 0,\ x_0 = -1,\ y_0 = 0{,}01,\ x_1 = 1,\ y_1 = 1{,}05$:

$$L_1(0) = y_0 \cdot \frac{(\bar{x}-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1 \cdot \frac{(\bar{x}-x_0)}{(x_1-x_0)} = 0{,}01 \cdot \frac{(0-1)}{(-1-1)} + 1{,}05 \cdot \frac{(0-(-1))}{(1-(-1))} = 0{,}53.$$

Точное значение функции $f(0) = e^{0{,}5\cdot 0} - 0{,}6 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

2. $\bar{x} = 0{,}8,\ x_0 = -1,\ y_0 = 0{,}01,\ x_1 = 1,\ y_1 = 1{,}05$:

$$L_1(0{,}8) = y_0 \cdot \frac{(\bar{x}-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1 \cdot \frac{(\bar{x}-x_0)}{(x_1-x_0)} = 0{,}01 \cdot \frac{(0{,}8-1)}{(-1-1)} + 1{,}05 \cdot \frac{(0{,}8-(-1))}{(1-(-1))} = 0{,}946.$$

Точное значение функции $f(0{,}8) = e^{0{,}5\cdot 0{,}8} - 0{,}6 = e^{0{,}4} - 0{,}6 = 0{,}89182\ldots$.

3. $\bar{x} = 1{,}3,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1{,}05,\ x_1 = 2,\ y_1 = 2{,}12$:

$$L_1(1{,}3) = y_0 \cdot \frac{(\bar{x}-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1 \cdot \frac{(\bar{x}-x_0)}{(x_1-x_0)} = 1{,}05 \cdot \frac{(1{,}3-2))}{(1-2)} + 2{,}12 \cdot \frac{(1{,}3-1)}{(2-1)} = 1{,}371.$$

Точное значение функции $f(1{,}3) = e^{0{,}5\cdot 1{,}3} - 0{,}6 = e^{0{,}65} - 0{,}6 = 1{,}31554\ldots$.

Для получения значения $L_2(\bar{x})$ по формуле

$$L_2(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}, \qquad (17)$$

выбираются три точки таблицы (x_0; y_0), (x_1; y_1) и (x_2; y_2) и такие что $\bar{x} \in [x_0; x_2]$. Будем выбирать ближайшие к промежуточной точке узлы интерполирования..

1. $\bar{x} = 0,\ \ x_0 = -1,\ y_0 = 0,01,\ \ \ x_1 = 1,\ y_1 = 1,05,\ \ x_2 = 2,\ y_2 = 2,12$:

$$L_2(0) = y_0 \cdot \frac{(\bar{x}-x_1)(\bar{x}-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \cdot \frac{(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \cdot \frac{(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= 0,01 \cdot \frac{(0-1)(0-2)}{(-1-1)(-1-2)} + 1,05 \cdot \frac{(0-(-1))(0-2)}{(1-(-1))(1-2)} + 2,12 \cdot \frac{(0-(-1))(0-1)}{(2-(-1))(2-1)} \approx 0,346667.$$

2. $\bar{x} = 0,8,\ \ x_0 = -1,\ y_0 = 0,01,\ \ \ x_1 = 1,\ y_1 = 1,05,\ \ x_2 = 2,\ y_2 = 2,12$:

$$L_2(0,8) = y_0 \cdot \frac{(\bar{x}-x_1)(\bar{x}-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \cdot \frac{(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \cdot \frac{(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= 0,01 \cdot \frac{(0,8-1)(0,8-2)}{(-1-1)(-1-2)} + 1,05 \cdot \frac{(0,8-(-1))(0,8-2)}{(1-(-1))(1-2)} + 2,12 \cdot \frac{(0,8-(-1))(0,8-1)}{(2-(-1))(2-1)} = 0,88.$$

3. Для промежуточной точки $\bar{x} = 1,3$ можновыбрать те же узлы, что и для предыдущих точек $x_0 = -1,\ y_0 = 0,01,\ \ \ x_1 = 1,\ y_1 = 1,05,\ \ x_2 = 2,\ y_2 = 2,12$, а можно и $x_0 = 1,\ y_0 = 1,05,$ $x_1 = 2,\ y_1 = 2,12,\ \ x_2 = 4,\ y_2 = 6,79.$ Проведем расчет для первого набора узлов:

$$L_2(1,3) = y_0 \cdot \frac{(\bar{x}-x_1)(\bar{x}-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \cdot \frac{(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \cdot \frac{(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= 0,01 \cdot \frac{(1,3-1)(1,3-2)}{(-1-1)(-1-2)} + 1,05 \cdot \frac{(1,3-(-1))(1,3-2)}{(1-(-1))(1-2)} + 2,12 \cdot \frac{(1,3-(-1))(1,3-1)}{(2-(-1))(2-1)} = 1,3325.$$

Для получения значения $L_3(\bar{x})$ по формуле

$$L_3(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}, \qquad (18)$$

необходимо использовать все четыре узла таблицы: $x_0 = -1,\ y_0 = 0,01,\ \ \ x_1 = 1,\ y_1 = 1,05,$ $x_2 = 2,\ y_2 = 2,12,\ \ x_3 = 4,\ y_2 = 6,79.$ Приведем расчеты.

