Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

НОВЫЕ МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА И В СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Саратов
Издательство Саратовского университета
2015

УДК 517.51+517.984
ББК 22.16
Н76

А в т о р ы :
А. П. Хромов (разд. 1), С. Ф. Лукомский (разд. 2),
С. П. Сидоров (разд. 3), П. А. Терехин (разд. 4)

Н76 **Новые методы аппроксимации в задачах действительного анализа и в спектральной теории** / А. П. Хромов, С. Ф. Лукомский, С. П. Сидоров, П. А. Терехин. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. – 304 с. : ил.
ISBN 978-5-292-04345-4

В коллективной монографии рассматриваются новые методы аппроксимации в задачах действительного анализа и в спектральной теории. Представлены результаты исследований по обоснованию метода Фурье нахождения классических решений двух смешанных задач для гиперболических уравнений в частных производных, рассмотрены новые методы в теории вейвлет-анализа на локальных полях и нульмерных группах, изучены аппроксимативные свойства линейных методов формосохраняющего приближения, а также вопросы построения теории фреймов в банаховом пространстве.

Для преподавателей, аспирантов и студентов, всех, кто интересуется современными проблемами теории функций.

Работа издана по тематическому плану 2015 года
(утвержден на Учёном совете Саратовского государственного университета, протокол № 3 от 24 февраля 2015 года)

УДК 517.51+517.984
ББК 22.16

ISBN 978-5-292-04345-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В разделе I приводятся новые результаты исследований трех десятилетий по обоснованию метода Фурье нахождения классических решений двух смешанных задач для гиперболических уравнений в частных производных: уравнения первого порядка с инволюцией и волнового уравнения с произвольными двухточечными краевыми условиями. Опираясь на фундаментальные исследования В. А. Стеклова и А. Н. Крылова, даются решения указанных задач при минимальных требованиях на начальные данные, избегая традиционного подхода, опирающегося на равномерную сходимость продифференцированных нужное число раз рядов формальных решений. Результаты работы ставят много интересных и важных вопросов в теории функций и в краевых задачах для уравнений в частных производных.

Раздел II посвящен быстро развивающейся теории вейвлет-анализа на локальных полях и нульмерных группах. Указаны методы построения всплесковых базисов как на произвольных нульмерных группах, так и на группах Виленкина.

В разделе III рассматриваются линейные конечномерные методы формосохраняющего приближения функций и исследуются их аппроксимативные свойства. В частности, приводятся оценки величин линейных относительных поперечников для операторов, сохраняющих k-выпуклость приближаемых функций, а также находится количественная оценка эффекта «насыщения» для таких операторов.

В разделе IV изучаются вопросы построения теории фреймов в банаховом пространстве с точки зрения задачи о представлении функций рядами. В качестве иллюстрации общей теории приведены конструкции фреймов на основе аффинных систем функций в различных функциональных банаховых пространствах.

Результаты получены в рамках выполнения проектной части государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 1.1520.2014К).

Р а з д е л I

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ФУРЬЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ

ВВЕДЕНИЕ

Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, полученных его почленным дифференцированием нужное число раз.

По мнению В. А. Стеклова, впервые строго обосновавший метод Фурье, «необходимость доказывать равномерную сходимость рассматриваемых рядов вытекает из самой сущности метода Ляме – Фурье (Эйлера – Бернулли), дающего выражение искомой функции в виде бесконечного ряда, просуммировать который или преобразовать к виду, удобному для дифференцирования, не представляется возможным» [1, с. 224].

Эта точка зрения сделала метод Фурье очень популярным, было проведено огромное количество исследований и достигнуты значительные успехи.

Информация обзорного характера содержится, в частности, в книгах И. Г. Петровского [2], В. И. Смирнова [3], О. А. Ладыженской [4], В. А. Ильина [5, 6], В. А. Чернятина [7].

Приведем следующий результат из [2]. Рассматривается задача

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \qquad x \in [0,\pi], \qquad t \in (-\infty, +\infty), \tag{0.1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{0.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{0.3}$$

Теорема 0.1 (см. [2, с. 190]). *Если $q(x) \in C[0,\pi]$ и вещественна, $\varphi(x) \in C^3[0,\pi]$, $\psi(x) \in C^2[0,\pi]$,*

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0, \tag{0.4}$$

$$\psi(0) = \psi(\pi) = 0, \tag{0.5}$$

то ряд, представляющий формальное решение задачи (0.1)–(0.3) *по методу Фурье, и ряды, получающиеся из него дважды почленным дифференцированием по x и t, сходятся абсолютно и равномерно в области*

$x \in [0, \pi]$, $t \in [-T, T]$ при любом T и, тем самым, сумма $u(x,t)$ данного ряда есть классическое решение.

В трудном случае с числом переменных более двух в данном направлении глубокие результаты получены О. А. Ладыженской [4] и В. А. Ильиным [6].

Рассмотрим теперь частный случай задачи (0.1)–(0.3) — задачу о колебании струны с закрепленными концами:

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad x \in [0, \pi], \qquad t \in (-\infty, +\infty), \tag{0.6}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{0.7}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = 0 \tag{0.8}$$

($\psi(x) \equiv 0$ для простоты). Эта задача впервые была решена Д. Бернулли в 1753 г. и оказала огромное влияние на последующее развитие математики. Она находится в истоке теории рядов Фурье, ортогональных систем, краевых задач на собственные значения и, тем самым, имеет определяющее значение в современной теории функций, спектральной теории, теории краевых задач в частных производных. Укажем имена крупнейших ученых, принимавших активное участие в разработке данного направления: Бернулли, Эйлер, Фурье, Пуассон, Штурм, Лиувилль, Коши, Пуанкаре, Крылов, Стеклов, Петровский.

Формальное решение задачи (0.6)–(0.8) методом Фурье есть

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\xi) \sin nx \cos nt, \tag{0.9}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2[0, \pi]$. По теореме 0.1 соотношение (0.9) есть классическое решение, если $\varphi(x) \in C^3[0,1]$, удовлетворяет условиям (0.4) и получено за счет законности почленного дифференцирования дважды по x и t ряда (0.9). В то же время известно, что решение задачи (0.6)–(0.8) имеет место и при естественных минимальных условиях на функцию $\varphi(x)$, когда она удовлетворяет условиям (0.4), но при этом является только дважды непрерывно дифференцируемой.

В этом случае дважды почленную дифференцируемость ряда (0.9) доказать невозможно. Более того, при некоторых $\varphi(x)$ ряд, полученный после дважды почленного дифференцирования, может даже расходиться (при $t = 0$ получаем обычный ряд Фурье произвольной непрерывной функции).

Попробуем, несмотря на это, получить из ряда (0.9) решение задачи (это хорошо известный факт). Сам ряд (0.9) сходится абсолютно и равномерно при $x \in [0, \pi]$ и $t \in (-\infty, +\infty)$. Представим его в виде суммы двух рядов Σ_+ и Σ_-, где

$$\Sigma_\pm = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\xi) \sin n(x \pm t).$$

Теперь каждый из этих рядов есть уже ряд Фурье.

Рассмотрим ряд

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\xi) \sin nx$$

при всех $x \in (-\infty, +\infty)$, и пусть $\widetilde{\varphi}(x)$ — его сумма. Тогда $\widetilde{\varphi}(x)$ есть нечетное периодическое продолжение функции $\varphi(x)$ на всю вещественную ось. В силу естественных условий на функцию $\varphi(x)$ получаем, что $\widetilde{\varphi}(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$. Поэтому имеем

$$u(x,t) = \frac{\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)}{2}. \tag{0.10}$$

Отсюда легко следует, что $u(x,t)$ из (0.10) есть классическое решение задачи (0.6)–(0.8).

Таким образом, не прибегая к почленному дифференцированию ряда (0.9), мы сначала сделали преобразование этого ряда, а уже потом решили вопрос о его гладкости.

По поводу задачи (0.6)–(0.8) приведем высказывание В. А. Стеклова [1, с. 205]: «Этот классический пример показывает, что только что указанные ограничения вызываются самой сущностью задачи, и нет оснований рассчитывать на возможность освободиться от некоторых из них при исследовании общего случая. Сравнивая затем результат, полученный для рассматриваемого простейшего случая, с общими теоремами п. 24 или п. 26, можем признать дополнительные ограничения, которые несомненно должны возникать при общей постановке вопроса и которые действительно имеются в этих теоремах, сравнительно незначительными и устранимыми лишь в частных наиболее простых случаях, подобно указанному в предыдущем пункте».

Таким образом, В. А. Стеклов здесь опять обращает внимание на то, что ослабление условий на исходные данные при использовании метода Фурье в общем случае является трудной проблемой.

Теперь приступим к более тщательному рассмотрению этого вопроса. С этой целью обратимся к книге крупнейшего ученого (кораблестроителя, математика и механика) А. Н. Крылова «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах». Впервые эта книга вышла в 1913 г. и с той поры много раз переиздавалась без существенных изменений (5-е изд. в 1950 г., уже после смерти А. Н. Крылова). В предисловии к 5-му изданию В. И. Смирнов написал: «До настоящего времени книга А. Н. Крылова представляет единственное большое руководство по математической физике первой половины XIX века, а с другой стороны, большое внимание уделено приложениям методов математической физики к конкретным практически важным техническим задачам» [8, с. 6]. В этой книге есть очень интересная глава (гл. VI), посвященная улучшению сходимости рядов Фурье и им подобных.

Прием А. Н. Крылова продемонстрируем на примере ряда Фурье:

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad x \in [0, \pi], \tag{0.11}$$

и исследуем вопрос о гладкости суммы этого ряда. В общем случае при отсутствии информации, кроме той, что a_n есть коэффициенты Фурье, ничего сказать нельзя. Если нам известно, что исходная функция гладкая, кусочно-гладкая и т. п., то можно получить интегрированием по частям асимптотику коэффициентов Фурье, причем главные части асимптотики получаются за счет точек разрыва функции, следующие — за счет разрыва производных и т. д.

Рассмотрим обратную задачу: по асимптотике коэффициентов Фурье получить информацию о гладкости функции.

Пусть, например, $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{\alpha_n}{n^2}$, где через α_n обозначены любые числа, удовлетворяющие условию $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$. Если ничего не делать с рядом (0.11), то ничего нельзя сказать и о гладкости его суммы. Разобьем теперь ряд на два ряда:

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum \frac{1}{n} \sin nx, \qquad \Sigma_2 = \sum \frac{\alpha_n}{n^2} \sin nx.$$

Тогда можно утверждать следующее: ряд Σ_2 и соответствующий ему почленно дифференцированный ряд сходятся абсолютно и равномерно (из-за сходимости ряда $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ по неравенству Коши – Буняковского); ряд же Σ_1 имеет сумму, равную $\pi - x$ при $x \in [0, \pi]$. Значит, мы получаем информацию о гладкости суммы ряда (0.11) без его почленного дифференцирования. Если же $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha_n}{n^3}$, то получаем информацию о гладкости производной от суммы ряда и т. д.

Таким образом, мы сумели узнать информацию о гладкости ряда (0.11) путем его расщепления на два, один из которых точно вычисляется, а другой можно почленно дифференцировать нужное число раз (эта процедура немного напоминает нам решение задачи (0.6)–(0.8), когда мы разбивали ряд (0.9) на два). О данном способе А. Н. Крылов сказал следующее: «Этого приема я не встречал ни в руководствах, ни в литературе, хотя, по его простоте и очевидности, я не смею утверждать, что он является новым» [8, с. 9]. С помощью этого приема он представил, в частности, хорошее качественное исследование рядов в случае вынужденных колебаний. По его мнению, «этот прием не только дает практическую возможность с удобством пользоваться такими рядами в приложениях, получая желаемую степень точности, взяв самое ограниченное число $(3 - 5)$ членов преобразованного ряда, но часто приводит к представлению суммы предложенного ряда в замкнутой форме под видом разрывной функции. Этот же прием дает возможность находить производные от функций, представленных такими рядами Фурье, почленное дифференцирование которых недопустимо» [8, с. 9]. Еще приведем слова Крылова: «Изложенный прием усиления быстроты сходимости рядов Фурье и нахождения производных от функций, ими представляемых, может служить для доказательства или проверки того, что представляемая рядом функция действительно удовлетворяет тому дифференциальному уравнению, как решение коего она найдена, хотя бы самый ряд и нельзя было дифференцировать почленно требуемое число раз. Предлагается в виде задачи сделать такую проверку для величины u, данной на с. 170 и представляющей решение задачи о колебании струны» [8, с. 227]. Об ускорении сходимости рядов Фурье сказано также в [9]. Отметим еще роль данного метода в вычислительной математике [10, 11].

Можно сказать, что в исследованиях метода Фурье прием А. Н. Крылова является ключом к изучению смешанной задачи. В самом деле, формальное разложение решения по методу Фурье включает и собственные значения, и собственные функции соответствующих спектральных задач.

Используя асимптотику собственных значений и собственных функций, можно попытаться вместо почленного дифференцирования формальных разложений разбить их на части, такие, что одни, более простые по структуре, но медленно сходящиеся, можно изучать, минуя почленное дифференцирование, а другие, быстро убывающие, — используя почленное дифференцирование.

Лишь в 80-х гг. прошлого века В. А. Чернятин [7,12–17] предпринял такую попытку изучения формальных разложений по методу Фурье и успешно изучил ряд смешанных задач. В результате требования гладкости исходных данных уже становятся минимальными.

Заметим, что указанная выше идея просматривается уже в задаче (0.6)–(0.8) колебания струны. Именно исходя из формального решения (это не ряд Фурье), мы представляем его в виде суммы двух рядов Фурье с коэффициентами, выражающимися через исходные данные, и нужную информацию о гладкости получаем из структуры решения, не прибегая к почленному дифференцированию формального ряда.

В. А. Чернятин же в случае волнового уравнения представлял формальное решение в виде суммы двух рядов, один из которых допускает почленное дифференцирование два раза (идея ускорения сходимости), а другой можно представить в виде суммы двух рядов Фурье, которые вычисляются явно, и поэтому отсюда, как и в случае уравнения струны, мы получим нужную информацию. Разумеется, во всех вопросах, связанных с методом Фурье, важная роль, которую впервые понял В. А. Стеклов, принадлежит замкнутости как тригонометрической системы, так и системы собственных функций.

Тем самым результаты В. А. Стеклова, А. Н. Крылова и В. А. Чернятина являются крупным вкладом в развитие метода Фурье. Они поднимают метод Фурье на новую высоту, предельно расширяя границы его применения (т. е. при минимальных условиях на исходные данные), и ставят много интересных и очень важных вопросов и в теории функций, и в краевых задачах в частных производных. Разумеется, достижение новых успехов в данном направлении связано с большими трудностями, и оно делает метод Фурье еще более привлекательным для исследований.

Остановимся на содержании данного раздела.

В первой главе нахождение классических решений методом Фурье при минимальных условиях на начальные данные приводятся на основе использования уточненных асимптотик собственных значений и собственных функций. Основным здесь является использование приема А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов, подобных рядам Фурье, который мы реализуем путем рассмотрения вспомогательных эталонных задач, допускающих точные решения, с последующим сравнением формальных решений исходной и эталонных задач. В параграфе 1.1 дается новое более простое доказательство замечательной теоремы В. А. Чернятина о классическом решении по методу Фурье смешанной задачи (0.1)–(0.3) (для простоты берем $\psi(x) \equiv 0$) при естественных минимальных условиях на $\varphi(x)$. В параграфе 1.2 рассматривается смешанная задача для уравнения первого порядка с инволюцией. Приведем простейший пример такого уравнения:

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \left.\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=1-x} + q(x)u(x,t), \tag{0.12}$$

где $x \in [0,1]$, $t \in (-\infty,\infty)$. Уравнения с инволюцией имеют давнюю историю и активно исследуются в настоящее время [18–34].

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение (0.12) есть один из корней квадратных (в смысле дифференцирования) из уравнения струны. В самом деле, если $u(x,t)$ удовлетворяет (0.12), то

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(i\,\frac{\partial u(1-x,t)}{\partial(1-x)}\right) =$$
$$= i\frac{\partial}{\partial(1-x)}\left(\frac{\partial u(1-x,t)}{\partial t}\right) = i^2\frac{\partial}{\partial(1-x)}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Уравнение (0.12) есть простейшее уравнение первого порядка с инволюцией. При решении смешанных задач для таких уравнений по методу Фурье спектральная задача сводится к системе Дирака, т. е. вместо уравнения Штурма – Лиувилля нам приходится связываться с системой Дирака. Спектральная задача для уравнения (0.12) интересна и своими приложениями к задаче на собственные значения для интегральных уравнений [19–21]; мы для одного самого простого (но лишь по форме) случая приводим подробные доказательства. В параграфе 1.3 без подробных доказательств опишем два других результата о смешанных задачах с инволюцией (одна задача для периодических краевых условий, другая — простейшая смешанная задача на графе из двух ребер: одно ребро образует цикл-петлю, а второе примыкает к нему).

Результаты параграфа 1.1 опубликованы впервые, п. 1.2.1 — в [35], пп. 1.2.2, 1.3.2 — в [36, 37], п. 1.3.1 — в [33, 37].

Во второй главе изучаются лишь смешанные задачи для волнового уравнения с произвольными двухточечными краевыми условиями на основе резольвентного подхода в методе Фурье, предложенного впервые А. П. Хромовым в [25, 26].

Это новый способ использования приема А. Н. Крылова усиления скорости сходимости рядов Фурье, опирающийся на метод Коши – Пуанкаре интегрирования по спектральному параметру резольвенты оператора, порождаемого спектральной задачей по методу Фурье. Теперь не требуется никакой информации о собственных и присоединенных функциях, нобходимо лишь знание главных частей асимптотик собственных значений. В итоге в параграфе 2.1 находится классическое решение смешанной задачи с условием закрепления при минимальных требованиях на начальные данные при комплекснозначной $q(x)$. Этот перспективный метод с успехом применен далее в случае всех двухточечных краевых условий. Так, в параграфе 2.2 исследован случай, когда граничные условия содержат первые производные решений. В параграфе 2.3 рассмотрен случай граничных условий, когда одно из них содержит первые производные решений, а второе — нет. Параграф 2.3 содержит случаи периодических, антипериодических краевых условий, а также случаи, когда спектральная задача может давать и присоединенные функции в любом количестве [5, 6].

Результаты, представленные в параграфе 2.1, опубликованы в [25, 26], параграфа 2.2 — в [27], параграфа 2.3 — в [26, 28].

В Приложении без подробных доказательств резольвентным подходом приводятся новые факты о поведении формального решения по методу Фурье при дальнейшем ослаблении требований на исходные данные. В итоге получаются разные виды обобщенных решений [29].

Автор раздела выражает благодарность М. Ш. Бурлуцкой и В. В. Корневу за использование результтов совместных работ.

1 МЕТОДЫ, СВЯЗАННЫЕ С АСИМПТОТИКОЙ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1.1 Теорема В. А. Чернятина

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$u_{tt(x,t)} = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t), \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \tag{1.3}$$

где $q(x) \in C[0,\pi]$ и вещественна.

Под классическим решением задачи (1.1)–(1.3) понимаем функцию $u(x,t)$, дважды непрерывно дифференцируемую по x и t при $x \in [0,\pi]$, $t \in (-\infty,+\infty)$ и удовлетворяющую (1.1)–(1.3).

Естественные минимальные требования на $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) \in C^2[0,\pi], \qquad \varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0 \tag{1.4}$$

(условия $\varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$ следуют из (1.1)).

Будем искать классическое решение задачи (1.1)–(1.3) по методу Фурье при условиях (1.4). Формальное решение по методу Фурье есть

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda\varphi)(x)\cos\sqrt{\lambda}t\,d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} (\varphi,\varphi_n)\,\varphi_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}t, \tag{1.5}$$

где R_λ — резольвента оператора L: $Ly = -y'' + q(x)y$, $y(0) = y(\pi) = 0$, λ_n — собственные значения оператора L, а $\varphi_n(x)$ — соответствующие собственные функции, для которых $\|\varphi_n\| = 1$ ($\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,\pi]$), $r > 0$ фиксировано. Появление интеграла в (1.5) вызвано тем, что нумерация собственных значений λ_n привязана к их асимптотике, потому некоторое конечное число собственных значений с малыми модулями не занумеровано.

1.1.1 Асимптотика собственных значений и собственных функций

Оператор L самосопряженный, и для λ_n имеет место [38, с. 71].

Теорема 1.1. *Все λ_n вещественные, достаточно большие по модулю, простые и для них справедлива асимптотика*

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \qquad n = n_0, n_0+1, \ldots . \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем одними и теми же α и α_n будем обозначать произвольные числа (в том числе и комплексные), лишь бы $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$.

Замечание 1.1. Грубая асимптотика

$$\sqrt{\lambda_n} = n + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1.7}$$

хорошо известна.

Займемся асимптотикой собственных функций. Воспользуемся оператором преобразования [38, с. 17, 23]:
для решения $y(x,\mu)$ уравнения

$$y'' - q(x)y + \mu^2 y = 0 \tag{1.8}$$

с условиями $y(0,\mu) = 0$, $y'(0,\mu) = \mu$, имеет место формула

$$y(x,\mu) = \sin\mu x + \int\limits_0^x K(x,t)\sin\mu t\,dt, \tag{1.9}$$

где $K(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t и $K(x,0) = 0$.

Теорема 1.2. *Если $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$ из (1.6), то*

$$y(x,\mu_n) = \sin nx + \frac{r(x)}{n}\cos nx + \frac{1}{n}\int\limits_0^x K_t(x,t)\cos nt\,dt + O\left(\frac{\alpha_n}{n}\right), \tag{1.10}$$

где $r(x) \in C[0,\pi]$ и оценка $O(\cdot)$ равномерна по x.

Доказательство. Имеем

$$\sin\mu_n x = \sin nx + \gamma_n x\cos nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{1.11}$$

где $\gamma_n = \frac{1}{n}(\alpha + \alpha_n)$. Далее

$$\int\limits_0^x K(x,t)\sin\mu_n t\,dt =$$

$$= \int\limits_0^x K(x,t)\sin nt\,dt + \gamma_n\int\limits_0^x K(x,t)t\cos nt\,dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \int_0^x K(x,t)\sin nt\,dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= -\frac{\cos nx}{n}\,K(x,x) + \frac{1}{n}\int_0^x K_t(x,t)\cos nt\,dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \qquad (1.12)$$

Из (1.11) и (1.12) следует (1.10). □

Этот результат нам нужен лишь для следующей очевидной в силу теоремы 1.2 леммы.

Лемма 1.1. *Если* $f(x) \in C[0,1]$, *то*

$$(f, y(x,\mu_n)) = (f, \sin nx) + \frac{\alpha_n}{n}. \qquad (1.13)$$

Лемма 1.2. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$y(x,\mu_n) = \sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad y'(x,\mu_n) = n\cos nx + O\left(1\right),$$
$$y''(x,\mu_n) = -n^2\sin nx + O\left(n\right).$$

Этот результат легко следует из (1.7) и (1.9). Не требуется уточненных формул для собственных значений и собственных функций.

Лемма 1.3. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$\cos\mu_n t = \cos nt + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\cos\mu_n t\right) = -n\sin nt + O\left(1\right),$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\cos\mu_n t\right) = -n^2\cos nt + O\left(n\right),$$

где оценки $O(\cdot)$ *равномерны по* $t \in [-T, T]$ *при любом фиксированном* $T > 0$.

Лемма 1.3 легко следует из (1.7).

1.1.2 Преобразование формального ряда

По условиям (1.4) $\varphi(x) \in D_L$ (области определения оператора L). Тогда

$$(\varphi, \varphi_n) = \frac{1}{\lambda_n}(\varphi, L\varphi_n) = \frac{1}{\lambda_n}(L\varphi, \varphi_n) = \frac{1}{\lambda_n}(g, \varphi_n),$$

где $g(x) = L\varphi(x) = -\varphi''(x)+q(x)\varphi(x)$. Тогда ряд в (1.5), который впредь будем обозначать Σ, имеет вид

$$\Sigma = \sum \frac{1}{\lambda_n}(g, \varphi_n)\varphi_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n} t \tag{1.14}$$

(для краткости $|\lambda_n| > r$ в знаке суммы справа опускаем).

Лемма 1.4. *Имеет место асимптотика*

$$\frac{1}{\lambda_n}(g, \varphi_n) = \frac{(g, \varphi_n^0)}{n^2} + \frac{\alpha_n}{n^3}, \tag{1.15}$$

где $\varphi_n^0(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin nx$.

Доказательство. По лемме 1.2

$$\|y(x, \mu_n)\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

и так как $\varphi_n(x) = \dfrac{y(x, \mu_n)}{\|y(x, \mu_n)\|}$, то по лемме 1.1 получаем (1.15). □

Из леммы 1.4 следует

Лемма 1.5. *Имеет место представление*

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{1.16}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum \frac{(g, \varphi_n^0)}{n^2} \varphi_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n}\, t, \qquad \Sigma_2 = \sum \frac{\alpha_n}{n^3} \varphi_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n}\, t.$$

Лемма 1.6. *Имеет место представление*

$$\Sigma_1 = \Sigma_3 + \Sigma_4, \tag{1.17}$$

где

$$\Sigma_3 = \frac{2}{\pi} \sum \frac{(g, \sin nx)}{n^2} \sin nx \cos nt, \qquad \Sigma_4 = \sum a_n(x, t),$$
$$a_n(x, t) = \frac{(g, \varphi_n^0)}{n^2}[\varphi_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n}\, t - \varphi_n^0(x) \cos nt].$$

Лемма 1.7. *Ряды Σ_2, Σ_4 и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием два раза по x и t, сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [T, T]$, где T — любое фиксированное положительное число.*

Доказательство. Заключение о ряде Σ_2 получаем из оценок

$$\varphi_n^{(s)}(x) = O(n^s), \qquad \frac{d^s}{dt^s}\cos\sqrt{\lambda_n}\,t = O(n^s), \qquad s = 0, 1, 2,$$

легко следуемых из лемм 1.2 и 1.3 и абсолютной сходимости ряда $\sum \alpha_n/n$ по неравенству Коши – Буняковского. Обратимся к ряду Σ_4. Представим

$$a_n(x,t) = a_{1,n}(x,t) + a_{2,n}(x,t), \tag{1.18}$$

где

$$a_{1,n}(x,t) = \frac{(g,\varphi_n^0)}{n^2}\,[\varphi_n(x) - \varphi_n^0(x)]\cos\sqrt{\lambda_n}\,t,$$
$$a_{2,n}(x,t) = \frac{(g,\varphi_n^0)}{n^2}\,\varphi_n^0(x)[\cos\sqrt{\lambda_n}\,t - \cos nt].$$

В силу лемм 1.2 и 1.3 имеем оценки

$$\frac{d^s}{dx^s}\,a_{j,n}(x,t) = O\left(\frac{\alpha_n}{n^2}\,n^{-1+s}\right), \quad j = 1, 2, \quad s = 0, 1, 2,$$

и утверждение леммы для Σ_4 получаем так же, как и для ряда Σ_2. □

Лемма 1.8. *Ряд* $u_0(x,t) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(g,\sin nx)}{n^2}\sin nx\cos nt$ *является классическим решением задачи* (0.6)–(0.8), *когда вместо* $\varphi(x)$ *берется* $\varphi_1(x) = L_0^{-1}g$, *где* L_0 *есть* L *при* $q(x) \equiv 0$.

Доказательство. Имеем $\dfrac{1}{n^2}\sin nx = L_0^{-1}(\sin nx)$, и тогда наш ряд есть

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_1, \sin nx)\sin nx\cos nt. \tag{1.19}$$

Так как

$$\varphi_1(x) = L_0^{-1}g = -\int_0^x (x-t)g(t)\,dt + \frac{x}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)g(t)\,dt,$$

то $\varphi_1(x)$ удовлетворяет условиям (1.4), и поэтому $u_0(x,t)$, равное (1.19), есть классическое решение задачи (0.6)–(0.8) для уравнения струны при $\varphi(x)$, равной $\varphi_1(x)$. □

Лемма 1.9. *Для формального решения* (1.5) *имеет место формула*

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{1.20}$$

где $u_0(x,t)$ *из леммы 1.8,*

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,d\lambda - \frac{2}{\pi}\sum_{n^2\leqslant r}\frac{(g,\sin nx)}{n^2}\sin nx\cos nt,$$

$$u_2(x,t) = \sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{1}{\lambda_n}(g,\varphi_n)\,\varphi_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t - \frac{(g,\varphi_n^0)}{n^2}\,\varphi_n^0(x)\cos nt\right].$$

Утверждение леммы следует из (1.14), если учесть, что $\Sigma_2 + \Sigma_4$ есть $u_2(x,t)$.

Таким образом, (1.20) и есть реализация рекомендаций А. Н. Крылова по усилению быстроты сходимости рядов Фурье и им подобных: ряд $u_2(x,t)$ имеет ускоренную сходимость и его можно почленно дифференцировать два раза, $u_0(x,t)$ дважды дифференцируема по x и t как решение уравнения струны, $u_1(x,t)$ дважды дифференцируема как конечная сумма. Тем самым решен важный вопрос о гладкости формального решения при минимальных условиях на $\varphi(x)$.

1.1.3 Классическое решение смешанной задачи

Завершаем доказательство следующего замечательного результата В. А. Чернятина.

Теорема 1.3. *Формальное решение* (1.5) *есть классическое решение смешанной задачи* (1.1)–(1.3) *при минимальных условиях* (1.4) *на* $\varphi(x)$.

Доказательство. В том, что $u(x,t)$ удовлетворяет граничным и начальным условиям, убеждаемся тривиально, поскольку ряд (1.5) в силу (1.14) один раз по x и t можно законно почленно дифференцировать, не прибегая к процедуре ускорения сходимости. Далее, в силу (1.20) $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема. Докажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Обозначим через M оператор $M = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. Тогда по лемме 1.8

$$Mu_0 = 0. \tag{1.21}$$

Далее имеем

$$Mu_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} M\left((R_\lambda\varphi)\cos\sqrt{\lambda}\,t\right)\,d\lambda. \tag{1.22}$$

Но $M\left((R_\lambda\varphi)\cos\sqrt{\lambda}\,t\right) = q(x)\varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t - q(x)(R_\lambda\varphi)\cos\sqrt{\lambda}\,t$. Поэтому из (1.22) получаем

$$Mu_1 = \frac{q(x)}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt. \tag{1.23}$$

Далее в силу ускоренной сходимости ряда $u_2(x,t)$ имеем

$$Mu_2 = \sum_{|\lambda_n|>r} Mv_n,$$

где v_n — общий член ряда $u_2(x,t)$.

Имеем

$$Mv_n = \frac{1}{\lambda_n}(g,\varphi_n)\,M\left(\varphi_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t\right) = \\ = \frac{1}{\lambda_n}(g,\varphi_n)\left(-q(x)\varphi_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t\right),$$

значит, $Mu_2 = -q(x)u_2$. Теорема доказана. □

Замечание 1.2. Если брать $u_t(x,0) = \psi(x)$ вместо $u_t(x,0) = 0$, то надо требовать, чтобы $\psi(x) \in C^1[0,\pi]$ и $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$.

1.2 Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией

В этом параграфе рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1-x} + q(x)u(x,t),$$

$$x \in [0,1], \quad t \in (-\infty,+\infty), \tag{1.24}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,1], \tag{1.25}$$

где β — вещественное число, $\beta \neq 0$, $q(x) \in C^1[0,1]$ и вещественна, $\varphi(x)$ удовлетворяет естественным условиям для классического решения:

$$\varphi(x) \in C^1[0,1], \quad \varphi(0) = \varphi'(1) = 0. \tag{1.26}$$

Решение ищется в классе функций, непрерывно дифференцируемых по обеим переменным в полосе $[0,1]\times(-\infty,+\infty)$.

1.2.1 Случай симметрического потенциала

Это случай [35], когда

$$q(x) = q(1-x), \tag{1.27}$$

и здесь можно брать $q(x) \in C[0,1]$.

Получим явную формулу для классического решения, напоминающую формулу решения уравнения струны.

Спектральная задача по методу Фурье иммет вид

$$y'(1-x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{1.28}$$

$$y(0) = 0. \tag{1.29}$$

Найдем решение задачи (1.28)–(1.29). Выполняя в (1.28) замену x на $1-x$ и полагая $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$ (T — знак транспонирования), получим следующую систему уравнений относительно $z(x)$:

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x), \tag{1.30}$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = \operatorname{diag}(q(x), q(1-x)) = \operatorname{diag}(q(x), q(x))$.

Верно и обратное: если $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ — решение (1.30) и $z_1(x) = z_2(1-x)$, то $y(x) = z_1(x)$ есть решение уравнения (1.28).

Лемма 1.10. *Общее решение системы* (1.30) *имеет вид*

$$z(x) = z(x,\lambda) = \Gamma V(x,\lambda)c, \tag{1.31}$$

где $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $V(x,\lambda) = \operatorname{diag}\left(u_1(x)e^{-\lambda i x}, u_2(x)e^{\lambda i x}\right)$, $u_1(x) = \exp\left(i\int_0^x q(t)\,dt\right)$, $u_2(x) = \exp\left(-i\int_0^x q(t)\,dt\right)$, $c = (c_1, c_2)^T$, c_1, c_2 — *произвольные постоянные.*

Доказательство. Выполним в (1.30) замену $z = \Gamma v$. Получим

$$v_1'(x) - iq(x)v_1(x) = -\lambda i v_1(x), \qquad v_2'(x) + iq(x)v_2(x) = \lambda i v_2(x).$$

Отсюда

$$v_1(x) = v_1(x,\lambda) = c_1 u_1(x) e^{-\lambda i x}, \qquad v_2(x) = v_2(x,\lambda) = c_2 u_2(x) e^{\lambda i x}. \qquad \square$$

Лемма 1.11. *Общее решение уравнения* (1.28) *имеет вид*

$$y(x) = y(x,\lambda) = c\varphi(x,\lambda), \tag{1.32}$$

где $\varphi(x,\lambda) = u_1(x)e^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}e^{\lambda i(1-x)} - iu_2(x)e^{\lambda ix}$, c *— произвольная постоянная.*

Доказательство. Как было показано выше, функция $y(x) = z_1(x)$ является решением (1.28), если $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ удовлетворяет (1.30) и $z_1(x) = z_2(1-x)$. Отсюда, в частности, имеем условие $z_1(0) = z_2(1)$, откуда по лемме 1.10 получаем $c_1 = c_2u_2(1)e^{\lambda i}$. Тогда

$$y(x) = z_1(x) = c_1u_1(x)e^{-\lambda ix} - ic_2u_2(x)e^{\lambda ix} = c_2\varphi(x,\lambda),$$

что доказывает (1.32). □

Лемма 1.12. *Собственные значения краевой задачи* (1.28)–(1.29) *есть*

$$\lambda_n = 2\pi n + a, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.33}$$

где $a = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_0^1 q(t)\,dt$, *а соответствующие собственные функции имеют вид*

$$y_n(x) = p(1-x)e^{2\pi ni(1-x)} - ip(x)e^{2\pi nix}, \tag{1.34}$$

где $p(x) = u_2(x)e^{aix}$.

Доказательство. Согласно (1.29) и (1.32) для собственных значений имеем уравнение $\varphi(0,\lambda) = 0$, корни которого определены в (1.33).

Найдем собственные функции $y_n(x) = \varphi(x,\lambda_n)$. Из условия $q(x) = q(1-x)$ получаем $u_1(x) = e^{ia}u_2(1-x)$. Поэтому

$$y_n(x) = u_2(1-x)e^{ia(1-x)}e^{2\pi ni(1-x)} - iu_2(x)e^{aix}e^{2\pi nix},$$

откуда следует (1.34). □

Исследуем свойства системы $y_n(x)$.

Лемма 1.13. *Функции* $y_n(x)$ $(n \in \mathbb{Z})$ *образуют ортогональную систему, полную в* $L_2[0,1]$.

Доказательство. Обозначим через L оператор:

$$Ly = y'(1-x) + q(x)y(x), \quad y(0) = 0,$$

собственными функциями которого являются $y_n(x)$. Так как $L = L^*$, то $y_n(x)$ ортогональны.

Докажем полноту. Пусть $f \in L_2[0,1]$ и f ортогональна y_n, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$(y_n, f) = \int_0^1 \left[\overline{f(1-x)} - i\overline{f(x)}\right] p(x) e^{2\pi n i x}\, dx = 0.$$

Отсюда имеем

$$f(1-x) + if(x) \equiv 0, \qquad x \in [0,1].$$

Значит, $f(x) = 0$ почти всюду. □

Замечание 1.3. Из леммы 1.13 следует, что собственные значения (1.33) однократны.

Лемма 1.14. *Пусть* $y_n^0(x) = y_n(x)/\|y_n\|$ *(*$\|\cdot\|$ *— норма в* $L_2[0,1]$*). Тогда* $y_n^0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, y_n(x)$.

