Мисник М. П.

Элементы математического анализа

Числовые последовательности

Пределы функций

2016г.

Методические указания и контрольные задания по математике предназначаются для студентов-химиков.

Целью является оказание помощи студентам в самостоятельном изучении рассмотренных тем: числовые последовательности и пределы. В работе приведены примеры с решением, задания для самостоятельного решения.

СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение

Математический анализ химических процессов является неотъемлемой частью современной химической технологии.

Использование приёмов математики позволяет получить ценные результаты, достижение которых другими способами часто невозможно.

В данной работе охватываются темы математического анализа: числовые последовательности, их свойства, пределы функций.Так же кратко изложены необходимые понятия, рассмотрены требуемые методы, приведены примеры, даны контрольные задания.

Предназначается для студентов-химиков. Кроме того предлагается обращение к литературе по темам: множества, действительные числа, понятие функции. Приведён необходимый список литературы.

2 Числовые последовательности

Определение. *Числовой последовательностью называется функция натурального аргумента. Следовательно, каждому натуральному числу* $n \in N$ *становится в соответствие по некоторому правилу действительное число* a_n *и записывается*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

a_i – *члены последовательности,* a_n – *общий член последовательности. Принято обозначать*

$$\{a_n\} \text{ или } (a_n)$$

Примеры:

$$\begin{gathered}
1, 3, 5, , 7, \ \ldots \ , 2_n - 1, \ldots \\
2, 4, 8, \ \ldots \ , 2^n, \ldots \\
1, 2, 3, \ \ldots \ , n, \ldots \\
1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ \ldots \ , \frac{1}{n} \ldots \\
3, 3, 3, \ \ldots \ , 3, \ldots \\
0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ \ldots \ , \frac{n-1}{n}, \ldots
\end{gathered}$$

Определение. *Последовательность имеющая конечное число членов называется конечной числовой последовательностью. Последовательность состоящая из бесконечного числа членов называется бесконечной.*

2.1 Способы задания числовых последовательностей

1. Аналитический способ. Последовательность задаётся формулой общего члена, это позволяет номеру (аргументу) n записать этот соответствующий член.
   Пример:
   Написать три члена последовательности, если общий член $a_n = \frac{1}{3^n}$
   Решение: $a_1 = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $a_3 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$.
   Числовая последовательность записывается: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{3^n}$.
   Пример: Написать первые шесть членов последовательности общий член которой имеет вид:

$$a = \begin{cases} n - 1, \text{если} n - \text{чётное} \\ n^2 - 1, \text{если} n - \text{нечётное} \end{cases}$$

   Решение: аргументу n предаются 1,2,3,4,5,6.

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 8, a_4 = 3, a_5 = 24, a_6 = 5$$

   В результате числовая последовательность имеет вид:

$$0, 1, 8, 3, 24, 5, \ldots$$

2. Рекуррентный способ.
   Последовательность задаётся формулой вычисления последующих членов последовательности по заданным первым членам.
   Пример: Написать первые пять членов последовательности, если $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$; $n \geq 3$.

$$a_3 = 2a_2 + a_1 = 2 * 2 + 1 = 5$$
$$a_4 = 2a_3 + a_2 = 2 * 5 + 2 = 12$$
$$a_5 = 2a_4 + a_3 = 2 * 12 + 5 = 29$$
$$\text{т.о. } 1, 2, 5, 12, 29, \ldots$$

3. На практике иногда по нескольким первым членам последовательности следует установить формулу общего члена.

   Пример:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \ldots$$

   Очевидно, что числитель каждого члена последовательности совпадает с его номером, а знаменатель равен квадрату этого номера плюс 1. Т.о. общий член последовательности имеет вид $a_n = \frac{n}{n^2+1}$.

2.2 Геометрическое изображение числовой последовательности

Для изображения числовой последовательности существует два способа.

1. Члены последовательности изображаются на числовой прямой точками. Пример:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n},$$
$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ \tfrac{1}{4}, \ -\frac{1}{5}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots$$

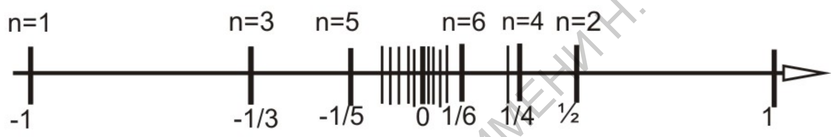

Рис. 1.