1. $\bar{x} = 0,$

$$L_3(0) = 0,01 \cdot \frac{(0-1)(0-2)(0-4)}{(-1-1)(-1-2)(-1-4)} + 1,05 \cdot \frac{(0-(-1))(0-2)(0-4)}{(1-(-1))(1-2)(1-4)} + 2,12 \cdot \frac{(0-(-1))(0-1)(0-4)}{(2-(-1))(2-1)(2-4)} +$$

$$+6,79 \cdot \frac{(0-(-1))(0-1)(0-2)}{(4-(-1))(4-1)(4-2)} = 0,442.$$

2. $\bar{x} = 0,8,$

$$L_3(0,8)=0,01\cdot\frac{(0,8-1)(0,8-2)(0,8-4)}{(-1-1)(-1-2)(-1-4)}+1,05\cdot\frac{(0,8-(-1))(0,8-2)(0,8-4)}{(1-(-1))(1-2)(1-4)}+$$

$$+2,12\cdot\frac{(0,8-(-1))(0,8-1)(0,8-4)}{(2-(-1))(2-1)(2-4)}+6,79\cdot\frac{(0,8-(-1))(0,8-1)(0,8-2)}{(4-(-1))(4-1)(4-2)}=0,900592.$$

3. $\bar{x}=1,3,$

$$L_3(1,3)=0,01\cdot\frac{(1,3-1)(1,3-2)(1,3-4)}{(-1-1)(-1-2)(-1-4)}+1,05\cdot\frac{(1,3-(-1))(1,3-2)(1,3-4)}{(1-(-1))(1-2)(1-4)}+$$

$$+2,12\cdot\frac{(1,3-(-1))(1,3-1)(1,3-4)}{(2-(-1))(2-1)(2-4)}+6,79\cdot\frac{(1,3-(-1))(1,3-1)(1,3-2)}{(4-(-1))(4-1)(4-2)}=1,30948.$$

Подведем итог.

1. Точное значение функции $f(0)=0,4,\quad L_1(0)=0,53,\quad L_2(0)=0,346667,\quad L_3(0)=0,442.$

2. $f(0,8)=0,89182...,\quad L_1(0,8)=0,946,\quad L_2(0,8)=0,88,\quad L_3(0,8)=0,900592.$

3. $f(1,3)=1,31554...,\quad L_1(1,3)=1,371,\quad L_2(1,3)=1,3325,\quad L_3(1,3)=1,30948.$

Можно сделать вывод, что **для данной функции**, во-первых, наблюдается уменьшение погрешности $|R_n(\bar{x})|=|f(\bar{x})-L(\bar{x})|$ при повышении степени интерполяционного многочлена, и, во-вторых, чем ближе промежуточная точка к узлу, тем меньше погрешность.

Ньютоном предложен способ получения **интерполяционного многочлена** n-й степени $P_n(x)$ (или вычисления его значения в промежуточной точке), проходящего через $n+1$ точку, в виде

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+...+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}),\qquad(19)$$

где коэффициенты $a_k=f(x_0,x_1,\ldots,x_k),\ k=0,1,\ldots,n$. Это так называемое «интерполирование вперед». Таким образом, сначала надо построить таблицу разделенных разностей (Табл. 2).

Таблица 2. Полная таблица разделенных разностей

x_i	y_i	$f(x_i,x_{i+1})$	$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2})$	…	$f(x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+n})$
x_0	y_0	$f(x_0,x_1)=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$	$f(x_0,x_1,x_2)=\dfrac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}$	…	$f(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\dfrac{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})}{x_n-x_0}$
x_1	y_1	$f(x_1,x_2)=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	$f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}$	…	
x_2	y_2	$f(x_2,x_3)=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$	$f(x_2,x_3,x_4)=\dfrac{f(x_3,x_4)-f(x_2,x_3)}{x_4-x_2}$	…	
				…	
x_{n-1}	y_{n-1}	$f(x_{n-1},x_n)=\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$		…	
x_n	y_n			…	

Для этого запишем строки исходной таблицы в столбцы и проведем расчет (табл. 3) с шестью знаками после запятой.