Доказательство. Имеем

$$\|y_n\|^2 = \int_0^1 y_n(x)\overline{y_n(x)}\, dx = \int_0^1 p(1-x)\overline{p(1-x)}\, dx + \int_0^1 p(x)\overline{p(x)}\, dx +$$
$$+ i\int_0^1 p(1-x)\overline{p(x)} e^{-4\pi n i x}\, dx - i\int_0^1 p(x)\overline{p(1-x)} e^{4\pi n i x}\, dx =$$
$$= 2\int_0^1 |p(x)|^2\, dx = 2. \qquad \square$$

Лемма 1.15. *Если* $f(x) \in D_L$ *(*D_L *— область определения оператора* L *в пространстве* $L_2[0,1]$*), то ее ряд Фурье по системе* $\{y_n(x)\}$ *сходится абсолютно и равномерно на* $[0,1]$.

Доказательство. Ряд Фурье функции $f(x)$ по системе $\{y_n(x)\}$ есть

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} (f, y_n) y_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (f, y_n^0) y_n^0(x).$$

Пусть вещественное число μ_0 не является собственным значением оператора L. Положим $(L - \mu_0 E)f = g$ (E — единичный оператор). Тогда $f = R_{\mu_0} g$, где R_{μ_0} есть резольвента оператора L. Так как $y_n^0 = (\lambda_n - \mu_0) R_{\mu_0} y_n^0$, то

$$(f, y_n^0) = (R_{\mu_0} g, y_n^0) = (g, R_{\mu_0} y_n^0) = \frac{1}{\overline{\lambda_n} - \mu_0}\,(g, y_n^0).$$

Поэтому

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(f, y_n^0)y_n^0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\overline{\lambda_n} - \mu_0}(g, y_n^0)y_n^0(x).$$

Так как $\dfrac{1}{\lambda_n - \mu_0} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, а $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|(g, y_n^0)|^2 < \infty$, то утверждение леммы следует из неравенства Коши – Буняковского и равномерной ограниченности $y_n^0(x)$. □

Из леммы 1.15 следует, что ряд $\sum|c_n|$, где $c_n = (f, y_n^0)$, сходится. Поэтому функция

$$f_0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi nix}$$

непрерывная на $(-\infty, \infty)$ и периодическая с периодом 1.

Лемма 1.16. *Если $f(x)$ из леммы 1.15 есть $\varphi(x)$, то при $x \in [0, 1]$ имеет место формула*

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\left[i\varphi(x) + \varphi(1 - x)\right]. \tag{1.35}$$

Доказательство. Согласно лемме 1.15 при $x \in [0, 1]$ имеем

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}(\varphi, y_n)y_n(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n y_n(x) =$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\left[p(1 - x)e^{2\pi ni(1-x)} - ip(x)e^{2\pi nix}\right],$$

откуда

$$\varphi(x) = p(1 - x)f_0(1 - x) - ip(x)f_0(x). \tag{1.36}$$

Отсюда

$$\varphi(1 - x) = p(x)f_0(x) - ip(1 - x)f_0(1 - x). \tag{1.37}$$

Из (1.36) и (1.37) получаем

$$i\varphi(x) + \varphi(1 - x) = 2p(x)f_0(x). \tag{1.38}$$

Из (1.38) следует (1.35). □

Замечание 1.4. Функция $f_0(x)$ в силу своей периодичности однозначно определяется на всей оси заданием ее лишь на отрезке $[0, 1]$. Таким образом, $f_0(x)$ определяется не рядом, а по формуле (1.35).

Лемма 1.17. *Если $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, то $f_0(x)$ непрерывно дифференцируема на всей вещественной оси.*

Доказательство. Из (1.35) следует, что $f_0(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,1]$ (в концевых точках имеются в виду односторонние производные). В силу периодичности $f_0(x)$ непрерывно дифференцируема всюду на $(-\infty, +\infty)$, кроме точек $x = n$ (n — целое). Покажем, что $f_0'(n-0) = f_0'(n+0)$. В силу периодичности $f_0(x)$ достаточно установить, что

$$f_0'(0+0) = f_0'(0-0). \tag{1.39}$$

Дифференцируя (1.38), получим

$$i\varphi'(x) - \varphi'(1-x) = 2p'(x)f_0(x) + 2p(x)f_0'(x). \tag{1.40}$$

Из (1.40), условия леммы и соотношений $f_0(0) = f_0(1)$, $f_0'(1-0) = f_0'(0-0)$ имеем

$$\begin{gathered} 2p'(0)f_0(0) + 2p(0)f_0'(0+0) = i\varphi'(0), \\ 2p'(1)f_0(0) + 2p(1)f_0'(0-0) = -\varphi'(0), \end{gathered}$$

откуда

$$2[p'(0) + ip'(1)]f_0(0) + 2[p(0)f_0'(0+0) + ip(1)f_0'(0-0)] = 0. \tag{1.41}$$

Так как $p(0) = 1$, $p(1) = \exp\left(-i\int_0^1 q(t)\,dt\right)e^{ia} = e^{\pi i/2} = i$, $u_2'(x) = -iq(x)u_2(x)$, $p'(0) = -iq(0) + ia$, $p'(1) = q(1) - a$, а также $q(0) = q(1)$, то $p'(0) + ip'(1) = 0$, и из (1.41) следует (1.39). □

Замечание 1.5. Условие $\varphi'(1) = 0$ является естественным в силу дифференциального уравнения.

Согласно методу Фурье решение $u(x,t)$ задачи (1.24)–(1.25) представляется формальным рядом:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\varphi, y_n^0)y_n^0(x)e^{\lambda_n\beta it} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n y_n(x)e^{\lambda_n\beta it}, \tag{1.42}$$

где $c_n = \frac{1}{2}(\varphi, y_n)$.

Лемма 1.18. *Ряд (1.42) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$, и для его суммы имеет место формула*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n y_n(x)e^{\lambda_n\beta it} = e^{a\beta it}\bigl[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)\bigr], \tag{1.43}$$

где $p(x) = u_2(x)e^{iax}$.

Доказательство. Сходимость ряда (1.42) следует из леммы 1.15. Далее имеем

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \big[p(1-x)e^{2\pi n i(1-x)} - ip(x)e^{2\pi n i x}\big] e^{\lambda_n \beta i t} =$$

$$= e^{a\beta i t}\Big[p(1-x)\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi n i(1-x+\beta t)} - ip(x)\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi n i(x+\beta t)}\Big],$$

откуда следует (1.43). □

Теорема 1.4. *Если* $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, $q(x) \in C[0,1]$, $q(x) = q(1-x)$, *то классическое решение задачи* (1.24)–(1.25) *существует и имеет вид*

$$u(x,t) = e^{a\beta i t}\big[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)\big], \tag{1.44}$$

где $p(x) = \exp\left(aix - i\int\limits_0^x q(t)\,dt\right)$, $f_0(x)$ — *периодическая с периодом* 1 *функция, причем на отрезке* $[0,1]$

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\big[i\varphi(x) + \varphi(1-x)\big]. \tag{1.45}$$

Доказательство. Как установлено ранее, если функцию $f_0(x)$, заданную с помощью (1.45), продолжить периодически с периодом 1 на всю ось, то получим непрерывно дифференцируемую всюду функцию. Проверим теперь, что $u(x,t)$, заданная формулой (1.44), является решением смешанной задачи (1.24)–(1.25).

Сначала покажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.24). Имеем

$$\frac{1}{\beta i}u_t(x,t) = ae^{a\beta i t}\big[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)\big] +$$

$$+\frac{1}{i}e^{a\beta i t}\big[p(1-x)f_0'(1-x+\beta t) - ip(x)f_0'(x+\beta t)\big],$$

$$u_\xi(\xi,t)\Big|_{\xi=1-x} = e^{a\beta i t}\big[-p'(1-\xi)f_0(1-\xi+\beta t) - p(1-\xi)f_0'(1-\xi+\beta t) -$$

$$-ip'(\xi)f_0(\xi+\beta t) - ip(\xi)f_0'(\xi+\beta t)\big]\Big|_{\xi=1-x} =$$

$$= e^{a\beta i t}\big[-p'(x)f_0(x+\beta t) - p(x)f_0'(x+\beta t) -$$

$$-ip'(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(1-x)f_0'(1-x+\beta t)\big].$$

Подставляя данные соотношения в (1.24), получим

$$e^{a\beta it}\Big\{f_0(1-x+\beta t)\big[ap(1-x)+ip'(1-x)-p(1-x)q(x)\big]+\\ +f_0(x+\beta t)\big[-aip(x)+p'(x)+ip(x)q(x)\big]+\\ +f_0'(1-x+\beta t)\big[\frac{1}{i}p(1-x)+ip(1-x)\big]+f_0'(x+\beta t)\big[-p(x)+p(x)\big]\Big\}.$$

Последние две квадратные скобки равны нулю. Подставляя явные выражения для $p(x)$ и $p'(x)$, получим, что первая и вторая квадратные скобки также равны нулю, т. е. $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.24).

Далее при $x\in[0,1]$ имеем

$$u(x,0)=p(1-x)f_0(1-x)-ip(x)f_0(x)=\varphi(x).$$

Наконец,

$$u(0,t)=e^{a\beta it}\big[p(1)f_0(\beta t)-ip(0)f_0(\beta t)\big]=0,$$

т. е. начальное и краевое условия выполнены. □

1.2.2 Общий случай

1.2.2.1 Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций задачи (1.28)–(1.29).

Приведем задачу (1.28)–(1.29) к задаче в пространстве вектор-функций размерности 2. Положим $z(x)=(z_1(x),z_2(x))^T$, где $z_1(x)=y(x)$, $z_2(x)=y(1-x)$. Тогда из уравнения в (1.28) получим векторно-матричное уравнение

$$Bz'(x)+P(x)z(x)=\lambda z(x), \tag{1.46}$$

где $B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $P(x)=\begin{pmatrix}q(x)&0\\0&q(1-x)\end{pmatrix}$ и $z_1(x)=z_2(1-x)$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.19. *Число* λ *является собственным значением, а* $y(x)$ *— собственной функцией краевой задачи* (1.28)–(1.29) *тогда и только тогда, когда* $z(x)=(z_1(x),z_2(x))^T=(y(x),y(1-x))^T$ *является ненулевым решением системы* (1.46) *с краевыми условиями*

$$z_1(0)=0,\quad z_1(1/2)=z_2(1/2). \tag{1.47}$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 1.20. *Пусть* $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $H(x) = \operatorname{diag}(h_1(x), h_2(x))$, *где* $h_k(x) = e^{-\int\limits_0^x p_k(t)\,dt}$, $k = 1, 2$, $p_1(x) = -p_2(x) = -\frac{i}{2}[q(x) + q(1-x)]$. *Замена* $z(x) = \Gamma H(x) u(x)$, *где* $u = (u_1, u_2)^T$, *приводит систему* (1.46) *к виду*

$$u'(x) + Q(x)u(x) = \lambda D u(x), \tag{1.48}$$

где $D = \operatorname{diag}(-i, i)$, $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$, $q_1(x) = \frac{1}{2}[q(1-x) - q(x)] \times$ $\times\, e^{i\left[\int\limits_0^x q(t)\,dt + \int\limits_{1-x}^1 q(t)\,dt\right]}$, $q_2(x) = \frac{1}{2}[q(1-x) - q(x)] e^{-i\left[\int\limits_0^x q(t)\,dt + \int\limits_{1-x}^1 q(t)\,dt\right]}$.

Замечание 1.6. Легко проверить, что функции $h_k(x)$ удовлетворяют соотношению

$$h_1(x) = e^{i\int\limits_0^1 q(t)\,dt} h_2(1-x). \tag{1.49}$$

Для удобства обозначим в (1.48) $\mu = -\lambda i$. Тогда $\lambda D = \mu \widetilde{D}$, где $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(1, -1)$ и уравнение (1.48) примет вид

$$u'(x) + Q(x)u(x) = \mu \widetilde{D} u(x). \tag{1.50}$$

Уравнение (1.50) представляет собой двумерное уравнение Дирака. Для общего решения этого уравнения известна следующая асимптотическая формула

$$u(x, \mu) = U(x, \mu) e^{\mu \widetilde{D} x} c, \tag{1.51}$$

где $U(x, \mu) = E + O\left(\mu^{-1}\right)$, E — единичная матрица 2×2, $c = (c_1, c_2)^T$ — произвольный вектор, матрица-функция $O\left(\mu^{-1}\right)$ регулярна[1] в полуплоскостях $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$ и $\operatorname{Re}\mu \leqslant 0$ при $|\mu|$ достаточно больших.

Дадим асимптотическое уточнение формулы (1.51).

Теорема 1.5. *Если* $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$, $q_j(x) \in C^1[0, 1]$, *то для общего решения уравнения* (1.50) *имеем следующую асимптотическую формулу:*

$$u(x, \mu) = U(x, \mu) e^{\mu \widetilde{D} x} c,$$

где $U(x, \mu) = (u_{ij}(x, \mu))_{i,j=1,2}$, $c = (c_1, c_2)^T$ — *произвольный вектор и*

$$u_{11}(x, \mu) = 1 + \frac{1}{2\mu} \int\limits_0^x q_1(t) q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

[1] Под регулярностью понимается аналитичность функции внутри области и непрерывность на границе.

$$u_{12}(x,\mu) = \frac{1}{2\mu}\left(q_2(x) - q_2(1)e^{-2\mu(1-x)} + \int\limits_x^1 e^{2\mu(x-t)}q_2'(t)\,dt\right) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$u_{21}(x,\mu) = -\frac{1}{2\mu}\left(q_1(x) - q_1(0)e^{-2\mu x} - \int\limits_0^x e^{-2\mu(x-t)}q_1'(t)\,dt\right) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$u_{22}(x,\mu) = 1 - \frac{1}{2\mu}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right).$$

Доказательство. Представляя уравнение (1.50) в покомпонентном виде

$$u_1'(x) - \mu u_1(x) = -q_2(x)u_2(x), \tag{1.52}$$
$$u_2'(x) + \mu u_2(x) = -q_1(x)u_1(x), \tag{1.53}$$

интегрируя (1.52) и (1.53) и выполняя замену $w_1(x) = u_1(x)e^{-\mu x}$, $w_2(x) = u_2(x)e^{\mu x}$, получим

$$w_1(x) = c_1 - \int\limits_0^x e^{-2\mu t}q_2(t)w_2(t)\,dt, \tag{1.54}$$

$$w_2(x) = c_2 - \int\limits_0^x e^{2\mu t}q_1(t)w_1(t)\,dt. \tag{1.55}$$

Выполним подстановку (1.55) в (1.54):

$$w_1(x) = c_1 - c_2\int\limits_0^x e^{-2\mu t}q_2(t)\,dt + \int\limits_0^x e^{2\mu t}q_1(t)w_1(t)\,dt\int\limits_t^x e^{-2\mu\tau}q_2(\tau)\,d\tau. \tag{1.56}$$

Полагая $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ и учитывая, что

$$\int\limits_t^x e^{-2\mu\tau}q_2(\tau)\,d\tau = O\left(\mu^{-1}e^{-2\mu t}\right), \tag{1.57}$$

получим $w_1(x) = 1 + O\left(\mu^{-1}\right)$. Поэтому из (1.55) $w_2(x) = O\left(\mu^{-1}e^{2\mu x}\right)$.

Далее положим $c_2 = 1$ и подставим (1.54) в (1.55). Тогда

$$w_2(x) = 1 - \varphi(x,\mu)\left[c_1 - \int\limits_0^x e^{-2\mu t}q_2(t)w_2(t)\,dt\right] +$$

$$+\int\limits_0^x e^{-2\mu t}q_2(t)\varphi(t,\mu)\,dt, \tag{1.58}$$

где $\varphi(x,\mu)=\int\limits_0^x e^{2\mu t}q_1(t)\,dt=O\left(\mu^{-1}e^{2\mu x}\right)$.

Полагая $c_1=\int\limits_0^1 e^{-2\mu t}q_2(t)w_2(t)\,dt$, получим из (1.58), что $w_2(x)=$ $=1+O\left(\mu^{-1}\right)$, а $w_1(x)=O\left(\mu^{-1}e^{-2\mu x}\right)$. Отсюда, в частности, легко следует (1.51).

Теперь дадим уточнение $w_1(x)$ и $w_2(x)$. В случае $c_1=1$, $c_2=0$ обозначим $w_1(x)=w_{11}(x)$, $w_2(x)=w_{21}(x)$. Имеем

$$\int\limits_t^x e^{-2\mu\tau}q_2(\tau)\,d\tau=-\frac{1}{2\mu}\,e^{-2\mu\tau}q_2(\tau)\Big|_t^x+\frac{1}{2\mu}\int\limits_t^x e^{-2\mu\tau}q_2'(\tau)\,d\tau.$$

Тогда, подставляя найденную для $w_1(x)=w_{11}(x)$ асимптотику в (1.56) при $c_1=1$, $c_2=0$, получим

$$w_{11}(x)=1-\int\limits_0^x e^{2\mu t}q_1(t)\,dt\int\limits_t^x e^{-2\mu\tau}q_2(\tau)\,d\tau+O\left(\mu^{-2}\right). \tag{1.59}$$

Так как

$$\int\limits_0^x e^{2\mu t}q_1(t)\,dt\int\limits_t^x e^{-2\mu\tau}q_2(\tau)\,d\tau=$$

$$=\int\limits_0^x e^{2\mu t}q_1(t)\Big[-\frac{1}{2\mu}q_2(x)e^{-2\mu x}+\frac{1}{2\mu}q_2(t)e^{-2\mu t}\Big]\,dt+$$

$$+\int\limits_0^x e^{2\mu t}q_1(t)\,dt\,\frac{1}{2\mu}\int\limits_t^x e^{-2\mu\tau}q_2'(\tau)\,d\tau=$$

$$=O\left(\mu^{-2}\right)+\frac{1}{2\mu}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt+\frac{1}{2\mu}\int\limits_0^x e^{-2\mu\tau}q_2'(\tau)\,d\tau\int\limits_0^\tau e^{2\mu t}q_1(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\mu}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

то из (1.59) получим

$$w_{11}(x) = 1 - \frac{1}{2\mu}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \tag{1.60}$$

Подставим (1.60) в (1.54) при $c_2 = 0$. Тогда

$$w_2(x) = w_{21}(x) = -\int\limits_0^x e^{2\mu t} q_1(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}e^{2\mu x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\mu}\left[q_1(x)e^{2\mu x} - q_1(0) - \int\limits_0^x e^{2\mu t} q_1'(t)\,dt\right] + O\left(\frac{1}{\mu^2}e^{2\mu x}\right).$$

Аналогичные формулы получаются для $w_1(x) = w_{12}(x)$, $w_2(x) = w_{22}(x)$ при втором выборе c_1 и c_2. Образуем матрицу $W(x,\mu) = (w_{ij}(x))_1^2$. Тогда матрица $U(x,\mu) = e^{\mu D x}W(x,\mu)e^{-\mu D x}$ — искомая. $\square$

Аналогичный результат может быть получен при $\operatorname{Re}\mu \leqslant 0$.

Всюду далее для определенности будем считать, что $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$, соответственно $\operatorname{Re}\lambda i \leqslant 0$ (противоположный случай рассматривается аналогично).

По лемме 1.11 имеем

$$\begin{aligned} z_1(x) = {} & c_1 e^{\mu x}\big[h_1(x)u_{11}(x) - ih_2(x)u_{21}(x)\big] + \\ & + c_2 e^{-\mu x}\big[h_1(x)u_{12}(x) - ih_2(x)u_{22}(x)\big], \\ z_2(x) = {} & c_1 e^{\mu x}\big[-ih_1(x)u_{11}(x) + h_2(x)u_{21}(x)\big] + \\ & + c_2 e^{-\mu x}\big[-ih_1(x)u_{12}(x) + h_2(x)u_{22}(x)\big] \end{aligned} \tag{1.61}$$

(здесь для удобства аргументы λ и μ у соответствующих функций опущены). Из краевых условий (1.47) получим следующее уравнение для собственных значений:

$$\begin{vmatrix} u_{11}(0) - iu_{21}(0) & u_{12}(0) - iu_{22}(0) \\ e^{\frac{\mu}{2}}\left[h_2\left(\frac12\right)u_{21}\left(\frac12\right) - h_1\left(\frac12\right)u_{11}\left(\frac12\right)\right] & e^{-\frac{\mu}{2}}\left[h_2\left(\frac12\right)u_{21}\left(\frac12\right) - h_1\left(\frac12\right)u_{11}\left(\frac12\right)\right] \end{vmatrix} = 0. \tag{1.62}$$

Для получения простейших асимптотических оценок собственных значений используем сначала u_{ij} из (1.51). Обозначая $[1] = 1 + O\left(\mu^{-1}\right)$, имеем

$$u_{kk}(x,\mu) = [1], \quad u_{kj}(x,\mu) = O\left(\mu^{-1}\right), \quad k,j = 1,2, \quad k \neq j. \tag{1.63}$$

Поэтому уравнение (1.62) примет вид

$$\begin{vmatrix} [1] & -i[1] + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \\ e^{\frac{\mu}{2}}\left[-h_1\left(\frac{1}{2}\right)[1] + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right] & e^{-\frac{\mu}{2}}\left[h_2\left(\frac{1}{2}\right)[1] + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right] \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $\dfrac{h_2(1/2)}{h_1(1/2)} = e^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}$, получим

$$e^{\mu} = -ie^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}[1],$$

откуда

$$\mu_n = -\left(\frac{\pi}{2} + \int\limits_0^1 q(t)\,dt\right) i - 2\pi n i + O(\mu^{-1})$$

и $O\left(\mu^{-1}\right) = O\left(1/n\right)$. Вычисляя теперь $\lambda_n = i\mu_n$, придем к следующему утверждению.

Теорема 1.6. *Для собственных значений λ_n задачи* (1.46)–(1.47) *имеют место асимптотические формулы:*

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots, \tag{1.64}$$

где $\lambda_n^0 = 2\pi n + a$, $a = \pi/2 + \int\limits_0^1 q(t)\,dt$, n_0 — некоторое достаточно большое натуральное число. При этом собственные значения, достаточно большие по модулю, простые.

Замечание 1.7. Следует иметь в виду, что существование собственных значений проводится традиционно с применением теоремы Руше. Для этого необходимо учесть, что асимптотические формулы (1.51) имеют место при $\operatorname{Re}\mu \geqslant -h$, $\operatorname{Re}\mu \leqslant h$, где $h > 0$ — любое.

Для того чтобы получить более тонкие оценки для собственных значений, воспользуемся в уравнении (1.62) значениями $u_{ij}(1/2)$ и $u_{ij}(0)$, вычисленными по уточненным формулам из теоремы 1.5 при $\mu = \mu_n$.

Лемма 1.21. *Для любого целого числа k, любой функции $s(x) \in C[0,1]$ и $p = \pm 1$ имеем*

$$e^{k\mu_n} = \alpha + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1.65}$$

$$\int_0^{1/2} e^{2p\mu_n t} s(t)\,dt = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1.66}$$

$$\int_0^{1} e^{2p\mu_n t} s(t)\,dt = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{1.67}$$

Лемма 1.22. *Для значений функций $u_{ij}(x,\mu_n)$ из теоремы 1.5 справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$u_{11}(0) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad u_{12}(0) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_{22}(0) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad u_{21}(0) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_{11}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad u_{12}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_{22}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad u_{21}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(аргумент μ_n для удобства опускаем).

Теорема 1.7. *Для собственных значений λ_n задачи* (1.46)–(1.47) *имеют место уточненные асимптотические формулы:*

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots, \tag{1.68}$$

где λ_n^0 определяется так же, как и в теореме 1.6.

Доказательство. Используя в уравнении (1.62) оценки из леммы 1.22, получим

$$e^{-\mu/2} h_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= ie^{\mu/2} h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Следовательно,

$$e^{\mu} = -ie^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = e^{-\pi/2i - 2\pi ni - i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}\, e^{\frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Поэтому для μ_n имеем следующие уточненные асимптотические формулы:

$$\mu_n = -\lambda_n^0 i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots,$$

откуда следует (1.68). □

Перейдем к исследованию асимптотики собственных функций задачи (1.28)–(1.29). В силу леммы 1.19 собственная функция, отвечающая значению λ_n, есть $y_n(x) = z_1(x, \lambda_n)$, где $z_1(x, \lambda_n)$ определена соотношением из (1.61), следовательно,

$$y_n(x) = c_1\big[h_1(x)e^{-\lambda_n ix}u_{11}(x, \mu_n) - ih_2(x)e^{-\lambda_n ix}u_{21}(x, \mu_n)\big] + \\ + c_2\big[h_1(x)e^{\lambda_n ix}u_{12}(x, \mu_n) - ih_2(x)e^{\lambda_n ix}u_{22}(x, \mu_n)\big]. \tag{1.69}$$

Теорема 1.8. *Для собственных функций оператора L имеют место асимптотические формулы:*

$$y_n(x) = y_n^0(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots,$$

где $y_n^0(x) = e^{\lambda_n^0 i(1-x)}h_2(1-x) - ie^{\lambda_n^0 ix}h_2(x)$, функция $h_2(x)$ та же, что и в лемме 1.20.

Доказательство. Воспользуемся оценками (1.63) и полученной из них асимптотикой (1.64) для собственных значений.

Из (1.69) и краевого условия $y_n(0) = 0$ имеем

$$c_1[u_{11}(0) - iu_{21}(0)] + c_2[u_{12}(0) - iu_{22}(0)] = c_1[1] - ic_2[1] = 0,$$

откуда $c_1 = c_2 i[1]$. Положим $c_2 = 1$, тогда $c_1 = i[1]$. Так как $e^{-\lambda_n ix} = e^{-\lambda_n^0 ix}[1]$, $e^{\lambda_n ix} = e^{\lambda_n^0 ix}[1]$, то из (1.69) и (1.63) получим

$$y_n(x) = i[1]e^{-\lambda_n ix}\left[h_1(x)[1] - ih_2(x)O\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \\ + e^{\lambda_n ix}\left[h_1(x)O\left(\frac{1}{n}\right) - ih_2(x)[1]\right] = \\ = ie^{-\lambda_n^0 ix}[1]\left[h_1(x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] + e^{\lambda_n^0 ix}[1]\left[-ih_2(x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \\ = i\left(e^{-\lambda_n^0 ix}h_1(x) - e^{\lambda_n^0 ix}h_2(x)\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Положим $y_n^0(x) = i\left(e^{-\lambda_n^0 ix}h_1(x) - e^{\lambda_n^0 ix}h_2(x)\right)$. Из (1.49) следует, что

$$h_1(x) = e^{-\pi/2i}e^{\pi/2i + i\int_0^1 q(t)\,dt}h_2(1-x) = -ie^{ai}h_2(1-x) = -ie^{\lambda_n^0 i}h_2(1-x).$$

Тогда

$$y_n^0(x) = e^{-\lambda_n^0 ix}e^{\lambda_n^0 i}h_2(1-x) - ie^{\lambda_n^0 ix}h_2(x) = e^{\lambda_n^0 i(1-x)}h_2(1-x) - ie^{\lambda_n^0 ix}h_2(x),$$

откуда следует утверждение теоремы. □

Чтобы получить более тонкие оценки для собственных функций, используем уточненные оценки (1.68) для собственных значений и асимптотики из теоремы 1.5.

Теорема 1.9. *Для собственных функций оператора L имеют место уточненные асимптотические формулы:*

$$y_n(x) = y_n^0(x) + \Omega_{1n}(x) + \Omega_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где $y_n^0(x)$ определяется так же как в теореме 1.8, и

$$\Omega_{1n}(x) = \frac{1}{n}\big[b(x)e^{-\lambda_n^0 ix} + b(x)e^{\lambda_n^0 ix} + b(x)\alpha_n e^{-\lambda_n^0 ix} + b(x)\alpha_n e^{\lambda_n^0 ix}\big],$$

$$\Omega_{2n}(x) = \frac{1}{n}\big[b(x)\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_1'\left(\frac{x+t}{2}\right)dt + b(x)\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_1'\left(\frac{x-t}{2}\right)dt +$$

$$+ b(x)\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_2'\left(\frac{x+t}{2}\right)dt + b(x)\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_2'\left(\frac{x-t}{2}\right)dt\big]$$

(через $b(x)$ обозначаем различные непрерывные функции из некоторого конечного набора).

Доказательство. Из (1.69) и краевого условия $y_n(0) = 0$, используя оценки из леммы 1.22, имеем

$$c_1\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + c_2\left[-i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 0,$$

откуда

$$c_1 = ic_2\left[1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]. \tag{1.70}$$

Так как

$$e^{\pm\lambda_n ix} = e^{\pm\lambda_n^0 ix}\left(1 + \frac{\alpha}{n}x + \frac{\alpha_n}{n}x\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

то по теореме 1.5 получим

$$e^{-\lambda_n ix}u_{11}(x,\mu_n) = e^{-\lambda_n^0 ix}\left(1 + \frac{\alpha}{n}x + \frac{\alpha_n}{n}x\right)\left(1 + \frac{b(x)}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= e^{-\lambda_n^0 ix}\left(1 + \frac{b(x)}{n} + \frac{\alpha_n}{n}b(x)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{1.71}$$

$$e^{\lambda_n ix}u_{22}(x,\mu) = e^{\lambda_n^0 ix}\left(1+\frac{\alpha}{n}\,x+\frac{\alpha_n}{n}\,x\right)\left(1+\frac{b(x)}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= e^{\lambda_n^0 ix}\left(1+\frac{b(x)}{n}+\frac{\alpha_n}{n}\,b(x)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad (1.72)$$

$$e^{-\lambda_n ix}u_{21}(x,\mu) = e^{-\lambda_n^0 ix}\Big(1+\frac{\alpha}{n}\,x+\frac{\alpha_n}{n}\,x\Big)\Big(\frac{b(x)}{n}+\frac{\alpha}{n}\,e^{2\lambda_n^0 ix}+$$

$$+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{2\lambda_n^0 i(x-t)}q_1'(t)\,dt\Big)+O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{b(x)}{n}\,e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\,e^{\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 i(x-2t)}q_1'(t)\,dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$e^{\lambda_n ix}u_{12}(x,\mu) = e^{\lambda_n^0 ix}\Big(1+\frac{\alpha}{n}\,x+\frac{\alpha_n}{n}\,x\Big)\Big(\frac{b(x)}{n}+\frac{\alpha}{n}\,e^{2\lambda_n^0 i(1-x)}+$$

$$+\frac{\alpha}{n}\int\limits_x^1 e^{-2\lambda_n^0 i(x-t)}q_2'(t)\,dt\Big)+O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{b(x)}{n}\,e^{\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\,e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\int\limits_x^1 e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)}q_2'(t)\,dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Далее,

$$\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 i(x-2t)}q_1'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^x e^{\lambda_n^0 i\tau}q_1'\Big(\frac{x-\tau}{2}\Big)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_1'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_1'\Big(\frac{x-t}{2}\Big)\,dt,$$

$$\int\limits_x^1 e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)}q_2'(t)\,dt = e^{-\lambda_n^0 ix}\int\limits_0^1 e^{2\lambda_n^0 it}q_2'(t)\,dt-\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)}q_2'(t)\,dt =$$

$$= \alpha_n e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_2'\Big(\frac{x-t}{2}\Big)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_2'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\,dt.$$

Поэтому

$$e^{-\lambda_n ix}u_{21}(x,\mu) = \frac{b(x)}{n}\,e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\,e^{\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_1'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\,dt+$$

$$+\frac{\alpha}{n}\int_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_1'\Big(\frac{x-t}{2}\Big)\,dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{1.73}$$

$$e^{\lambda_n ix}u_{12}(x,\mu) = \frac{b(x)}{n}\,e^{\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n}\,e^{-\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha_n}{n}\,e^{-\lambda_n^0 ix} +$$

$$+\frac{\alpha}{n}\int_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_2'\Big(\frac{x-t}{2}\Big)\,dt + \frac{\alpha}{n}\int_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_2'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\,dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{1.74}$$

Полагая $c_2 = 1$ и подставляя (1.70)–(1.74) в (1.69), получим утверждение теоремы. □

1.2.2.2 Теорема о разложении по собственным функциям. Обозначим через S_δ область, полученную из λ-плоскости удалением всех чисел вида $\pi n + a$ ($n \in \mathbb{Z}$, $a = \pi/2 + \int_0^1 q(t)\,dt$) вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ.

Так как $R_\lambda = O(1)$ в S_δ, то стандартно получается следующая теорема.

Теорема 1.10. *Если $f(x) \in C^1[0,1]$, $f(0) = 0$, то*

$$\lim_{r\to\infty} \|f(x) - S_r(f,x)\|_\infty = 0,$$

где $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по собственным и присоединенным функциям оператора L.

Так как L — самосопряженный оператор, то по теореме 1.16 получим

Лемма 1.23. *Система $\{y_n(x)\}$ является ортогональной и полной в $L_2[0,1]$, и $\|y_n\|^2 = 2 + O(1/n)$, где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$.*

1.2.2.3 Преобразование формального решения. Идеи А. Н. Крылова – В. А. Чернятина мы реализуем следующим образом. Ряд Σ, представляющий формальное решение рассматриваемой задачи по методу Фурье, мы берем в виде

$$\Sigma = S_0 + (\Sigma - \Sigma_0), \tag{1.75}$$

где Σ_0 — ряд, являющийся решением некоторой специальной эталонной задачи, а S_0 — сумма этого ряда, которая явно вычисляется. В свою очередь, $\Sigma - \Sigma_0$ представляется в виде суммы двух рядов, один из которых — конечная сумма, а второй — ряд, составленный из разностей соответствующих членов рядов Σ и Σ_0, причем этот ряд и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием, сходятся равномерно. Это последнее обстоятельство, а также то, что S_0 есть решение эталонной задачи, позволяет весьма просто убедиться, что $\Sigma = S_0 + (\Sigma - \Sigma_0)$ есть классическое решение исходной задачи при минимальных требованиях гладкости начальных данных.

В качестве эталонной задачи мы берем задачу (1.24)–(1.25), где $q(x)$ заменяется на $q_0(x) = \frac{1}{2}(q(x) + q(1-x))$. Функция $q_0(x)$ является симметричной: $q_0(x) = q_0(1-x)$. Соответствующий оператор обозначим L_0:

$$L_0 y(x) = y'(1-x) + q_0(x)y(x), \quad y(0) = 0.$$

Собственными значениями и собственными функциями этого оператора являются λ_n^0 и $y_n^0(x)$, представленные в теоремах 1.6–1.8.

1.2.2.4 Решение задачи (1.24)–(1.25). Согласно методу Фурье формальное решение задачи (1.24)–(1.25) имеет вид

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi(x))e^{\lambda\beta i t}d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} \frac{1}{\|y_n\|^2}\left(\varphi, y_n\right) y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t}, \tag{1.76}$$

где r таково, что при $|\lambda_n| > r$ все собственные значения простые.

Представим ряд (1.76) в виде (1.75), где

$$\Sigma_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\varphi, y_n^0\right)}{\|y_n^0\|^2}\, y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t}.$$

Для суммы S_0 ряда Σ_0 справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.24. *Если $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, то имеет место формула*

$$S_0 = e^{a\beta i t}[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)], \tag{1.77}$$

где $f_0(x)$ — непрерывно дифференцируемая на всей оси функция, периодическая с периодом 1, и $f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\left[i\varphi(x) + \varphi(1-x)\right]$ при $x \in [0,1]$; $p(x) = e^{iax - i\int_0^x q(t)\,dt}$, $a = \pi/2 + \int\limits_0^1 q(t)\,dt$.

Далее положим

$$\Sigma - \Sigma_0 = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right)\varphi(x)\right)e^{\lambda\beta it}d\lambda, \tag{1.78}$$

$$u_2(x,t) = \sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(\varphi, y_n)}{\|y_n\|^2}\,y_n(x)e^{\lambda_n\beta it} - \frac{\left(\varphi, y_n^0\right)}{\|y_n^0\|^2}\,y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}\right], \tag{1.79}$$

R_λ^0 — резольвента оператора L_0.

Лемма 1.25. *Имеет место формула*

$$u_2(x,t) = \sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(g, y_n)\,y_n(x)e^{\lambda_n\beta it}}{\|y_n\|^2\lambda_n} - \frac{\left(g, y_n^0\right)y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2\lambda_n^0}\right] +$$

$$+\sum_{|\lambda_n|>r}\frac{\left(g_2, y_n^0\right)y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2\left(\lambda_n^0\right)^2}, \tag{1.80}$$

где $g = L\varphi$, $g_1 = g - L_0\varphi$, $g_2 = L_0 g_1$ (здесь g_1 из области определения оператора L_0, так как $q(x)\in C^1[0,1]$).