2. Члены последовательности как функция натурального аргумента и изображается точками в декартовой системе координат

   Пример:

$$a_n = \frac{1}{n};$$
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

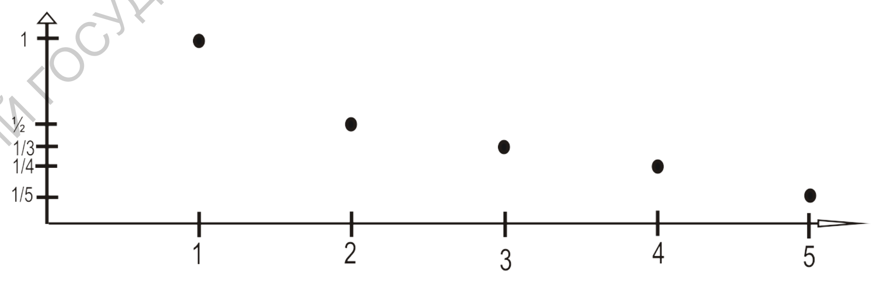

Рис. 2.

2.3 Свойства числовых последовательностей

Числовые последовательности обладают четырьмя свойствами: ограниченность, монотонность, сходимость, фундаментальность.

Определение ограниченности

Числовая последовательность a_n называется ограниченной, если существует положительное число M такое что выполняется условие:

$$\forall n \in N \quad \exists M > 0 \quad |a_n| \leq M$$

Пример:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

$$\exists M = 1 \quad \forall n \in N \quad \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leq 1$$

последовательность ограничена

Пример:

$$a_n = 2^n \qquad 2, 2^2, 2^3, \ldots$$

Не существует конечного числа M, такого чтобы $|a_n| \leq M$

Определение монотонности

Числовая последовательность называется монотонно возрастающей, если выполняется условие

$$\forall n \in N; a_n < a_{n+1}$$

. Пример:

$$2, 2^2, 2^3, \ldots$$
$$2^n < 2^{n+1}$$

Числовая последовательность называется монотонной неубывающей, если выполняется условие

$$\forall n \in N; a_n \leq a_{n+1}$$

. Пример:

$$2, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$$

Числовая последовательность называется монотонно убывающей, если выполняется условие

$$\forall n \in N; a_n > a_{n+1}$$

. Пример:

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \tfrac{1}{n}, \ldots$$

Числовая последовательность называется монотонно невозрастающей, если выполняется условие

$$\forall n \in N; a_n \geq a_{n+1}$$

Пример:

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots$$

Определение сходимости

Числовая последовательность называется сходящийся, если у неё существует предел.

2.4 Определение предела числовой последовательности

Пределом числовой последовательности a_n называется число l для которого выполняется условие:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \;\; \forall n > n_\varepsilon \;\; |a_n - l| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ - любое сколь угодно малое число, n_ε - аргумент зависящий от ε, l - предел числовой последовательности.

Обозначение предела следующее:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

Неравенство $|a_n - l| < \varepsilon$ по свойству модуля расписывается следующим образом:

$$-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$$

или

$$l - \varepsilon < a_n < \varepsilon + l$$

Это двойное неравенство означает, что члены числовой последовательности начиная с номера n_ε расположены в интервале $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. Этот интервал носит название ε - окрестность точки l и обозначается $O_\varepsilon(l)$.

Пример:

$$a_n = 1 - \tfrac{1}{n+1}$$

$$1 - \tfrac{1}{2}, 1 - \tfrac{1}{3}, 1 - \tfrac{1}{4}, \ldots, 1 - \tfrac{1}{n+1}, \ldots \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 1$$

т.е. $l = 1$

Покажем что: $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$

Рассматривается разность $|a_n - l|$

$$\left|1 - \frac{1}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \text{тогда } n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \text{и } n > \frac{1}{\varepsilon} - 1, \text{т.о.}$$

для $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1$ (здесь $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ - целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$) и при всех $n > n_\varepsilon$ будет выполняться $|a_n - 1| < \varepsilon$.

К примеру, пусть $\varepsilon = 0.1$, тогда $n_\varepsilon = 9$ и при всех $n > 9, |a_n - 1| < 0.1$. Уменьшим ε, т.е. уменьшим ε - окрестность $\varepsilon = 0.01$, тогда $n_\varepsilon = 99$ и при всех $n > 99$, $|a_n - 1| < 0.01$ и т.д.