Таблица 3. Таблица разделенных разностей

x_i	y_i	$f(x_i,x_{i+1})$	$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2})$	$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3})$

–1	0,01	0,52	0,183333	0,047667
1	1,05	1,07	0,421667	
2	2,12	2,335		
4	6,79			

1. $\bar{x}=0,\ x_0=-1,$ по формуле (19)

$P_1(x)=a_0+a_1(x-x_0),\quad a_0=0,01,\quad a_1=0,52.$ То есть $P_1(0)=0,01+0,52\cdot(0-(-1))=0,53.$

$P_2(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)=P_1(x)+a_2(x-x_0)(x-x_1),\quad x_1=1,\quad a_2=0,183333,$

$P_2(0)=0,53+0,183333\cdot(0-(-1))(0-1)=0,346667.$

$P_3(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)=P_2(x)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$

$x_2=2,\quad a_3=0,047667,\quad P_3(0)=0,346667+0,047667\cdot(0-(-1))(0-1)(0-2)=0,442.$

2. $\bar{x}=0,8,\ x_0=-1,$ начальный узел то же самый, что и для $\bar{x}=0,$ поэтому числовые коэффициенты многочленов остаются прежними:

$P_1(0,8)=0,01+0,52\cdot(0,8-(-1))=0,946.$

$P_2(0,8)=0,946+0,183333\cdot(0,8-(-1))(0,8-1)=0,88.$

$P_3(0,8)=0,88+0,047667\cdot(0,8-(-1))(0,8-1)(0,8-2)=0,900592.$

3. $\bar{x}=1,3,\ x_0=1,$ по формуле (19)

$P_1(x)=a_0+a_1(x-x_0),\quad a_0=1,05,\quad a_1=1,07.$ То есть $P_1(1,3)=1,05+1,07\cdot(1,3-1)=1,371.$

$P_2(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)=P_1(x)+a_2(x-x_0)(x-x_1),\quad x_1=2,\quad a_2=0,421667,$

$P_2(1,3)=1,371+0,421667\cdot(1,3-1)(1,3-2)=1,28245.$

К сожалению, строка разделенных разностей при $x_0=1$ закончилась, и воспользоваться «удобной» формой наращивания степени интерполяционного многочлена далее не удастся. Поэтому используем $x_0=-1$, как в случаях 1 и 2, получим:

$P_3(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$

$x_1=1,\quad x_2=2,\quad a_0=0,01,\quad a_1=0,52,\quad a_2=0,183333,\quad a_3=0,047667,$

$P_3(0)=0,01+0,52\cdot(1,3-(-1))+0,183333\cdot(1,3-(-1))(1,3-1)+0,047667\cdot(1,3-(-1))(1,3-1)(1,3-2)=$
$=1,30948.$

Заметим, что значение интерполяционного многочлена Ньютона в точке 1,3 равно $P_2(1,3)=1,28245,$ а значение интерполяционного многочлена Лагранжа в этой же точке равно $L_2(1,3)=1,3325,$ так как для их вычисления использовались разные наборы узлов. В остальных случаях значения этих многочленов совпадают.

Контрольная работа № 2
Методы интегрирования. Приближенное решение задачи Коши 1-го порядка

1. Вычислите интеграл $I=\int\limits_0^2 x^2dx$ приближенно методом правых прямоугольников (варианты: методом левых прямоугольников, методом средних прямоугольников, методом трапеций, методом Симпсона) при $n=4$. Оцените погрешность метода Δ. Ответ запишите в форме $I=\tilde{I}\pm\Delta$ или укажите промежуток, которому принадлежит точное значение интеграла.

2. Получите приближенное решение задачи Коши $y'=xy^2$, $y(0)=0,25$ методом Эйлера (вариант: методом Эйлера-Коши) на отрезке $[1;4]$ с шагом $h=0,5$. Постройте приближенно интегральную кривую.

1. Решение.

Заметим, что этот интеграл легко вычислить точно:

$$I=\int\limits_0^2 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}=2,(6).$$

Для численного интегрирования отрезок интегрирования $[0;\,2]$ разбиваем на 4 равные части, так как $n=4$, и получаем шаг интегрирования $h=\frac{2-0}{4}=0,5$. Строим таблицу значений подынтегральной функции с шагом 0,5 (табл. 1):

Таблица 1. Таблица функции $f(x)=x^2$

x_i	0	0,5	1	1,5	2
$f(x_i)$	0	0,25	1	2,25	4

Используя рассмотренные выше методы, находим приближенное значение $\tilde{I}$ исходного интеграла.