Доказательство. Из тождества Гильберта имеем

$$R_\lambda\varphi = -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda g}{\lambda},$$

$$R_\lambda^0\varphi = -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0(L_0\varphi)}{\lambda} = -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0(g-g_1)}{\lambda} =$$

$$= -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0 g}{\lambda} - \frac{R_\lambda^0 g_1}{\lambda} = -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0 g}{\lambda} + \frac{g_1}{\lambda^2} - \frac{R_\lambda^0 g_2}{\lambda^2}.$$

Тогда

$$R_\lambda\varphi - R_\lambda^0\varphi = \frac{(R_\lambda - R_\lambda^0)g}{\lambda} - \frac{g_1}{\lambda^2} + \frac{R_\lambda^0 g_2}{\lambda^2}$$

и (1.80) следует из представления слагаемых в (1.79) через интегралы от резольвенты по контурам достаточно малого радиуса с центрами в λ_n.□

Лемма 1.26. *Если $g(x)\in C[0,1]$, то $(g,\Omega_{jn}) = \alpha_n/n$ $(j=1,2)$.*

Доказательство. Утверждение леммы для $j=1$ очевидно. Далее,

$$\int_0^1 b(x)\,dx\int_0^x e^{\lambda_n^0 it}\overline{q_1'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)}\,dt = \int_0^1 e^{\lambda_n^0 it}\,dt\int_t^1 b(x)\overline{q_1'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)}\,dx = \alpha_n,$$

аналогично рассмотрев остальные слагаемые в Ω_{2n}, получим, что и $(g,\Omega_{2n}) = \alpha_n/n$. □

Лемма 1.27. *Ряды в* (1.80) *и ряды, полученные из них почленным дифференцированием по x и t, равномерно сходятся по $x \in [0,1]$ и $t \in [-A, A]$, где $A > 0$ любое.*

Доказательство. Согласно неравенствам Коши – Буняковского и Бесселя ряды $\sum \dfrac{|(g, y_n)|}{\|y_n\| \cdot |\lambda_n|}$ и $\sum \dfrac{|(g, y_n^0)|}{\|y_n^0\| \cdot |\lambda_n^0|}$ сходятся, откуда следует равномерная сходимость рядов в (1.80). Рассмотрим ряд

$$\sum_{|\lambda_n|>r} \left[\frac{(g, y_n)\, y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t}}{\|y_n\|^2 \lambda_n} - \frac{(g, y_n^0)\, y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t}}{\|y_n^0\|^2 \lambda_n^0} \right]. \tag{1.81}$$

Используя асимптотические формулы для λ_n, $y_n(x)$, имеем

$$\frac{(g, y_n)\, y_n'(x) e^{\lambda_n \beta i t}}{\|y_n\|^2 \lambda_n} = \frac{(g, y_n)\, (y_n^0(x))' e^{\lambda_n^0 \beta i t}}{\|y_n^0\|^2 \lambda_n^0} + (g, y_n)\, O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому ряд, полученный почленным дифференцированием по x ряда (1.81), имеет следующее представление:

$$\sum_{|\lambda_n|>r} \left[\frac{\left(g, y_n - y_n^0\right) (y_n^0(x))' e^{\lambda_n^0 \beta i t}}{\|y_n^0\|^2 \lambda_n^0} + (g, y_n)\, O\left(\frac{1}{n}\right) \right]. \tag{1.82}$$

В силу леммы 1.26 $\left(g, y_n - y_n^0\right) = \alpha_n / n$, где $\sum \alpha_n^2 < \infty$. Отсюда следует равномерная сходимость первого ряда в (1.82). Для второго слагаемого в (1.82) она очевидна. Аналогично доказывается равномерная сходимость ряда, полученного из (1.81) почленным дифференцированием по t. Для второго слагаемого в (1.80) утверждение леммы очевидно. $\square$

Теорема 1.11. *Если $q(x)$ вещественна, $q(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, то классическое решение задачи* (1.24)–(1.25) *существует и имеет вид*

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + S_0(x,t),$$

где $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ определены по формулам (1.78), (1.79), *а $S_0(x,t)$ — по формуле* (1.77).

Доказательство. В силу лемм 1.24 и 1.27 $u(x,t)$ дифференцируема по обеим переменным. Легко проверяется, что $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (1.25). Докажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет (1.24). Обозначим составляющие в (1.78), (1.79) через u_{kj}, т. е. $u_1 = u_{11} - u_{12}$, $u_2 = u_{21} - u_{22}$. Тогда очевидно, что

$$u_{11} + u_{21} = u, \qquad u_{12} + u_{22} = \Sigma_0. \tag{1.83}$$

Обозначим через Du следующее дифференциальное выражение:

$$Du = \frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=1-x}.$$

Тогда имеем

$$Du = Du_1 + Du_2 + DS_0 = Du_{11} - Du_{12} + Du_2 + DS_0. \tag{1.84}$$

Однако $DS_0 = q_0(x)S_0$, $Du_1 = Du_{11} - Du_{12} = q(x)u_{11} - q_0(x)u_{12}$,

$$Du_2 = \sum_{|\lambda_n|>r}\left[q(x)\frac{(\varphi, y_n)}{\|y_n\|^2}\,y_n(x)e^{\lambda_n\beta it} - q_0(x)\frac{(\varphi, y_n^0)}{\|y_n^0\|^2}\,y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}\right].$$

Поэтому из (1.83) и (1.84) получаем $Du_1 + Du_2 = q(x)u - q_0(x)\Sigma_0$, а значит,

$$Du = q(x)u - q_0(x)\Sigma_0 + q_0(x)S_0 = q(x)u.$$

Теорема доказана. □

1.3 Другие результаты

Приведем без доказательств другие результаты о смешанных задачах с инволюцией.

1.3.1 Смешанная задача в периодическом случае

Рассматривается смешанная задача следующего вида [36]:

$$\frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=1-x} + q(x)u(x,t), \tag{1.85}$$

$$x \in [0,1], t \in (-\infty, +\infty),$$

$$u(0,t) = u(1,t), \qquad u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,1], \tag{1.86}$$

где β — вещественное число, $\beta \neq 0$, $q(x) \in C^1[0,1]$ и вещественна. Естественные минимальные условия на $\varphi(x)$: $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi^j(0) = \varphi^j(1)$ $(j = 0,1)$.

Введем операторы L и L_0:

$$Ly = y'(1-x) + q(x)y(x), \qquad y(0) = y(1),$$
$$L_0y = y'(1-x) + q_0(x)y(x), \qquad y(0) = y(1),$$

$q_0((x) = \frac{1}{2}\left[q(x) + q(1-x)\right]$.

Лемма 1.28. *Собственные значения оператора L_0 простые и равны $\lambda_n^0 = 2\pi n + a$, $n \in \mathbb{Z}$, $a = \int\limits_0^1 q(t)\,dt$, а соответствующие собственные функции*

$$y_n^0(x) = u(1-x)e^{\lambda_n^0 i(1-x)} - iu(x)e^{\lambda_n^0 ix},$$

где $u(x) = \exp\bigl(-i\int\limits_0^x q_0(\tau)\,d\tau\bigr)$.

Решение эталонной задачи (1.85)–(1.86), когда $q(x)$ есть $q_0(x)$, полученное по методу Фурье, имеет вид

$$u_0(x,t) = e^{a\beta it}\bigl[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)\bigr], \tag{1.87}$$

где $p(x) = \exp\left\{i\bigl(ax - \int\limits_0^x q_0(t)\,dt\bigr)\right\}$, $f_0(x) \in C^1(-\infty,+\infty)$ периодична с периодом 1, причем

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\bigl[i\varphi(x) + \varphi(1-x)\bigr], x \in [0,1].$$

Лемма 1.29. *Собственные значения λ_n оператора L, достаточно большие по модулю, простые и имеют асимптотику:*

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \qquad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots$$

Теорема 1.12. *Классическое решение задачи* (1.85)–(1.86) *существует и имеет вид*

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right)\varphi\right)(x)e^{\lambda\beta it}d\lambda,$$

R_λ, R_λ^0 — резольвенты операторов L и L_0,

$$\Sigma_2 = \sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(\varphi, y_n)}{\|y_n\|^2}\,y_n(x)e^{\lambda_n\beta it} - \frac{\left(\varphi, y_n^0\right)}{2}\,y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}\right].$$

Ряд Σ_2 *и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по* x *и* t, *равномерно сходятся при* $x \in [0,1]$ *и* $t \in [-A, A]$ *при любом* $A > 0$.

Схожий результат получен в [37] для задачи

$$\frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1-x} + q_1(x)u(x,t) + q_2(x)u(1-x,t), \qquad (1.88)$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,1], \qquad t \in (-\infty, +\infty), \quad (1.89)$$

при условии, что $q_j(x) \in C^1[0,1]$, $q_1(x)$ вещественна, $q_2(x) = \overline{q_2(1-x)}$, $q_2(0) = 0$, $\beta \neq 0$ — вещественное число. Естественные минимальные требования те же, что и в параграфе 1.2.

1.3.2 Смешанная задача на геометрическом графе

Рассматривается смешанная задача с инволюцией на простейшем графе из двух ребер: одно ребро образует цикл-петлю, а второе примыкает к нему. Смешанная задача в таком случае берется в виде [39]

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}, \qquad (1.90)$$

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(\xi,t)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1-x} + q(x)u_2(x,t), \qquad (1.91)$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t), \qquad (1.92)$$

$$u_1(x,t) = \varphi_1(x), \qquad u_2(x,t) = \varphi_2(x). \qquad (1.93)$$

Вид графа позволяет задать простейшее уравнение (без инволюции) (1.90) на петле, а вот на другом ребре надо обязательно брать уравнение с инволюцией, так как иначе соответствующая спектральная задача нерегулярна по Биркгофу [40], поэтому решение смешанной задачи того же вида, что и выше, получить нельзя. Предполагаем, что $q(x) \in C^1[0,1]$ и вещественна,

$$\begin{gathered} \varphi_k(x) \in C^1[0,1], \\ \varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_2(0), \\ \varphi_2'(1) + q(0)\varphi_2(0) + i\varphi_1'(0) = 0 \end{gathered} \qquad (1.94)$$

(последнее условие в силу системы (1.90)–(1.91)).

По методу Фурье соответствующая (1.90)–(1.92) спектральная задача имеет вид

$$Ly = \lambda y, \quad y = (y_1, y_2)^T$$

(T — знак транспонирования), где L — следующий оператор:

$$Ly = (-iy_1'(x), y_2'(1-x) + q(x)y_2(x))^T, \quad y_1(0) = y_1(1) = y_2(0).$$

Лемма 1.30. *Если* $a = \pi/2 + \int\limits_0^1 q(t)\,dt$ *не кратно* 2π, *то собственные значения оператора* L, *достаточно большие по модулю, простые и образуют две серии:* $\lambda_n' = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda_n'' = \mu_n + \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\alpha_n}{n}$ ($n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots$), *где* $\mu_n = 2\pi n + a$. *При этом все собственные значения оператора* L *вещественные.*

Симметричным случаем задачи (1.90)–(1.93) мы будем называть задачу, когда вместо $q(x)$ берется $q_0(x) = \frac{1}{2}[q(x) + q(1-x)]$, и оператор L в этом случае называем L_0. Оператор L^* (L_0^*) имеет вид $L^*z = Lz$ ($L_0^*z = L_0z$) с краевыми условиями $z_2(0) = z_1(1) - z_1(0) + iz_2(1) = 0$, одними и теми же и для L^*, и для L_0^*. Собственные значения L (L_0) и L^* (L_0^*) совпадают, и для L_0 они те же, что и в лемме 1.30, но теперь надо брать $\alpha = \alpha_n = 0$.

Лемма 1.30 позволяет изучать асимптотику собственных функций операторов L и L^* как и в параграфе 1.3 (не приводим ее из-за громоздкости).

В симметричном случае ряды формального решения по методу Фурье наподобие уравнения струны точно вычисляются, тем самым, получаем решение $u_0(x,t)$ смешанной задачи в этом случае. Соответствующую формулу здесь не приводим из-за громоздкости.

Формальное решение задачи (1.90)–(1.93) по методу Фурье имеет вид

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda\varphi(x))e^{\lambda it}d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} \frac{(\varphi, z(x,\lambda_n))}{\gamma(\lambda_n)})y(x,\lambda_n)e^{\lambda_n it}, \tag{1.95}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$, R_λ — резольвента оператора L, $y(x,\lambda_n)$ ($z(x,\lambda_n)$) — собственные вектор-функции оператора L (L^*) для собственного значения λ_n, $\gamma(\lambda_n) = (y(x,\lambda_n), z(x,\lambda_n))$. Представим (1.95) в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} \left(\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right)\varphi\right)(x)e^{\lambda it}d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} A_n(x,t), \tag{1.96}$$

где

$$A_n(x,t) = \frac{(L\varphi, z(x,\lambda_n))}{\lambda_n\gamma(\lambda_n)}\,y(x,\lambda_n)e^{\lambda_n it} - \frac{\left(L_0\varphi, z^0(x,\lambda_n^0)\right)}{\lambda_n^0\gamma}\,y^0(x,\lambda_n^0)e^{\lambda_n^0 it},$$

λ_n^0 — собственное значение L_0, $y^0(x,\lambda_n^0)$ $(z^0(x,\lambda_n^0))$ — собственные функции L_0 (L_0^*), $\gamma = (y^0(x,\lambda_n^0), z^0(x,\lambda_n^0))$ и γ не зависит от n.

Формула (1.96) так же, как и в параграфе 1.3, приводит к следующему результату.

Теорема 1.13. *Если* $q(x) \in C^1[0,1]$ *и вещественна,* $q(0) = q(1)$, $a = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_0^1 q(t)\,dt$ *не кратно* 2π, $\varphi_k(x)$ *удовлетворяют* (1.94), *то классическое решение задачи* (1.91)–(1.93) *существует и имеет вид* (1.96). *Ряды в* (1.96) *и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием по* x *и* t, *сходятся абсолютно и равномерно по* $x \in [0,1]$ *и* $t \in [-A,A]$ *при любом* $A > 0$.

2 РЕЗОЛЬВЕНТНЫЙ ПОДХОД В МЕТОДЕ ФУРЬЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{2.1}$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u'_t(x,0) = 0 \tag{2.2}$$

и граничных условиях следующих трех видов:

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad u(0,t) = u(1,t) = 0; \\ &\text{б)} \quad u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0, \\ &\qquad u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0; \\ &\text{в)} \quad u'_x(0,t) + \beta u'_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0, \\ &\qquad \alpha u(0,t) + u(1,t) = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Считаем, что $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначна, α, β, α_i, β_i ($i = 1,2$) — комплексные числа. Условие $u'_t(x,0) = 0$ берется для простоты. Граничные условия а), б), в) охватывают все линейные двухточечные граничные условия (условие в), в которых β стоит перед $u'_x(0,t)$, α — перед $u(1,t)$, сводятся к в) заменой $x = 1 - \xi$ и поэтому идёт не в счет.

2.1 Резольвентный подход в методе Фурье

Рассмотрим задачу (2.1)–(2.3).

Это наиболее простой случай для исследования (но лишь в смысле выкладок, а не трудностей принципиального характера). Считаем, что $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначная,

$$\varphi(x) \in C^2[0,1], \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0. \tag{2.4}$$

Условия (2.4) на $\varphi(x)$ являются минимальными для существования классического решения. Условие $u'_t(x,0) = 0$ берется для простоты.

2.1.1 Преобразование формального решения

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

Теорема 2.1. *Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые, и для них имеют место асимптотические формулы:*

$$\lambda_n = \rho_n^2, \qquad \rho_n = \pi n + O(1/n) \qquad (n = n_0, n_0 + 1, \ldots).$$

Это хорошо известный факт (см., например, [40, с. 74–75]).

Замечание 2.1. В [40] приведена более точная асимптотическая формула для собственных значений, но она нам не потребуется. Нам даже достаточно, если заменить $O(1/n)$ на $o(1)$.

Обозначим $\gamma_n = \{\rho|\ |\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geqslant n_0$ и n_0 таково, что при всех $n \geqslant n_0$ внутрь и на границу γ_n попадает лишь по одному из ρ_n. Пусть $\tilde{\gamma}_n$ образ γ_n в λ-плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geqslant 0$). Обозначим через R_λ резольвенту оператора L, т.е. $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E — единичный оператор, λ — спектральный параметр. Тогда по методу Фурье формальное решение задачи (2.1)–(2.3) представимо в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda + \sum_{n\geqslant n_0}(\varphi,\psi_n)\varphi_n(x)\cos\rho_n t, \qquad (2.5)$$

где $r > 0$ фиксировано и взято таким, что все собственные значения, меньшие по модулю r, имеют номера, меньше n_0, на контуре $|\lambda| = r$ нет собственных значений, $\varphi_n(x)$ — собственная функция оператора L для собственного значения λ_n, система $\{\psi_n(x)\}$ биортогональна системе $\{\varphi_n(x)\}$. Мы представим (2.5) в виде (см. [42, 43])

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda - \sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda$$

или, в более краткой записи,

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\right)(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t\,d\lambda. \qquad (2.6)$$

Таким образом, получаем, что в формальном решении $u(x,t)$ не фигурируют ни собственные значения, ни собственные функции, и для нас теперь исходным формальным рядом будет ряд (2.6). Проведем дальнейшее преобразование ряда (2.6).

Лемма 2.1. *Пусть μ_0 не является собственным значением оператора L и таково, что $|\mu_0| > r$ и μ_0 не находится внутри и на границе $\tilde{\gamma}_n$ ни при каком $n \geqslant n_0$. Тогда*

$$\int\limits_{\tilde{\gamma}_n} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t \, d\lambda = \int\limits_{\tilde{\gamma}_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g) \cos \rho t \, d\lambda, \tag{2.7}$$

где $g = (L - \mu_0 E)\varphi$.

Доказательство. Так как $\varphi(x) \in D_L$ (D_L — область определения оператора L), то имеем $g(x) = (L - \lambda E)\varphi + (\lambda - \mu_0)\varphi$. Отсюда $R_\lambda g = \varphi + (\lambda - \mu_0) R_\lambda \varphi$, и поэтому имеет место (2.7). □

Теорема 2.2. *Для формального решения $u(x, t)$ имеет место формула*

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t), \tag{2.8}$$

где

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geqslant n_0} \int\limits_{\tilde{\gamma}_n} \right) \frac{R_\lambda^0 g}{\lambda - \mu_0} \cos \rho t \, d\lambda,$$

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda - \mu_0} [R_\lambda g - R_\lambda^0 g] \cos \rho t \, d\lambda,$$

$$u_2(x, t) = -\sum_{n \geqslant n_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{\gamma}_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} [R_\lambda g - R_\lambda^0 g] \cos \rho t \, d\lambda,$$

$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L_0, который есть оператор L при $q(x) \equiv 0$ (считаем, что вышеприведенные требования на μ_0 выполняются и для оператора L_0).

Доказательство. По лемме 2.1 для формального решения имеет место формула

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geqslant n_0} \int\limits_{\tilde{\gamma}_n} \right) \frac{R_\lambda g}{\lambda - \mu_0} \cos \rho t \, d\lambda, \tag{2.9}$$

и утверждение теоремы становится очевидным после прибавления и вычитания в правой части выражения (2.9), взятого в случае $q(x) \equiv 0$. □

2.1.2 Исследование $u_0(x,t)$

Для $u_0(x,t)$ получим точную формулу.

Лемма 2.2. *Имеет место соотношение*

$$R^0_\lambda g = \varphi_1 + (\lambda - \mu_0) R^0_\lambda \varphi_1,$$

где $\varphi_1 = R^0_\lambda g$.

Доказательство. Имеем

$$R^0_\lambda g = R^0_\lambda (L_0 - \mu_0 E)(L_0 - \mu_0 E)^{-1} g = R^0_\lambda (L_0 - \mu_0 E)\varphi_1 = \\ = R^0_\lambda (L_0 - \lambda E + (\lambda - \mu_0)E)\varphi_1 = \varphi_1 + (\lambda - \mu_0) R^0_\lambda \varphi_1. \qquad \square$$

По лемме 2.2 из выражения для $u_0(x,t)$ получаем

Лемма 2.3. *Имеет место формула*

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R^0_\lambda \varphi_1) \cos \rho t d\lambda - \sum_{n \geqslant n_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{\gamma}_n} (R^0_\lambda \varphi_1) \cos \rho t d\lambda. \quad (2.10)$$

Далее нам потребуется точная формула для резольвенты R_λ. Обозначим через $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$ решения уравнения

$$y'' - q(x) y + \rho^2 y = 0$$

с начальными условиями

$$z_1(0,\rho) = 1, \qquad z_1'(0,\rho) = 0,$$
$$z_2(0,\rho) = 0, \qquad z_2'(0,\rho) = 1.$$

Тогда $z_j(x,\rho)$ целые по ρ и даже по λ, где $\lambda = \rho^2$.

Теорема 2.3. *Для резольвенты* R_λ *имеет место формула*

$$R_\lambda f = -z_2(x,\rho)(f, z_1) + v(x,\rho)(f, z_2) + (M_\rho f)(x), \qquad (2.11)$$

где

$$v(x,\rho) = \frac{z_2(x,\rho) z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)}, \quad (f,g) = \int\limits_0^1 f(x) g(x) dx,$$

$$(M_\rho f)(x) = \int\limits_0^x M(x,t,\rho) f(t)\, dt, \quad M(x,t,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \\ z_1(t,\rho) & z_2(t,\rho) \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Если $y = R_\lambda f$, то y удовлетворяет уравнению

$$y'' - q(x)y + \rho^2 y = f(x) \tag{2.12}$$

и условиям $y(0) = y(1) = 0$. Общее решение неоднородного уравнения (2.12) имеет вид

$$y(x) = c_1 z_1(x,\rho) + c_2 z_2(x,\rho) + (M_\rho f)(x), \tag{2.13}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Подчиняя (2.13) краевым условиям, получим

$$R_\lambda f = -\frac{z_2(x,\rho)}{z_2(1,\rho)} \int_0^1 M(1,t,\rho) f(t)dt + \int_0^x M(x,t,\rho) f(t)dt,$$

откуда следует (2.11). □

Замечание 2.2. Для R_λ^0 имеет место формула

$$R_\lambda^0 f = -z_2^0(x,\rho)(f, z_1^0) + v^0(x,\rho)(f, z_2^0) + (M_\rho^0 f)(x), \tag{2.14}$$

где $z_1^0(x,\rho)$, $z_2^0(x,\rho)$, $v^0(x,\rho)$, M_ρ^0 те же, что и $z_1(x,\rho)$, $z_2(x,\rho)$, $v(x,\rho)$, M_ρ, но взятые теперь для оператора L_0. Таким образом, $z_1^0(x,\rho) = \cos\rho x$, $z_2^0(x,\rho) = \dfrac{\sin\rho x}{\rho}$, $v^0(x,\rho) = \dfrac{\sin\rho x\cos\rho}{\sin\rho}$.

Лемма 2.4. *Имеет место формула*

$$u_0(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_1(\xi), \sin\pi n\xi)\sin\pi nx\cos\pi nt. \tag{2.15}$$

Доказательство. Так как первое и третье слагаемые в (2.14) есть целые по λ, то формула (2.10) переходит в силу (2.14) в

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} \frac{\sin\rho x\cos\rho\cos\rho t}{\rho\sin\rho}(\varphi_1(\xi), \sin\rho\xi)\,d\lambda -$$

$$-\sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde\gamma_n} \frac{\sin\rho x\cos\rho\cos\rho t}{\rho\sin\rho}(\varphi_1(\xi), \sin\rho\xi)\,d\lambda.$$

Отсюда, так как собственные значения λ_n^0 оператора L_0 есть $\lambda_n^0 = \pi^2 n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, по теореме вычетов следует утверждение леммы. □

Следствие 2.1. *Имеет место формула*

$$u_0(x,t) = \Sigma_+ + \Sigma_-,$$

где

$$\Sigma_\pm = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_1(\xi), \sin \pi n\xi) \sin \pi n(x \pm t).$$

Теорема 2.4. *Имеет место формула*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{\varphi}_1(x+t) + \tilde{\varphi}_1(x-t) \right), \tag{2.16}$$

где $\tilde{\varphi}_1(x) \in C^2(-\infty, \infty)$ *нечетна,* $\tilde{\varphi}_1(x) = \tilde{\varphi}_1(2+x)$, *и* $\tilde{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x)$ *при* $x \in [0,1]$.

Доказательство. Так как $\varphi_1(x) \in D_{L_0}$, то ряды $\Sigma_\pm$ сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$. Их суммы есть $\tilde{\varphi}_1(x \pm t)/2$, тем самым, из $\tilde{\varphi}_1(x) = \tilde{\varphi}_1(2+x)$ и нечетности $\tilde{\varphi}_1(x)$ следует, что $\tilde{\varphi}_1(x)$ дважды непрерывно дифференцируема всюду, кроме точек $x_k = k$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\tilde{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x)$ при $x \in [0,1]$. Так как $\varphi_1(x)$ удовлетворяет условиям (2.4), то $\tilde{\varphi}_1(x)$ будет дважды непрерывно дифференцируема и в точках x_k. □

Замечание 2.3. Формула (2.16) представляет собой формулу для решения смешанной задачи для уравнения струны:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \varphi_1(x), \qquad u_t(x,0) = 0.$$

2.1.3 Исследование ряда $u_2(x,t)$

По теореме 2.3 с учетом того, что первое и третье слагаемые в (2.14) есть целые по λ, получим для $u_2(x,t)$ следующее представление:

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=n_0}^{\infty} \int\limits_{\tilde{\gamma}_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} \left[v(x,\rho)(g, z_2) - v^0(x,\rho)(g, z_2^0) \right] \cos \rho t \, d\lambda.$$

Нам потребуются следующие факты о $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$ (см. [40, с. 58–62]).

Теорема 2.5. *В полосе $|\operatorname{Im}\rho| \leqslant h$ ($h > 0$ и любое) имеют место асимптотические формулы:*

$$z_1(x,\rho) = \cos\rho x + O(1/\rho), \qquad z_1'(x,\rho) = -\rho\sin\rho x + O(1),$$
$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + O(1/\rho^2), \qquad z_2'(x,\rho) = \cos\rho x + O(1/\rho),$$

где оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in [0,1]$.

Теорема 2.6. *Для $z_2(x,\rho)$ имеет место формула*

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int\limits_0^x K(x,t)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,dt, \tag{2.17}$$

где $K(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t и $K(x,0) \equiv 0$ ($K(x,t)$ не зависит от ρ).

Замечание 2.4. Формула (2.17) — это хорошо известная формула оператора преобразования (см. [38, с. 17, 23]).

Лемма 2.5. *При $\rho \in \gamma_n$ имеют место асимптотические формулы:*

$$v_x^{(j)}(x,\rho) = v_x^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-1}) \qquad (j = 0,1,2). \tag{2.18}$$

Доказательство. По теореме 2.5 в силу уравнения (2.12)

$$z_2''(x,\rho) = z_2^{0(2)}(x,\rho) + O(1).$$

По теореме 2.5 также имеем

$$z_2(1,\rho) = z_2^0(1,\rho) + O(1/\rho^2),$$
$$\frac{c_1}{|\rho|} \leqslant \left|z_2^0(1,\rho)\right| \leqslant \frac{c_2}{|\rho|},$$

где c_1, $c_2 > 0$ и не зависят от ρ.

Отсюда утверждение (2.18) становится очевидным. □

Из леммы 2.5 следует

Лемма 2.6. *При $\rho \in \gamma_n$ имеют место соотношения*

$$v^{(j)}(x,\rho)(g,z_2) - v^{0(j)}(x,\rho)(g,z_2^0) =$$
$$= v^{0(j)}(x,\rho)(g,z_2 - z_2^0) + O\left(\rho^{j-1}(g,z_2)\right), \quad j = 0,1,2.$$

Лемма 2.7. *При $\rho \in \gamma_n$ имеют место формулы*

$$(g, z_2) = \rho^{-1}\left[(g_1(\xi)\cos\mu\xi, \sin\pi n\xi) + (g_1(\xi)\sin\mu\xi, \cos\pi n\xi)\right], \qquad (2.19)$$

$$(g, z_2 - z_2^0) = \rho^{-2}\left[(g_2(\xi)\cos\mu\xi, \cos\pi n\xi) - (g_2(\xi)\sin\mu\xi, \sin\pi n\xi)\right], \qquad (2.20)$$

где $\rho = \pi n + \mu$, $\mu \in \gamma_0$,

$$g_1(\xi) = g(\xi) + \int_\xi^1 K(\tau, \xi) g(\tau)\, d\tau,$$

$$g_2(\xi) = -g(\xi)K(\xi,\xi) + \int_\xi^1 K'_\xi(\tau, \xi) g(\tau)\, d\tau.$$

Доказательство. Соотношение (2.19) очевидно следует из (2.17). Докажем (2.20). Так как $K(x, 0) \equiv 0$, то

$$\int_0^\xi K(\xi, \tau) z_2^0(\tau, \rho)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\rho}\int_0^\xi K(\xi,\tau)\sin\rho\tau\, d\tau = -\frac{K(\xi,\xi)}{\rho^2}\cos\rho\xi + \frac{1}{\rho^2}\int_0^\xi K'_\tau(\xi,\tau)\cos\rho\tau\, d\tau,$$

и утверждение (2.20) легко следует из (2.17). □

Лемма 2.8. *Обозначим через $\psi(x)$ функции $\cos x$ или $\sin x$. Пусть $f(x) \in L_\infty[0,1]$ и $f(x,\mu) = f(x)\psi(\mu x)$, $\mu \in \gamma_0$, $\beta_n(\mu) = (f(x,\mu), \psi(\pi n x))$. Тогда верна оценка*

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}|\beta_n(\mu)| \leqslant c\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}}, \qquad (2.21)$$

где $c > 0$ и не зависит от n_1, n_2 и $\mu \in \gamma_0$.

Доказательство. По неравенству Коши – Буняковского имеем

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}|\beta_n(\mu)| \leqslant \sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}|\beta_n(\mu)|^2}. \qquad (2.22)$$

По неравенству Бесселя получим

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |\beta_n(\mu)|^2 \leqslant \|f(x,\mu)\|^2, \tag{2.23}$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$. Но $\|f(x,\mu)\| \leqslant c\|f\|$, где c не зависит от $\mu \in \gamma_0$. Тем самым, из (2.22) и (2.23) получим (2.21). $\square$

Положим

$$a_n(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{2\rho\cos\rho t}{\lambda-\mu_0}\left[v(x,\rho)(g,z_2) - v^0(x,\rho)(g,z_2^0)\right] d\rho.$$

Лемма 2.9. *Ряды* $\sum a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)$, $\sum a^{(j)}_{n,t^j}(x,t)$ $(j=0,1,2)$ *сходятся абсолютно и равномерно по* $x\in[0,1]$ *и* $t\in[-T,T]$, *где* $T>0$ — *любое фиксированное число.*

Доказательство. Имеем

$$J(x,\rho) = v(x,\rho)(g,z_2) - v^0(x,\rho)(g,z_2^0) =$$
$$= J(x,\rho) - v^0(x,\rho)(g,z_2) + v^0(x,\rho)(g,z_2) = J_1(x,\rho) + J_2(x,\rho),$$

где $J_1(x,\rho) = \left[v(x,\rho) - v^0(x,\rho)\right](g,z_2)$, $J_2(x,\rho) = v^0(x,\rho)(g,z_2-z_2^0)$.

По леммам 2.5 и 2.7 имеем при $\rho=\pi n+\mu$, $\mu\in\gamma_0$,

$$J^{(j)}_{1,x^j}(x,\rho) = O\left(n^{i-2}[|\beta_{1n}(\mu)| + |\beta_{1n}(\mu)|\,]\right) \quad (j=0,1,2), \tag{2.24}$$

где $\beta_{1n}(\mu) = (g_1(x,\mu),\psi(\pi n x))$ (см. лемму 2.8). То, что в (2.24) дважды повторяется $\beta_{1n}(\mu)$, означает, что участвуют два разных выражения $\beta_{1n}(\mu)$, точнее, первое слагаемое $\beta_{1n}(\mu)$ есть $(g_1(\xi)\cos\mu\xi, \sin\pi n\xi)$, а второе — $(g_1(\xi)\sin\mu\xi,\cos\pi n\xi)$. Аналогично имеют место оценки:

$$J^{(j)}_{2,x^j}(x,\rho) = O\left(n^{i-2}[|\beta_{2n}(\mu)| + |\beta_{2n}(\mu)|\,]\right) \quad (j=0,1,2),$$

где $\beta_{2n}(\mu) = (g_2(x,\mu),\psi(\pi n x))$ (опять $\beta_{2n}(\mu)$ двух видов). Таким образом, получим оценку

$$J^{(j)}_{x^j}(x,\rho) = O\left(n^{j-2}\tilde\beta_n(\mu)\right), \tag{2.25}$$

где $\tilde\beta_n(\mu) = |\beta_{1n}(\mu)| + |\beta_{1n}(\mu)| + |\beta_{2n}(\mu)| + |\beta_{2n}(\mu)|$, и оценки $O(\cdot)$ в (2.25) равномерны по $x\in[0,1]$ и $\mu\in\gamma_0$. Отсюда для $J^{(j)}_{x^j}(x,t,\rho) = \dfrac{2\rho\cos\rho t}{\lambda-\mu_0}J^{(j)}_{x^j}(x,\rho)$ имеем оценки

$$J^{(j)}_{x^j}(x,t,\rho) = O\left(n^{j-3}\tilde\beta_n(\mu)\right), \qquad j=0,1,2. \tag{2.26}$$

Из (2.26) сразу следует абсолютная и равномерная сходимость $\sum a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)$ $(j=0,1)$ при $x\in[0,1]$ и $t\in[-T,T]$, поскольку

$$\left|\tilde\beta_n(\mu)\right| \leqslant c,$$

где c не зависит от n и μ. Если $j=2$, то по лемме 2.8 имеет место оценка

$$\sum a^{(2)}_{n,x^2}(x,t) = O\left(\int\limits_{\gamma_0}\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n}\tilde\beta_n(\mu)\,|d\mu|\right) =$$

$$= O\left(\int\limits_{\gamma_0}\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}}\,|d\mu|\right) = O\left(\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}}\right),$$

равномерная по x, t и n_1, n_2. Отсюда вытекает абсолютная и равномерная сходимость и $\sum a^{(2)}_{n,x^2}(x,t)$. Аналогично устанавливается этот факт и для $\sum a^{(j)}_{n,t^j}(x,t)$ $(j=0,1,2)$. □

Так как $u_2(x,t)=\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n(x,t)$, то из леммы 2.9 получаем

Лемма 2.10. *Ряд $u_2(x,t)$ допускает почленное дифференцирование дважды по x и t при $x\in[0,1]$ и $t\in(-\infty,\infty)$.*

2.1.4 Классическое решение задачи (2.1)–(2.3)

Теорема 2.7. *Формальное решение* (2.5) *есть классическое решение задачи* (2.1)–(2.3) *при минимальных условиях* (2.4) *на $\varphi(x)$.*

Доказательство. Для формального решения (2.6) в силу формулы (2.9) и теоремы 2.3 имеем следующее представление:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{R_\lambda g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t\,d\lambda -$$

$$-\sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde\gamma_n}\frac{v(x,\rho)(g,z_2)}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t\,d\lambda. \tag{2.27}$$

Отсюда в силу оценок $v^{(j)}(x,\rho)=O(n^j)$ по леммам 2.7 и 2.8 получаем, что ряд (2.27) и получающиеся из него почленным дифференцированием один раз по x и t ряды сходятся абсолютно и равномерно (см. также доказательство леммы 2.9). Таким образом, процедура ускорения сходимости рядов не требуется. Поэтому $u(x,t)$ удовлетворяет начальным и граничным условиям. В силу теоремы 2.4 и леммы 2.10 $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема. Докажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.1). Обозначим через M оператор $M = \dfrac{\partial}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x^2}$. Тогда по теореме 2.4 $Mu_0(x,t) = 0$. Далее,

$$Mu_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda-\mu_0}M((R_\lambda g)\cos\rho t)\,d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}M\left(\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}M((R_\lambda\varphi)\cos\rho t)\,d\lambda =$$

$$= \frac{q(x)}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda.$$

Теперь имеем

$$Mu_2(x,t) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\tilde\gamma_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}M\left([v(x,\rho)(g,z_2) - v^0(x,\rho)(g,z_2^0)]\cos\rho t\right)\,d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\tilde\gamma_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}M\left(v(x,\rho)(g,z_2)\cos\rho t\right)\,d\lambda.$$

Однако

$$M(v(x,\rho)\cos\rho t) = -v''(x,\rho)\cos\rho t - \rho^2 v(x,\rho)\cos\rho t = -q(x)v(x,\rho)\cos\rho t.$$

Значит,

$$Mu_2(x,t) = \frac{q(x)}{2\pi i}\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\tilde\gamma_n}(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t\,d\lambda,$$

т. е. $Mu = -q(x)u(x,t)$. □

При вещественной $q(x)$ теорема 2.7 получена другим приемом В. А. Чернятиным [7] (см. также параграф 1.1).