Для сходящихся последовательностей такой процесс выполнятся при любых самых малых ε.

Определение фундаментальности

Числовая последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n > n_\varepsilon \text{ и } \forall p \geq 1 \text{ выполняется } |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$$

.

Все свойства связанны между собой. Свойство фундаментальности выполняется одновременно со свойством сходимости ч.п.

$$C \Leftrightarrow \phi$$

Из сходимости следует ограниченность

$$C \Rightarrow O$$

однако, из ограниченности не следует сходимость

$$O \not\Rightarrow C$$

Но если числовая последовательность ограничена и монотонна, то она сходится, т.е. $O + M \Rightarrow C$

Пример: Показать, что числовая последовательность $a_n = \frac{2^n-1}{2^n}$ сходится.

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$$

Последовательность монотонно возрастающая:

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < \frac{15}{16} < \ldots$$

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n},$$

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}$$

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} = \frac{2 * 2^n - 1}{2 * 2^n} = \frac{2}{2} \frac{2^n - \frac{1}{2}}{2^n} = \frac{2^n - \frac{1}{2}}{2^n} > \frac{2^n - 1}{2^n} = a_n$$

$$a_n < a_{n+1}$$

Кроме того последовательность ограничена, т.к.

$$a_n = \tfrac{2^n-1}{2^n} = 1 - \tfrac{1}{2^n}$$
$$0 < 1 - \tfrac{1}{2^n} < 1,$$
$$\text{следовательно } \exists M = 1, \forall n \in N, |a_n| < 1 \quad ,$$

т.е. выполняется определение ограниченности, а из $O + M \Rightarrow C$

$$|a_n - 1| = \tfrac{1}{2^n} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$

2.5 Бесконечно малые числовые последовательности

Определение Числовая последовательность α_n называется бесконечно малой, если её предел равен нулю или

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \quad |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Имеют место теоремы:

Сумма бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

Для того чтобы число l было пределом последовательности a_n необходимо и достаточно чтобы $a_n = l + \alpha_n$, где α_n - бесконечно малая последовательность.

Для нахождения предела последовательности используются основные теоремы о пределах: если последовательности a_n и b_n сходятся, то: последовательность $a_n \pm b_n$ сходится и имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n, \text{ а так же}$$

последовательность ca_n сходится (здесь $c - const$) и

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n,$$

последовательность $a_n b_n$ - сходится и

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

последовательность $\frac{a_n}{b_n}$ - сходится и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \text{ если } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

Пример:

Известно, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 4, \lim_{n\to\infty} b_n = 3$$

Найти:

$$\lim_{n\to\infty} 5a_n, \quad \lim_{n\to\infty}(3a_n - 2b_n), \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n b_n}{2} + 1\right)$$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty} 5a_n = 5\lim_{n\to\infty} a_n = 5 * 4 = 20$$

$$\lim_{n\to\infty}(3a_n - 2b_n) = 3\lim_{n\to\infty} a_n - 2\lim_{n\to\infty} b_n = 3 * 4 - 2 * 3 = 6$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n b_n}{2} + 1\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n}{2} + 1 = \frac{4 * 3}{2} + 1 = 7$$

2.6 Бесконечно большие числовые последовательности

Определение Числовая последовательность называется бесконечно большой, если

$$\forall E > 0, \exists n_E, \forall n > n_E; |a_n| > E$$

.

В данном случае число E может быть как угодно велико.

Бесконечно-большие и бесконечно - малые последовательности взаимосвязаны: если a_n - бесконечно малая числовая последовательность, то $b_n = \frac{1}{a_n}$ - бесконечно большая числовая последовательность и если d_n – бесконечно большая числовая последовательность , то $c_n = \frac{1}{d_n}$ - бесконечно малая числовая последовательность.

2.7 Вычисление пределов в случае неопределенности

В некоторых случаях использовать основные теоремы о пределах сразу невозможно так как возникают неопределенности. Их существует несколько типов: $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, O^{\infty}, \infty^0, 1^{\infty}$

Для раскрытия неопределенностей используются некоторые приёмы. Так в случае неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ числитель и знаменатель дроби делится на максимально возможную степень n.