1. **Метод левых прямоугольников**:

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx h\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i),$$

$$\tilde{I}=h\cdot\left(f(0)+f(0,5)+f(1)+f(1,5)\right)=0,5\cdot\left(0+0,25+1+2,25\right)=1,75.$$

Для оценки погрешности используем формулу $\left|I-\tilde{I}\right|\le\frac{M_1\cdot h\cdot(b-a)}{2}$:

$$f'(x)=2x,\ \ M_1=\max_{x\in[0;\,2]}\left|f'(x)\right|=\max_{x\in[0;\,2]}\left|2x\right|=2\cdot 2=4,\ h=0,5,\ b-a=2-0=2,$$

$$\left|I-\tilde{I}\right|\le\frac{4\cdot 0,5\cdot 2}{2}=2.$$

Таким образом, точное значение интеграла I отличается от приближенного значения $\tilde{I}$ не более чем на 2. Иными словами $I\in[1,75-2;\,1,75+2]=[-0,25;\,3,75]$.

2. **Метод правых прямоугольников**:

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx h\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

$$\tilde{I} = h\cdot\big(f(0,5) + f(1) + f(1,5) + f(2)\big) = 0,5\cdot\big(0,25 + 1 + 2,25 + 4\big) = 3,75\,.$$

Так как оценка погрешности этого метода происходит также по то же формуле, что и в методе левых прямоугольников $\left|I - \tilde{I}\right| \le \dfrac{M_1\cdot h\cdot(b-a)}{2}$, точное значение интеграла принадлежит отрезку $I \in [3,75-2;\ 3,75+2] = [1,75;\ 5,75]$.

3. В **методе средних прямоугольников** нам потребуются середины отрезков разбиения. Поэтому составим новую таблицу значений функции $f(x) = x^2$, в которой начальное значение аргумента $x = x_0 + \dfrac{h}{2} = 0,25$, а шаг остается прежним: $h = 0,5$ (табл. 2).

Таблица 2. Таблица функции $f(x) = x^2$

x	0,25	0,75	1,25	1,75
$f(x)$	0,0625	0,5625	1,5625	3,0625

Найдем приближенное значение интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),$$

$$\tilde{I} = h\cdot\big(f(0,25) + f(0,75) + f(1,25) + f(1,75)\big) = 0,5\cdot\big(0,0625 + 0,5625 + 1,5625 + 3,0625\big) = 2,625\,.$$

Оценим погрешность метода по формуле $\left|I - \tilde{I}\right| \le \dfrac{M_2\cdot h^2\cdot(b-a)}{24}$, где $M_2 = \max\limits_{x\in[a;\,b]}\left|f''(x)\right|$:

$$f''(x) = 2, \quad M_2 = 2\,, \quad \left|I - \tilde{I}\right| \le \frac{2\cdot 0,5^2\cdot 2}{24} = 0,041(6) \le 0,042\,.$$

Видим, что точное значение лежит в отрезке

$$I \in [2,625 - 0,042;\ 2,625 + 0,042] = [2,583;\ 2,667].$$

4. Для реализации **метода трапеций** можно воспользоваться данными из таблицы 1. Получаем приближенное значение интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right),$$

$$\tilde{I} = h\cdot\left(\frac{f(0) + f(2)}{2} + f(0,5) + f(1) + f(1,5)\right) = 0,5\cdot\left(\frac{0+4}{2} + 0,25 + 1 + 2,25\right) = 2,75\,.$$

Оценим погрешность метода по формуле $\left|I - \tilde{I}\right| \le \dfrac{M_2\cdot h^2\cdot(b-a)}{12}$, где $M_2 = \max\limits_{x\in[a;\,b]}\left|f''(x)\right|$:

$$\left|I - \tilde{I}\right| \le \frac{2\cdot 0,5^2\cdot 2}{12} = 0,08(3) \le 0,084\,.$$

Таким образом, точное значение определенного интеграла лежит в отрезке

$$I \in [2,75 - 0,084;\ 2,75 + 0,084] = [2,666;\ 2,834].$$

5. Для **метода Симпсона** используем табл. 1 и по формуле метода находим:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{\substack{i=1\\ i \bmod 2=1}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2\\ i \bmod 2=0}}^{n-2} f(x_i)\right),$$

$$\tilde{I} = \frac{h}{3}\cdot\left(f(0) + f(2) + 4\cdot\left(f(0{,}5) + f(1{,}5)\right) + 2\cdot f(1)\right) = \frac{0{,}5}{3}\cdot\left(0+4+4\cdot(0{,}25+2{,}25)+2\cdot 1\right) = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

При реализации метода Симпсона приближенное значение интеграла оказалось равным его точному значению. Этого и следовало ожидать, так как в нашей учебной задаче подынтегральная функция $f(x) = x^2$ заменялась на многочлен 2-й степени $P_2(x)$, проходящий через те же точки, что и $f(x)$. В силу единственности интерполяционного многочлена $P_2(x) = x^2$ получили точное значение интеграла. С другой стороны, в формуле оценки погрешности метода Симпсона

$$\left|I - \tilde{I}\right| \le \frac{M_4 \cdot h^4 \cdot (b-a)}{180}, \text{ где } M_4 = \max_{x\in[a;\,b]}\left|f^{IV}(x)\right|,$$

величина $M_4 = 0$ и погрешность — нулевая.