2.2 Случай граничных условий, содержащих производные решений

В этом параграфе методом параграфа 2.1 исследуется смешанная задача для волнового уравнения с комплекснозначным потенциалом и краевыми условиями б), обобщающими случаи свободного закрепления обоих концов, т. е. будем изучать следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty,\infty), \tag{2.28}$$

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0, \tag{2.29}$$

$$u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 + u(1,t) = 0, \tag{2.30}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{2.31}$$

где $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ и $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначные, α_1, α_2, β_1, β_2 — комплексные числа. Условие $u'_t(x,0) = 0$ берется для простоты.

Важно, что в краевых условиях (2.29), (2.30), помимо $u'_x(0,t)$ и $u'_x(1,t)$, присутствуют произвольные линейные комбинации $u(0,t)$ и $u(1,t)$, что вызывает дополнительные трудности в исследовании этой задачи. Чтобы справиться с этими трудностями, при использовании приема А. Н. Крылова по усилению скорости сходимости рядов, подобных рядам Фурье, мы привлекаем для формирования эталонной смешанной задачи оператор L_0:

$$L_0 y = -y''(x), \quad y'(0) = y'(1) = 0.$$

Отметим, что оператор L_0 самосопряженный, его собственными значениями являются числа $\lambda_n^0 = n^2\pi^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а соответствующими нормированными собственными функциями — $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\cos n\pi x$.

В результате с помощью метода Фурье получаем классическое решение задачи (2.28)–(2.31) при минимальных требованиях на $\varphi(x)$: $\varphi(x) \in$ $\in C^2[0,1]$, комплекснозначная, причем

$$\varphi'(0) + \alpha_1\varphi(0) + \beta_1\varphi(1) = 0, \quad \varphi'(1) + \alpha_2\varphi(0) + \beta_2\varphi(1) = 0. \tag{2.32}$$

2.2.1 Преобразование формального решения

Метод Фурье в применении к (2.28)–(2.31) связан со спектральной задачей для оператора L:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y,$$
$$U_1(y) = y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0, \quad U_2(y) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0.$$

Теорема 2.8. *Собственные значения* $\lambda_n = \rho_n^2 \quad (\lambda = \rho^2,\ \operatorname{Re}\rho \geqslant 0)$ *оператора* L *при достаточно больших* n *простые и имеют асимптотику*

$$\rho_n = n\pi + \varepsilon_n,$$

где $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, $\varepsilon_n = O(1/n)$.

(Это известный факт, см., например, [40, с. 74].)

Замечание 2.5. В [40] содержится более точная асимптотическая формула для собственных значений, но она нам не потребуется.

Обозначим через γ_n окружности $\gamma_n = \{\rho \big| |\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, $n \geqslant n_0$, n_0 таково, что внутри γ_n находится только одно ρ_n. Пусть $\widetilde{\gamma}_n$ — образ γ_n в λ-плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geqslant 0$). Обозначим также через R_λ резольвенту оператора L, т. е. $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E — единичный оператор, λ — спектральный параметр. Формальное решение по методу Фурье представим в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}\right)(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t\, d\lambda, \tag{2.33}$$

где $r > 0$ фиксировано и контур $|\lambda| = r$ содержит внутри только те собственные значения, номера которых меньше n_0, причем на самом контуре собственных значений нет. Отметим, что теперь в формальном решении $u(x,t)$ не фигурируют ни собственные значения, ни собственные функции.

Выполним теперь преобразование ряда (2.33) с использованием эталонной задачи.

Лемма 2.11. *Пусть* μ_0 — *фиксированное число, не являющееся собственным значением оператора* L, $|\mu_0| > r$ *и* μ_0 *не находится внутри или на границе* $\widetilde{\gamma}_n$ *ни при каком* $n \geqslant n_0$. *Тогда*

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\, d\lambda = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda - \mu_0}(R_\lambda g)\cos\rho t\, d\lambda, \tag{2.34}$$

где $g = (L - \mu_0 E)\varphi$.

Доказательство. Функция $\varphi(x)$ принадлежит области определения оператора L. Поэтому

$$g(x) = (L - \lambda E)\varphi(x) + (\lambda - \mu_0)\varphi(x).$$

Таким образом, $R_\lambda g = \varphi(x) + (\lambda - \mu_0)R_\lambda\varphi$, и отсюда следует (2.34). □

Наше преобразование формального решения с учетом эталонной задачи дается следующей очевидной теоремой.

Теорема 2.9. *Формальное решение $u(x,t)$ представимо в виде*

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{2.35}$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda^0 g)\cos\rho t\,d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda g - R_\lambda^0 g]\cos\rho t\,d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda g - R_\lambda^0 g]\cos\rho t\,d\lambda,$$

$$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}.$$

Замечание 2.6. Предполагаем, что вышеприведенные требования на μ_0 выполняются и для оператора L_0.

В дальнейшем вместо (2.33) будем использовать представление (2.35).

2.2.2 Вспомогательные утверждения

Рассмотрим уравнение

$$y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0.$$

Пусть $z_1(x,\rho)$, $z_2(x,\rho)$ — решения этого уравнения с начальными условиями

$$z_1(0,\rho) = 1, \quad z_1'(0,\rho) = 0, \quad z_2(0,\rho) = 0, \quad z_2'(0,\rho) = 1.$$

При $q(x) = 0$ этими решениями являются

$$z_1^0(x,\rho) = \cos\rho x, \quad z_2^0(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho}.$$

Теорема 2.10. *Для* $R_\lambda f$ *имеет место формула*

$$R_\lambda f = v_1(x,\rho)(f,z_1) + v_2(x,\rho)(f,z_2) + M_\rho f, \tag{2.36}$$

где

$$M_\rho f = \int_0^x M(x,\xi,\rho) f(\xi)\,d\xi, \quad M(x,\xi,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \\ z_1(\xi,\rho) & z_2(\xi,\rho) \end{vmatrix},$$

$$v_j(x,\rho) = \frac{(-1)^j}{\Delta(\rho)} \bigl\{ \bigl[-\beta_1 z_{3-j}(1,\rho) U_2(z_2) + \bigl(z'_{3-j}(1,\rho) + {}$$
$${} + \beta_2 z_{3-j}(1,\rho) \bigr) U_1(z_2) \bigr] z_1(x,\rho) + \bigl[\beta_1 z_{3-j}(1,\rho) U_2(z_1) - {}$$
$${} - \bigl(z'_{3-j}(1,\rho) + \beta_2 z_{3-j}(1,\rho) \bigr) U_1(z_1) \bigr] z_2(x,\rho) \bigr\}, \quad j = 1,2,$$

$$\Delta(\rho) = U_1(z_1)U_2(z_2) - U_1(z_2)U_2(z_1), \quad (f,z) = \int_0^1 f(\xi) z(\xi)\,d\xi.$$

Доказательство. Пусть $y(x) = R_\lambda f$. Тогда $y(x)$ есть решение краевой задачи

$$y'' - q(x)y + \rho^2 y = -f(x), \tag{2.37}$$
$$U_1(y) = 0, \quad U_2(y) = 0. \tag{2.38}$$

Общим решением уравнения (2.37) является

$$y(x,\rho) = c_1 z_1(x,\rho) + c_2(x,\rho) + M_\rho f.$$

Подставив эту формулу в (2.38), найдем c_1, c_2 и получим (2.36). $\square$

Теорема 2.11. *Для* R^0_λ *имеет место формула*

$$R^0_\lambda f = v^0_1(x,\rho)(f,z^0_1) + v^0_2(x,\rho)(f,z^0_2) + M^0_\rho f,$$

где

$$v^0_1(x,\rho) = -\frac{z^{0\prime}_2(1,\rho) z^0_1(x,\rho)}{\Delta_0(\rho)} = -\frac{\cos\rho\cos\rho x}{\rho\sin\rho},$$

$$v^0_2(x,\rho) = \frac{z^{0\prime}_1(1,\rho) z^0_1(x,\rho)}{\Delta_0(\rho)} = -\cos\rho x,$$

$$M^0_\rho f = \int_0^x \begin{vmatrix} z^0_1(x,\rho) & z^0_2(x,\rho) \\ z^0_1(\xi,\rho) & z^0_2(\xi,\rho) \end{vmatrix} f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\rho} \int_0^x \sin\rho(x-\xi) f(\xi)\,d\xi,$$

$$\Delta_0(\rho) = \rho\sin\rho.$$

Доказательство такое же, как и в теореме 2.10, причем $U_1^0(y) = y'(0)$, $U_2^0(y) = y'(1)$.

Теорема 2.12. *В полосе* $|\operatorname{Im}\rho| \leqslant h$ $(h > 0$ *и любое*) *имеют место асимптотические формулы:*

$$z_1(x,\rho) = \cos\rho x + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad z_1'(x,\rho) = -\rho\sin\rho x + O\left(1\right),$$
$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \quad z_2'(x,\rho) = \cos x + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

где оценки $O(\cdot)$ *равномерны по* $x \in [0,1]$.

(Эти оценки содержатся в [40, с. 59].)

Теорема 2.13. *Для* $z_j(x,\rho)$ $(j = 1,2)$ *имеют место формулы:*

$$z_1(x,\rho) = \cos\rho x + \int\limits_0^x K_1(x,\xi)\cos\rho\xi\,d\xi, \tag{2.39}$$

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int\limits_0^x K_2(x,\xi)\frac{\sin\rho\xi}{\rho}\,d\xi, \tag{2.40}$$

где $K_j(x,\xi)$ *непрерывно дифференцируемы по* x *и* ξ, *причем* $K_2(x,0) \equiv 0$.

Замечание 2.7. Формулы (2.39), (2.40) хорошо известны как формулы операторов преобразования (см. [38, с. 17, 33]).

Лемма 2.12. *При* $\rho = \gamma_n$ *имеют место асимптотические формулы:*

$$v_1^{(j)}(x,\rho) = v_1^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-2}),$$
$$v_2^{(j)}(x,\rho) = v_2^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-1}), \quad j = 0,1,2, \tag{2.41}$$

где $v^{(j)}(x,\rho) = \dfrac{d^j}{dx^j}v(x,\rho)$ *и оценки* $O(\ldots)$ *равномерны по* x.

Доказательство. На основании теоремы 2.12 имеем

$$\Delta(\rho) = (\alpha_1 + \beta_1 z_1(1))(z_2'(1) + \beta_2 z_2(1)) -$$
$$-(1 + \beta_1 z_2(1))(z_1'(1) + \alpha_1 + \beta_1 z_1(1)) = \Delta_0(\rho) + O(1)$$

(для кратности у $z_j(x,\rho)$ опускаем ρ). Поэтому при $\rho \in \gamma_n$

$$\frac{1}{\Delta(\rho)} = \frac{1}{\Delta_0(\rho)} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right). \tag{2.42}$$

Отметим также, что

$$U_1(z_1) = O(1), \quad U_1(z_2) = 1 + \left(\frac{1}{\rho}\right),$$
$$U_2(z_1) = \rho\cos\rho + O(1), \quad U_2(z_2) = \cos\rho + \left(\frac{1}{\rho}\right).$$

С учетом этих формул рассмотрим коэффициент при $z_1(x,\rho)$ в формуле для $v_1(x,\rho)$:

$$-\beta_1 z_2(1)U_2(z_2) + (z_2'(1) + \beta_2 z_2(1))U_1(z_2) =$$
$$= -\beta_1 O\left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\cos\rho + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)\left(\cos\rho + O\left(\frac{1}{\rho}\right) + \beta_2\frac{\sin\rho}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right) \times$$
$$\times\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = \cos\rho + O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Аналогично рассмотрим коэффициент при $z_2(x,\rho)$ в формуле для $v_1(x,\rho)$:

$$\beta_1 z_2(1)U_2(z_1) - (z_2'(1) + \beta_2 z_2(1))U_1(z_1) = O(1).$$

Таким образом, получаем

$$v_1(x,\rho) = -\frac{1}{\Delta(\rho)}\left\{\left(\cos\rho + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) z_1(x,\rho) + O(1)z_2(x,\rho)\right\}. \tag{2.43}$$

Из этой формулы на основании теоремы 2.12 и формулы (2.42) получаем, что

$$v_1(x,\rho) = v_1^0(x,\rho) + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right).$$

Дифференцируя (2.43) по x, получаем искомые формулы для $v_1^{(j)}(x,\rho)$, $j = 1, 2$. Аналогично доказываются формулы (2.41). □

Лемма 2.13. *Если* $g(x) \in C[0,1]$ *и* $\rho = 2n\pi + \mu$, *то*

$$(g, z_1) = (g_1(\xi)\cos\mu\xi, \cos 2n\pi\xi) - (g_1(\xi)\sin\mu\xi, \sin 2n\pi\xi), \tag{2.44}$$
$$(g, z_1 - z_1^0) = \frac{1}{2n\pi + \mu}(g_2(\xi)\cos\mu\xi, \sin 2n\pi\xi) -$$

$$-(g_2(\xi)\sin\mu\xi, \cos 2n\pi\xi), \tag{2.45}$$

где

$$g_1(\xi) = g(\xi) + \int_\xi^1 g(\tau)K_1(\tau,\xi)\,d\tau,$$

$$g_2(\xi) = g(\xi)K_1(\xi,\xi) - \int_\xi^1 g(\tau)K'_{1\xi}(\tau,\xi)\,d\tau.$$

Доказательство. На основании теоремы 2.13 имеем

$$(g, z_1) = (g(\xi), \cos\rho\xi) + \int_0^\xi K_1(\xi,\tau)\cos\rho\tau\,d\tau = (g_1(\xi), \cos\rho\xi),$$

отсюда следует (2.44). Формула (2.45) получается аналогично. □

Лемма 2.14. *Если* $g(x) \in C[0,1]$ *и* $\rho = 2n\pi + \mu$, *то*

$$(g, z_2) = \frac{1}{2n\pi+\mu}\left[(g_3(\xi)\cos\mu\xi, \sin 2n\pi\xi) + (g_3(\xi)\sin\mu\xi, \cos 2n\pi\xi)\right], \tag{2.46}$$

$$(g, z_2 - z_2^0) = \frac{1}{(2n\pi+\mu)^2}\left[(g_4(\xi)\cos\mu\xi, \cos 2n\pi\xi) - \right.$$
$$\left. -(g_4(\xi)\sin\mu\xi, \sin 2n\pi\xi)\right], \tag{2.47}$$

где

$$g_3(\xi) = g(\xi) + \int_\xi^1 K_2(\tau,\xi)g(\tau)\,d\tau,$$

$$g_4(\xi) = -g(\xi)K_2(\xi,\xi) + \int_\xi^1 K'_{2\xi}(\tau,\xi)g(\tau)\,d\tau.$$

Доказательство. Формула (2.46) получается так же, как и (2.44). Далее, так как $K_2(\xi, 0) = 0$, то

$$z_2 - z_2^0 = -\frac{1}{\rho^2}\cos\rho x K_2(x,x) + \frac{1}{\rho^2}\int_0^x \cos\rho\tau K'_{2\tau}(x,\tau)\,d\tau.$$

Отсюда приходим к (2.47). □

Лемма 2.15. *Обозначим через* $\psi(x)$ *функцию* $\cos x$ *или* $\sin x$. *Пусть* $f(x) \in L_2[0,1]$ *и* $f(x,\mu) = f(x)\psi(\mu x)$, *где* $\mu \in \gamma_0 \cup \gamma_1$ *и* $\beta_n(\mu) = (f(x,\mu), \psi(2n\pi x))$. *Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}|\beta_n(\mu)| \leqslant c\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}}, \tag{2.48}$$

где постоянная c *не зависит от* n_1, n_2 *и* $\mu \in \gamma_0 \cup \gamma_1$.

Доказательство. По неравенству Коши – Буняковского имеем

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}|\beta_n(\mu)| \leqslant \sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} |\beta_n(\mu)|^2}, \tag{2.49}$$

а по неравенству Бесселя —

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |\beta_n(\mu)|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|f(x,\mu)\|^2, \tag{2.50}$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$.

Кроме того, $\|f(x,\mu)\| \leqslant c_1\|f\|$, где c_1 не зависит от $\mu \in \gamma_0 \cup \gamma_1$. Из (2.49) и (2.50) получаем (2.48). □

2.2.3 Исследование $u_0(x,t)$

Лемма 2.16. *Для* $u_0(x,t)$ *имеет место формула*

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0} \int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}\right)(R_\lambda^0\varphi_1)\cos\rho t\, d\lambda, \tag{2.51}$$

где $\varphi_1 = R_{\mu_0}^0 g$.

Доказательство. По лемме 2.11, беря R_λ^0 вместо R_λ и φ_1 вместо φ, имеем

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}(R_\lambda^0\varphi_1)\cos\rho t\, d\lambda = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda^0 g_1)\cos\rho t\, d\lambda,$$

где $g_1 = (L_0 - \mu_0 E)\varphi_1$. Но $g_1 = (L_0 - \mu_0 E)R_{\mu_0}^0 g = g$. Следовательно, получаем (2.34), где проведена замена R_λ на R_λ^0 и φ — на φ_1. Отсюда следует (2.51). □

Лемма 2.17. *Для $R^0_\lambda f$ имеет место формула*

$$R^0_\lambda f = -\frac{\cos\rho x}{\rho\sin\rho}\int\limits_0^1 \cos\rho(1-\xi)f(\xi)\,d\xi - \frac{1}{\rho}\int\limits_0^x \sin\rho(x-\xi)f(\xi)\,d\xi. \quad (2.52)$$

Утверждение леммы следует из теоремы 2.11.

Теорема 2.14. *Имеет место формула*

$$u_0(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u^0_n(x,t), \quad (2.53)$$

где $u^0_0(x,t) = (\varphi_1, 1)$, $u^0_n(x,t) = a_n\cos\rho^0_n x\cos\rho^0_n t$, $n = 1, 2, \ldots$, $a_n = 2(\varphi_1(\xi), \cos\rho^0_n\xi)$, $\rho^0_n = n\pi$.

Утверждение теоремы 2.14 следует из (2.51) и (2.52) по теореме вычетов.

Лемма 2.18. *Для функций $u^0_n(x,t)$ справедливы формулы:*

$$u^0_n(x,t) = \frac{1}{2}(v_n(x+t) + v_n(x-t)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $v_0(x) = u^0_0$, $v_n(x) = a_n\cos\rho^0_n x$.

Доказательство. Используя формулы для умножения тригонометрических функций, имеем

$$u^0_n(x,t) = \frac{1}{2}a_n[\cos\rho^0_n(x+t) + \cos\rho^0_n(x-t)] = \frac{1}{2}[v_n(x+t) + v_n(x-t)]. \quad \square$$

Лемма 2.19. *Ряды* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v'_n(x)$ *сходятся абсолютно и равномерно при* $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. По определению функция $\varphi_1(x) \in C^2[0,1]$ и принадлежит области определения оператора L_0, поэтому

$$\varphi'_1(0) = 0, \quad \varphi'_1(1) = 0. \quad (2.54)$$

Интегрируя два раза по частям формулу для a_n с учетом (2.54), получаем, что $a_n = \dfrac{\alpha_n}{n^2\pi^2}$, где через α_n обозначены различные числа α_n, лишь бы $\sum|\alpha_n|^2 < \infty$. Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость первого ряда. Абсолютная и равномерная сходимость ряда из производных получается, если воспользоваться неравенством Коши – Буняковского. $\square$

Лемма 2.20. *Функция* $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n(x) \in C^2(-\infty, \infty)$, *при этом* $F(x) = \varphi_1(x)$, *если* $x \in [0, 1]$.

Доказательство. При $x \in [0, 1]$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ есть ряд Фурье функции $\varphi_1(x)$ по собственным функциям оператора L_0, краевые условия которого регулярны. Следовательно, $F(x) = \varphi_1(x)$ на $[0, 1]$, так как $\varphi_1 \in D_{L_0}$. По лемме 2.19 $F(x) \in C^1(-\infty, \infty)$. Кроме того, $F(x) = F(-x)$ и 2-периодическая. Следовательно, нам достаточно убедиться, что $F''(x)$ непрерывна в точках $x = 0$ и $x = 1$. Непрерывность этой производной в точке $x = 0$ вытекает из четности функции $F(x)$. Поскольку $v_n(1+x) = v_n(1-x)$, функция $F(x)$ является четной относительно $x = 1$. Поэтому $F''(x)$ тоже непрерывна в данной точке. □

Теорема 2.15. *Функция* $u_0(x, t)$ *есть классическое решение эталонной задачи:*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{2.55}$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u'_x(0, t) = u'_x(1, t) = 0. \tag{2.56}$$

Доказательство. Имеем

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2}[F(x + t) + F(x - t)]. \tag{2.57}$$

В силу леммы 2.20 функция $u_0(x, t)$ является решением уравнения (2.55). Выполнение начальных и граничных условий (2.56) следует из (2.57) и законности почленного дифференцирования ряда (2.53) (по x или по t). □

2.2.4 Исследование $u_2(x, t)$

По теоремам 2.10 и 2.11 с учетом того, что $M_\rho f$ и $M_\rho^0 f$ есть целые функции по λ, для $u_2(x, t)$ получаем следующее представление:

$$u_2(x, t) = \sum_{n \geqslant n_0} a_n(x, t),$$

где

$$a_n(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{2\rho \cos \rho t}{\rho^2 - \mu_0} \Big[v_1(x, \rho)(g, z_1) + v_2(x, \rho)(g, z_2) -$$
$$- v_1^0(x, \rho)(g, z_1^0) - v_2^0(x, \rho)(g, z_2^0) \Big] \, d\rho. \tag{2.58}$$

Лемма 2.21. *Ряды* $\sum a_{n,x^j}^{(j)}(x,t)$ *и* $\sum a_{n,t^j}^{(j)}(x,t)$ *сходятся абсолютно и равномерно по* $x \in [0,1]$ *и* $t \in [-T,T]$ *при любом фиксированном* $T>0$, $j=0,1,2$.

Доказательство. Имеем

$$J(x,\rho) = J_1(x,\rho) + J_2(x,\rho), \tag{2.59}$$

где $J(x,\rho)$ — выражение в квадратных скобках в (2.58),

$$J_1(x,\rho) = (v_1(x,\rho) - v_1^0(x,\rho))(g,z_1) + (v_2(x,\rho) - v_2^0(x,\rho))(g,z_2),$$
$$J_2(x,\rho) = v_1^0(x,\rho)(g,z_1 - z_1^0) + v_2^0(x,\rho)(g,z_2 - z_2^0).$$

Докажем вначале утверждение леммы для рядов по четным n, т. е. $n=2k$, $k \geqslant k_0$. В этом случае если $\rho \in \gamma_n$, то $\rho = 2k\pi + \mu$, $\mu \in \gamma_0$. Обозначим через $\beta_k(\mu)$ любой из функционалов:

$$(g_j(\xi)\cos\mu\xi, \cos 2k\pi\xi), \quad -(g_j(\xi)\sin\mu\xi, \sin 2k\pi\xi), \quad j=1,4;$$
$$(g_j(\xi)\cos\mu\xi, \sin 2k\pi\xi), \quad (g_j(\xi)\sin\mu\xi, \cos 2k\pi\xi), \quad j=2,3.$$

По леммам 2.13 и 2.14 имеем

$$(g,z_1) = \beta_k(\mu) + \beta_k(\mu), \quad (g,z_2) = \frac{1}{2k\pi+\mu}\left(\beta_k(\mu) + \beta_k(\mu)\right),$$
$$(g,z_1 - z_1^0) = \frac{1}{2k\pi+\mu}\left(\beta_k(\mu) + \beta_k(\mu)\right),$$
$$(g,z_2 - z_2^0) = \frac{1}{(2k\pi+\mu)^2}\left(\beta_k(\mu) + \beta_k(\mu)\right).$$

Теперь, используя лемму 2.12 и оценки

$$v_1^{(j)}(x,\rho) = O(\rho^{j-1}), \quad v_2^{(j)}(x,\rho) = O(\rho^j),$$

из представления (2.59) можно получить оценку

$$\begin{gathered} J^{(j)}(x,\rho) = O(k^{j-2})\left[|\beta_k(\mu)| + |\beta_k(\mu)|\right] + \\ +O(k^{j-1})\frac{1}{|2k\pi+\mu|}\left[\,|\beta_k(\mu)| + |\beta_k(\mu)|\,\right] + \\ +O(k^{j-1})\frac{1}{|2k\pi+\mu|}\left[\,|\beta_k(\mu)| + |\beta_k(\mu)|\,\right] + \\ +O(k^j)\frac{1}{|2k\pi+\mu|^2}\left[\,|\beta_k(\mu)| + |\beta_k(\mu)|\,\right] = O(k^{j-2}\widetilde{\beta}_k(\mu)), \end{gathered} \tag{2.60}$$

где $\widetilde{\beta}_k(\mu) = \sum\limits_1^8 |\beta_k(\mu)|$ и оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in [0,1]$ и $\mu \in \gamma_0 \cup \gamma_1$. Отсюда

$$|a^{(j)}_{2k,x^j}(x,t)| = \int\limits_{\gamma_0} O(k^{j-3}) \widetilde{\beta}_k(\mu)\, |d\mu|,$$

где $\int\limits_{\gamma_0} (\ldots)\, |d\mu|$ понимаем как $\int\limits_0^{2\pi} (\ldots) \delta\, d\varphi,\ \mu = \delta e^{i\varphi}$. Если $j = 0, 1$, то $|a^{(j)}_{2k,x^j}(x,t)| = O\left(k^{-2}\right)$, тем самым ряды $\sum |a^{(j)}_{2k,x^j}(x,t)|$ сходятся равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [-T, T]$.

Далее из (2.60) следует оценка

$$|a^{(2)}_{2k,x^2}(x,t)| = \int\limits_{\gamma_0} O\left(k^{-1} \widetilde{\beta}_k(\mu)\right) |d\mu|,$$

и поэтому по лемме 2.15

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} |a^{(2)}_{2k,x^2}(x,t)| = \int\limits_{\gamma_0} \sum_{k=k_1}^{k_2} O\left(k^{-1} \widetilde{\beta}_k(\mu)\right) |d\mu| =$$

$$= \int\limits_{\gamma_0} O\left(\sqrt{\sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{1}{k^2}}\right) |d\mu| = O\left(\sqrt{\sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{1}{k^2}}\right),$$

где оценка $O(\cdot)$ равномерна по $x \in [0,1]$ и $t \in [-T, T]$. Ряды по нечетным $n = 2k+1$ рассматриваются аналогично с $\mu \in \gamma_1$. Тем самым утверждение леммы получено для рядов $\sum a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)$. Подобным образом (и даже проще) исследуются ряды $\sum a^{(j)}_{n,t_j}$. □

2.2.5 Классическое решение задачи (2.28)–(2.31)

Теорема 2.16. *Формальное решение $u(x,t)$ задачи* (2.28)–(2.31) *есть классическое решение при $\varphi(x) \in C^2[0,\pi]$ и выполнении условий* (2.32).

Доказательство. Для формального решения (2.33) в силу формулы (2.36) и аналитичности $M_\rho f$ по лемме 2.11 имеем

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g) \cos \rho t\, d\lambda -$$

$$-\sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}\frac{v_1(x,\rho)(g,z_1)+v_2(x,\rho)(g,z_2)}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t\,d\lambda. \tag{2.61}$$

Отсюда в силу (2.60) по леммам 2.12–2.14 получаем, что ряд в (2.61) и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием один раз по x или по t, сходятся абсолютно и равномерно (см. также доказательство леммы 2.21). Таким образом, в этом случае процедура ускорения сходимости рядов не требуется. Поэтому $u(x,t)$ удовлетворяет начальным и граничным условиям. Далее, в силу леммы 2.21 формальное решение $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемо. Докажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.28). Обозначим через M оператор $M=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. Тогда по теореме 2.15

$$Mu_0(x,t)=0.$$

Рассмотрим

$$Mu_1(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}M\left(\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t\,d\lambda\right)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}M\left((R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t\right)\,d\lambda=\frac{q(x)}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t\,d\lambda,$$

а также

$$Mu_2(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}M\big(\big[v_1(x,\rho)(g,z_1)+$$

$$+v_2(x,\rho)(g,z_2)-v_1^0(x,\rho)(g,z_1^0)-v_2^0(x,\rho)(g,z_2^0)\big]\cos\rho t\big)\,d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}M\big(\big[v_1(x,\rho)(g,z_1)+v_2(x,\rho)(g,z_2)\big]\cos\rho t\big)\,d\lambda.$$

Но

$$M\left(v_j(x,\rho)\cos\rho t\right)=-\rho^2v_j(x,\rho)\cos\rho t-v_j''(x,\rho)\cos\rho t=-q(x)v_j(x,\rho)\cos\rho t.$$

Следовательно,

$$Mu_2(x,t)=\frac{q(x)}{2\pi i}\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t\,d\lambda,$$

т. е. $Mu=-q(x)u(x,t)$. □

2.3 Случай граничных условий разных порядков

Наконец, в этом параграфе изучим случай граничных условий в).

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{2.62}$$

$$u'_x(0,t) + \beta u'_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0, \tag{2.63}$$

$$\alpha u(0,t) + u(1,t) = 0, \tag{2.64}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{2.65}$$

где $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ и $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначные, α, α_1, β, β_1 — комплексные числа. Условие $u'_t(x,0) = 0$ берется для простоты. Важным является присутствие в краевом условии (2.63) линейной комбинации $\alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t)$, что вызывает дополнительные трудности по сравнению с параграфом 2.1. Для формирования эталонной смешанной задачи мы привлекаем оператор L_0:

$$L_0 y = -y''(x), \quad y'(0) + \beta y'(1) = 0, \quad \alpha y(0) + y(1) = 0.$$

Оператор L_0 в общем случае несамосопряженный. Более того, если взять $\alpha = 0$, $\beta = 1$ и вместо x взять $\xi = 1 - x$, то придем к оператору, рассмотренному В. А. Ильиным [5, 6]. Он замечателен тем, что все его собственные значения двукратные и для каждого собственного значения имеем одну собственную и одну присоединенную функцию.

В результате резольвентного подхода получаем классическое решение задачи (2.62)–(2.65) при минимально необходимых требованиях на $\varphi(x)$: $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ и

$$\begin{gathered} \varphi'(0) + \beta\varphi'(1) + \alpha_1\varphi(0) + \beta_1\varphi(1) = 0, \quad \alpha\varphi(0) + \varphi(1) = 0, \\ \alpha\varphi''(0) + \varphi''(1) - \alpha q(0)\varphi(0) - q(1)\varphi(1) = 0. \end{gathered} \tag{2.66}$$

2.3.1 Преобразование формального решения

Метод Фурье в применении к (2.62)–(2.65) связан со спектральной задачей для оператора L:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x),$$
$$U_1(y) = y'(0) + \beta y'(1) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0, \quad U_2(y) = \alpha y(0) + y(1) = 0.$$

Будем изучать задачу (2.62)–(2.65) при дополнительном условии

$$1 + \alpha\beta \neq 0.$$

Это условие необходимо и достаточно для регулярности краевых условий операторов L и L_0 (см. [40, с. 73]).

Теорема 2.17. *Собственные значения оператора L образуют две последовательности $\lambda_n = \rho_n^2$ и $\lambda_n' = {\rho_n'}^2$ $(\lambda = \rho^2,\ \operatorname{Re}\rho \geqslant 0)$ и имеют асимптотику*

$$\rho_n = 2n\pi + \xi_1 + \varepsilon_n, \quad \rho_n' = 2n\pi + \xi_2 + \varepsilon_n' \quad (n = n_0, n_0+1, \ldots),$$

где $\xi_{1,2} = -i\ln\left(d \pm \sqrt{d^2-1}\right)$, $d = -(\alpha+\beta)/(1+\alpha\beta)$, $\varepsilon_n = o(1)$, $\varepsilon_n' = o(1)$.

(Это известный факт, см., например, [40, с. 74].)

Замечание 2.8. В [40] содержится более точная асимптотика собственных значений, но она нам не потребуется.

Обозначим через γ_n объединение двух непересекающихся окружностей $\{\rho\big||\rho-(2n\pi+\xi_j)| = \delta\}$ $(j = 1,2)$, если $\xi_1 \neq \xi_2$, или один такой контур, если $\xi_1 = \xi_2$ и $\delta > 0$ достаточно мало. При этом n_0 таково, что внутри каждого $\widetilde{\gamma}_n$ находятся ρ_n и ρ_n' при $n \geqslant n_0$. Пусть $\widetilde{\gamma}_n$ — образ γ_n в λ-плоскости. Далее, пусть $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$, где E — единичный оператор, λ — спектральный параметр, есть резольвента оператора L. Формальное решение задачи (2.62)–(2.65) по методу Фурье возьмем в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}\right)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda, \tag{2.67}$$

где $\gamma_r = \{\lambda\big|\,|\lambda| = r\}$, $r > 0$ фиксировано и таково, что внутри γ_r находятся все собственные значения оператора L, не попавшие в $\widetilde{\gamma}_n$ при $n \geqslant n_0$.

Если все собственные значения простые, то очевидно, что обычное формальное решение задачи (2.62)–(2.65) по методу Фурье можно представить в виде (2.67). Если же есть кратные собственные значения, то (2.67) в этом случае мы будем называть формальным решением задачи (2.62)–(2.65).

Отметим, что теперь в (2.67) не фигурируют явно ни собственные значения, ни собственные функции.

Лемма 2.22. *Пусть μ_0 — фиксированное число, не являющееся собственным значением оператора L, и γ — один из контуров γ_r, $\widetilde{\gamma}_n$ при $n \geqslant n_0$ (μ_0 вне γ). Тогда*

$$\int\limits_\gamma (R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda = \int\limits_\gamma \frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g)\cos\rho t\,d\lambda, \tag{2.68}$$

где $g = (L-\mu_0 E)\varphi$.

Доказательство. Функция $\varphi(x)$ принадлежит D_L — области определения оператора L. Поэтому из $g(x) = (L - \lambda E)\varphi + (\lambda - \mu_0)\varphi$ следует $R_\lambda g = \varphi + (\lambda - \mu_0)R_\lambda\varphi$. Отсюда следует (2.68). $\square$

По лемме 2.22 формальное решение $u(x,t)$ представим в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}\right)\frac{1}{\lambda - \mu_0}(R_\lambda g)\cos\rho t\, d\lambda. \tag{2.69}$$

Далее будем считать, что μ_0 не является также собственным значением L_0 и n_0 таково, что все собственные значения и оператора L_0 при $n \geqslant n_0$ попадают лишь в γ_n. Тогда имеет смысл

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}\right)\frac{1}{\lambda - \mu_0}(R^0_\lambda g)\cos\rho t\, d\lambda, \tag{2.70}$$

где $R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$.

По лемме 2.22, примененной к R^0_λ вместо R_λ и $\varphi_1 = R^0_{\mu_0} g$ вместо φ, имеет место формула

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}\right)(R^0_\lambda \varphi_1)\cos\rho t\, d\lambda,$$

т. е. $u_0(x,t)$ есть формальное решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{2.71}$$

$$u'_x(0,t) + \beta u'_x(1,t) = \alpha u(0,t) + u(1,t) = 0, \tag{2.72}$$

которую мы назовем эталонной.

Наше преобразование формального решения дается следующей очевидной теоремой.