Пример:

Найти:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2 - 7n + 5}{n^2 + 3n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6n^2}{n^2} - \frac{7n}{n^2} + \frac{5}{n^2}}{\frac{n^2}{n_2} + \frac{3n}{n^2} - \frac{1}{n^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6 - \frac{7}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 6 - 7 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 5 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 3 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{6 - 7 * 0 + 5 * 0}{1 + 3 * 0 - 0} = 6,$$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Пример:

Найти:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n+3} - \frac{n^2-7}{n+1} \right) = \infty - \infty$$

Решение: здесь неопределенность типа $\infty - \infty$, в этом случае следует сделать алгебраические преобразования.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n + n^2 + 1 - n^3 + 7n - 3n^2 + 21}{(n+3)(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2 + 8n + 22}{n^2 + 3n + n + 3} = -2 \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 4n - 11}{n^2 + 4n + 3} = -2 * 1 = -2$$

3 Пределы функции

Сходимость функции $f(x)$ в точке x_0 может быть исследована при стремлении аргумента $x \to x_0 - 0$ (слева в точке x_0), $x \to x_0 + 0$ (справа в точке x_0), и $x \to x_0$, если функция определена в окрестности точки x_0, за исключением, может быть, самой точки x_0. Кроме того, возможно исследование сходимости при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$

3.1 Определения

Пусть $x \to \infty$

Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_\varepsilon \; \forall x > x_\varepsilon \; \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

. Обозначается $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$

Пусть $x \to -\infty$

Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to -\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \quad \forall x < x_\varepsilon \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

Обозначается $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

Пусть $x \to x_0 - 0$

Число c называется пределом функции $f(x)$ слева в точке в x_0 при $x \to \; x_0 - 0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \quad \forall x_\varepsilon < x < x_0 \Rightarrow \quad |f(x) - c| < \varepsilon$$

Обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = c = f(x_0 - 0)$.

Пусть $x \to x_0 + 0$

Число d называется пределом функции $f(x)$ справа в точке x_0 при $x \to \; x_0 + 0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_\varepsilon \; \forall x_0 < x < x_\varepsilon \Rightarrow \; |f(x) - d| < \varepsilon$$

Обозначается $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = d = f(x_0+0)$

Пусть $x \to x_0$

Число l называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \backslash x_0 \text{ из } \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

3.2 Геометрический смысл определения предела функции в точке

Для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое что при выполнении неравенства $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$, то есть из двойного неравенства $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ следует двойное неравенство : $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

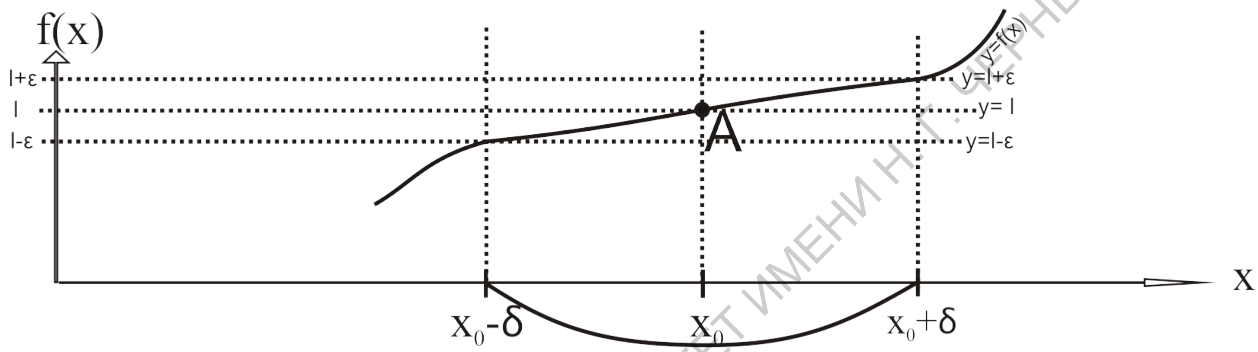

Рис. 3.

На рисунке 3 в точке $A(x_0, l)$, отмечено предельное состояние функции при этом часть графика функции $f(x)$ расположена между прямыми $y = l - \varepsilon, y = l + \varepsilon$. Для того, чтобы это выполнялось должно существовать δ - окрестность точки x_0. $\{O_\delta(x_0) : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$

Определение имеет место и в том случае когда функция не определена в самой точке x_0.