Замечание 1. У многочленов 3-й степени четвертая производная равна нулю, поэтому значения интегралов, найденные методом Симпсона, будут точными и в случаях, если подынтегральная функция — многочлен 3-й степени. Получается интересный факт: площади криволинейных трапеций под параболой и под графиком многочлена 3-й степени, проходящих через три точки, абсциссы которых равны концам и середине одного и того же отрезка, равны.

Замечание 2. Напомним, что число, ограничивающее погрешность сверху, всегда округляется с избытком, какая бы цифра ни стояла после той, до которой проводится округление. Ведь если в рассматриваемом примере оценку сверху погрешности метода средних прямоугольников округлить, например, до одной значащей цифры по правилу пятерки, то получим:

$$\left|I - \tilde{I}\right| \le \frac{2\cdot 0{,}5^2\cdot 2}{24} = 0{,}041(6) \approx 0{,}04,$$

и точное значение 2,(6) не попадает в отрезок $[2{,}625 - 0{,}04;\, 2{,}625 + 0{,}04] = [2{,}585;\, 2{,}665]$. Округление же с избытком приводит к корректному результату:

$$\left|I - \tilde{I}\right| \le \frac{2\cdot 0{,}5^2\cdot 2}{24} = 0{,}041(6) \le 0{,}05,\ I \in [2{,}625 - 0{,}05;\, 2{,}625 + 0{,}05] = [2{,}573;\, 2{,}675].$$

Это произошло потому, что в данном примере число 0,041(6), ограничивающее сверху погрешность, является точным значением погрешности. Можно получить промежуток возможных значений интеграла, не округляя это число:

$$I \in [2{,}625 - 0{,}041(6);\, 2{,}625 + 0{,}041(6)] = [2{,}583(3);\, 2{,}666(6)].$$

Видим, что точное значение интеграла совпадает с правым концом отрезка, и уменьшение слагаемого 0,041(6) при округлении до одной значащей цифры приводит к потере точного значения.

Аналогичные рассуждения можно провести с данным примером и для метода трапеций. Проведите их самостоятельно.

Видим, что при реализации численных методов нахождения определенного интеграла в данном случае метод Симпсона оказался точным, оценка сверху погрешности методов трапеций и средних прямоугольников совпала с погрешностью, а в методах левых и правых прямоугольников оценка погрешности и реальная погрешность оказались достаточно большими (в методе левых прямоугольников даже нельзя ручаться за знак интеграла).

2. Решение.

Решить задачу Коши 1-го порядка $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ численно значит найти приближенное решение $y = y(x)$ в виде таблицы (табл. 3), в которой начальная точка $(x_0; y_0)$ — начальное условие, а шаг таблицы постоянный и равен h.

Таблица 3. Таблица приближенных значений функции $y = y(x)$

x_i	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	…	y_n

Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши 1-го порядка дает следующее утверждение.

Теорема (теорема Коши). *Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой области D плоскости xOy и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ во всех точках этой области, то какова бы ни была точка $(x_0; y_0)$, принадлежащая D, всегда существует и при том единственная функция $y = \varphi(x)$, которая определена и непрерывна в некотором интервале, содержащем точку x_0, является решением уравнения $y' = f(x, y)$ и принимает при $x = x_0$ значение y_0.*

Проверим выполнение достаточных условий существования и единственности решения данной задачи Коши: $y' = xy^2, \quad y(0) = 0,5$.

Поскольку $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$ —непрерывная функция в любой области, то можно приступать к численному решению, не опасаясь попасть в область, где решение не существует или оно не единственно.

Метод Эйлера

Метод Эйлера состоит в применении общих формул перехода от точки $(x_i; y_i)$ к точке $(x_{i+1}; y_{i+1})$ табл. 3:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h, \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \end{cases} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (1)$$

Найдем методом Эйлера приближенное решение данной задачи в виде таблицы искомой функции с шагом $h = 0{,}5$. Здесь $f(x, y) = xy^2$, $x_0 = 0, \; y_0 = 0,25$. По формулам (1) последовательно находим (с 4 знаками после запятой):