Теорема 2.18. *Формальное решение $u(x,t)$ задачи* (2.62)–(2.65) *представимо в виде*

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где $u_0(x,t)$ есть (2.70),

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{1}{\lambda - \mu_0}(R_\lambda g - R^0_\lambda g)\cos\rho t\, d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g - R_\lambda^0 g)\cos\rho t\,d\lambda.$$

2.3.2 Вспомогательные утверждения

Рассмотрим уравнение

$$y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0. \tag{2.73}$$

Пусть $z_1(x,\rho)$, $z_2(x,\rho)$ — решения уравнения (2.73) с начальными условиями

$$z_1(0,\rho) = 1, \quad z_1'(0,\rho) = 0, \quad z_2(0,\rho) = 0, \quad z_2'(0,\rho) = 1.$$

При $q(x) \equiv 0$ этими решениями являются

$$z_1^0(x,\rho) = \cos\rho x, \quad z_2^0(x,\rho) = \frac{1}{\rho}\sin\rho x.$$

Теорема 2.19. *Для $R_\lambda f$ имеет место формула*

$$R_\lambda f = v_1(x,\rho)(f,z_1) + v_2(x,\rho)(f,z_2) + M_\rho f, \tag{2.74}$$

где

$$M_\rho f = \int\limits_0^x M(x,\xi,\rho)f(\xi)\,d\xi, \quad M(x,\xi,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \\ z_1(\xi,\rho) & z_2(\xi,\rho)\end{vmatrix},$$

$$v_1(x,\rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)}\{[U_2(z_2)\left(\beta z_2'(1,\rho)+\beta_1 z_2(1,\rho)\right) - U_1(z_2)z_2(1,\rho)]\,z_1(x,\rho) +$$
$$+ [U_1(z_1)z_2(1,\rho) - U_2(z_1)\left(\beta z_2'(1,\rho)+\beta_1 z_2(1,\rho)\right)]\,z_2(x,\rho)\},$$

$$v_2(x,\rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)}\{[-U_2(z_2)\left(\beta z_1'(1,\rho)+\beta_1 z_1(1,\rho)\right) + U_1(z_2)z_1(1,\rho)]\,z_1(x,\rho) +$$
$$+ [-U_1(z_1)z_1(1,\rho) + U_2(z_2)\left(\beta z_1'(1,\rho)+\beta_1 z_1(1,\rho)\right)]\,z_2(x,\rho)\},$$

$$\Delta(\rho) = U_1(z_1)U_2(z_2) - U_1(z_2)U_2(z_1), \quad \Delta(\rho) \neq 0, \quad (f,z) = \int\limits_0^1 f(\xi)z(\xi)\,d\xi.$$

Доказательство. Пусть $y(x) = R_\lambda f$. Тогда $y(x)$ есть решение краевой задачи

$$y'' - q(x)y + \rho^2 y = -f(x), \quad U_1(y) = 0, \quad U_2(y) = 0. \tag{2.75}$$

Общим решением уравнения (2.75) является

$$y(x,\rho) = c_1 z_1(x,\rho) + c_2 z_2(x,\rho) + M_\rho f.$$

Подставив эту формулу в краевые условия задачи (2.75), найдем c_1, c_2 и получим (2.74). □

Теорема 2.20. *Для R_λ^0 имеет место формула*

$$R_\lambda^0 f = v_1^0(x,\rho)(f, z_1^0) + v_2^0(x,\rho)(f, z_2^0) + M_\rho^0 f,$$

где

$$v_1^0(x,\rho) = \frac{1}{\Delta_0(\rho)} \left\{ \left[U_2^0\left(z_2^0\right) \beta z_2^{0\prime}(1,\rho) - U_1^0\left(z_2^0\right) z_2^0(1,\rho) \right] z_1^0(x,\rho) + \right.$$
$$\left. + \left[U_1^0\left(z_1^0\right) z_2^0(1,\rho) - U_2^0(z_1^0) \beta z_2^{0\prime}(1,\rho) \right] z_2^0(x,\rho) \right\},$$
$$v_2^0(x,\rho) = \frac{1}{\Delta_0(\rho)} \left\{ \left[-U_2^0\left(z_2^0\right) \beta z_1^{0\prime}(1,\rho) + U_1^0\left(z_2^0\right) z_1^0(1,\rho) \right] z_1^0(x,\rho) + \right.$$
$$\left. + \left[-U_1^0(z_1^0) z_1^0(1,\rho) + U_2^0\left(z_2^0\right) \beta z_1^{0\prime}(1,\rho) \right] z_2^0(x,\rho) \right\},$$
$$M_\rho^0 f = \int_0^x M_0(x,\xi,\rho) f(\xi)\, d\xi, \quad M_0(x,\xi,\rho) = \begin{vmatrix} z_1^0(x,\rho) & z_2^0(x,\rho) \\ z_1^0(\xi,\rho) & z_2^0(\xi,\rho) \end{vmatrix},$$
$$\Delta_0(\rho) = U_1^0\left(z_1^0\right) U_2^0\left(z_2^0\right) - U_1^0\left(z_2^0\right) U_2^0\left(z_1^0\right) = -[\alpha + \beta + (1+\alpha\beta)\cos\rho],$$
$$U_1^0(z) = z'(0) + \beta z'(1), \quad U_2^0(z) = U_2(z), \quad \Delta_0(\rho) \neq 0.$$

Доказательство теоремы 2.20 аналогично доказательству теоремы 2.19. □

Теорема 2.21. *В полосе $|\operatorname{Im}\rho| \leqslant h$, где $h > 0$ любое, имеют место асимптотические формулы:*

$$z_1(x,\rho) = \cos\rho x + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad z_1'(x,\rho) = -\rho\sin\rho x + O(1),$$
$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \quad z_2'(x,\rho) = \cos\rho x + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

где оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in [0,1]$.

(Эти оценки содержатся в [40, с. 59].)

Теорема 2.22. *Для* $z_j(x,\rho)$, $j=1,2$, *имеют место формулы:*

$$z_1(x,\rho) = \cos\rho x + \int\limits_0^x K_1(x,\xi)\cos\rho\xi\, d\xi, \tag{2.76}$$

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int\limits_0^x K_2(x,\xi)\frac{\sin\rho\xi}{\rho}\, d\xi, \tag{2.77}$$

где $K_j(x,\xi)$ *непрерывно дифференцируемы по* x *и* ξ, *причем* $K_2(x,0)\equiv 0$.

Замечание 2.9. Формулы (2.76), (2.77) хорошо известны как формулы операторов преобразования (см. [38, с. 17, 33]).

Лемма 2.23. *При* $\rho = \widetilde{\gamma}_n$, $n \geqslant n_0$ *имеют место асимптотические формулы:*

$$v_1^{(j)}(x,\rho) = v_1^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-2}), \tag{2.78}$$

$$v_2^{(j)}(x,\rho) = v_2^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-1}), \quad j=0,1,2, \tag{2.79}$$

где $v^{(j)}(x,\rho) = \dfrac{d^j}{dx^j}v(x,\rho)$ *и оценки* $O(\cdot)$ *равномерны по* $x\in[0,1]$.

Доказательство. На основании теоремы 2.21 имеем

$$U_1(z_1) = U_1^0(z_1^0) + O(1), \quad U_1(z_2) = U_1^0(z_2^0) + \left(\frac{1}{\rho}\right),$$

$$U_2(z_1) = U_2^0(z_1^0) + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad U_2(z_2) = U_2^0(z_2^0) + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \tag{2.80}$$

$$U_1^0(z_1^0) = \rho O(1), \quad U_1^0(z_2^0) = O(1), \quad U_2^0(z_1^0) = O(1), \quad U_2^0(z_2^0) = O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Из (2.80) следует, что

$$\Delta(\rho) = \Delta_0(\rho) + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

и поэтому

$$\frac{1}{\Delta(\rho)} = \frac{1}{\Delta_0(\rho)} + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{2.81}$$

причем $\dfrac{1}{\Delta_0(\rho)} = O(1)$.

Используя формулы (2.80), (2.81), а также теорему 2.21 и опуская для краткости ρ в $z_j(x,\rho)$, рассмотрим

$$v_1(x,\rho)=\frac{1}{\Delta(\rho)}\left\{\left[\left(U_2^0\left(z_2^0\right)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)\left(\beta\left(z_2^{0\prime}(1)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\beta_1\left(z_2^0(1)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right)\right)-\left(U_1^0\left(z_2^0\right)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)\left(z_2^0(1)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right)\right]\times$$
$$\times z_1(x)+\left[\left(U_1^0\left(z_1^0\right)+O(1)\right)\left(z_2^0(1)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right)-\right.$$
$$-\left(U_2^0\left(z_1^0\right)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)\left(\beta\left(z_2^{0\prime}(1)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)+\right.$$
$$\left.\left.\left.+\beta_1\left(z_2^0(1)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right)\right)\right]z_2(x)\right\}=\left(\frac{1}{\Delta_0(\rho)}+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)\times$$
$$\times\left\{\left[U_2^0(z_2^0)\beta z_2^{0\prime}(1)-U_1^0\left(z_2^0\right)z_2^0(1)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right]\left(z_1^0(x)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\left[U_1^0\left(z_1^0\right)z_2^0(1)-U_2^0\left(z_1^0\right)\beta z_2^0(1)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\left(z_2^0(x)+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right)\right\}.$$

Так как первая квадратная скобка есть $O(1/\rho)$, а вторая — $O(1)$, то отсюда следует (2.78) при $j=0$. Аналогично доказываются формулы (2.78) при $j=1,2$ и формулы (2.79). □

Лемма 2.24. *Если* $g(x)\in C[0,1]$ *и* $\rho=2n\pi+\mu$, *то*

$$(g,z_1)=(g_1(\xi)\cos\mu\xi,\cos 2n\pi\xi)-(g_1(\xi)\sin\mu\xi,\sin 2n\pi\xi), \tag{2.82}$$

$$(g,z_1-z_1^0)=\frac{1}{2n\pi+\mu}[(g_2(\xi)\cos\mu\xi,\sin 2n\pi\xi)+$$
$$+(g_2(\xi)\sin\mu\xi,\cos 2n\pi\xi)], \tag{2.83}$$

где

$$g_1(\xi)=g(\xi)+\int\limits_{\xi}^{1}g(\tau)K_1(\tau,\xi)\,d\tau,$$

$$g_2(\xi)=g(\xi)K_1(\xi,\xi)-\int\limits_{\xi}^{1}g(\tau)K'_{1\xi}(\tau,\xi)\,d\tau.$$

Доказательство. На основании теоремы 2.22 имеем

$$(g,z_1)=\left(g(\xi),\cos\rho\xi+\int\limits_0^{\xi}K_1(\xi,\tau)\cos\rho\tau\,d\tau\right)=(g_1(\xi),\cos\rho\xi),$$

отсюда следует (2.82). Формула (2.83) получается аналогично. □

Лемма 2.25. *Если* $g(x) \in C[0,1]$ *и* $\rho = 2n\pi + \mu$, *то*

$$(g, z_2) = \frac{1}{2n\pi + \mu}\left[(g_3(\xi)\cos\mu\xi, \sin 2n\pi\xi) + (g_3(\xi)\sin\mu\xi, \cos 2n\pi\xi)\right], \tag{2.84}$$

$$(g, z_2 - z_2^0) = \frac{1}{(2n\pi + \mu)^2}\left[(g_4(\xi)\cos\mu\xi, \sin 2n\pi\xi) - \right.$$
$$\left. -(g_4(\xi)\sin\mu\xi, \sin 2n\pi\xi)\right], \tag{2.85}$$

где

$$g_3(\xi) = g(\xi) + \int_\xi^1 K_2(\tau,\xi)g(\tau)\,d\tau,$$

$$g_4(\xi) = -g(\xi)K_2(\xi,\xi) + \int_\xi^1 K'_{2\xi}(\tau,\xi)g(\tau)\,d\tau.$$

Доказательство. Формула (2.84) получается так же, как и (2.82). Далее, из $K_2(\xi, 0) = 0$ следует, что

$$z_2 - z_2^0 = -\frac{1}{\rho^2}\cos\rho x K_2(x,x) + \frac{1}{\rho^2}\int_0^x \cos\rho\tau K'_{2\tau}(x,\tau)\,d\tau.$$

Отсюда получаем (2.85). □

Лемма 2.26. *Обозначим через* $\psi(x)$ *функцию* $\cos x$ *или* $\sin x$. *Пусть* $f(x) \in L_2[0,1]$ *и* $f(x,\mu) = f(x)\psi(\mu x)$, *где* $\mu \in \widetilde{\gamma}_0$ *и* $\beta_n(\mu) = (f(x,\mu), \psi(2n\pi x))$. *Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n}|\beta_n(\mu)| \leqslant c\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}}, \tag{2.86}$$

где постоянная c *не зависит от* n_1, n_2 *и* $\mu \in \widetilde{\gamma}_0$.

Доказательство. По неравенству Коши – Буняковского имеем

$$\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n}|\beta_n(\mu)| \leqslant \sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}|\beta_n(\mu)|^2},$$

а по неравенству Бесселя —

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |\beta_n(\mu)|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|f(x,\mu)\|^2, \tag{2.87}$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$.

Кроме того, $\|f(x,\mu)\| \leqslant c_1\|f\|$, где c_1 не зависит от $\mu \in \widetilde{\gamma}_0$. Из (2.88) и (2.87) получаем (2.86). □

2.3.3 Исследование $u_0(x,t)$

Положим $\Omega_\rho(g)(x) = v_1^0(x,\rho)\left(g, z_1^0\right) + v_2^0(x,\rho)\left(g, z_2^0\right)$.

Лемма 2.27. *Имеет место формула*

$$\int\limits_\gamma \frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda^0 g)\cos\rho t\, d\lambda = \int\limits_\gamma \frac{1}{\lambda-\mu_0}\Omega_\rho(g)(x)\cos\rho t\, d\lambda,$$

где γ либо γ_r, либо γ_n при $n \geqslant n_0$.

Эта лемма очевидна, поскольку $M_\rho^0 g$ целая по λ.

Лемма 2.28. *Имеет место формула*

$$\Omega_\rho(g)(x)\cos\rho t = \frac{1}{2}\left[\Omega_\rho(g)(x+t) + \Omega_\rho(g)(x-t)\right].$$

Доказательство. Имеем

$$\cos\rho x\cos\rho t = \frac{1}{2}[\cos\rho(x+t) + \cos\rho(x-t)],$$
$$\sin\rho x\cos\rho t = \frac{1}{2}[\sin\rho(x+t) + \sin\rho(x-t)].$$

Отсюда

$$v_j^0(x,\rho)\cos\rho t = \frac{1}{2}[v_j^0(x+t,\rho) + v_j^0(x-t,\rho)], \quad j=1,2,$$

и лемма доказана. □

Положим

$$w_n(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{1}{\lambda-\mu_0}\Omega_\rho(g)(x)\, d\lambda \quad \text{и} \quad w(x) = \sum_{n\geqslant n_0}^{\infty} w_n(x).$$

Лемма 2.29. *Ряды* $\sum w_n(x)$ *и* $\sum w_n'(x)$ *сходятся абсолютно и равномерно на любом отрезке из* $(-\infty,\infty)$.

Доказательство. Имеем при $\rho\in\widetilde{\gamma}_n$ оценку $\Omega_\rho(g)(x)=O(1/\rho)$, равномерную по x из нашего отрезка. Отсюда следует утверждение леммы для $\sum w_n(x)$.

Приступаем к исследованию ряда $\sum w_n'(x)$. Переменную ρ представим в виде $\rho=2n\pi+\mu$, где $\mu\in\widetilde{\gamma}_0$, и $\widetilde{\gamma}_0$ есть объединение двух окружностей $\{\rho|\,|\rho-\xi_j|=\delta\}$, $j=1,2$. Обозначим через $\beta_n(\mu)$ любой из функционалов:

$$\begin{aligned}&(g_1(\xi)\cos\mu\xi,\cos 2n\pi\xi), \quad -(g_1(\xi)\sin\mu\xi,\sin 2n\pi\xi),\\ &(g_3(\xi)\cos\mu\xi,\sin 2n\pi\xi), \quad\ \ (g_3(\xi)\sin\mu\xi,\cos 2n\pi\xi).\end{aligned}\tag{2.88}$$

Тогда по леммам 2.24 и 2.25

$$(g,z_1^0)=\beta_n(\mu)+\beta_n(\mu),\quad (g,z_2^0)=\frac{1}{2n\pi+\mu}\left(\beta_n(\mu)+\beta_n(\mu)\right).$$

Имеем очевидные оценки

$$v^{0(j)}_{1,x^j}(x,\rho)=O(\rho^{j-1}),\quad v^{0(j)}_{2,x^j}(x,\rho)=O(\rho^{j}),\quad j=1,2.$$

Поэтому получаем

$$w_n'(x)=\int\limits_{\gamma_0}O\left(\frac{1}{n}\widetilde{\beta}_n(\mu)\right)\,|d\mu|,$$

где $\widetilde{\beta}_n(\mu)=\sum\limits_1^4|\beta_n(\mu)|$. Значит, по лемме 2.26

$$\sum_{n=n_1}^{n_2}|w_n'(x)|=O\left(\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}}\right)\int\limits_{\gamma_0}|d\mu|=O\left(\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}}\right).$$

Отсюда следует равномерная сходимость ряда $\sum|w_n'(x)|$. □

Обозначим

$$\Phi(x)=w(x)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{1}{\lambda-\mu_0}\Omega_\rho(g)(x)\,d\lambda.$$

Лемма 2.30. *Если* $x\in[0,1]$, *то* $\Phi(x)=\varphi_1(x)=R^0_{\mu_0}g$.

Доказательство. По лемме 2.27 $\Phi(x) = u_0(x,0)$, тогда

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right) R_\lambda^0\varphi_1\,d\lambda. \qquad (2.89)$$

Так как ряд (2.89) есть ряд Фурье функции $\varphi_1(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора L_0, а $\varphi_1(x) \in D_{L_0}$ (области определения оператора L_0), то ряд (2.89) сходится равномерно к $\varphi_1(x)$ на $[0,1]$. □

Лемма 2.31. *Функция* $\Phi(x) \in C^1(-\infty,\infty)$ *и*

$$\Phi(-x) = \frac{1}{1+\alpha\beta}[(1-\alpha\beta)\Phi(x) - 2\beta\Phi(1-x)], \qquad (2.90)$$

$$\Phi(1+x) = \frac{1}{1+\alpha\beta}[-2\alpha\Phi(x) + (\alpha\beta-1)\Phi(1-x)]. \qquad (2.91)$$

Доказательство. По леммам 2.27 и 2.28

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\{\Phi(x+t) + \Phi(x-t)\}, \qquad (2.92)$$

причем по лемме 2.29 $\Phi(x) \in C^1(-\infty,\infty)$. Отсюда в силу (2.72) получим

$$\Phi'(t) + \Phi'(-t) + \beta[\Phi'(1+t) + \Phi'(1-t)] = 0, \qquad (2.93)$$

$$\alpha(\Phi(t) + \Phi(-t)) + \Phi(1+t) + \Phi(1-t) = 0. \qquad (2.94)$$

Интегрируем (2.93). Получим

$$\Phi(t) - \Phi(-t) + \beta[\Phi(1+t) - \Phi(1-t)] = 0 \qquad (2.95)$$

в силу того, что левая часть (2.95) при $t = 0$ обращается в ноль. Из (2.94) и (2.95) получаем (2.90), (2.91). □

Лемма 2.32. *Функция* $\Phi(x) \in C^2(-\infty,\infty)$.

Доказательство. Формулы (2.90) и (2.91) дают однозначное продолжение $\Phi(x)$ на всю ось с ее значений на $[0,1]$. По лемме 2.30 $\Phi(x) \in C^2[0,1]$. Тогда по лемме 2.31 $\Phi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема всюду, кроме, быть может, точек $x = n$, где n — целое. Для исследования $\Phi''(x)$ в целых точках покажем сначала, что

$$\alpha\varphi_1''(0) + \varphi_1''(1) = 0. \qquad (2.96)$$

В самом деле, из $\varphi_1(x) = R^0_{\mu_0} g$ имеем

$$\varphi_1''(x) - \mu_0\varphi_1(x) = \varphi''(x) - q(x)\varphi(x) - \mu_0\varphi(x).$$

Отсюда в силу (2.66)

$$\alpha\varphi_1''(0) + \varphi_1''(1) = \mu_0(\alpha\varphi_1(0) + \varphi_1(1) + \alpha\varphi''(0)) - \\ -\alpha q(0)\varphi(0) - \mu_0\alpha\varphi(0) + \varphi''(1) - q(1)\varphi(1) - \\ -\mu_0\varphi(1) = \alpha\varphi''(0) + \varphi''(1) - \alpha q(0)\varphi(0) - q(1)\varphi(1) = 0,$$

т. е. (2.96) верно.

Из (2.90), (2.91) и (2.96) следует по лемме 2.30, что $\Phi''(x)$ непрерывна в точках 0 и 1. Далее, предположив, что этот факт имеет место и для всех $x = -n, -n+1, \ldots, n+1$ по индукции из (2.90), (2.91), записанных для $\Phi''(x)$ вместо $\Phi(x)$ при $x = n \pm 0$, получаем, что $\Phi''(x)$ непрерывна и при $x = -(n+1)$ и $n+2$. □

Теорема 2.23. *Функция $u_0(x,t)$ есть классическое решение эталонной задачи* (2.71), (2.72).

Доказательство. Из (2.92) по лемме 2.32 следует, что $u_0(x,t)$ удовлетворяет уравнению струны. Далее, из (2.92) следует, что $u_0(x,0) = \Phi(x) = \varphi_1(x)$, $u'_{0t}(x,0) = 0$ при $x \in [0,1]$. Наконец, из (2.94) следует, что $\alpha u_0(0,t) + u_0(1,t) = 0$, а из (2.93) — $u'_{0x}(0,t) + \beta u'_{0x}(1,t) = 0$. □

2.3.4 Исследование $u_2(x,t)$

По теоремам 2.19 и 2.20, учитывая, что $M_\rho f$ и $M^0_\rho f$ являются целыми функциями по λ, для $u_2(x,t)$, получаем следующее представление:

$$u_2(x,t) = \sum_{n\geqslant n_0} a_n(x,t),$$

где

$$a_n(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{2\rho\cos\rho t}{\rho^2-\mu_0}\Big[v_1(x,\rho)(g,z_1) + v_2(x,\rho)(g,z_2) - \\ -v_1^0(x,\rho)(g,z_1^0) - v_2^0(x,\rho)(g,z_2^0)\Big]\,d\rho. \tag{2.97}$$

Лемма 2.33. *Ряды $\sum a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)$ и $\sum a^{(j)}_{n,t^j}(x,t)$ $(j=0,1,2)$ сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [-T,T]$ при любом фиксированном $T > 0$.*

Доказательство. Имеем

$$J(x,\rho) = J_1(x,\rho) + J_2(x,\rho), \tag{2.98}$$

где $J(x,\rho)$ — выражение в квадратных скобках в (2.97),

$$J_1(x,\rho) = (v_1(x,\rho) - v_1^0(x,\rho))(g,z_1) + (v_2(x,\rho) - v_2^0(x,\rho))(g,z_2),$$
$$J_2(x,\rho) = v_1^0(x,\rho)(g,z_1 - z_1^0) + v_2^0(x,\rho)(g,z_2 - z_2^0).$$

Обозначим через $\beta_n(\mu)$, как и в (2.88), еще и функционалы:

$$(g_2(\xi)\cos\mu\xi, \sin 2n\pi\xi), \quad (g_2(\xi)\sin\mu\xi, \cos 2n\pi\xi),$$
$$(g_4(\xi)\cos\mu\xi, \cos 2n\pi\xi), \quad -(g_4(\xi)\sin\mu\xi, \sin 2n\pi\xi).$$

Тогда по леммам 2.24 и 2.25 имеем

$$(g,z_1) = \beta_n(\mu) + \beta_n(\mu), \quad (g,z_2) = \frac{1}{2n\pi+\mu}\left(\beta_n(\mu) + \beta_n(\mu)\right),$$
$$(g,z_1 - z_1^0) = \frac{1}{2n\pi+\mu}\left(\beta_n(\mu) + \beta_n(\mu)\right),$$
$$(g,z_2 - z_2^0) = \frac{1}{(2n\pi+\mu)^2}\left(\beta_n(\mu) + \beta_n(\mu)\right).$$

Теперь, используя лемму 2.23 и оценки

$$v_1^{(j)}(x,\rho) = O(\rho^{j-1}), \quad v_2^{(j)}(x,\rho) = O(\rho^j), \quad j = 0,1,2,$$

из представления (2.98) получаем оценки

$$\begin{aligned} J_{x^j}^{(j)}(x,\rho) = O(n^{j-2})\left[|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|\,\right] + \\ +O(n^{j-1})\frac{1}{|2n\pi+\mu|}\left[|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|\,\right] + \\ +O(n^{j-1})\frac{1}{|2n\pi+\mu|}\left[|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|\,\right] + \\ +O(n^j)\frac{1}{|2n\pi+\mu|^2}\left[|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|\,\right] = O(n^{j-2}\widetilde{\beta}_n(\mu)), \end{aligned} \tag{2.99}$$

где $\widetilde{\beta}_n(\mu) = \sum\limits_1^8 |\beta_n(\mu)|$ и оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in [0,1]$ и $\mu \in \gamma_0$. Отсюда получаем оценку

$$|a_{n,x^j}^{(j)}(x,t)| = \int\limits_{\gamma_0} O\left(n^{j-3}\beta_n(\mu)\right)\,|d\mu|, \quad j = 0,1,2. \tag{2.100}$$

Поэтому если $j = 0, 1$, то $|a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)| = O\left(n^{-2}\right)$, тем самым ряды $\sum |a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)|$ $(j = 0, 1)$ сходятся равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-T, T]$.

Далее из (2.100) следует оценка

$$|a^{(2)}_{n,x^2}(x,t)| = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_0} O\left(n^{-1}\widetilde{\beta}_n(\mu)\right) |d\mu|,$$

после чего по лемме 2.26 имеем

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |a^{(2)}_{n,x^2}(x,t)| = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_0} \sum_{n=n_1}^{n_2} O\left(n^{-1}\widetilde{\beta}_n(\mu)\right) |d\mu| = O\left(\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}}\right),$$

где оценка $O(\cdot)$ равномерна по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-T, T]$. Тем самым утверждение леммы получено для рядов $\sum a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)$, $j = 0, 1, 2$. Аналогично (даже проще) исследуются ряды $\sum a^{(j)}_{n,t_j}(x,t)$, $j = 0, 1, 2$. □

2.3.5 Классическое решение задачи (2.62)–(2.65)

Теорема 2.24. *Формальное решение $u(x,t)$ задачи* (2.62)–(2.65) *является классическим решением при $\varphi(x) \in C^2[0, \pi]$ и выполнении условий* (2.66).

Доказательство. Для формального решения в силу формулы (2.69) и аналитичности $M_\rho g$ по λ имеем

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g) \cos \rho t \, d\lambda -$$
$$- \sum_{n \geqslant n_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} [v_1(x,\rho)(g, z_1) + v_2(x,\rho)(g, z_2)] \cos \rho t \, d\lambda. \quad (2.101)$$

Отсюда на основании оценок (2.99) по леммам 2.23–2.25 получаем, что ряд в (2.101) и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием один раз по x или по t, сходятся абсолютно и равномерно при $x \in [0, 1]$ и $t \in [-T, T]$ при любом $T > 0$. Таким образом, в этом случае процедура ускорения сходимости рядов не требуется. Поэтому $u(x,t)$ удовлетворяет начальным и граничным условиям. Далее, по лемме 2.33 формальное решение $u(x,t)$ на основании теорем 2.18 и 2.23 дважды непрерывно дифференцируемо. Докажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.62). Обозначим через M оператор $M = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. Тогда по теореме 2.23

$$Mu_0(x,t) = 0.$$

Далее имеем

$$Mu_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} M((R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t)\,d\lambda = \frac{q(x)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t\,d\lambda,$$

$$Mu_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}M\bigl(J(x,\rho)\cos\rho t\bigr)\,d\lambda.$$

Но

$$M\left(v_j(x,\rho)\cos\rho t\right) = -q(x)v_j(x,\rho)\cos\rho t, \quad M\bigl(v_j^0(x,\rho)\cos\rho t\bigr) = 0.$$

Значит (см. также лемму 2.22),

$$Mu_2(x,t) = \frac{q(x)}{2\pi i}\sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda.$$

Таким образом, $Mu = -q(x)u(x,t)$. □

Список литературы

1. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. М. : Наука, 1983.
2. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1953.
3. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики : в 4 т. М. : Гостехиздат, 1953. Т. 4.
4. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. М. : Гостехиздат, 1953.
5. *Ильин В. А.* Избранные труды : в 2 т. М. : Изд-во ООО «Макс-пресс», 2008. Т. 1.
6. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений // УМН. 1960. Т. 15, вып. 2. С. 97–154.
7. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991.
8. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1950.
9. *Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях. М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1950.
10. *Lanczos C.* Discourse of Fourier Series. Edinburgh ; London : Oliver and Boyd, Ltd., 1966.
11. *Нерсесян А. Б.* Ускорение сходимости разложений по собственным функциям // Докл. НАН Армении. 2007. Т. 107, № 2. С. 124–131.
12. *Чернятин В. А.* К уточнению теоремы существования классического решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 9. С. 1569–1576.
13. *Чернятин В. А.* К решению одной смешанной задачи для неоднородного уравнения с частными производными четвертого порядка // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 2. С. 343–345.
14. *Чернятин В. А.* О необходимых и достаточных условиях существования классического решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 5. С. 1080–1083.
15. *Чернятин В. А.* Классическое решение смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения // Численные методы решения краевых и начальных задач для дифференциальных уравнений. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986. С. 17–36.
16. *Чернятин В. А.* К уточнению теоремы существования решения смешанной задачи для неоднородного уравнения теплопроводности // Численный анализ : методы, алгоритмы, программы. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988. С. 126–132.
17. *Чернятин В. А.* О разрешимости смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 4. С. 717–720.
18. *Андреев А. А.* О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом // Дифференциальные уравнения и их приложения : тр. 2-го междунар. семинара. Самара, 1998. С. 5–18.
19. *Хромов А. П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Матем. заметки. 1998. Т. 64, № 6. С. 932–949. DOI: 10.4213/mzm1472.

20. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.
21. *Курдюмов В. П. Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных функций интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Изв. АН. Сер. математическая. 2012. Т. 76, № 6. С. 106–121.
22. *Dankl Ch. G.* Differential-Difference Operators Associated to Reflection Groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 311, № 1. P. 167–183.
23. *Платонов С. С.* Разложение по собственным функциям для некоторых функционально-дифференциальных операторов // Тр. Петрозавод. гос. ун-та. Сер. математическая. 2004. Вып. 11. С. 15–35.
24. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П.* Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией // Докл. АН. 2007. Т. 414. № 4. С. 443–446.
25. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. АН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140.
26. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 51–63.
27. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О резольвентном подходе в одной смешанной задаче для волнового уравнения // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы междунар. Воронеж. зим. матем. шк. Воронеж : Изд-во ВГУ, 2015. С. 56–59.
28. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О резольвентном подходе в методе Фурье для волнового уравнения в несамосопряженном случае // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы междунар. Воронеж. зим. матем. шк. Вороенж : Изд-во ВГУ, 2015. С. 60–61.
29. *Хромов А. П.* О поведении формального решения в методе Фурье для волнового уравнения // Современные методы теории функций и смежные проблемы : Материалы междунар. Воронеж. зим. матем. шк., Воронеж, 27 янв.–2 февр. 2015. Воронеж : Изд-во ВГУ, 2015. С. 187–189.
30. *Курдюмов В. П. Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциального оператора переменной структуры // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7, вып. 2. С. 20–25.
31. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Оператор интегрирования с инволюцией, имеющей степенную особенность // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 4. С. 18–33.
32. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 1. С. 3–10.
33. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Обоснование метода Фурье в смешанных задачах с инволюцией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 3–12.
34. *Халова В. А., Хромов А. П.* Интегральный оператор с негладкой инволюцией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 40–45.

35. *Хромов А. П.* Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 17–22.
36. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка с инволюцией // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 2. С. 151–154.
37. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51, № 12. С. 2233–2246.
38. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977.
39. *Бурлуцкая М. Ш.* Смешанная задача с инволюцией на графе из двух ребер с циклом // Докл. АН. 2012. Т. 447, № 5. С. 479–482.
40. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969.
41. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 2. С. 151–154.
42. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла и его применнеие к исследованию задач для дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1964.
43. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1994.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Как и в главе 2, рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u'_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

и граничных условиях следующих трех видов:

а) $u(0,t) = u(1,t) = 0;$ (3)

б) $u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0,$ (4)

$u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0;$ (5)

в) $u'_x(0,t) + \beta u'_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0,$ (6)

$\alpha u(0,t) + u(1,t) = 0.$ (7)

Считаем, что $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначна, α, β, α_i, β_i $(i = 1,2)$ — комплексные числа. Условие $u'_t(x,0) = 0$ берется для простоты. Граничные условия а), б), в) охватывают все линейные двухточечные граничные условия (условие в), в которых β стоит перед $u'_x(0,t)$, α — перед $u(1,t)$, сводятся к в) заменой $x = 1 - \xi$ и поэтому идёт не в счет.

Резольвентный подход в методе Фурье позволяет успешно провести дальнейшее исследование формального решения при условиях на φ более слабых, чем это требуется для классического решения. В итоге получаем различные виды обобщенных решений. Здесь без доказательств приведем некоторые факты в этом направлении [27–29].

1. Рассмотрим задачу (1)–(3) и будем считать, что

$$\varphi(x) \in W_2^2[0,1], \qquad \varphi(0) = \varphi(1) = 0,$$

где $W_2^2[0,1] = \{f(x) \in C^1[0,1] |\ f'(x)$ абсолютно непрерывна и $f''(x) \in L_2[0,1]\}$. В этом случае теорема 2.2 имеет место, только теперь $g = (L - \mu_0 E)\varphi$ принадлежит $L_2[0,1]$.

Лемма 1. *Ряд $u_2(x,t)$ и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x и t до второго порядка, сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [-T,T]$ при любом $T > 0$.*

Лемма 2. *Имеет место формула (см.* (2.8)*)*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+t) + \Phi(x-t)],$$

где $\Phi(x) \in W_2^2[-A, A]$ *при любом* $A > 0$, $\Phi(x) = -\Phi(-x)$, $\Phi(2+x) = \Phi(x)$ *и* $\Phi(x) = \varphi_1(x) = R_{\mu_0} g$ *при* $x \in [0,1]$.

Теорема 1. *Функция* $u_0(x,t)$ *из* (2.8) *есть решение уравнения*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)[u(x,t) - u_0(x,t)] = -q(x)u(x,t) \tag{8}$$

при условиях (2) *и* (3).

Теорема 2. *Функция* $u(x,t)$ *непрерывно дифференцируема по* $x \in [0,1]$ *и* $t \in (-\infty, \infty)$, $u'_x(x,t)$ ($u'_t(x,t)$) *абсолютно непрерывна по* x *(по* t*),* $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ *конечны почти при всех* x *и* t *и для них выполняется* (1)*, а для всех* $x \in [0,1]$ *и* $t \in (-\infty, \infty)$ *еще* (2) *и* (3)*, т. е.* $u(x,t)$ *есть решение задачи* (1)–(3)*, когда уравнение* (1) *выполняется лишь почти всюду по* x *и* t.

2. Рассмотрим задачу (1), (2) при условиях б). Считаем теперь ,что

$$\varphi(x) \in W_2^2[0,1],$$
$$\varphi'(0) + \alpha_1\varphi(0) + \beta_1\varphi(1) = \varphi'(1) + \alpha_2\varphi(0) + \beta_2\varphi(1) = 0.$$

В этом случае теорема 2.9 также сохраняется, но теперь $g(x) = (L - \mu_0 E)\varphi \in L_2[0,1]$. Важно, что и лемма 1 сохраняется. Лемма 2 также сохраняется, только теперь $\Phi(x) = -\Phi(-x)$ заменяется на $\Phi(x) = \Phi(-x)$.

Теорема 3. *Функция* $u(x,t)$ *есть решение* (8) *при условиях* (2), (4), (5).

Теорема 4. *Функция* $u(x,t)$ *есть решение задачи* (1), (2), (4), (5), *только теперь уравнение* (1) *выполняется лишь почти при всех* x *и* t.

3. Рассмотрим задачу (1), (2) при условиях в). Дополнительно считаем, что $1 + \alpha\beta \neq 0$.

Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(x) \in W_2^2[0,1],$$

$$\varphi'(0) + \beta\varphi(1) + \alpha_1\varphi(0) + \beta_1\varphi(1) = \alpha\varphi(0) + \varphi(1) = 0.$$

Теорема 2.18 сохраняется

Лемма 3. *Имеет место*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+t) + \Phi(x-t)],$$

где $\Phi(x) \in W_2^2[-A, A]$ *при любом* $A > 0$, *причем*

$$\Phi(-x) = \frac{1}{1+\alpha\beta}[(1-\alpha\beta)\Phi(x) - 2\beta\Phi(1-x)],$$

$$\Phi(1+x) = \frac{1}{1+\alpha\beta}[(-2\alpha)\Phi(x) + (\alpha\beta - 1)\Phi(1-x)],$$

$$\Phi() = \varphi_1(x) = R^0_{\mu_0} g \quad \text{при} \quad x \in [0,1].$$

Теорема 5. *Функция* $u(x,t)$ *из* (2.35) *есть решение* (8) *при условиях* (2) *и в).*

Теорема 6. *Функция* $u(x,t)$ *есть решение задачи* (1), (2) *при условиях в), только теперь уравнение* (1) *удовлетворяется почти всюду по* x *и* t.

4. Здесь рассмотрим случай, когда $\varphi(x)$ всего лишь произвольная функция из $L_2[0,1]$.