Пример: Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x - 1) = 2$

Решение:

Функция $y = 3x - 1$ определена в любой окрестности точки $x_0 = 1$. Рассматривается неравенство $|f(x) - l| = |3x - 1 - 2| = |3x - 3| = 3|x - 1| < \varepsilon$, выполняется при всех x удовлетворяющих условию : $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Таким образом $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ такое, что $\forall x$ удовлетворяющих $|x - 1| < \delta$ будет выполнено неравенство $|f(x) - 2| < \varepsilon$ ч. т.д.

Нахождение пределов функций подчиняется также основным теоремам о пределах, то есть выполняются равенства :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0}\varphi(x),\\
\lim_{x\to x_0} cf(x) &= c\lim_{x\to x_0} f(x),\\
\lim_{x\to x_0} f(x)\varphi(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0}\varphi(x),\\
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}, \text{ если } \lim_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0
\end{aligned}$$

Пример:

Найти

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3x-7) =$$
$$(\lim_{x\to 2} x)^2 + 3\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 7 =$$
$$2^2+3*2-7=3$$

Пример:

$$\lim_{x\to\infty}\tfrac{2x^2-5x}{6x^2+4} = \tfrac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\tfrac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\tfrac{2-\frac{5}{x}}{6+\frac{4}{x^2}} =$$
$$\tfrac{\lim\limits_{x\to\infty} 2-5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 6+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} = \tfrac{2-5*0}{6+4*0} = \tfrac{1}{3},$$

так как $\frac{1}{x}$ – бесконечно малая функция, то есть $\frac{1}{x}\underset{x\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$, а также $\frac{1}{x^2}\underset{x\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$

Пример:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{x-6}{x+\sqrt{x+2}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{6}{x}}{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}} =\\
&= \frac{1-0}{1+\sqrt{0+0}} = 1
\end{aligned}$$

.

Пример:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}=\frac{0}{0} \;=\; \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x+4)(x-2)}=$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+4} \;=\; \frac{2-3}{2+4}=\frac{-1}{6}$$

В этом примере неопределенность возникла из-за предельного перехода $x \to\ 2$, то есть $x-2\to 0$, поэтому следует выражение $x-2$ выделить в числителе и знаменателе, чтобы преодолеть неопределенность.

Пример:

Найти

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9} \;=\; \frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+6}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-9}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+6}+3)} \;=\; \lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)(\sqrt{x+6}+3)}=$$
$$=\frac{1}{(3+3)(\sqrt{3+6}+3)} \;=\; \frac{1}{6*6}=\frac{1}{36}$$

Неопределенности при вычислении пределов преодолеваются также с использованием первого и второго замечательных пределов.

<u>Первый замечательный предел</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

или

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

где $e \approx 2{,}71$.

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{x\frac{\sin 2x}{2x}*2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{3x}{2}*\frac{9}{2}}{x^2*\frac{9}{2}} = \frac{9}{2}$$

Пример:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+2}\right)^n \underset{1^\infty}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{n+2+2}{n+2}\right)^n =$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{2}*\frac{2}{n+2}*n} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2n}{n+2}} = e^2$$

3.3 Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - функции бесконечно малые при $x \to x_0$ т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0,$$
$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0.$$

Следует отметить, что функции могут быть бесконечно малые при стремлении аргумента x как в $+\infty$, так и в $-\infty$, а также при стремлении в точку x_0 как справа так и слева, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0,$$
$$\lim_{x \to \infty} \beta(x) = 0,$$
$$\lim_{x \to x_0 - 0} \alpha(x) = 0,$$
$$\lim_{x \to x_0 + 0} \beta(x) = 0.$$

Часто требуется сравнить: какая из двух функцией стремится к нулю быстрее.

Для этого строится предел отношения этих функции $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ и оценивается результат.

1. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $\beta(x)$, при этом пишут $\alpha(x) = 0\ (\beta(x))$.

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l$, где l - число отличное от нуля, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ является бесконечно малыми одного порядка малости.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ считается эквивалентными бесконечно малыми.

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$ или что тоже самое $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, то функция $\beta(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка малости чем $\alpha(x)$ и обозначается $\beta(x) = 0(\alpha(x))$.