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 1 + 0{,}5 = 1{,}5, \\ y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 0{,}25 + 0{,}5 \cdot (1 \cdot 0{,}25^2) = 0{,}2813, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h = 1{,}5 + 0{,}5 = 2, \\ y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 0{,}2813 + 0{,}5 \cdot (1{,}5 \cdot 0{,}2813^2) = 0{,}3406, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + h = 2 + 0{,}5 = 2{,}5, \\ y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 0{,}3406 + 0{,}5 \cdot (2 \cdot 0{,}3406^2) = 0{,}4566, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = x_3 + h = 2{,}5 + 0{,}5 = 3, \\ y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 0{,}4566 + 0{,}5 \cdot (2{,}5 \cdot 0{,}4566^2) = 0{,}7171, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = x_4 + h = 3 + 0{,}5 = 3{,}5, \\ y_5 = y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) = 0{,}7171 + 0{,}5 \cdot (3 \cdot 0{,}7171^2) = 1{,}4886, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_6 = x_5 + h = 3{,}5 + 0{,}5 = 4, \\ y_6 = y_5 + h \cdot f(x_5, y_5) = 1{,}4886 + 0{,}5 \cdot (3{,}5 \cdot 1{,}4886^2) = 5{,}3663. \end{cases}$$

Полученные результаты вносим в таблицу (табл. 4):

Таблица 4. Таблица приближенного решения

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0,25	0,2813	0,3406	0,4566	0,7171	1,4886	5,3663

По точкам из табл. 4 построим ломаную Эйлера (рис. 1).

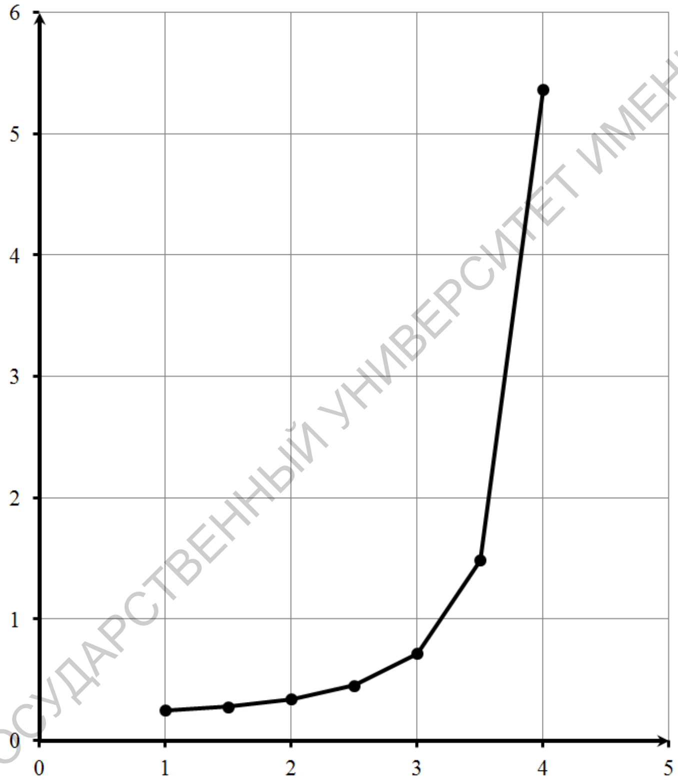

Рис. 1. Ломаная Эйлера

Метод Эйлера — Коши (метод двойной аппроксимации)

Метод Эйлера — Коши состоит в применении общих формул перехода от точки $(x_i; y_i)$ к точке $(x_{i+1}; y_{i+1})$ табл. 3:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h, \\ \tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2} \cdot \big(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) \big), \end{cases} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (2)$$

Найдем методом Эйлера — Коши приближенное решение данной задачи в виде таблицы искомой функции с шагом $h=0{,}5$. Здесь $f(x,y)=xy^2$, $x_0=0,\ y_0=0,25$. По формулам (2) последовательно находим (с 4 знаками после запятой):