Имеет место

Теорема 7. *Если* $\varphi(x) \in L_2[0,1]$, *то ряд формального решения задачи* (1), (2) *при любых из условий а)–в) сходится почти всюду и для его суммы* $u(x,t)$ *верно* $u(x,0) = \varphi(x)$ *при* $x \in [0,1]$ *почти всюду. Более того, если* $\varphi_h(x) \in W_2^2[0,1]$ *с краевыми условиями, рассмотренными выше, и* $\varphi_h(x)$ *сходится к* $\varphi(x)$ *в* $L_2[0,1]$ *при* $h \to 0$, *то решение* $u_h(x,t)$ *смешанной задачи для такой* $\varphi_h(x)$ *сходится к* $u(x,t)$ *в* $L_2[Q_T]$ *при любом* $T > 0$, *где* $Q_T = \{[0,1] \times [-T,T]\}$.

Таким образом, и в этом случае можно $u(x,t)$ считать обобщенным решением задачи (1), (2) с одним из соответствующих граничных условий а), б) или в).

Дадим схему доказательства теоремы 7 при граничных условиях а).

Формальное решение $u(x,t)$ по методу Фурье представим в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t),$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}\right)(R^0_\lambda\varphi)\cos\rho t\, d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}\right)(R_\lambda\varphi - R_\lambda^0\varphi)\cos\rho t\, d\lambda.$$

Тогда ряд $u_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T, причем

$$\max_{Q_T}|u_1(x,t)| \leqslant C_T\|\varphi\|, \tag{9}$$

где постоянная C_T зависит только от T и $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$.

Далее, для $u_0(x,t)$ имеет место формула

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+t) + \Phi(x-t)],$$

где $\Phi(x) = 2\sum(\varphi, \sin n\pi\xi)\sin n\pi\xi$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2[0,1]$. По теореме Карлесона ряд $\Phi(x)$ сходится почти всюду. Поэтому $u(x,t)$ сходится почти всюду.

Пусть $\varphi_h(x) \in W_2^2[0,1]$ и $\varphi_h(0) = \varphi_h(1) = 0$. Так как

$$\|u_0(x,t)\|_{L_2[Q_T]} \leqslant C_T\|\varphi\|, \tag{10}$$

то из (9) и (10) получаем

$$\|u_h(x,t) - u(x,t)\|_{L_2[Q_T]} \leqslant C_T\|\varphi_h - \varphi\|. \tag{11}$$

Из (11) следует утверждение теоремы.

Р а з д е л II

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ НА НУЛЬМЕРНЫХ ГРУППАХ

ВВЕДЕНИЕ

Вейвлет-базисы появились в начале 90-х годов XX века и произвели подлинный переворот в задачах обработки информации [1–3]. Построение таких базисов основано на понятии кратномасштабного анализа (далее КМА), введенного Й. Мейером и С. Малла [4, 5]. В начале XXI века задачи p-адической математической физики привели к появлению p-адического вейвлет-анализа, т. е. анализа не на числовой прямой $\mathbb{R}$, а на поле p-адических чисел [6–11]. Аддитивная группа поля Q_p всех p-адических чисел является локально-компактной нульмерной группой, и при построении вейвлет-теории на Q_p фактически не используется наличие операции умножения, так как оператор растяжения можно определить без нее. Нульмерными группами являются также произведения полей Q_p, группы Виленкина и их произведения [12, 13]. Аддитивная группа любого локального поля положительной характеристики также является нульмерной группой [14–16]. Поэтому естественно изучать КМА и вейвлет-анализ на наиболее общем объекте, каковым является нульмерная группа.

В настоящем разделе изложены основы этой теории, которые позволят заинтересованным лицам продолжить дальнейшие исследования в этой области. Кроме теории вейвлетов на произвольной нульмерной группе, обсуждаются вопросы построения вейвлетов на группах Виленкина.

1 НУЛЬМЕРНЫЕ ГРУППЫ И ИХ ХАРАКТЕРЫ

1.1 Компактные нульмерные группы

Определение 1.1. Пусть $(G, \dot{+})$ — коммутативная группа, а $\mathscr{N}$ — топология в G. Группу G с топологией $\mathscr{N}$ называют *топологической группой*, если

1) операция $\dot{+}$ непрерывна в топологии $\mathscr{N}$, т. е.

$$\forall\, x, y \in G,\ \forall\, O(x\dot{+}y)\ \exists\, O(x)\ \exists\, O(y),\ O(x)\dot{+}O(y) \subset O(x\dot{+}y);$$

2) операция перехода к противоположному элементу является непрерывной, т. е.

$$\forall\, x \in G,\ \forall\, O(\dot{-}x)\ \exists\, O(x),\ \dot{-}O(x) \subset O(\dot{-}x).$$

Пример 1.1. Пусть $P = (p_k)_{k=0}^{\infty}$ — последовательность простых чисел, G — совокупность последовательностей $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots)$, $x_k = \overline{0, p_k - 1}$. Определим операцию сложения $\oplus$ как покоординатное сложение по модулю p_k, т. е.

$$x \oplus y = (x_0 \oplus y_0, x_1 \oplus y_1, \dots, x_{n-1} \oplus y_{n-1}, \dots), \quad x_k \oplus y_k = (x_k + y_k) \operatorname{mod} p_k.$$

С такой операцией множество G будет коммутативной группой. Множества

$$G_n = \{(0_0, \dots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots) : x_k = \overline{0, p_k - 1}\}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

образуют базу окрестностей нуля и являются подгруппами в G. Множества

$$G_n(x) = \{(x_0, \dots, x_{n-1}, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots)\}$$

образуют базу топологии в G. Проверим это. Очевидно, что два множества $G_n(x)$ и $G_m(y)$ или не пересекаются, или одно включается в другое, а именно $G_m(y) \subset G_n(x)$ при $n \leqslant m$. В этом случае $G_m(y) \subset G_m(y) \bigcap G_n(x)$, и, значит, множества $G_n(x)$ вместе с пустым множеством образуют топологию, элементами которой являются всевозможные объединения окрестностей $G_n(x)$.

Проверим, что операция $\oplus$ непрерывна. Выбираем $x, y \in G$, $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$, $y = (y_0, y_1, \dots, y_n, \dots)$. Тогда

$$x \oplus y = (x_0 \oplus y_0, x_1 \oplus y_1, \dots, x_n \oplus y_n, \dots).$$

Выберем произвольную окрестность $G_n(x\oplus y)$ из базы окрестностей. Она имеет вид

$$G_n(x\oplus y) = (x_0\oplus y_0, x_1\oplus y_1, \dots, x_{n-1}\oplus y_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots).$$

Выберем

$$G_n(x) = \{(x_0, \dots, x_{n-1}, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots)\},$$
$$G_n(y) = \{(y_0, \dots, y_{n-1}, \eta_n, \eta_{n+1}, \dots)\}.$$

Тогда

$$G_n(x)\oplus G_n(y) = \{(x_0\oplus y_0, \dots, x_{n-1}\oplus y_{n-1}, \zeta_n, \zeta_{n+1}\dots):\ \zeta_j = \overline{0, p_n - 1}\}.$$

Отсюда $G_n(x)\oplus G_n(y) = G_n(x\oplus y)$. Аналогично доказывается равенство $\ominus G_n(x) = G_n(\ominus x)$. Таким образом, операции сложения и перехода к обратному непрерывны, и, значит, $(G,\oplus)$ — топологическая группа.

Покажем, что группа $(G,\oplus)$ компактна. Пусть $G = \bigcup\limits_{\alpha} G^{(\alpha)}$, где $G^{(\alpha)}$ — открытое множество в $(G,\dot{+})$. Покажем, что из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Так как $G^{(\alpha)} = \bigcup\limits_{n,x} G_n(x)$, то можно считать, что $G = \bigcup\limits_{n,x_\alpha} G_n(x_\alpha) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\bigcup\limits_{x_\alpha} G_n(x_\alpha)$. При любом n множества $G_n(x_\alpha)$, входящие в покрытие, можно считать дизъюнктными. Если при $n = 0$ $\bigcup\limits_{x_\alpha} G_0(x_\alpha) = G$, то все доказано. В противном случае множество $F_0 = G\setminus \bigcup\limits_{x_\alpha} G_0(x_\alpha) \neq \varnothing$ и оно есть объединение смежных классов, т. е. $F_0 = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\bigcup\limits_{x_\alpha} G_n(x_\alpha)$. Если $\bigcup\limits_{x_\alpha} G_1(x_\alpha) = F_0$, то все доказано, иначе рассматриваем множество $F_1 = F_0\setminus \bigcup\limits_{x_\alpha} G_1(x_\alpha)$ и продолжаем рассуждения. Процесс построения множеств F_n закончится на некотором шаге, так как в противном случае получим элемент $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$, принадлежащий всем F_n, т. е. не входящий в покрытие. Компактность доказана.

Группу $(G,\oplus)$ обычно называют P-ичной группой Виленкина. В дальнейшем мы будем рассматривать группу Виленкина как нульмерную группу с ограничением на групповую операцию.

Пример 1.2. Пусть p — простое, G — совокупность последовательностей

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots), \quad x_j = \overline{0, p-1}.$$

Как и в примере 1.1, множества

$$G_n = \{(0_0, \dots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots) : x_k = \overline{0, p-1}\}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

образуют базу окрестностей нуля. Множества

$$G_n(x) = \{(x_0, \dots, x_{n-1}, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots)\}$$

образуют базу топологии в G. Группа целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ состоит из последовательностей $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$, $x_k = \overline{0, p-1}$. Сумма $x \dot{+} y = z = (z_k)$ элементов $x = (x_k), y = (y_k)$ в G определяется алгоритмом

$\alpha_1 := 0;$
for $k := 0$ to ∞ do
if $x_k + y_k + \alpha_{k-1} = \alpha_k p + \beta_k$ then $z_k := \beta_k$.

Таким образом, операция $\dot{+}$ в G определяется как покоординатное сложение с переносом 1 в следующий разряд. Роль нулевого элемента играет последовательность $0 = (0, 0, \dots)$. С такой операцией G является коммутативной группой, а окрестности G_n — подгруппами. При этом $x \dot{+} G_n = G_n(x)$. Отсюда сразу следует, что $G_n(x) \dot{+} G_n(y) = G_n(x \dot{+} y)$ и $\dot{-} G_n(x) = G_n(\dot{-} x)$, т.е. операции сложения и перехода к обратному непрерывны. Мы доказали, что $(G, \dot{+})$ является топологической группой. Ее называют группой (или кольцом) целых p-адических чисел и обозначают $\mathbb{Z}_p$.

Определение 1.2. Пусть $(G, \dot{+}, \mathscr{N})$ — компактная топологическая группа. Группа G называется *нульмерной*, если существует счетная последовательность вложенных подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots \tag{1.1}$$

такая, что $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$, и такая, что смежные классы $G_n \dot{+} g$ образуют базу топологии $\mathscr{N}$.

Замечание 1.1. Множества G_n образуют базу окрестностей нуля. При каждом n смежные классы $G_n \dot{+} x$ либо не пересекаются, либо совпадают. Более того, два смежных класса $G_n \dot{+} x$ и $G_m \dot{+} y$ либо не пересекаются, либо один включается в другой. В самом деле, пусть $m \geqslant n$ и $G_n \dot{+} x \bigcap G_m \dot{+} y \neq \varnothing$. Тогда $\exists\, z = g_n \dot{+} x$, $z = g_m \dot{+} y$,

$g_n \in G_n, g_m \in G_m \subset G_n$. Выберем элемент $g \in G_m \dotplus y$ и покажем, что $g \in G_m \dotplus x$. Так как $g \in G_m \dotplus y$, то $g = y_m \dotplus y$, где $y_m \in G_m \subset G_n$. Но $g_m \dotplus y = g_n \dotplus x$, следовательно, $y = g_n \dot{-} g_m + x \doteq \zeta_n \dotplus x$, где $\zeta_n = g_n \dot{-} g_m \in G_n$. Тогда $g = y_m \dotplus y = y_m \dotplus \zeta_n \dotplus x \in G_n \dotplus x$, т. е. $G_m \dotplus y \subset G_n \dotplus x$.

Это означает, что семейство сдвигов $\{G_n \dotplus x\}_{n,x}$ образует базу некоторой топологии, которая определена однозначно. Мы предполагаем, что данная топология совпадает с исходной топологией $\mathscr{N}$.

Предложение 1.1. *Если топология $\mathscr{N}$ задана цепочкой подгрупп* (1.1), *то операция $\dotplus$ и операция перехода к обратному непрерывны в этой топологии.*

Доказательство. Надо повторить доказательство непрерывности. $\square$

Предложение 1.2. *Пусть $(G, \dotplus)$ — компактная нульмерная группа. Тогда*

1) *$G_n \dotplus x$ — одновременно открытое и замкнутое множество;*
2) *$G_n \dotplus x$ — компактное множество.*

Доказательство. 1. Множества $G_n \dotplus x$ при фиксированном n образуют открытое покрытие множества G. Так как G компактно, то из него можно выбрать конечное подпокрытие различных множеств $G_n \dotplus x$, покрывающих G конечное число. Пусть это множества $(G_n \dotplus x_j)_{j=0}^{m_n-1}$. Тогда каждое из множеств $G_n \dotplus x_j$ имеет вид $G_n \dotplus x_j = G \setminus \bigsqcup\limits_{k \neq j} (G_n \dotplus x_k)$, значит, $G_n \dotplus x_j$ — открыто и замкнуто.

2. Пусть $\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$ — покрытие множества $G_n \dotplus x$ открытым множеством. Добавляя к нему множества $G_n \dotplus x_j$ $(j = 0, \ldots, n_m - 1)$, не содержащие x, получим покрытие множества G. Из него выделяем конечное покрытие множества G. Удалим из него добавленные множества $G_n \dotplus x_j$. Получим конечное покрытие множества $G_n \dotplus x$ множествами U_α. $\square$

Предложение 1.3. *Для любого $n \in \mathbb{N}_0$ фактор-группа G_n / G_{n+1} конечна.*

Доказательство. Смежные классы G_{n+1} по G_n имеют вид $G_{n+1} \dotplus x$, где $x \in G_n \subset G$. Поэтому смежных классов по подгруппе G_{n+1} конечное число. $\square$

Определение 1.3. Цепочка вложенных подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots,$$

для которых порядки p_n фактор-групп G_n/G_{n+1} есть простые числа, называют *основной цепочкой.*

Лемма 1.1 (теорема Силова [17])**.** *Пусть G — конечная группа, p — порядок группы. Если число q^α делит p (q — простое, $\alpha \in \mathbb{N}$), то в G существуют подгруппы порядка q^α.*

Теорема 1.1. *Пусть G — коммутативная, компактная топологическая группа и топология задана цепочкой подгрупп*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots$$

Пусть p_n есть порядок фактор-группы G_n/G_{n+1}. Цепочку подгрупп можно дополнить так, что числа p_n будут простыми.

Доказательство. Пусть $p_n = (G_n/G_{n+1})^\sharp$ и $p_n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_{n_s}^{\alpha_s}$ (q_j — простые). Пусть $G_{n+1} \dot{+} x_j$ ($j = 0, 1, \dots, p_n - 1$) — смежные классы группы G_n по подгруппе G_{n+1}. Так как фактор-группа G_n/G_{n+1} имеет порядок p_n и q_1 делит p_n, то по теореме Силова существует подгруппа $H \subset (G_n/G_{n+1})$ порядка q_1. Эта подгруппа состоит из q_1 смежных классов $G_{n+1} \dot{+} x_{n_j}$ ($j = 1, 2, \dots, q_1$). Теперь определяем подгруппу $G_{n,1}$ равенством $G_{n,1} = \bigsqcup_{j=1}^{q_1} G_{n+1} \dot{+} x_{n_j}$. Очевидно, что

$$G_n \supset G_{n,1} \supset G_{n+1}$$

и

$$(G_n/G_{n,1})^\sharp \cdot (G_{n,1}/G_{n+1})^\sharp = (G_n/G_{n+1})^\sharp.$$

Поэтому

$$(G_n/G_{n,1})^\sharp \cdot q_1 = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_{n_s}^{\alpha_s} \quad \Rightarrow \quad (G_n/G_{n,1})^\sharp = q_1^{\alpha_1 - 1} q_2^{\alpha_2} \dots q_{n_s}^{\alpha_s}.$$

Применяя эти рассуждения к группе $G_n/G_{n,1}$ порядка p_n/q_1, находим подгруппу $G_{n,1}$ такую, что

$$G_n \supset G_{n,2} \supset G_{n,1} \supset G_{n+1}, \quad (G_n/G_{n,2})^\sharp = q_1^{\alpha_1 - 2} q_2^{\alpha_2} \dots q_{n_s}^{\alpha_s}.$$

Повторяя эти рассуждения α_1 раз, получим подгруппы

$$G_n \supset G_{n,\alpha_1} \supset G_{n,\alpha_1 - 1} \supset \dots \supset G_{n,1} \supset G_{n+1}$$

такие, что $(G_n/G_{n,\alpha_1})^\sharp = q_2^{\alpha_2}\dots q_{n_s}^{\alpha_s}$ и порядки подгрупп

$$G_{n,\alpha_1}/G_{n,\alpha_1-1},\ G_{n,\alpha_1-1}/G_{n,\alpha_1-2},\ \dots,\ G_{n,1}/G_{n+1}$$

равны q_1. Повторяя эти рассуждения для множителей $q_2,\dots,q_{s_n}^{\alpha_s}$, получим утверждение теоремы. $\square$

Замечание 1.2. Описанный процесс называют обычно уплотнением цепочки подгрупп.

Определение 1.4. Цепочку подгрупп, для которой порядки

$$p_n = (G_n/G_{n+1})^\sharp$$

есть простые числа, называют *основной цепочкой подгрупп.*

Замечание 1.3. Топология, порожденная исходной цепочкой подгрупп $(G_n)_{n=0}^\infty$ и основной цепочкой, которая получается после уплотнения, эквивалентна исходной топологии. Поэтому мы всегда будем задавать топологию основной цепочкой.

Определение 1.5. Пусть $(G,\dot+)$ — компактная нульмерная группа с основной цепочкой подгрупп $(G_n)_{n=0}^\infty$. При каждом n выберем элемент $g_n\in G_n\setminus G_{n+1}$ и зафиксируем. Последовательность $(g_n)_{n=0}^\infty$ будем называть *базисной.*

Теорема 1.2. *Пусть $(g_n)_{n=0}^\infty$ — базисная последовательность. Любой элемент $x\in G$ единственным образом представим в виде суммы ряда*

$$x=\sum_{n=0}^\infty x_n g_n, \tag{1.2}$$

где $x_n=\overline{0,p_n-1}$.

Доказательство. 1. Выберем $x\in G$. Пусть $x\in G_0\setminus G_1$. Тогда x попадает в один из смежных классов $G_1\dot+x_j$ $(j=0,1,\dots,p_0-1)$. Так как p_0 — простое число, то фактор-группа G_0/G_1 циклическая, т. е. множества

$$G_1, G_1\dot+g_0, G_1\dot+2g_0,\dots,G_1\dot+(p_0-1)g_0$$

образуют группу G_0/G_1. Элемент x можно записать в виде

$$x=x_0\cdot g_0\dot+y_1,$$

где $y_1 \in G_1$, а x_0 принимает значения $0, 1, \dots, p_0 - 1$. Если $x \in G_1$, то равенство $x = x_0 g_0 \dot{+} y_1$ также выполняется, если положить $x_0 = 0$. Таким образом, всегда $x = x_0 g_0 \dot{+} y_1$, где $y_1 \in G_1$. Проводя эти рассуждения для элемента $y_1 \in G_1$ получаем, что

$$y_1 = x_1 g_1 \dot{+} y_2,$$

где $y_2 \in G_2$ и $x_1 = \overline{0, p_1 - 1}$. Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ мы можем записать представление

$$x = x_0 g_0 \dot{+} x_1 g_1 \dot{+} \dots \dot{+} x_n g_n \dot{+} y_n, \tag{1.3}$$

где $x_j = \overline{0, p_j - 1}$, $y_n \in G_n$. Так как $y_n \in G_n$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_0 = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ (0 — нулевой элемент группы G). Переходя в равенстве (1.3) к пределу, получаем

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k g_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k g_k.$$

2. Покажем, что любой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k g_k \quad (x_k = \overline{0, p_k - 1}) \tag{1.4}$$

сходится к единственному элементу $x \in G$. Ясно, что $x_0 g_0$ принадлежит некоторому смежному классу $G_1 \dot{+} t_1$ $(t_1 \in G_0)$, $x_0 g_0 \dot{+} x_1 g_1$ — смежному классу $G_2 \dot{+} t_2$ $(t_2 \in G_1 \dot{+} t_1)$ и $G_2 \dot{+} t_2 \subset G_1 \dot{+} t_1$. Вообще $x_0 g_0 \dot{+} \dots \dot{+} x_n g_n$ принадлежит смежному классу $G_n \dot{+} t_n \subset G_{n-1} \dot{+} t_{n-1}$. Последовательность этих классов есть убывающая последовательность замкнутых множеств. Покажем, что пересечение этих классов не пусто. Предположим, что $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} (G_n \dot{+} t_n) = \varnothing$. Тогда последовательность дополнений $(G_n \dot{+} t_n)'$ образует открытое покрытие G, и так как G компактно, то из него можно выбрать конечное подпокрытие

$$\bigcup_{k=1}^{l} (G_{n_k} \dot{+} t_{n_k})' \supset G,$$

причем

$$(G_{n_1} \dot{+} t_{n_1})' \subset (G_{n_2} \dot{+} t_{n_2})' \subset \dots \subset (G_{n_l} \dot{+} t_{n_l})'.$$

Но тогда $\bigcup\limits_{k=1}^{l}(G_{n_k}\dot{+}t_{n_k})' = (G_{n_l}\dot{+}t_{n_l})' \neq G$. Получили противоречие. Нетрудно проверить, что элемент $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(G_n\dot{+}t_n)$ единственный и ряд (1.4) сходится к x. Кроме того, очевидно, что если последовательности (x'_k) и (x''_k) различны, то суммы рядов $\sum x'_k g_k$ и $\sum x''_k g_k$ тоже различны. □

Пусть $(G, \dot{+})$ — нульмерная компактная группа с основной цепочкой подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset \dots$, для которой $(G_n/G_{n+1})^\sharp = p_n$. Зададим последовательность (m_n) равенствами $m_0 = 1, m_{n+1} = m_n p_n$ и определим отображение группы G на отрезок $[0,1]$ следующим образом. Пусть $x \in G$ и $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n g_n$ $(a_n = \overline{0, p_n - 1})$. Положим по определению

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{m_{n+1}}.$$

Построенное отображение обладает следующими свойствами:

1) $\varphi: \ G \overset{\text{на}}{\to} [0,1]$;

2) если (a_n) стационарная последовательность и $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n g_n$, то найдется элемент $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n g_n$ такой, что $y \neq x$ и $\varphi(x) = \varphi(y)$;

3) если $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n g_n$ и (a_n) — не стационарная последовательность, то для любого $y \neq x$, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Таким образом, φ отображает G на отрезок $[0,1]$ с нарушением взаимной однозначности в стационарных точках. Это отображение становится взаимно однозначным, если каждую p-ично рациональную точку q отрезка $[0,1]$ считать дважды: как левую $q-0$ и правую $q+0$. Такой отрезок называют модифицированным и обозначают через $[0,1]^*$.

Построение меры на группе G проводится по классической схеме. Вначале определяется мера на полукольце смежных классов, затем — внешняя мера и измеримые по ней множества. Измеримые множества образуют σ-алгебру. Подробное изложение этого метода приведено в теремах 1.3–1.7.

Теорема 1.3. *Пусть* $(G, \dot{+}, \mathscr{N})$ — *компактная нульмерная группа с основной цепочкой подгрупп*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots$$

и $p_n = (G_n/G_{n+1})^\sharp$ *— простые числа. Тогда совокупность всех смежных классов* $(G_n\dot{+}h)$ *вместе с пустым множеством образуют полукольцо. Обозначим его через* $\mathscr{M}$.

Доказательство. 1. Пусть $G_{n_1}\dot{+}h_{n_1}$, $G_{n_2}\dot{+}h_{n_2}$ — два пересекающихся смежных класса и $n_2 \geqslant n_1$. Тогда $G_{n_2}\dot{+}h_{n_2} \subset G_{n_1}\dot{+}h_{n_1}$. Следовательно, $G_{n_2}\dot{+}h_{n_2} \bigcap G_{n_1}\dot{+}h_{n_1} = G_{n_2}\dot{+}h_{n_2} \in \mathscr{M}$.

2. Так как $G_{n_1}\dot{+}h_{n_1} \supset G_{n_2}\dot{+}h_{n_2}$, то смежный класс $G_{n_1}\dot{+}h_{n_1}$ есть дизъюнктное объединение смежных классов $G_{n_2}\dot{+}\tilde{h}_j$. Тогда разность $G_{n_1}\dot{+}h_{n_1} \setminus G_{n_2}\dot{+}h_{n_2}$ есть дизъюнктное объединение смежных классов $G_{n_2}\dot{+}\tilde{h}_j$. □

Теорема 1.4. *Равенства* $\mu(G_n\dot{+}h_n) = \mu G_n = \frac{1}{m_n}$ *и* $\mu\emptyset = 0$ *определяют меру на полукольце* $\mathscr{M}$.

Доказательство. 1. $\mu G_n \geqslant 0$ — очевидно.

2. Пусть $n_2 > n_1$, $G_{n_1}\dot{+}h_{n_1} = \bigsqcup\limits_j G_{n_2}\dot{+}\tilde{h}_j$. При этом количество смежных классов $G_{n_2}\dot{+}\tilde{h}_j$, соответствующих классу $G_{n_1}\dot{+}h_{n_1}$, равно $p_{n_1} \cdot p_{n_1+1} \cdot \dots \cdot p_{n_2-1}$. Поэтому

$$\sum \mu(G_{n_2}\dot{+}\tilde{h}_j) = \frac{1}{m_{n_2}} \cdot p_{n_2-1} \cdot p_{n_2-2} \dots p_{n_1} =$$

$$= \frac{1}{m_{n_1} \cdot p_{n_1} \cdot p_{n_1+1} \dots p_{n_2-1}} \cdot p_{n_1} \dots p_{n_2-1} = \frac{1}{m_{n_1}} = \mu(G_{n_1}\dot{+}h_{n_1}).$$

3. Проверим счетную аддитивность меры μ.

Пусть $G_n\dot{+}h = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty}(G_{n_j}\dot{+}h_j)$ — дизъюнктное объединение смежных классов. Так как все классы $G_{n_j}\dot{+}h_j$ — открытые множества и $G_n\dot{+}h$ — компактное множество, то $G_n\dot{+}h = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N}(G_{n_j}\dot{+}h_j)$, что невозможно. Это означает, что смежный класс $G_n\dot{+}h$ нельзя представить в виде счетного объединения дизъюнктных смежных классов. Пусть $G_n\dot{+}h = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N}(G_{n_j}\dot{+}h_j)$. Если все n_j равны, то в пункте 2 было доказано, что $\mu(G_n\dot{+}h) = \sum\limits_{j=1}^{N}\mu(G_{n_j}\dot{+}h_j)$. Если не все n_j равны между собой, то выберем среди них наибольшее, пусть для определенности это будет n_N. Тогда каждый из смежных классов $G_{n_j}\dot{+}h_j$ представляем в виде конечного дизъюнктного объединения $G_{n_j}\dot{+}h_j = \bigsqcup_l (G_{n_N}\dot{+}\tilde{h}_{j,l})$, значит, $G_n\dot{+}h = \bigsqcup_{j=1}^{N}\bigsqcup_l (G_{n_N}\dot{+}\tilde{h}_{j,l})$. Снова по пункту 2

$$\mu(G_n\dot{+}h) = \sum_{j=1}^{N}\sum_l \mu(G_{n_N}\dot{+}\tilde{h}_{j,l}) = \sum_{j=1}^{N}\mu(G_{n_j}\dot{+}h_j),$$

и счетная аддитивность доказана. □

Теорема 1.5. *Мера μ на $\mathscr{M}$ инвариантна относительно сдвига.*

Доказательство. $E \in \mathscr{M} \Rightarrow E = G_n\dot{+}h_n \Rightarrow E\dot{+}g = G_n\dot{+}h_n\dot{+}g \Rightarrow$ $\Rightarrow \mu E = \mu G_n, \mu(E\dot{+}g) = \mu G_n$. □

Так как μ — мера на полукольце $\mathscr{M}$, то ее можно продолжить на σ-алгебру по схеме Каратеодори. Напомним, что этот процесс основан на следующих утверждениях.

Теорема 1.6. *Пусть μ^* — внешняя мера, построенная по мере μ на $\mathscr{M}$, т. е.*

$$\mu^* = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu E_k : \bigcup E_k \supset E,\ E_k \in \mathscr{M}\right\}.$$

Тогда μ^* инвариантна относительно сдвига.

Доказательство.

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{\bigsqcup_k (G_{n_k}\dot{+}h_k)\supset E} \mu(G_{n_k}\dot{+}h_k) =$$

$$= \inf \sum_{\bigsqcup_k (G_{n_k}\dot{+}h\dot{+}h_k)\supset E\dot{+}h} \mu(G_{n_k}\dot{+}h\dot{+}h_k) = \mu^*(E\dot{+}h). \quad \square$$

Множество $E \subset G$ называется μ^* измеримым, если для любого $A \subset G$

$$\mu^* A = \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\setminus E).$$

Теорема 1.7. *Совокупность $\mathscr{A}$ μ^* измеримых множеств образует σ-алгебру, и μ^* есть мера на $\mathscr{A}$.*

На полукольце $\mathscr{M}$ продолжение μ^* совпадает с μ. Поэтому μ^* обозначают через μ и называют продолжением исходной меры μ на σ-алгебру по схеме Каратеодори. Отметим, что большинство авторов в качестве меры μ выбирают меру Хаара, которая совпадает с введенной нами мерой на борелевских множествах.

Следствие 1.1. *Если* $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}(G_{n_k}\dot{+}h_k)$, *то*

$$\mu E = \sum \mu(G_{n_k}\dot{+}h_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu G_{n_k}.$$

Следствие 1.2. *Множества, полученные из смежных классов* $G_n\dot{+}g$ *с помощью счетного числа операций* $\cap$, $\cup$, $\setminus$, *измеримы.*

Определение 1.6. Положим по определению

$$\begin{aligned} &\rho(x,y) = 0, \quad \text{если } x = y,\\ &\rho(x,y) = \tfrac{1}{m_n}, \quad \text{если } x,y \in G_n\dot{+}h_n, \text{ но } x,y \notin G_{n+1}\dot{+}h_{n+1} \end{aligned} \tag{1.5}$$

или, иначе,

$$\rho(x,y) = \inf\left\{\frac{1}{m_n}:\ x,y \in G_n\dot{+}h_n\right\}. \tag{1.6}$$

Замечание 1.4. Условие $x,y \in G_n\dot{+}h_n$ можно записать в виде $x\dot{-}y \in G_n$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} x \in G_n\dot{+}h_n \quad &\Leftrightarrow \quad x = t\dot{+}g_n, \quad t \in G_n,\\ y \in G_n\dot{+}h_n \quad &\Leftrightarrow \quad y = \tau\dot{+}g_n, \quad \tau \in G_n. \end{aligned}$$

Тогда $x\dot{-}y = t\dot{+}g_n\dot{-}\tau\dot{-}g_n = t\dot{-}\tau \in G_n$. Поэтому для $\rho(x,y)$ можно записать:

$$\rho(x,y) = \inf\left\{\frac{1}{m_n}:\ x\dot{-}y \in G_n\right\}. \tag{1.7}$$

Теорема 1.8. *Равенства* (1.7) *определяют расстояние в* G.

Доказательство. 1. $\rho(x,y) \geqslant 0$ — очевидно.

2. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow\ \forall\, n,\ x,y$ принадлежат одному смежному классу $G_n\dot{+}h_n$. Эти смежные классы образуют убывающую последовательность

$$G_0 = G_0\dot{+}h_0 \supset G_1\dot{+}h_1 \supset \dots \supset G_n\dot{+}h_n \supset G_{n+1}\dot{+}h_{n+1} \supset \dots \tag{1.8}$$

В самом деле, смежные классы $G_n \dot{+} h_n$ и $G_{n+1} \dot{+} h_{n+1}$ или не пересекаются, или один включается в другой, а именно $G_n \dot{+} h_n \supset G_{n+1} \dot{+} h_{n+1}$. Элемент $x \in G_n \dot{+} h_n$ и $x \in G_{n+1} \dot{+} h_{n+1}$, т. е. смежные классы $G_n \dot{+} h_n$ и $G_{n+1} \dot{+} h_{n+1}$ пересекаются, значит, $G_n \dot{+} h_n \supset G_{n+1} \dot{+} h_{n+1}$. Но пересечение классов $G_n \dot{+} h_n$ содержит единственный элемент (так как $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$). Значит, $x = y$.

3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ по определению.

4. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Если $\rho(x, z) = 0$, то это очевидно. Пусть $\rho(x, z) > 0 \Rightarrow \rho(x, z) = \frac{1}{m_n} \Rightarrow x, z \in G_n \dot{+} h_n$ и $z \in G_{n+1} \dot{+} z$, $x \in G_{n+1} \dot{+} x$, причем $G_{n+1} \dot{+} x \cap G_{n+1} \dot{+} z = \varnothing$.

Если $y \in G_{n+1} \dot{+} x$, то $y \notin G_{n+1} \dot{+} z$. Отсюда $\rho(y, z) \geqslant \frac{1}{m_n}$, следовательно, $\rho(x, z) = \frac{1}{m_n} \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$. Аналогично, если $y \in G_{n+1} \dot{+} z$, то $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$. Если же $y \notin G_n \dot{+} g_n$, то $\rho(x, y) \geqslant \frac{1}{m_n}$, $\rho(y, z) > \frac{1}{m_n} \Rightarrow \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$. □

Теорема 1.9. *Расстояние $\rho(x, y)$ определяет исходную топологию в G.*

Доказательство. Покажем, что

$$G_n \dot{+} x = \left\{ y \in G : \ \rho(x, y) \leqslant \frac{1}{m_n} \right\},$$

т. е. $G_n \dot{+} x$ есть окрестность точки x радиуса $r = 1/m_n$.

1. $y \in G_n \dot{+} x \Rightarrow x$ и y принадлежат одному смежному классу, следовательно, $\rho(x, y) \leqslant \frac{1}{m_n}$.

2. Пусть $y \in G$ и $\rho(x, y) \leqslant \frac{1}{m_n}$. Если $y = x$, то $y \in G_n \dot{+} x$. Пусть $y \neq x$. Тогда $\rho(x, y) = \frac{1}{m_k} \leqslant \frac{1}{m_n}$. Отсюда $y \dot{-} x \in G_k \subset G_n$, т. е. $y \in G_n \dot{+} x$. □

1.2 Характеры на компактной нульмерной группе

Определение 1.7. Пусть $(G, \dot{+}, \mathscr{N})$ — компактная нульмерная группа с основной цепочкой подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset \dots$$

и $p_n = (G_n / G_{n+1})^\sharp$ — простые. Функцию $f : \ G \to \mathbb{R}$ или $f : \ G \to \mathbb{C}$ называют *непрерывной в точке* $x_0 \in G$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, G_n, \ \forall\, x \dot{-} x_0 \in G_n, \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{1.9}$$

или, иначе,

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, G_n,\; \forall\, x \in G_n\dot{+}x_0,\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{1.10}$$

Определение 1.8. Функция $f : G \to \mathbb{C}$ называется *равномерно непрерывной на* G, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, G_n,\; \forall\, x, y \in G\; x\dot{-}y \in G_n,\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{1.11}$$

Замечание 1.5. Очевидно, что если f равномерно непрерывна на G, то она непрерывна в каждой точке.

Замечание 1.6. Так как группа G компактная, то согласно теореме Кантора всякая функция, непрерывная на G, будет равномерно непрерывной на G.

Определение 1.9. Функция $h(x)$ называется ступенчатой на G, если G представлено в виде объединения конечного числа дизъюнктных смежных классов

$$G = \bigsqcup_{k=1}^{s} G_{n_k}\dot{+}y_k \tag{1.12}$$

и $h(x)$ постоянны на каждом смежном классе $G_{n_k}\dot{+}y_k$.

Замечание 1.7. Так как смежных классов в (1.12) конечное число, то существует $n = \max\limits_{k=\overline{1,s}} n_k$ и все классы $G_{n_k}\dot{+}y_k$ можно разбить на дизъюнктные смежные классы по подгруппе G_n. Поэтому ступенчатую функцию h можно считать постоянной на смежных классах по некоторой фиксированной группе G_n.