5. Если функция $\alpha^k(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые одного порядка малости, $k > 0$, то говорят, что бесконечно малая $\beta(x)$ имеет порядок k по сравнению с $\alpha(x)$

<u>Свойства бесконечно малых</u>

1. Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая более высокого порядка малости по сравнению с сомножителями:

$$\gamma(x) = \alpha(x)\beta(x)$$
$$\gamma(x) = 0(\alpha(x))$$
$$\gamma(x) = 0(\beta(x)).$$

2. Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность $\alpha(x) - \beta(x) = \gamma(x)$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ т.е. если

$$\gamma(x) = 0(\alpha(x))$$
$$\gamma(x) = 0(\beta(x)),$$

Обозначение $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - эквивалентны $\alpha(x) \sim \beta(x)$

3. Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменяется при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной бесконечно малой, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l$$
$$\text{и } \alpha(x) \sim \alpha\prime(x), \text{ а } \beta(x) \sim \beta\prime(x), \text{ то}$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha\prime(x)}{\beta\prime(x)} = l.$$

Имеют место следующие эквивалентности:

$$\sin(x) \sim x,$$
$$\mathrm{tg}(x) \sim x,$$
$$\arcsin(x) \sim x,$$
$$\mathrm{arctg}(x) \sim x,$$
$$\ln(1+x) \sim x$$

Пример:
Сравнить бесконечно малые функции

$$\alpha(x) = 7x + 2x^4 \text{ и } \beta(x) = x + 3x^2 \text{ при } x \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} \alpha(x) = \lim_{x \to 0}(7x + 2x^4) = 0$$
$$\lim_{x \to 0} \beta(x) = \lim_{x \to 0}(x + 3x^2) = 0$$

составим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x+2x^4}{x+3x^2}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{7+2x^3}{1+3x}=\frac{7}{1}=7$$

Следовательно функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ является бесконечно малыми одного порядка малости.

Пример

Определить порядок бесконечно малой функции $\alpha(x)=xe^x$ по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)=x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to 0}e^x=1$$

Следовательно функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквиваленты $\alpha(x)\sim\beta(x)$

4 Задачи из практики по абсорбции

В расчетной практике по абсорбции, дистиляции, экстракции и выщелачиванию встречается функция:

$$y = f(x) = \frac{x^{n+1} - x}{x^{n+1}}$$

.

Для случая абсорбции применительно к системам с постоянным коэффициентом распределения y представляет долю растворяемого вещества, поглощаемого в башне с n теоретическими тарелками, а x-отношение скорости жидкости к скорости газа, разделенное на коэффициент распределения.

Значение этой функции приходится отыскивать для значений x, изменяющихся в пределах от 0 до очень больших чисел. Значение y легко находится для любых значений x, за исключением того случая, когда x равно единице, приводящего к дроби $\frac{0}{0}$, в результате применения алгебраических преобразований находится предельное значение y при $x \to 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{n+1} - x}{x^{n+1} - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x\left(x^n - 1\right)}{x^{n+1} - 1} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1\right)}{(x-1)\left(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1\right)} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\left(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1\right)}{x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1} = \frac{1(1+1+...+1)}{1+1+1+...+1} = \frac{n}{n+1}$$

, что составляет искомое значение $y = f(x)$ при $x = 1$.

5 Контрольные задания №1

а)Найти формулу общего члена числовых последовательностей:

1. $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, ...$
2. $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, ...$
3. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \frac{9}{32}, ...$
4. $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{5}{14}, ...$
5. $\frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \frac{7}{36}, ...$
6. $\frac{2}{1}, \frac{3}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{7}, \frac{6}{9}, ...$
7. $\frac{1}{1*2}, \frac{1}{2*3}, \frac{1}{3*4}, \frac{1}{4*5}, ...$
8. $2, 5, 8, 11, 14, ...$
9. $\frac{1}{4}, \frac{8}{7}, \frac{27}{10}, \frac{64}{13}, ...$
10. $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{7}{4}, ...$
11. $\frac{1}{1*3}, \frac{1}{2*5}, \frac{1}{3*7}, \frac{1}{4*9}, ...$
12. $\frac{1}{3}, -\frac{4}{9}, \frac{9}{27}, -\frac{16}{81}, \frac{25}{243}, ...$
13. $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{25}{26}, ...$
14. $\frac{1}{2}, 4, \frac{3}{4}, 8, \frac{25}{6}, 12, ...$
15. $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ...$
16. $\frac{3}{6}, \frac{6}{11}, \frac{9}{13}, \frac{12}{21}, \frac{15}{26}, ...$
17. $5, \frac{2}{3}, 5, \frac{4}{5}, 5, \frac{6}{7}, ...$
18. $\frac{1*3}{1}, \frac{2*5}{4}, \frac{3*7}{9}, \frac{4*8}{16}, ...$
19. $\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, ...$
20. $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, ...$