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 1 + 0,5 = 1,5, \\ \tilde{y}_1 = y_0 + h\cdot f(x_0, y_0) = 0,25 + 0,5\cdot(1\cdot 0,25^2) = 0,2813 \\ y_1 = y_0 + \dfrac{h}{2}\cdot\big(f(x_0,y_0) + f(x_1,\tilde{y}_1)\big) = 0,25 + \dfrac{0,5}{2}\cdot\big((1\cdot 0,25^2) + (1,5\cdot 0,2813^2\big) = 0,2953, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h = 1,5 + 0,5 = 2, \\ \tilde{y}_2 = y_1 + h\cdot f(x_1, y_1) = 0,2953 + 0,5\cdot(1,5\cdot 0,2953^2) = 0,3607, \\ y_2 = y_1 + \dfrac{h}{2}\cdot\big(f(x_1,y_1) + f(x_2,\tilde{y}_2)\big) = 0,2953 + \dfrac{0,5}{2}\cdot\big((1,5\cdot 0,2953^2) + (2\cdot 0,3607^2)\big) = 0,3931, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + h = 2 + 0,5 = 2,5, \\ \tilde{y}_3 = y_2 + h\cdot f(x_2, y_2) = 0,3931 + 0,5\cdot(2\cdot 0,3931^2) = 0,5476, \\ y_3 = y_2 + \dfrac{h}{2}\cdot\big(f(x_2,y_2) + f(x_3,\tilde{y}_3)\big) = 0,3931 + \dfrac{0,5}{2}\cdot\big((2\cdot 0,3931^2) + (2,5\cdot 0,5476^2)\big) = 0,6578, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = x_3 + h = 2,5 + 0,5 = 3, \\ \tilde{y}_4 = y_3 + h\cdot f(x_3, y_3) = 0,6578 + 0,5\cdot(2,5\cdot 0,6578^2) = 1,1987, \\ y_4 = y_3 + \dfrac{h}{2}\cdot\big(f(x_3,y_3) + f(x_4,\tilde{y}_4)\big) = 0,6578 + \dfrac{0,5}{2}\cdot\big((2,5\cdot 0,6578^2) + (3\cdot 1,1987^2)\big) = 2,0059, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = x_4 + h = 3 + 0,5 = 3,5, \\ \tilde{y}_5 = y_4 + h\cdot f(x_4, y_4) = 2,0059 + 0,5\cdot(3\cdot 2,0059^2) = 8,0414, \\ y_5 = y_4 + \dfrac{h}{2}\cdot\big(f(x_4,y_4) + f(x_5,\tilde{y}_5)\big) = 2,0059 + \dfrac{0,5}{2}\cdot\big((3\cdot 2,0059^2) + (3,5\cdot 8,0414^2)\big) = 61,6047, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_6 = x_5 + h = 3,5 + 0,5 = 4, \\ \tilde{y}_6 = y_5 + h\cdot f(x_5, y_5) = 61,6047 + 0,5\cdot(3,5\cdot 61,6047^2) = 6703,0981, \\ y_6 = y_5 + \dfrac{h}{2}\cdot\big(f(x_5,y_5) + f(x_6,\tilde{y}_6)\big) = 61,6047 + \dfrac{0,5}{2}\cdot\big((3,5\cdot 61,6047^2) + (4\cdot 6703,0981^2)\big) = 44934906,4896. \end{cases}$$

Полученные результаты вносим в таблицу (табл. 5):

Таблица 5. Таблица приближенного решения методом Эйлера — Коши

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0,25	0,2953	0,3931	0,6578	2,0059	61,6047	44934906,4896

Построим ломаную, соединяющую точки из табл. 5 (рис. 2). В точках 3,5 и 4 получились большие по сравнению с предыдущими значения функции $y = y(x)$. Ломаную можно строить без использования этих точек (рис. 3 и рис. 4).