Теорема 1.10. *Любая ступенчатая функция h, определенная на G, непрерывна на G.*

Доказательство. Пусть $h(x) = h_j$ при $x \in G_n\dot{+}y_j$ $(j = 0, 1, \ldots, m_n - 1)$ и все смежные классы $G_n\dot{+}y_j$ дизъюнктны, т. е. $G_n\dot{+}y_j$ — это все смежные классы по подгруппе G_n. Пусть $\varepsilon > 0$. Если $x, y \in G$ и такие, что $x\dot{-}y \leqslant \frac{1}{m_n}$, то x и y принадлежат одному смежному классу $G_n\dot{+}g_j$, тогда $|h(x) - h(y)| = h_j - h_j = 0 < \varepsilon$. □

Определение 1.10. Пусть $f : G \to \mathbb{C}$. Последовательность $\omega_n(f)$, определенная равенствами

$$\omega_n(f) = \sup_{x,y:x\dot{-}y\in G_n} |f(x) - f(y)|,$$

называется *модулем непрерывности*.

Предложение 1.4. *$(\omega_n(f))_{n=0}^{\infty}$ есть убывающая последовательность.*

Доказательство. $\omega_{n+1}(f) \leqslant \omega_n(f)$, так как в определении $\omega_n(f)$ sup берется по более широкому множеству. $\square$

Предложение 1.5. *Функция $f : G \to \mathbb{C}$ непрерывна на G тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n(f) = 0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть f непрерывна. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, G_n,\ \forall\, x, y,\ x\dot{-}y \in G_n\ |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{\substack{x,y\\ x\dot{-}y\in G_n}} |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\ \Rightarrow\ \omega_n(f) \leqslant \varepsilon\ \Rightarrow\ \forall\, p \geqslant n\ ,\omega_{n+p}(f) \leqslant \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n(f) = 0$. Тогда ввиду монотонности

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n,\ \omega_n(f) \leqslant \varepsilon\ \Rightarrow \sup_{x\dot{-}y\in G_n} |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \forall\, x, y, x\dot{-}y \in G_n,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon,$$

т. е. f равномерно непрерывна. $\square$

Предложение 1.6. *Для любой последовательности $\omega_n \downarrow 0$ существует непрерывная функция f, для которой $\omega_n(f) = \omega_n$.*

Доказательство. При каждом $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \sqcup \{0\}$ положим $f(x) = \omega_n$, $x \in G_n \setminus G_{n+1}$ и $f(0) = 0$. Вычислим $\omega_n(f)$. Если $x\dot{-}y \in G_n$, то x и y принадлежат одному и тому же смежному классу $G_n\dot{+}y_n$. Если этот смежный класс отличен от G_n, то $f(x) - f(y) = 0$. Если этот смежный класс равен G_n, то наибольшее значение f на G_n — это ω_n, наименьшее — 0. Значит, $\sup\limits_{x\dot{-}y\in G_n} |f(x) - f(y)| = \omega_n$. Так как $\omega_n \to 0$, то f непрерывна. $\square$

Пусть $(G, \dot{+}, \mathscr{N})$ — компактная нульмерная группа с основной цепочкой подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \ldots,$$

$p_n = (G_n/G_{n+1})^{\sharp}$ — простые, а μ — мера на G, полученная стандартным продолжением меры $\mu(G_n\dot{+}x) = \frac{1}{m_n}$ с полукольца смежных классов по схеме Каратеодори. Так как мера $\mu G = 1 < \infty$, то можно на G определить интеграл, как интеграл Лебега по множеству конечной меры, по известной схеме. Вначале определяем интеграл от измеримой ограниченной функции. Для этого:

1. Разбиваем множество $E \subset G$ на конечное число измеримых дизъюнктных множеств $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k$.

2. Строим верхнюю и нижнюю интегральные суммы

$$\overline{S}(f,(E_k)) = \sum_{k=1}^{n} M_k \mu E_k, \quad \underline{S}(f,(E_k)) = \sum_{k=1}^{n} m_k \mu E_k,$$

где $M_k = \sup_{x\in E_k} f(x)$, $m_k = \inf_{x\in E_k} f(x)$.

3. Определяем верхний и нижний интегралы

$$\overline{I}(f,E) = \inf_{(E_k)} \overline{S}(f,(E_k)), \quad \underline{I}(f,E) = \sup_{(E_k)} \underline{S}(f,(E_k)).$$

4. Всегда $\underline{I}(f,E) \leqslant \overline{I}(f,E)$. Если $\underline{I}(f,E) = \overline{I}(f,E)$, то f назовем интегрируемой на E. Общее значение верхнего и нижнего интегралов назовем интегралом от f и обозначим $\int\limits_E f\,d\mu$.

5. Если f неограничена, то определяем интеграл для положительной функции $f(x) \geqslant 0$ как lim интегралов от срезок

$$f_{(N)}(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leqslant N, \\ N, & f(x) > N. \end{cases}$$

т. е.

$$\int\limits_E f\,d\mu = \lim_{N\to\infty} \int\limits_E f_{(N)}\,d\mu.$$

6. Если f неограничена и имеет произвольный знак, то положим

$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E f^+\,d\mu - \int\limits_E f^-\,d\mu.$$

Определенный таким образом интеграл есть интеграл Лебега на G. Он является абсолютно сходящимся в том смысле, что для измеримой функции f интеграл $\int_E f d\mu$ существует тогда и только тогда, когда существует $\int_E |f| d\mu$.

7. Если $f = \phi + i\psi$, то полагаем

$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E \phi\,d\mu + i\int\limits_E \psi\,d\mu.$$

После этого стандартным способом определяются пространства $L_p(E)$ при $p \geqslant 1$.

Теорема 1.11. *Интеграл* $\int\limits_G f\,d\mu$ *инвариантен относительно сдвига, т. е.* $\forall\ h \in G$

$$\int\limits_G f(x\dot{+}h)\,d\mu(x) = \int\limits_G f(x)\,d\mu(x).$$

Доказательство. Если $G = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ — разбиение группы G на дизъюнктные множества, то

$$\bigsqcup_{k=1}^{n}(E_k\dot{+}h) = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k. \tag{1.13}$$

Проверим это.

1. Множества $E_k\dot{+}h$ и $E_l\dot{+}h$ дизъюнктны при $l \neq k$. В самом деле, пусть $E_k\dot{+}h \cap E_l\dot{+}h \neq \varnothing$, тогда $\exists\ x = x_k\dot{+}h = x_l\dot{+}h$, где $x_k \in E_k$, $x_l \in E_l$. Прибавляя к обеим частям этого равенства $\dot{-}h$, получаем $x_k = x_l$, что невозможно.

2. Пусть $x \in G$. Покажем, что существует k, что $x \in E_k\dot{+}h$. Рассматриваем элемент $x\dot{-}h \in G$. Тогда $x\dot{-}h \in E_k$ при некотором k, следовательно, $x \in E_k\dot{+}h$, значит, $x \in \bigsqcup\limits_{k=1}^{n}(E_k\dot{+}h)$. Таким образом, равенство (1.13) верно. Так как $\mu E_k = \mu(E_k\dot{+}h)$, то отсюда следует, что множество верхних сумм для $f(x)$ и для $f(x\dot{+}h)$ совпадают, поэтому $\overline{I}(f(x), G) = \overline{I}(f(x\dot{+}h), G)$.

Аналогично, $\underline{I}(f(x), G) = \underline{I}(f(x\dot{+}h), G)$. Поэтому $f(x\dot{+}h) \in L(G)$ и $\int\limits_G f(x)\,d\mu(x) = \int\limits_G f(x\dot{+}h)\,d\mu(x)$ в случае, когда f ограничена и измерима на G. Но тогда это равенство справедливо и для любых функций $f \in L(G)$. $\square$

Замечание 1.8. Свойство инвариантности верно только в случае интегрирования по всей группе G.

Для интеграла верны стандартные свойства:

1. Пусть f измерима на E. Тогда $\int\limits_E |f|$ существует тогда и только тогда, когда существует $\int\limits_E f$. При этом $\left|\int\limits_E f\right| \leqslant \int\limits_E |f|$.

2. Если $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n,\ f \in L(E)$, то $\int\limits_E f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f$.

3. Интеграл $\int\limits_E f$ есть абсолютно непрерывная функция множества.

4. Если f_n измеримы на E, $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду на E, $|f_n(x)| \leqslant \leqslant \varphi(x) \in L(E)$, то $f \in L(E)$ и $\int\limits_E f = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n$ (теорема Лебега о предельном переходе).

5. Если $f \in L(G)$, то $f(\dot{-}\cdot) \in L(G)$, и справедливо равенство $\int_G f(t)d\mu = \int_G f(\dot{-}t)d\mu$.

Определение 1.11. Пусть $(G, \dot{+})$ — компактная топологическая группа. Функция $\chi :\ G \to \mathbb{C}$ называется *характером*, если выполняются следующие условия:

1) $\forall\ x \in G,\ |\chi(x)| = 1$;

2) $\chi(x)$ — непрерывная функция;

3) $\chi(x \dot{+} y) = \chi(x) \cdot \chi(y)$.

Очевидно, что $\chi(0) = 1$ и $\chi(\dot{-}x) = \overline{\chi(x)}$. Следующие два свойства менее очевидны.

Теорема 1.12. *Пусть G — нульмерная компактная группа с основной цепочкой подгрупп*

$$G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset \dots$$

и пусть χ — характер группы G. Тогда сужение характера χ на подгруппу G_n есть характер подгруппы G_n.

Доказательство. Обозначим через $\varphi_n(x)$ сужение характера χ на G_n. Очевидно, что $\forall\ x, y \in G_n$, $|\varphi_n(x)| = 1$ и $\varphi_n(x \dot{+} y) = \varphi_n(x) \cdot \varphi_n(y)$. Поэтому достаточно доказать только непрерывность. Выбираем точку $x \in G_n$, и пусть $U_\delta(\varphi_n(x))$ — окрестность точки $\varphi_n(x)$. В точке $x \in G_n$, $\varphi_n(x) = \chi(x)$. Поэтому ввиду непрерывности $\chi(x)$ найденный смежный класс $G_m \dot{+} x$, содержащий точку x, такой, что

$$\chi(G_m \dot{+} x) \subset U_\delta(\varphi_n(x)).$$

Но тогда для любого смежного класса $G_{m_1} \dot{+} x$ с $m_1 \geqslant n$

$$\chi(G_{m_1} \dot{+} x) \subset U_\delta(\varphi_n(x)).$$

Следовательно, $\varphi_n(G_{m_1} \dot{+} x) \subset U_\delta(\varphi_n(x))$. □

Теорема 1.13. *Если характер χ_{n+1} определен на группе G_{n+1}, то его можно продолжить до характера на всей группе G.*

Доказательство. Рассмотрим смежные классы $G_{n+1}\dot{+}x_j$, составляющие фактор-группу G_n/G_{n+1}. Так как порядок p_n этой фактор-группы — простое число, то эта группа циклическая. Поэтому $\forall\ g \in G_n \setminus G_{n+1}$ справедливо равенство $(G_{n+1}\dot{+}g)\cdot p_n = G_{n+1}$. Выберем такое g и зафиксируем. В этом случае $g \cdot p_n \in G_{n+1}$, тогда в точке gp_n определен характер χ_{n+1}. Обозначим $\chi_{n+1}(gp_n) = e^{i\alpha}$. Определим функцию χ_n на смежных классах $(G_{n+1}\dot{+}g\cdot j)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, p_n - 1)$ равенством $\chi_n(x\dot{+}g\cdot j) = \chi_{n+1}(x)\cdot e^{\frac{i\alpha}{p_n}j}$.

Очевидно, что $|\chi_n(x\dot{+}gj)| \equiv 1$. Проверим остальные свойства характеров. Пусть $x, y \in G_{n+1}$. Тогда $\chi_n(x\dot{+}y) = \chi_n(x)\cdot\chi_n(y)$ — это очевидно. Пусть x, y принадлежат смежным классам по подгруппе G_{n+1} и пусть

$$x = x_{n+1}\dot{+}g\cdot j, \quad y = y_{n+1}\dot{+}g\cdot\nu, \quad x_{n+1}, y_{n+1} \in G_{n+1}.$$

Тогда $x\dot{+}y = x_{n+1}\dot{+}y_{n+1}\dot{+}g(\nu + j)$.

Если $\nu + j < p_n$, то

$$\chi_n(x\dot{+}y) = \chi_{n+1}(x_{n+1})\cdot\chi_{n+1}(y_{n+1})\cdot e^{i\alpha\frac{\nu+j}{p_n}} =$$
$$= \chi_{n+1}(x_{n+1})\cdot e^{\frac{i\alpha\nu}{p_n}}\cdot\chi_{n+1}(y_{n+1})\cdot e^{\frac{i\alpha j}{p_{n+1}}} = \chi_n(x)\cdot\chi_n(y).$$

Пусть $\nu + j \geqslant p_n$. Тогда $\nu + j = p_n + \beta$ $(\beta \geqslant 0)$. Отсюда $x\dot{+}y = x_{n+1}\dot{+}y_{n+1}\dot{+}g\cdot p_n + g\cdot\beta$. Следовательно,

$$\chi_n(x\dot{+}y) = \chi_{n+1}(x_{n+1}\dot{+}y_{n+1} + g\cdot p_n)\cdot e^{i\alpha\cdot\frac{\beta}{p_n}} =$$
$$= \chi_{n+1}(x_{n+1})\cdot\chi_{n+1}(y_{n+1})\cdot\chi_{n+1}(gp_n)\cdot e^{i\alpha\frac{1}{p_n}(\nu+j-p_n)} =$$
$$= \chi_{n+1}(x_{n+1})e^{i\alpha\frac{j}{p_n}}\chi_{n+1}(y_{n+1})e^{i\alpha\frac{\nu}{p_n}}\cdot e^{i\alpha}\cdot e^{-i\alpha} = \chi_n(x)\cdot\chi_n(y).$$

Непрерывность функции χ_n на группе G_n очевидна.

Таким образом, мы продолжили характер χ_{n+1} с подгруппы G_{n+1} на подгруппу G_n. Повторяя этот процесс, мы получим продолжение характера χ_{n+1} на всю группу G. □

Всюду в этом параграфе $(G, \dot{+})$ — произвольная нульмерная компактная группа с основной цепочкой подгрупп (G_n).

Определение 1.12. Пусть H — подгруппа группы G. Совокупность всех характеров χ группы G таких, что $\chi(x) = 1$ на подгруппе H, называют *аннулятором* подгруппы H и обозначают $H^{\perp}$.

Предложение 1.7. *Аннулятор $H^{\perp}$ есть группа относительно умножения.*

Доказательство. 1. Если $\chi_1, \chi_2 \in H^{\perp}$, то $\chi_1 \cdot \chi_2 \in H^{\perp}$.
2. $\chi(x) \equiv 1 \in H^{\perp}$ и является единицей группы $H^{\perp}$.
3. Если $\chi(x) \in H^{\perp}$, то $\frac{1}{\chi(x)} = 1$ на $H^{\perp} \Rightarrow \frac{1}{\chi(x)} \in H^{\perp}$ и $\chi \cdot 1/\chi \equiv 1$. □

Лемма 1.2. *Пусть $\chi(x)$ — характер группы G. Если $\forall\ x \in G$ $|\chi(x) - 1| < 1$, то $\chi(x) \equiv 1$ на G.*

Доказательство. Предположим, что существует $x \in G$, для которого $\chi(x) \neq 1$ и $|\chi(x) - 1| < 1$. Пусть $\chi(x) = e^{i\alpha}$. Тогда $0 < |\alpha| < \pi/3$. Рассмотрим элемент $x \cdot q$ ($q \in \mathbb{N}$). Для него $\chi(x \cdot q) = (\chi(x))^q = e^{i\alpha q}$. Так как для любого $x \in G$ $|\chi(x) - 1| < 1$, то и $\left|e^{i\alpha q} - 1\right| < 1$, следовательно, $0 < |\alpha q| < \pi/3$. Но выбирая q достаточно большим, мы имеем $|\alpha q| > \pi/3$. Полученное противоречие означает, что $\chi(x) = 1$. □

Теорема 1.14. *Любой характер нульмерной компактной группы принадлежит некоторому аннулятору $G_n^{\perp}$.*

Доказательство. Пусть χ — характер группы G. Очевидно, что $\chi(0) = 1$. Так как χ непрерывен в нуле, то для $\varepsilon = 1$ $\exists\ G_n$, $\forall\ x \in G_n$ $|\chi(x) - 1| < 1$. Но тогда по лемме 1.2 $\chi(x) \equiv 1$ на G_n. □

Следствие 1.3. $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} G_n^{\perp}$.

Теорема 1.15. *Любой характер $\chi \in G_n^{\perp}$ есть функция, постоянная на смежных классах $G_n \dot{+} g_{n-1} \cdot j$ $\ (j = \overline{0, p_{n-1} - 1})$.*

Доказательство. Пусть $x \in G_n \dot{+} g_{n-1} \cdot j$. Тогда $x = x_n \dot{+} g_{n-1} \cdot j$ $(x_n \in G_n)$. Следовательно, $\chi(x) = \chi(x_n) \cdot (\chi(g_{n-1}))^j = (\chi(g_{n-1}))^j$. □

Лемма 1.3. *$G_n^{\perp}$ есть группа характеров фактор группы G/G_n.*

Доказательство. Очевидно, что

$$G/G_n = \{G_n \dot{+} g_{n-1} a_{n-1} \dot{+} g_{n-2} a_{n-2} \dot{+} \ldots \dot{+} g_0 a_0 = G_n \dot{+} x_{n-1} : \\ a_j = \overline{0, p_j - 1}\} \tag{1.14}$$

и нулевым элементом фактор-группы G/G_n является подгруппа G_n. Поэтому для любого характера χ группы G/G_n имеем $\chi(G_n) = 1$. Это означает, что $\chi \in G_n^\perp$. Обратно, пусть $\chi \in G_n^\perp$, т. е. $\chi(G_n) = 1$. Из (1.14) следует, что

$$\chi((G_n \dot{+} x_{n-1}) \dot{+} (G_n \dot{+} y_{n-1})) = \chi(G_n \dot{+} x_{n-1})\chi(G_n \dot{+} y_{n-1}),$$

т. е. χ есть характер группы G/G_n. $\square$

Лемма 1.4. *Фактор группа $G_{n+1}^\perp/G_n^\perp$ есть группа характеров для фактор-группы G_n/G_{n+1}.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 1.3, полагая в ней $G = G_n$, $G_n = G_{n+1}$. Тогда согласно лемме 1.3 группа характеров фактор-группы G_n/G_{n+1} совпадает с множеством характеров группы G_n, обращающихся в единицу на G_{n+1}, т. е. совпадает с $G_{n+1}^\perp$. Но единицей группы $G_{n+1}^\perp$ является $G_n^\perp$, значит, $G_{n+1}^\perp = G_{n+1}^\perp/G_n^\perp$, т. е. $G_{n+1}^\perp/G_n^\perp$ есть группа характеров для G_n/G_{n+1}. $\square$

Лемма 1.5. *Группа характеров конечной циклической группы изоморфна самой группе.*

Доказательство. Пусть H — конечная циклическая группа порядка n. Ее можно отождествить с группой $\mathbb{Z}(n) = \{0, 1, \ldots, n-2, n-1\}$, операция в которой есть сложение по mod n. Пусть χ — характер группы $\mathbb{Z}(n)$. Тогда $1 = \chi(0) = \chi(n) = \chi(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n}) = \chi^n(1)$, значит, $\chi(1) = e^{\frac{2\pi i}{n}j}$ при некотором j. Отсюда следует, что $\chi(k) = e^{\frac{2\pi i}{n}jk}$. Таким образом, каждый характер определяется значением на элементе 1. Поэтому все характеры χ_j определяются равенствами $\chi_j(k) = e^{\frac{2\pi i}{n}jk}$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$. Каждому характеру χ_j поставим в соответствие число $j \in \mathbb{Z}(n)$. Очевидно, что это взаимно-однозначное соответствие группы характеров (χ_j) на $\mathbb{Z}(n)$. Так как $\chi_{j_1+j_2}(k) = \chi_{j_1}(k)\chi_{j_2}(k)$, то оно сохраняет операцию, т. е. является изоморфизмом. $\square$

Теорема 1.16. *При любом натуральном n $(G_n^\perp/G_{n-1}^\perp)^\sharp = p_{n-1}$ и $(G_{n-1}^\perp)^\sharp = m_{n-1}$.*

Доказательство. По лемме 1.4 фактор-группа $G_n^\perp/G_{n-1}^\perp$ есть группа характеров группы G_{n-1}/G_n, и по предыдущей лемме она изоморфна группе G_{n-1}/G_n. Так как $(G_{n-1}/G_n)^\sharp = p_{n-1}$, то $(G_n^\perp/G_{n-1}^\perp) = p_{n-1}$. $\square$

Следствие 1.4. *Совокупность аннуляторов*

$$G^{\perp} = G_0^{\perp} \subset G_1^{\perp} \subset \dots \subset G_n^{\perp} \subset G_{n+1}^{\perp} \subset \dots$$

есть основная цепочка подгрупп в X.

Следующий результат носит принципиальный характер.

Теорема 1.17. *Совокупность характеров компактной нульмерной группы есть ортонормированная система.*

Доказательство. 1. Если $\chi(t)$ — характер группы G, то $\chi(t)\bar{\chi}(t) = 1$, следовательно,

$$\int\limits_G \chi(t)\bar{\chi}(t) = \int\limits_G 1 = \mu G = 1.$$

2. Пусть $\chi(t) \not\equiv 1$. Выберем число $h \in G$ так, чтобы $\chi(h) \neq 1$. Тогда

$$\int\limits_G \chi(t) \cdot 1\, d\mu = \int\limits_G \chi(t \dot{+} h)\, d\mu(t) = \int\limits_G \chi(t)\chi(h)\, d\mu(t) = \chi(h) \cdot \int\limits_G \chi(t)\, d\mu \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_G \chi(t)\, d\mu = 0.$$

3. Пусть $\chi_n \neq \chi_m$ — два различных характера. Тогда существует $h \in G$ такое, что $\chi_n(h) \cdot \bar{\chi}_m(h) \neq 1$. В самом деле, если $\forall\ h \in G$, $\chi_n(h) \cdot \bar{\chi}_m(h) = 1$, то $\chi_n(h) \cdot 1 = \chi_m(h)$, что невозможно. Для такого $h \in G$ имеем

$$\int\limits_G \chi_n(x) \cdot \bar{\chi}_m(x)\, d\mu = \int\limits_G \chi_n(x \dot{+} h) \cdot \bar{\chi}_m(x \dot{+} h)\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_G \chi_n(x) \cdot \bar{\chi}_m(x) \cdot \chi_n(h) \cdot \bar{\chi}_m(h)\, d\mu(x) =$$

$$= \chi_n(h) \cdot \bar{\chi}_m(h) \cdot \int\limits_G \chi_n(x) \cdot \bar{\chi}_m(x)\, d\mu(x),$$

отсюда $\int\limits_G \chi_n(x) \cdot \bar{\chi}_m(x)\, d\mu = 0$. □

Определение 1.13. Пусть

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \dots$$

— основная цепочка подгрупп и пусть

$$G^\perp = G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \dots \subset G_n^\perp \subset G_{n+1}^\perp \subset \dots$$

— возрастающая последовательность аннуляторов. При каждом натуральном n выберем характер $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ и зафиксируем эту последовательность. Систему $(r_n)_{n=0}^\infty$ будем называть *системой Радемахера*, а каждую функцию $r_n(x)$ — *функцией Радемахера*.

Теорема 1.18. *Любой характер $\chi \in \mathscr{X}$ можно представить в виде*

$$\chi = (r_0(x))^{a_0}(r_1(x))^{a_1}\dots(r_n(x))^{a_n}(a_j = \overline{0, p_j - 1}). \tag{1.15}$$

Доказательство. Если $\chi(x) \equiv 1$, то равенство (1.15) справедливо при $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$. Пусть $\chi(x) \not\equiv 1$. Тогда существует $n \in \mathbb{N}$, что $\chi(x) \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$. Рассмотрим фактор-группу $G_{n+1}^\perp / G_n^\perp$. Она имеет простой порядок p_n и, значит, является циклической. Поэтому смежные классы имеют вид $G_n^\perp \cdot (r_n(x))^{a_n}$ $(a_n = 0, 1, \dots, p_n - 1)$, и так как $\chi(x) \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$, то $\chi(x) = \varphi_n(x) \cdot (r_n(x))^{a_n}$, где $\varphi_n \in G_n^\perp$. Если $\varphi_n \in G_{n-1}^\perp$, то переобозначим $\varphi_{n-1} := \varphi_n$, и тогда $\chi(x) = \varphi_{n-1}(x) \cdot (r_{n-1}(x))^0 \cdot r_n(x)^{a_n}$.

Если $\varphi_n \in G_n^\perp \setminus G_{n-1}^\perp$, то, аналогично предыдущему,

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) \cdot (r_{n-1}(x))^{a_{n-1}} \quad a_{n-1} = \overline{1, p_{n-1} - 1}.$$

Таким образом,

$$\chi(x) = \varphi_{n-1}(x) \cdot r_{n-1}(x)^{a_{n-1}}(r_n(x))^{a_n}.$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$\chi(x) = (r_0(x))^{a_0}(r_1(x))^{a_1}\dots(r_n(x))^{a_n} \quad (a_j = \overline{0, p_j - 1}). \qquad \square$$

Определение 1.14. Поставим в соответствие характеру $\chi(x)$, представленному в виде (1.15), число $m = a_0 m_0 + a_1 m_1 + \dots + a_n m_n$ $(a_j = \overline{0, p_j - 1})$. Получим занумерованную систему характеров $\chi_m(x)$. Систему характеров в такой нумерации будем называть *системой в нумерации Пэли*.

Определение 1.15. Пусть $f \in L(G)$. Последовательность $(\hat{f}_n)_{n=0}^\infty$, определенную равенствами $\hat{f}_n = \int\limits_G f(x)\bar{\chi}_n(x)\,d\mu(x)$, называют *преобразованием Фурье функции* f. Числа $\hat{f}_n$ называют *коэффициентами Фурье* *по системе характеров.* Ряд

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n \chi_n(x)$$

называют *рядом Фурье.* Сумма $S_n(f,x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \hat{f}_k \chi_k(x)$ называется *частной суммой ряда Фурье.*

Определение 1.16. Функцию $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$ назовем *ядром Дирихле.*

Теорема 1.19. *Если $f \in L(G)$, то справедливо равенство*

$$S_n(f,x) = \int\limits_G f(x \dot{-} t) D_n(t)\, d\mu(t) = \int\limits_G f(t) D_n(x \dot{-} t)\, d\mu(t).$$

Доказательство. Будем вычислять интеграл

$$\int\limits_G f(t) D_n(x \dot{-} t)\, d\mu(t) = \int\limits_G f(t) \sum_{k=0}^{n-1} \chi(x \dot{-} t)\, d\mu(t).$$

Так как $\chi_k(x \dot{-} t) = \chi_k(x) \cdot \bar{\chi}_k(t)$, то

$$\int\limits_G f(t) \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}_k \chi_k(x \dot{-} t)\, d\mu(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x) \cdot \int\limits_G f(t) \bar{\chi}_k(t)\, d\mu(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x) \hat{f}_k = S_n(f,x). \qquad \square$$

Теорема 1.20. *Справедливо равенство*

$$D_{m_n}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \left((r_k(x))^0 + (r_k(x))^1 + (r_k(x))^2 + \cdots + (r_k(x))^{p_k - 1} \right). \quad (1.16)$$

Доказательство. По определению

$$D_{m_n}(x) = \sum_{k=0}^{m_n - 1} \chi_k(x). \quad (1.17)$$

Но $\chi_k(x) = (r_0(x))^{a_0}(r_1(x))^{a_1}\dots(r_{n-1}(x))^{a_n-1}$, когда $k \in [0, m_n - 1]$. Поэтому в сумме (1.17) присутствуют всевозможные произведения

$$(r_0(x))^{a_0}(r_1(x))^{a_1}\dots(r_{n-1}(x))^{a_n-1} \quad (a_j = \overline{0, p_j - 1}). \tag{1.18}$$

Но в правой части (1.16) тоже присутствуют всевозможные произведения вида (1.18). Это означает, что равенство (1.16) справедливо. $\square$

Лемма 1.6. *Функции $r_k(x)$ на смежных классах $G_{k+1}\dot{+}h_j$ $(h_j \in G_k)$ принимают постоянные значения, которые есть различные корни из единицы степени p_k.*

Доказательство. Так как $r_k \in G_{k+1}^{\perp} \setminus G_k^{\perp}$, то r_k принимает постоянные значения на каждом смежном классе $G_{k+1}\dot{+}h_j$. Выберем один из смежных классов: $G_{k+1}\dot{+}h_j$. Так как порядок фактор-группы G_k/G_{k+1} равен p_k, то $(G_{k+1}\dot{+}h_j\cdot)p_k = G_{k+1}$ и, значит,

$$1 = r_k(G_{k+1}) = (r_k(G_{k+1}\dot{+}h_j))^{p_k},$$

т. е. $r_k(G_{k+1}\dot{+}h_j)$ есть корень из 1-го порядка p_k. Так как p_k — простые, то группа G_k/G_{k+1} циклическая, значит, при фиксированном $h_j \in G_k \setminus G_{k+1}$ множества $(G_{k+1}\dot{+}h_j)a$ $(a = 1, 2, \dots, p_k)$ есть все смежные классы, образующие фактор-группу G_k/G_{k+1}, отсюда числа $r_k(G_{k+1}\dot{+}h_j)^a$ $(a = 1, 2, \dots, p_k)$ есть различные корни из 1-й степени p_k. $\square$

Лемма 1.7. *Если $x \in G_k \setminus G_{k+1}$, то*

$$r_k^0(x) + r_k^1(x) + r_k^2(x) + \dots + r_k^{p_k-1}(x) = 0.$$

Доказательство. Так как x принадлежит одному из смежных классов $G_{k+1}\dot{+}h_j$, то числа $r_k^0(x), r_k^1(x), r_k^2(x), \dots, r_k^{p_k-1}(x)$ есть различные корни из 1. Поэтому $\sum\limits_{j=0}^{p_k-1}(r_k(x))^j = 0$. $\square$

Лемма 1.8. 1. *При любом $k \in \mathbb{N}_0$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{G_k} r_k(x)\, d\mu(x) = 0.$$

2. *Для любого смежного класса $G_k\dot{+}h$* $\int\limits_{G_k\dot{+}h} r_k(x)\, d\mu(x) = 0.$

Доказательство. 1. Имеем

$$\int\limits_{G_k} r_k(x)\,d\mu(x) = \sum_{j=0}^{p_k-1} \int\limits_{G_k\dot{+}jg_k} r_k(x)\,d\mu(x) = \sum_{j=0}^{p_k-1} r_k(G_k\dot{+}jp_k)\cdot\mu G_k.$$

По лемме 1.6 числа $r_k(G_k\dot{+}jg_k)$ образуют множество всех корней из 1 степени p_k, и так как p_k — простые, то $\sum\limits_{j=0}^{p_k-1} r_k(G_k\dot{+}jg_k) = 0$.

2. $\int\limits_{G_k\dot{+}h} r_k(x)\,d\mu(x) = \int\limits_{G} r_k(x)\cdot\mathbf{1}_{G_k\dot{+}h}(x)\,d\mu(x)$, где $\mathbf{1}_{G_k\dot{+}h}(x)$ есть характеристическая функция множества $G_k\dot{+}h$. По свойству инвариантности интеграла

$$\int\limits_{G} r_k(x)\cdot\mathbf{1}_{G_k\dot{+}h}(x)\,d\mu(x) = \int\limits_{G} r_k(x\dot{+}h)\cdot\mathbf{1}_{G_k+h}(x\dot{+}h)\,d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{G} r_k(x\dot{+}h)\cdot\mathbf{1}_{G_k}(x)\,d\mu(x) = r_k(h)\int\limits_{G} r_k(x)\cdot\mathbf{1}_{G_k}(x)\,d\mu(x) =$$

$$= r_k(h)\int\limits_{G_k} r_k(x)\,d\mu(x) = 0$$

по первой части леммы. □

Теорема 1.21 (лемма Пэли)**.**

$$D_{m_n}(x) = \begin{cases} m_n & x\in G_n,\\ 0 & x\notin G_n.\end{cases}$$

Доказательство. По лемме 1.7

$$r_0(x)^0 + r_0(x)^1 + \cdots + r_0(x)^{p_0-1} = \begin{cases} p_0, & x\in G_1,\\ 0, & x\in G_0\setminus G_1.\end{cases}$$

Вообще при любом k

$$r_k(x)^0 + r_k(x)^1 + \cdots + r_k(x)^{p_k-1} = \begin{cases} p_k, & x\in G_{k+1},\\ 0, & x\in G_k\setminus G_{k+1}.\end{cases}$$

Но тогда по теореме 1.20

$$D_{m_n}(x) = \prod_{k=0}^{n-1}(r_k(x)^0 + r_k(x)^1 + \cdots + r_k(x)^{p_k-1}) =$$

$$= \begin{cases} p_0 p_1 \dots p_{n-1} = m_n, & x \in G_n, \\ 0, & x \notin G_n. \end{cases} \qquad \square$$

Из леммы Пэли сразу получаются равномерная сходимость ряда Фурье по подпоследовательностям специального вида и замкнутость системы характеров в L_p.

Теорема 1.22. *Если f непрерывна на компактной нульмернй группе G, то частичные суммы $S_{m_n}(f)$ сходятся равномерно к f.*

Доказательство. Частичные суммы $S_{m_n}(f)$ имеют вид

$$S_{m_n}(f) = \int\limits_G f(t) D_{m_n}(x \dot{-} t)\, d\mu(t) = m_n \int\limits_G f(t) \mathbf{1}_{G_n}(x \dot{-} t)\, d\mu(t).$$

Но $x \dot{-} t \in G_n \dot{+} x \Leftrightarrow t \in G_n$. Поэтому

$$\int\limits_G f(t) \mathbf{1}_{G_n}(x \dot{-} t)\, d\mu(t) = \int\limits_{G_n \dot{+} x} f(t)\, d\mu(t).$$

Таким образом,

$$S_{m_n}(f, x) = m_n \int\limits_{G_n \dot{+} x} f(t) d\mu(t).$$

Но

$$f(x) = m_n \int\limits_{G_n \dot{+} x} f(x) d\mu(t).$$

Следовательно,

$$|S_{m_n}(f, x) - f(x)| = m_n \left| \int\limits_{G_n \dot{+} x} (f(t) - f(x)) d\mu(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant m_n \int\limits_{G_n \dot{+} x} |f(t) - f(x)| d\mu(t).$$

Так как f непрерывна, то f равномерно непрерывна, значит,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0,\ \forall\, n \geqslant n_0,\ \forall\, t, x \in G_n \dot{+} y \quad |f(x) - f(t)| < \varepsilon.$$

Поэтому при $n > n_0$

$$|s_{m_n}(f, x) - f(x)| \leqslant m_n \cdot \varepsilon \cdot \int\limits_{G_n \dot{+} x} d\mu(t) = m_n \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{m_n} = \varepsilon. \qquad \square$$

Теорема 1.23. *Система характеров (χ_n) замкнута в пространствах $L_p(G)$ при $p \geqslant 1$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что система (χ_n) полна относительно L_p. Пусть $f \in L_p$ и для любого $n \in \mathbb{N}_0$

$$\hat{f}_n = \int\limits_G f(x)\bar{\chi}_n(x)\,d\mu(x) = 0.$$

Тогда при любом $n \in \mathbb{N}_0$

$$S_{m_n}(f,x) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \hat{f}_k \cdot \bar{\chi}_k(x) = 0.$$

Рассмотрим f и χ_k не на группе G, а на отрезке $[0,1]$. При отображении $\varphi:\ G \overset{\text{на}}{\to} [0,1]$ сохраняется мера, и каждый смежный класс $G_n \dot{+} x$ переходит в отрезок $\left[\frac{j}{m_n}, \frac{j+1}{m_n}\right]$. Поэтому если рассматривать $S_{m_n}(f,n)$ на отрезке $[0,1]$, то с учетом равенства $S_{m_n}(f,x) = m_n \int\limits_{G_n \dot{+} x} f(t)\,d\mu(t)$ получаем, что $\int\limits_0^{\frac{j}{m_n}} f\,d\mu = 0$ при любом j. Следовательно, интеграл $\int\limits_0^y f(x)\,d\mu(x) = 0$ во всех p-ично рациональных точках. Так как интеграл $\int\limits_0^y f(x)\,d\mu(x)$ есть непрерывная функция своего верхнего предела, то $\int\limits_0^y f(x)\,d\mu(x) \equiv 0$ на $[0,1]$, значит, $\frac{d}{dy}\int\limits_0^y f(x)\,d\mu(x) = 0$ на $[0,1]$. Учитывая, что $\frac{d}{dy}\int\limits_0^y f(x)\,d\mu(x) = f(y)$ почти всюду на $[0,1]$, получаем, что $f(y) = 0$ почти всюду на $[0,1]$. Отсюда $f = 0$ почти всюду на G. $\square$

1.3 Система Хаара на нульмерной компактной группе

Пусть $(G, \dot{+})$ — компактная нульмерная группа с основной цепочкой подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \ldots,$$

где $(G_n/G_{n+1})^\sharp = p_n$ — простые числа. Пусть

$$\{1\} = G^\perp \subset G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \cdots \subset G_n^\perp \subset G_{n+1}^\perp \subset \ldots$$

— основная цепочка аннуляторов.