б) Написать первые пять членов последовательностей, заданных общим членом:

1. $a_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$,
2. $a_n = n^2$,
3. $a_n = \frac{3n}{5n+1}$,
4. $a_n = (-1)^n$,
5. $a_n = \frac{2^n+1}{2^n}$,
6. $a_n = \frac{n+1}{n^2}$,
7. $a_n = \frac{n}{n^2+1}$,
8. $a_n = \frac{1}{3+(-1)^n}$,
9. $a_n = \frac{2n}{3n-2}$,
10. $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{если } n - \text{чётное}, \\ \frac{n}{n+1}, \text{если } n - \text{нечётное} \end{cases}$
11. $a_n = \frac{n(n+2)}{n+3}$,
12. $a_n = (-\frac{1}{n})^n$,
13. $a_n = \frac{n^2}{2n^2+1}$,
14. $a_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}$,
15. $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$,
16. $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$,
17. $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$,
18. $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, \text{если } n - \text{чётное}, \\ 3^n, \text{если } n - \text{нечётное} \end{cases}$
19. $a_n = \frac{n^2+1}{2n-1}$,
20. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$,
21. $a_n = \frac{n(n+1)}{n^2}$,
22. $a_n = \frac{n}{n^2+1}$,
23. $a_n = \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$,
24. $a_n = \begin{cases} 2n, \text{если } n - \text{чётное}, \\ \frac{n}{n-1}, \text{если } n - \text{нечётное} \end{cases}$
25. $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$,
26. $a_n = \frac{(-1)^n+3}{n^2}$,
27. $a_n = \frac{n(n+1)}{2^n}$,

28. $a_n = \frac{n^3}{4n-3}$,

29. $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+2)}$,

30. $a_n = \begin{cases} 2^n, \text{если } n - \text{чётное}, \\ 3, \text{если } n - \text{нечётное} \end{cases}$

в) Найти пределы числовых последовательностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-n+5}{n^2+2n+1}$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n}{n-1} - \frac{4n^2+n}{2n^2-3}\right)$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+(n-1)^3}{(3-n)^3}$,
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3+2n^2+7}{4n^3-2n+11}$,
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n+1}{n-3} - \frac{2n^3}{n^3+5}\right)$,
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n^3-2n}{(n-7)^3+n^3}$,
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-7n+10}{2n^3-n+1}$,
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^3-(n+1)^3}{(2n+1)^2+(n+1)^2}$,
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n+3}{2n-1} - \frac{n^3+5}{n^3-4}\right)$,
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3+5n}{n^4+10n-3}$,
11. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{n} - \frac{n^2}{n^2+5}\right)$,
12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-5}{(n+1)^3-n^3}$,
13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-2)^2-(n+1)^2}{n^3-(n+3)^3}$,
14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n+1}{n^3-(n+2)^3}$,
15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+5}{n-7}\right)^{\frac{n}{6}+1}$,
16. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$,
17. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$,
18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$,
19. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$,
20. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$,

6 Контрольные задания №2

Вычислить предел функции:

1. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}}$,
2. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x+3}$,
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$,
4. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-7x+12}$,
5. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^3-125}{x^2-8x+15}$,
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{3-\sqrt{x-3}}$,
7. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$,
8. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{16-x^2}{x^3-64}$,
9. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$,
10. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2+2x-15}$,
11. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3}$,
12. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$,
13. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$,
14. $\lim\limits_{x\to 10} \frac{\lg x-1}{x-10}$,
15. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^x-e}{\sin(x-1)}$,
16. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$,
17. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^{2x}-1}{x}$,
18. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$,
19. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$,
20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\sin x}{1-\cos x}$.