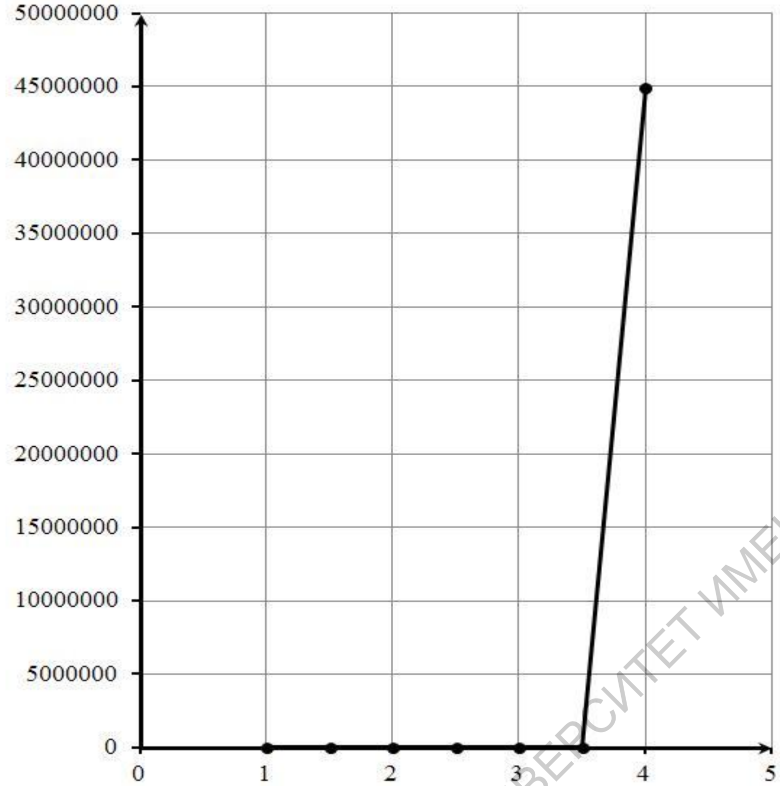

Рис. 2. Приближенная интегральная кривая, полученная методом Эйлера — Коши

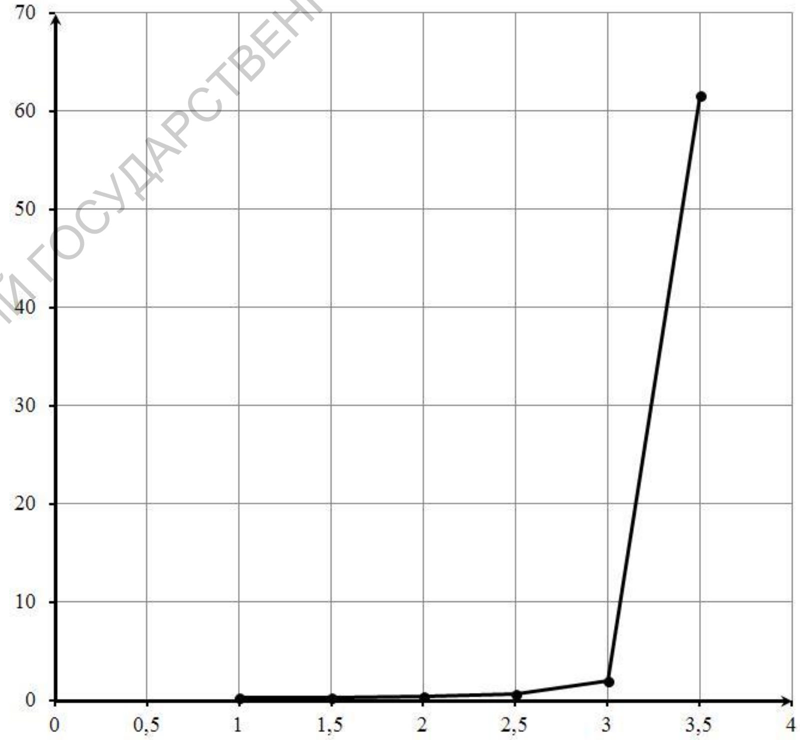

Рис. 3. Ломаная без точки x=4

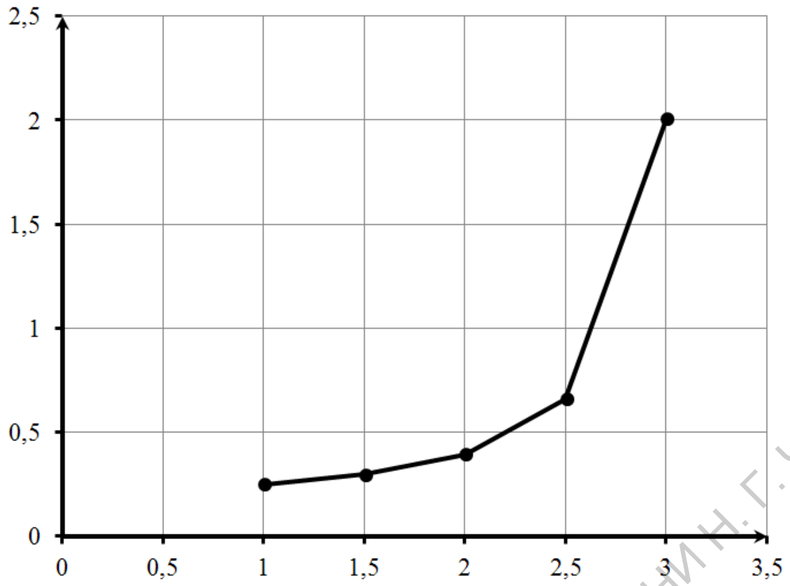

Рис. 4. Ломаная без точек без точек x=4, x=3,5

Рекомендуемая литература

1. Амосов, А.А. Вычислительные методы [Электронный ресурс]: Учеб. пособие / А.А.Амосов, Ю.А.Дубинский, Н.В.Копченова. – Электрон. дан. – СПб.: Издательство «Лань», 2014. – 672 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/42190/ . – Загл. с экрана.
2. Жидков, Е.Н. Вычислительная математика [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / Е.Н.Жидков. – М. : «Академия», 2010. – 208 с.
3. Ляшко, М.А. Численные методы в Excel [Текст]: учеб.-методич. пособие для студентов вузов / М.А. Ляшко, Е.А. Бекетова; под общ. ред. М.А. Ляшко.– Балашов: Николаев, 2012.– 240 с.
4. Заварыкин, В.М. Численные методы [Текст]: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов/ В.М. Заварыкин, В.Г. Житомирский, М.П. Лапчик. – М.: Просвещение, 1990. – 176 с.