Определить области существования функций:

1. $y = \frac{x^2}{1+x}$,
2. $y = \sqrt{3x - x^2}$,
3. $y = \log(x^2 - 4)$,
4. $y = \log(x + 2) + \log(x - 2)$,
5. $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$,
6. $y = \sqrt{\cos x^2}$,
7. $y = \lg sin\frac{\pi}{x}$,
8. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$,
9. $y = \arcsin\frac{2x}{1+x}$,
10. $y = \arccos(2\sin x)$,
11. $y = \lg(\cos(\lg x))$,
12. $y = \sqrt[4]{\lg \operatorname{tg} x}$,
13. $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$.

7 Контрольные задания №3

a) Сравнить бесконечно малые функции

1. $\alpha(x) = x\sin^2 x$

   $\beta(x) = 2x\sin x$

   при $x \to 0$

2. $\alpha(x) = x\ln(1+x)$

   $\beta(x) = x\sin x$

   при $x \to 0$

3. $\alpha(x) = \ln(1+3x\sin x)$

   $\beta(x) = \operatorname{tg} x^2$

   при $x \to 0$

   Заменить в $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ функции эквивалентными бесконечно малыми

   $\ln(1+3x\sin x) \sim 3x\sin x$, $\operatorname{tg} x^2 \sim x$

4. $\alpha(x) = x^2\sin x$

   $\beta(x) = x\operatorname{tg} x$

   при $x \to 0$

5. $\alpha(x) = (1+x)^m - 1$

   $\beta(x) = mx$ при $x \to 0$, где $m > 0$ рациональное число

6. $\alpha(x) = a^x - 1$

   $\beta(x) = x\ln a$

   при $x \to 0$

$b)$

7. Определить порядок бесконечно малой $\alpha(x) = \sqrt{1 + x\sin x} + 1$ относительно бесконечно малой x
8. Определить порядок бесконечно малой $\alpha(x) = \sqrt{\sin 2x}$ по сравнению с x при $x \to 0$
9. Найти пределы
   $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{\operatorname{tg} 3x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$
12. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\ln(1+x2)}$
    Представить $\cos x = 1 - (1 - \cos x)$
14. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$
15. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2}-1}$
16. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{(5^\alpha-1)(4^\alpha-1)}{(3^\alpha-1)(6^\alpha-1)}$
17. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt[4]{16+5x}-2}$
    Разделить числитель и знаменатель на 2.

Определить области существования и множество значений функций:

1. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$,
2. $y = \lg(1 - 2\cos x)$,
3. $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$,
4. $y = \arcsin(\lg \frac{x}{10})$,
5. $y = 5 - |x|$,
6. $y = \frac{1}{\pi} \arctan(x)$,
7. $y = |\lg x|$,
8. $y = \frac{x}{2x-1}, 0 < x < 1$,
9. $y = \sqrt{x - x^2}, 0 < x < 1$,
10. $y = \operatorname{ctg} \pi x, 0 < x < 1$,
11. $y = x + [2x], 0 < x < 1$.

8 Контрольные задания №4

Исследовать на монотонность функции:

1. $y = x^2, 0 \le x \le +\infty,$
2. $y = \sin x, -\frac{\pi}{2}x \le x \le \frac{\pi}{2},$
3. $y = \mathrm{tg}, -\frac{\pi}{2}x \le x \le \frac{\pi}{2},$
4. $y = 2x + \sin x, -\infty < x < +\infty,$
5. $y = x^2, -\infty < x \le 0,$
6. $y = \mathrm{ctg}\, x, 0 < x < \pi,$
7. $y = \cos x, 0 \le x \le \pi,$
8. $y = ax + b, a, b - const,$
9. $y = ax^2 + bx + c, a, b - const,$
10. $y = x^3,$
11. $y = \frac{ax+b}{cx+d}, a, b - const,$
12. $y = a^x, a > 0,$

9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Батунер Л. М., Позин М.Е.* Математические методы в химической технике. ГХИ 1963г 640 стр.

2. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа «Наука» 1989г 736с.

3. *Бермант А. Ф., Араманович И. Г.* Краткий курс математического анализа М:. Наука 1967г 736с.

4. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу М:. Физматгиз 1962г 544с.

5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления т. 1, М:. Физматгиз 1958г 608с.

6. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления М:. Наука 1978г 456с.

7. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах часть 1 М:. «Высшая шк.» 1997г 304с.

8. *Письменный Д.* Конспект лекций по высшей математике часть 1 М:. Рольф 2000г 288с.