Определение 1.17. [18] *Функции Хаара* H_n определим равенствами

$$H_0(x) = 1, \quad H_{jm_n+k}(x) = r_n^j(x\dot{-}q)\mathbf{1}_{G_n}(x\dot{-}q), \quad j = \overline{1, p_n - 1},$$

где k и q связаны соотношениями

$$k = a_{n-1}m_{n-1}+a_{n-2}m_{n-2}+\dots+a_0m_0, \quad q = a_{n-1}g_{n-1}\dotplus a_{n-2}g_{n-2}\dotplus \ldots \dotplus a_0g_0.$$

Таким образом, мы выбираем сужение функции Радемахера $r_n(x)$ на подгруппу G_n, значения которой есть различные корни из 1 степени p_n на каждом из смежных классов $G_{n+1}\dotplus lg_n$, и рассматриваем различные степени $r_n^j(x), j = \overline{1, p_n - 1}$. Сдвиги этих функции $r_n^j(x)\mathbf{1}_{G_n}(x)$ на всевозможные классы $G_n\dotplus q$ и есть функции Хаара.

Теорема 1.24. *Система функций* $(1, H_{jm_n+k})$ *ортогональна на* G.

Доказательство. 1. Покажем, что

$$\int\limits_G H_{jm_n+k}(x) \cdot 1 \, d\mu(x) = 0.$$

По определению

$$\int\limits_G H_{jm_n+k}(x)\, d\mu(x) = \int\limits_{G_n} r_n^j(x\dot{-}q)\mathbf{1}_{G_n}(x\dot{-}q) d\mu(x) = \int\limits_{G_n} r_n^j(x)\, d\mu(x) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p_n-1} \int\limits_{G_{n+1}\dotplus\nu g_k} r_n^j(x) d\mu(x) = \sum_{\nu=0}^{p_n-1} r_n^j(G_{n+1}\dotplus\nu g_n) \int\limits_{G_{n+1}\dotplus\nu g_n} d\mu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p_n-1} r_n^{j\nu}(g_n) \cdot \mu G_{n+1} = \frac{1}{m_{n+1}} \sum_{\nu=0}^{p_n-1} (r_n^j(g_n))^\nu = 0.$$

2. Покажем, что

$$\int\limits_G H_{j_1m_n+k}(x)\bar{H}_{j_2m_n+k}(x)\, d\mu(x) = 0 \quad \text{при} \quad j_1 \neq j_2.$$

Пусть для определенности $j_1 > j_2$, т. е. $j_1 = j_2 + l$, $l \geqslant 1$. Тогда

$$\int\limits_G H_{j_1m_n+k}(x)\bar{H}_{j_2m_n+k}(x)\, d\mu(x) = \int\limits_{G_n\dotplus q} r_n^{j_1}(x\dot{-}q)r_n^{-j_2}(x\dot{-}q) d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{G_n\dot{+}q} r_n^l(x\dot{-}q) r_n^{j_2}(x\dot{-}q) r_n^{-j_2}(x\dot{-}q) d\mu(x) = \int\limits_{G_n\dot{+}q} r_n^l(x\dot{-}q)\, d\mu(x) = 0.$$

3. Если $k_1 \neq k_2$, то

$$\int\limits_G H_{j_1 m_n+k_1}(x) \bar{H}_{j_2 m_n+k_2}(x)\, d\mu(x) = 0,$$

так как носители функций $H_{j_1 m_n+k_1}(x)$ и $H_{j_1 m_n+k_2}(x)$ не пересекаются.

4. Покажем, что при $n \neq N$

$$\int\limits_G H_{j_1 m_n+k_1}(x) \bar{H}_{j_2 m_N+k_2}(x)\, d\mu(x) = 0. \tag{1.19}$$

Пусть для определенности $N > n$. Если носители функций $H_{j_1 m_n+k_1}(x)$ и $H_{j_2 m_N+k_2}(x)$ не пересекаются, то равенство (1.19) очевидно выполняется. В противном случае

$$\operatorname{supp} H_{j_2 m_N+k_2} \subset \operatorname{supp} H_{j_1 m_n+k_1}.$$

Но тогда

$$\int\limits_G H_{j_1 m_n+k_1}(x) \bar{H}_{j_2 m_N+k_2}(x)\, d\mu(x) = \int\limits_{G_n\dot{+}q_1} r_n^{j_1}(x\dot{-}q_1) \bar{H}_{j_2 m_N+k_2}(x)\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{G_N\dot{+}q_2} r_n^{j_1}(x\dot{-}q_1) r_N^{j_2}(x\dot{-}q_2)\, d\mu(x) =$$

$$= r_n^{j_1}(G_N\dot{+}q_2\dot{-}q_2) \int\limits_{G_N} r_N^{j_2}(x)\, d\mu(x) = 0. \qquad \square$$

Теорема 1.25. *Любая функция, постоянная на смежных классах $G_{N+1}\dot{+}g$, есть линейная комбинация функций Хаара H_0, H_{jm_n+k} $(0 \leqslant n \leqslant N,\ j = \overline{1, p_n - 1},\ k = \overline{0, m_n - 1})$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{L}_{m_{N+1}}$ пространство функций, постоянных на смежных классах $G_{N+1}\dot{+}g$. Функции $\mathbb{1}_{G_{N+1}\dot{+}g}(x)$ образуют ортонормированный базис данного пространства. Поэтому размерность пространства $\mathscr{L}_{m_{N+1}}$ равна m_{N+1}. Функции системы

$(H_0, H_{jm_n+k})_{n=0}^{N}{}_{j=1}^{p_n-1}{}_{k=0}^{m_n-1}$ образуют ортогональную систему, принадлежащую $\mathscr{L}_{m_{N+1}}$, и количество функций в этой системе равно

$$1 + \sum_{n=0}^{N} (p_n - 1) m_n = m_{N+1},$$

т. е. система $(1, H_{jm_n+k})_{n=0}^{N}$ есть базис пространства $\mathscr{L}_{m_{N+1}}$. □

Лемма 1.9. *Обозначим через $\tilde{H}_{jm_n+k}$ функции Хаара, нормированные в $L_2(G)$, т. е. $\tilde{H}_{jm_n+k} = \sqrt{m_n} H_{jm_n+k}$. Пусть*

$$S_{m_{n+1}}(f, x) = \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} (f, \chi_k) \chi_k(x)$$

— частичные суммы ряда Фурье по системе характеров $(\chi_k)_{k=0}^{\infty}$ и

$$\sigma_{m_{n+1}}(f, x) = \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} (f, \tilde{H}_k) \tilde{H}_k(x)$$

— частичные суммы ряда Фурье по системе Хаара. Тогда

$$S_{m_{n+1}}(f, x) = \sigma_{m_{n+1}}(f, x).$$

Доказательство. Так как функции Хаара $(H_k(x))_{k=0}^{m_{n+1}-1}$ образуют базис пространства $\mathscr{L}_{m_{n+1}}$, то любая функция $\chi_k(x)$ есть линейная комбинация

$$\chi_k(x) = \sum_{j=0}^{m_{n+1}-1} c_{k,j} \tilde{H}_j(x).$$

Матрица $(c_{k,j})_{k,j=0}^{m_{n+1}-1}$ в этом случае является унитарной, т. е.

$$\sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} c_{k,j} \bar{c}_{k,l} = \delta_{j,l}, \qquad \sum_{j=0}^{m_{n+1}-1} c_{k,j} \bar{c}_{l,j} = \delta_{k,l}.$$

Поэтому

$$S_{m_{n+1}}(f, x) = \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} (f, \chi_k) \chi_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} \left(f, \sum_{j=0}^{m_{n+1}-1} c_{k,j} \tilde{H}_j(x) \right) \cdot \sum_{l=0}^{m_{n+1}-1} c_{k,l} \tilde{H}_l(x) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m_{n+1}-1} \tilde{H}_l \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} \sum_{j=0}^{m_{n+1}-1} c_{k,l}\bar{c}_{k,j}(f, \tilde{H}_j) \right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m_{n+1}-1} \tilde{H}_l \sum_{j=0}^{m_{n+1}-1} (f, \tilde{H}_j) \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} c_{k,l}\bar{c}_{k,j} = \sum_{l=0}^{m_{n+1}-1} \tilde{H}_l \sum_{j=0}^{m_{n+1}-1} (f, \tilde{H}_j) \cdot \delta_{l,j} =$$

$$= \sum_{l=0}^{m_{n+1}-1} \tilde{H}_l \cdot (f, \tilde{H}_l). \qquad \square$$

Напомним, что модуль непрерывности функции, определенной на компактной нульмерной группе G, определяется равенством

$$\omega_n(f) = \sup_{x\dot{-}y \in G_n} |f(x) - f(y)|.$$

В терминах модуля непрерывности можно получить оценки коэффициентов Фурье – Хаара.

Теорема 1.26. *Пусть f ограничена на G. Тогда*

$$|(\tilde{H}_{jm_n+k}, f)| \leqslant \omega_n(f)\frac{1}{\sqrt{m_n}}.$$

Доказательство. По определению функций Хаара

$$\frac{1}{\sqrt{m_n}}(\tilde{H}_{jm_n+k}, f) = \int\limits_G f(x)\bar{H}_{jm_n+k}(x)\, d\mu(x) = \int\limits_{G_n \dot{+} q} f(x) r_n^j(x \dot{-} q)\, d\mu(x).$$

Выполняя замену переменных $x\dot{-}q = y$ и учитывая инвариантность интеграла, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{m_n}}(f, \tilde{H}_{jm_n+k}) = \int\limits_{G_n} f(y\dot{+}q) r_n^j(y)\, d\mu(y) = \sum_{\nu=0}^{p_n-1} \int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} f(y\dot{+}q) r_n^j(y)\, d\mu(y).$$

Каждая функция Радемахера постоянна на смежных классах $G_{n+1}\dot{+}\nu g_n$, и эти значения равны

$$r_n(G_n\dot{+}\nu g_n) = r_n(g_n)^{\nu}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{m_n}}(f, \tilde{H}_{jm_n+k}) = \sum_{\nu=0}^{p_n-1} r_n(g_n)^{j\nu} \int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} f(y\dot{+}q)\, d\mu(y) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p_n-1} r_n(g_n)^{j\nu} \int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} (f(y\dot{+}q) - f(g_n))\, d\mu(y) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{p_n-1} r_n(g_n)^{j\nu} f(g_n) \int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} d\mu(y). \tag{1.20}$$

Так как p_n — простые и $\int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} d\mu(y) = \mu G_{n+1} = \frac{1}{m_{n+1}}$, то

$$\sum_{\nu=0}^{p_n-1} r_n(g_n)^{j\nu} f(g_n) \int\limits_{G_{n+1}\dot{+}\nu g_n} d\mu(y) = \frac{f(g_n)}{m_{n+1}} \sum_{\nu=0}^{p_n-1} r_n(g_n)^{j\nu} = 0.$$

Поэтому из (1.20) находим

$$\left|\frac{1}{\sqrt{m_n}}(f, \tilde{H}_{jm_n+k})\right| \leqslant \frac{\omega_n(f)}{m_{n+1}} \cdot p_n = \frac{\omega_n(f)}{m_n}. \qquad \square$$

Теорема 1.27. *Если f непрерывна на G и $\omega_n(f) = o\left(\frac{1}{p_n}\right)$, то ряд Фурье–Хаара на G сходится равномерно.*

Доказательство. Запишем частичные суммы $\sigma_l(f,x)$ по системе Хаара при $m_n < l \leqslant m_{n+1}$ с учетом леммы 1.9 в виде

$$\sigma_l(f,x) = \sigma_{jm_n+k}(f,x) = \sum_{\nu=m_n}^{l-1} (f, \tilde{H}_\nu) \cdot \tilde{H}_\nu(x) + \sigma_{m_n}(f,x) =$$

$$= S_{m_n}(f,x) + \sum_{\nu=m_n}^{l-1} (f, \tilde{H}_\nu) \cdot \tilde{H}_\nu(x),$$

где $S_{m_n}(f,x)$ — частичные суммы ряда Фурье по системе характеров. По теореме 1.22 $S_{m_n}(f,x) \rightrightarrows f(x)$ на G. Поэтому достаточно доказать, что

$$S_l - S_{m_n} = \sum_{\nu=m_n}^{l-1} (f, \tilde{H}_\nu) \cdot \tilde{H}_\nu(x) \rightrightarrows 0$$

на G. При каждом фиксированном x в сумме $S_l - S_{m_n}$ содержится не более $p_n - 1$ отличных от нуля слагаемых. Поэтому с учетом теоремы 1.26

$$|S_l - S_{m_n}| \leqslant (p_n - 1)\frac{\omega_n(f)}{\sqrt{m_n}} \cdot \sqrt{m_n} \leqslant p_n \omega_n(f) \to 0. \qquad \square$$

В качестве следствия получается

Теорема 1.28. *Пусть G — компактная нульмерная группа и пусть последовательность (p_n) ограничена. Тогда ряд Фурье–Хаара любой непрерывной на G функции f сходится равномерно.*

1.4 Локально компактные нульмерные группы и их характеры

Определение 1.18. Топологическая группа называется *локально компактной*, если она имеет компактную окрестность нуля.

Определение 1.19. Локально компактная топологическая группа G называется *нульмерной*, если существует бесконечная в обе стороны последовательность вложенных подгрупп

$$\cdots \supset G_{-n} \supset \cdots \supset G_{-2} \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \ldots,$$

которая порождает базу топологии в этой группе и такая, что $\cap G_n = \{0\}$, $\cup G_n = G$.

Так же как и в случае компактной группы, можно с использованием теории Силова уплотнить эту цепочку подгрупп так, что порядки p_n ($n \in \mathbb{Z}$) фактор-групп G_n/G_{n+1} будут простыми числами. Положим $m_0 = 1$, и определим числа $m_{n+1} = p_n m_n$. ($n \in \mathbb{Z}$), т.е. $m_1 = m_0 p_0 = p_0$, $m_2 = m_1 p_1 = p_0 p_1, \ldots, m_{n+1} = p_0 p_1 \ldots p_n$ при натуральном n. С другой стороны, $m_0 = m_{-1+1} = p_{-1} m_{-1}$. Тогда $m_{-1} = \frac{1}{p_{-1}}$, $m_{-2+1} = m_{-1} = p_{-2} m_{-2}$, отсюда $m_{-2} = \frac{m_{-1}}{p_{-2}} = \frac{1}{p_{-1}p_{-2}}$ и т. д., $m_{-n} = \frac{1}{p_{-1}p_{-2}\cdots p_{-n}}$. Выберем при каждом $n \in \mathbb{Z}$ элемент $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и зафиксируем.

Теорема 1.29. *Любой элемент $g \in G$ можно представить в виде*

$$g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \quad (a_n = \overline{0, p_n - 1}), \tag{1.21}$$

причем в ряде (1.21) при $n < 0$ только конечное число слагаемых отлично от нуля, т. е.

$$g = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n g_n.$$

Доказательство. Выберем $g \in G$ и пусть $N = \sup\{n: \ g \in G_n\}$, т. е. $g \in G_N$. Рассмотрим подгруппу G_N как компактную топологическую группу, с основной цепочкой подгрупп

$$G_N \supset G_{N-1} \supset \dots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \dots$$

По теореме 1.2 элемент g однозначно представим в виде

$$g = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n g_n \quad (a_n = \overline{0, p_n - 1}). \qquad \square$$

Теорема 1.30. *Локально компактная группа G изоморфна модифицированной полупрямой $[0, +\infty)^*$, где $[0, +\infty)^*$ есть множество $[0, +\infty)$, в котором каждая p-ично рациональная точка считается дважды: $x - 0$ и $x + 0$. При таком изоморфизме группа G_n переходит в модифицированный отрезок $\left[0, \frac{1}{m_n}\right]^*$. При $n \geqslant 0$ это отрезки $\left[0, \frac{1}{p_0 p_1 \dots p_{n-1}}\right]^*$. При $n < 0$ это отрезки $[0, p_{-1} p_{-2} \dots p_n]^*$.*

Доказательство. Выберем $g \in G$. Тогда по теореме 1.29

$$g = \sum_{n=N}^{\infty} a_n g_n = \sum_{n=N}^{-1} a_n g_n \dot{+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n.$$

Пусть по определению

$$x = \varphi(g) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n m_{n+1} = \sum_{n=N}^{-1} a_n m_{n+1} \dot{+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n m_{n+1}.$$

По доказанному ранее φ отображает взаимно однозначно каждую группу G_N на множество $\left[0, \frac{1}{m_N}\right]^*$. При $N < 0$ это отрезок $[0, p_{-1} p_{-2} \dots p_N]^*$. Поэтому φ отображает взаимно однозначно G на R_+^*. $\square$

Замечание 1.9. Если $g \in G_N$ и $N < 0$, то числа $\sum\limits_{n=N}^{-1} a_n m_{n+1}$ натуральные. Поэтому $\varphi(G_N)$ можно рассматривать как объединение сдвигов модифицированного отрезка $[0, 1]^*$ на всевозможные числа вида $\sum\limits_{n=N}^{-1} a_n m_{n+1}$, а это и есть отрезок $[0, p_{-1} p_{-2} \dots p_N]^*$.

Мера на локально компактной группе определяется по схеме, изложенной в теоремах 1.3–1.7.

Интеграл Лебега получается продолжением интеграла с компактных подгрупп G_{-n} на всю группу G стандартным способом.

1. Для неотрицательной функции f полагаем

$$\int\limits_E f d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_{E\cap G_{-n}} d\mu.$$

2. Для действительнозначной функции полагаем

$$\int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_E f^+\, d\mu - \int\limits_E f^-\, d\mu.$$

3. Если $f=\phi+i\psi$, то полагаем

$$\int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_E \phi\, d\mu + i\int\limits_E \psi\, d\mu.$$

Определенный таким образом интеграл есть интеграл Лебега на G. Он является абсолютно сходящимся в том смысле, что для измеримой функции f интеграл $\int_E f d\mu$ существует тогда и только тогда, когда существует $\int_E |f| d\mu$. Для такого интеграла справедливы все свойства интеграла Лебега, включая теоремы о предельном переходе.

Характеры локально компактной группы определяются стандартным образом. Совокупность характеров образует группу относительно умножения, которую будем обозначать X.

Определение 1.20. Пусть

$$\dots\supset G_{-1}\supset G_0\supset G_1\supset\dots\supset G_n\supset G_{n+1}\supset\dots$$

— основная цепочка подгрупп, $p_n = (G_n/G_{n+1})^\sharp$ — простые числа. Аналогично компактному случаю множества $G_n^\perp=\{\chi\in X:\ \ \forall x\in G_n, \chi(x)=1\}$ называют *аннуляторами подгрупп* G_n.

Приведем без доказательств простейшие свойства аннуляторов:
1. $\forall\, n\in\mathbb{Z}$, $G_n^\perp$ есть группа относительно операции умножения.
2. $\forall\, n\in\mathbb{Z}$, $G_n^\perp\subset G_{n+1}^\perp$.

3. Аннуляторы $G_n^\perp$ образуют возрастающую последовательность

$$\dots \subset G_{-n}^\perp \subset \dots \subset G_{-1}^\perp \subset G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \dots \subset G_n^\perp \subset G_{n+1}^\perp \subset \dots$$

4. $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $(G_{n+1}^\perp / G_n^\perp)^\sharp = p_n$.

5. Смежные классы группы $G_{n+1}^\perp$ по подгруппе $G_n^\perp$ имеют вид

$$G_n^\perp \cdot \chi,$$

где χ — характер, $\chi \in G_{n+1}^\perp$.

6. Смежные классы группы $G_{n+q}^\perp$ по подгруппе $G_n^\perp$ имеют вид $G_n^\perp \cdot \chi$, $\chi \in G_{n+q}^\perp$.

7. Топология в группе характеров вводится аналогично компактному случаю. Совокупность подгрупп $G_n^\perp$ удовлетворяет следующим условиям: смежные классы $G_n^\perp \cdot \chi_1$ и $G_n^\perp \cdot \chi_2$ или совпадают, или не пересекаются. Смежные классы $G_n^\perp \cdot \chi_1$ и $G_m^\perp \cdot \chi_2$ или не пересекаются, или один лежит внутри другого, т. е. если $n \leqslant m$, то $G_n^\perp \cdot \chi_1 \subset G_m^\perp \cdot \chi_2$. Поэтому смежные классы $G_n^\perp \cdot \chi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы о базе топологии. Значит, в X можно ввести топологию как объединение смежных классов $G_n^\perp \chi$ в конечном или счетном количестве. Совокупность характеров с такой топологией является локально компактной группой.

8. Мера в группе характеров определяется следующим образом.

Так как $G_{n+q}^\perp$ есть объединение смежных классов $G_n^\perp \cdot \chi$ $(\chi \in G_{n+q}^\perp)$, то их совокупность вместе с пустым множеством образует полукольцо. В этом полукольце можно ввести меру μ равенством

$$\mu(G_n^\perp \cdot \chi) = \mu(G_n^\perp) = \frac{1}{m_n}.$$

Затем продолжаем меру по схеме Каратеодори на σ-алгебру.

9. Как и в случае компактной группы, характеры локально компактной группы есть произведения функций Радемахера. Основой этого служит

Лемма 1.10. *Каждый характер $\chi \in X$ принадлежит одному из аннуляторов.*

Доказательство аналогично случаю компактной группы и основывается на том, что характер χ непрерывен в нуле. □

Следствие 1.5. $X = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp$.

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выберем характеры $r_n \in G_{n+1}^{\perp} \setminus G_n^{\perp}$ $(n \in \mathbb{Z})$ и зафиксируем. Как и в случае компактной группы, назовем их функциями Радемахера.

Теорема 1.31. *Любой характер $\chi \in X$ представим в виде произведения*

$$\chi(x) = \prod_{k=-\infty}^{n} r_k(x)^{a_k} \quad (a_k = \overline{0, p_k - 1}).$$

Доказательство. Пусть $\chi \in X$. По лемме 1.10 $\chi \in G_{n+1}^{\perp} \setminus G_n^{\perp}$ при некотором n. Пусть для определенности $n > 0$. Каждый смежный класс $G_{n+1}^{\perp}$ имеет вид $G_{n+1}^{\perp} = G_n^{\perp} \cdot r_n^{a_n}$ $(a_n = 0, 1, \ldots, p_n - 1)$. Поэтому $\chi = \varphi_n \cdot r_n^{a_n}$ $(a_n = 0, 1, \ldots, p_n - 1)$, $\varphi_n \in G_n^{\perp}$. Аналогично $\varphi_n = \varphi_{n-1} \cdot r_{n-1}^{a_{n-1}}$ $(a_{n-1} = \overline{0, p_{n_1} - 1})$, $\varphi_{n-1} \in G_{n-1}^{\perp}$. Продолжая этот процесс, получаем

$$\chi = \varphi_0 r_0^{a_0} \cdot r_1^{a_1} \ldots r_n^{a_n}, \quad \varphi_0 \in G_0^{\perp}.$$

Если группа G компактна, то на этом процесс заканчивается, так как $G_0^{\perp} = \{1\}$ и $\varphi_0(x) \equiv 1$. Если же группа G локально компактна, то

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi_{-1} \cdot r_{-1}^{a_{-1}} \quad (a_{-1} = \overline{0, p_{n-1} - 1}), \\ \varphi_{-1} &= \varphi_{-2} \cdot r_{-2}^{a_{-2}} \quad (a_{-2} = \overline{0, p_{n-2} - 1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

и так далее. В результате получаем

$$\chi(x) = \prod_{k=-\infty}^{n} r_k(x)^{a_k} \quad (a_k = \overline{0, p_k - 1}). \qquad \square$$

Замечание 1.10. По последовательности $(\alpha_k)_{k=-\infty}^{n}$ можно определить число

$$t = \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha_k m_k = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha_k m_k}_{\in[0,1]} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k m_k}_{\in\mathbb{N}}$$

и присвоить характеру $\chi(x)$ номер t. Таким образом,

$$\chi_t(x) = \prod_{k=-\infty}^{n} r_k(x)^{\alpha_k} \quad (\alpha_k = \overline{0, p_k - 1}),$$

$$t = \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha_k m_k = \sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha_k m_k + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k m_k.$$

Это означает, что в отличие от компактной группы в локально компактной группе характеров не счетное множество, а континуальное, и функцию, определенную на локально компактной группе G, нельзя представить в виде ряда по системе характеров.

1.5 Преобразование Фурье

Вначале рассмотрим преобразование Фурье интегрируемых и гладких финитных функций.

Определение 1.21. Если $f \in L(G)$, то существует интеграл

$$\int_G f(x)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x),$$

который называется *преобразованием Фурье функции* f и обозначается $\hat{f}(\chi)$, т. е.

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x). \tag{1.22}$$

Свойства.

1. Преобразование Фурье есть линейный оператор, т. е.

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\hat{}(\chi) = \alpha_1 \hat{f}_1(\chi) + \alpha_2 \hat{f}_2(\chi).$$

Это равенство очевидно вытекает из (1.22).

2. Обозначим через $f_{\dot{+}h}(x)$ сдвиг функции f, т. е. $f_{\dot{+}h}(x) = f(x\dot{+}h)$. Тогда

$$\hat{f}_{\dot{+}h}(\chi) = (\chi, h)\hat{f}(\chi).$$

Доказательство. Используя инвариантность интеграла, имеем

$$\hat{f}_{\dot{+}h}(\chi) = \int_G f(x\dot{+}h)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) = \int_G f(x\dot{+}h)\overline{(\chi, x\dot{+}h)(\chi, \dot{-}h)}\, d\mu(x) =$$

$$= (\chi, h) \int_G f(x)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) = (\chi, h)\hat{f}(\chi). \qquad \square$$

3. Если $f \in L(G), \chi_1$ — характер, то

$$(\chi_1 f)\hat{}(\chi) = \hat{f}(\chi\chi_1^{-1}).$$

Доказательство. По определению (1.22)

$$\hat{f}(\chi\chi_1^{-1}) = \int\limits_G f(x)\overline{(\chi\chi_1^{-1}, x)}\, d\mu(x) = \int\limits_G f(x)\overline{(\chi, x)}\overline{(\chi_1^{-1}, x)}\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_G (\chi_1, x) f(x)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) = \int\limits_G (\chi_1 f)(x)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) = (\chi_1 f)\hat{}(\chi). \qquad \square$$

4. Если $f \in L(G)$, то $(\bar{f})\hat{} = (\hat{f})^*$, т. е. $(\bar{f})\hat{}(\chi) = \overline{\hat{f}(\chi^{-1})}$.

Доказательство.

$$(\bar{f})\hat{}(\chi) = \int\limits_G \bar{f}(x)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) = \int\limits_G \bar{f}(x)(\chi^{-1}, x)\, d\mu(x) =$$

$$= \overline{\int\limits_G f(x)\overline{(\chi^{-1}, x)}\, d\mu(x)} = \overline{\hat{f}(\chi^{-1})}. \qquad \square$$

5. Если $f_1, f_2 \in L(G)$, то свертка $f_1 * f_2 \in L(G)$ и справедливо равенство

$$(f_1 * f_2)\hat{}(\chi) = \hat{f}_1(\chi)\hat{f}_2(\chi). \tag{1.23}$$

Доказательство. Интегрируемость свертки $f_1 * f_2$ доказывается так же, как и в случае компактной группы. Докажем равенство (1.23). На основании теоремы Фубини и инвариантности интеграла имеем

$$(f_1 * f_2)\hat{}(\chi) = \int\limits_G (f_1 * f_2)(x)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_G \left(\int\limits_G f_1(x \dot{-} t) f_2(t)\, d\mu(t) \right) \overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_G f_2(t)\overline{(\chi, t)}\, d\mu(t) \cdot \int\limits_G f_1(x \dot{-} t)\overline{(\chi, x \dot{-} t)}\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_G f_2(t)\overline{(\chi, t)}\, d\mu(t) \int\limits_G f_1(x)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) = \hat{f}_2(\chi)\hat{f}_1(\chi). \qquad \square$$

Определение 1.22. Напомним, что *гладкой финитной функцией* называется конечная линейная комбинация

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \mathbf{1}_{G_{n_k} \dot{+} h_k}(x). \tag{1.24}$$

Замечание 1.11. Если обозначить

$$n = \max_{k=\overline{1,N}} n_k, \qquad \tilde{\lambda}_j = \sum_{k\colon G_{n_k} \dot{+} h_k \supset G_n \dot{+} \tilde{h}_j} \lambda_k,$$

то φ можно записать в виде

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \tilde{\lambda}_j \mathbf{1}_{G_n \dot{+} \tilde{h}_j}(x), \tag{1.25}$$

где в отличие от (1.24) смежные классы $G_n \dot{+} \tilde{h}_j$ дизъюнктны.

Теорема 1.32. *Пусть* $\varphi(x) = \mathbf{1}_{G_n}(x)$. *Тогда*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \mu(G_n) \mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi).$$

Доказательство. По определению $\hat{\varphi}(\chi)$ и функции φ имеем

$$\hat{\varphi}(\chi) = \int_G \varphi(x) \overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) = \int_{G_n} \overline{(\chi, x)}\, d\mu(x).$$

Если $\chi \in G_n^\perp$, то $(\chi, x) = 1$ при $x \in G_n$ и поэтому $\hat{\varphi}(\chi) = \mu G_n$. Если $\chi \notin G_n^\perp$, то сужение $\chi|_{G_n}$ характера χ на G_n есть характер компактной группы G_n, отличный от единичного, и поэтому ортогональный к нему. Значит, $\int\limits_{G_n} \overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) = 0$. □

Теорема 1.33. *Если* φ *— гладкая финитная функция, заданная равенством*

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathbf{1}_{G_n \dot{+} h_j}(x), \tag{1.26}$$

то

$$\hat{\varphi}(\chi) = \mu G_n \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \overline{(\chi, h_j)} \mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi). \tag{1.27}$$

Доказательство. Вначале найдем преобразование Фурье функции $\mathbf{1}_{G_n\dot{+}h}$. На основании свойства инвариантности интеграла имеем с учетом теоремы 1.32

$$\left(\mathbf{1}_{G_n\dot{+}h}\right)^{\wedge}(\chi) = \int\limits_G \mathbf{1}_{G_n\dot{+}h}(x)\overline{(\chi,x)}\,d\mu(x) = \int\limits_G \mathbf{1}_{G_n\dot{+}h}(x\dot{+}h)\overline{(\chi,x\dot{+}h)}\,d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{G_n} \overline{(\chi,x)(\chi,h)}\,d\mu(x) = \overline{(\chi,h)}\int\limits_{G_n}\overline{(\chi,x)}\,d\mu(x) = \overline{(\chi,h)}\mathbf{1}_{G_n^{\perp}}(\chi)\mu(G_n).$$

Отсюда сразу находим

$$\hat{\varphi}(\chi) = \sum_{j=1}^{N}\lambda_j \mathbf{1}^{\wedge}_{G_n\dot{+}h_j}(\chi) = \mu G_n \sum_{j=1}^{N}\lambda_j\overline{(\chi,h_j)}\mathbf{1}_{G_n^{\perp}}(\chi). \qquad \square$$

Следствие 1.6. *Преобразование Фурье гладкой финитной функции — снова гладкая финитная функция.*

Доказательство. Пусть φ определена равенством (1.26). Очевидно, что $\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset G_n^{\perp}$. Обозначим через G_M наименьшую подгруппу в G, содержащую объединение $\bigsqcup\limits_{j=1}^{N}(G_n\dot{+}h_j)$, и покажем, что $\hat{\varphi}$ постоянна на смежных классах $G_M^{\perp}\zeta$. В самом деле, пусть $\chi \in G_M^{\perp}$. Тогда

$$\hat{\varphi}(\chi\cdot\zeta) = \int\limits_G \varphi(x)\overline{(\chi\zeta,x)}\,d\mu(x) = \int\limits_{G_M}\varphi(x)\overline{(\chi,x)(\zeta,x)}\,d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{G_M}\varphi(x)\overline{(\zeta,x)}\,d\mu(x)$$

не зависит от $\chi \in G_M^{\perp}$, т.е. $\hat{\varphi}$ постоянна на смежных классах $G_M^{\perp}\zeta$. $\square$

Теорема 1.34. *Гладкая финитная функция φ восстанавливается по своему преобразованию Фурье $\hat{\varphi}(\chi)$ равенством*

$$\varphi(x) = \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi)(\chi,x)\,d\nu(\chi).$$

Доказательство. Используя представление $\hat{\varphi}(\chi)$ в виде (1.27), находим

$$\int\limits_X \hat{\varphi}(\chi)(\chi,x)\,d\nu(\chi) = \mu G_n\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\int\limits_X \mathbf{1}_{G_n^{\perp}}(\chi)(\chi,x\dot{-}h)\,d\nu(\chi) = \tag{1.28}$$

$$= \mu G_n \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \int\limits_{G_n^\perp} (\chi, x \dot{-} h_j)\, d\nu(\chi). \tag{1.29}$$

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1.32, находим, что если $x \in G_n \dot{+} h_j$, то $\int\limits_{G_n^\perp} (\chi, x \dot{-} h_j)\, d\nu(\chi) = \mu G_n^\perp$. Если же $x \notin G_n \dot{+} h_j$, то $\int\limits_{G_n^\perp} (\chi, x \dot{-} h_j)\, d\nu(\chi) = 0$. Это означает, что $\int\limits_{G_n^\perp} (\chi, x \dot{-} h_j)\, d\nu(\chi) = \mu G_n^\perp \mathbf{1}_{G_n \dot{+} h_j}(x)$. Подставляя это значение в (1.29), получаем утверждение теоремы. $\square$

Лемма 1.11. *Если φ — гладкая финитная функция, то*

$$\int\limits_G \varphi(x)\, d\mu(x) = \int\limits_G \varphi(\dot{-}x)\, d\mu(x). \tag{1.30}$$

Доказательство. Так как φ — гладкая финитная функция, то $\varphi(x)$ постоянна на смежных классах $G_n \dot{+} h_j$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset G_N$. Элементы x и y принадлежат одному смежному классу по подгруппе G_n тогда и только тогда, когда $x \dot{-} y \in G_n$, что равносильно тому, что $\dot{-}x \dot{-} (\dot{-}y) \in G_n$, т. е. $y \dot{-} x \in G_n$. Это означает, что отображение $x \mapsto \dot{-}x$ осуществляет перестановку смежных классов, на которых φ постоянна. Поэтому интегралы в (1.30) равны. $\square$

Теорема 1.35 (равенство Планшереля для гладких финитных функций)**.** *Пусть φ, ψ — гладкие финитные функции. Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_G \varphi(x)\overline{\psi(x)}\, d\mu(x) = \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi)\overline{\hat{\psi}(\chi)}\, d\nu(\chi).$$

Доказательство. Так как X — локально компактная нульмерная группа, то мы можем определить преобразование Фурье гладкой финитной функции $a(\chi)$ равенством

$$\breve{a}(x) = \int\limits_X a(\chi)\overline{(\chi, x)}\, d\nu(\chi),$$

и в этом случае $a(\chi)$ восстанавливается по функции $\breve{a}(x)$ равенством

$$a(\chi) = \int\limits_G \breve{a}(x)(\chi, x)\, d\mu(x). \tag{1.31}$$

Для свертки $(a*b)(\chi)$ справедливо равенство $(a*b)^{\smile}(x) = \breve{a}(x)\breve{b}(x)$, из которого с учетом (1.31) находим

$$(a*b)(\chi) = \int\limits_G \breve{a}(x)\breve{b}(x)(\chi, x)\, d\mu(x). \tag{1.32}$$

Положим теперь в равенстве (1.32) $a = \hat{\varphi}(\chi)$, $b = \hat{\psi}(\chi)$. Получим

$$(\hat{\varphi} * \hat{\psi})(\chi) = \int\limits_G (\hat{\varphi})^{\smile}(x)(\hat{\psi})^{\smile}(x)(\chi, x)\, d\mu(x). \tag{1.33}$$

Найдем $(\hat{\varphi})^{\smile}$. По определению преобразования Фурье имеем

$$(\hat{\varphi})^{\smile}(x) = \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi)\overline{(\chi, x)}\, d\nu(\chi) = \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi)(\chi, \dot{-}x)\, d\nu(\chi) = \varphi(\dot{-}x).$$

Поэтому (1.33) примет вид

$$(\hat{\varphi} * \hat{\psi})(\chi) = \int\limits_G \varphi(\dot{-}x)\psi(\dot{-}x)(\chi, x)\, d\mu(x) = \int\limits_G \varphi(\dot{-}x)\psi(\dot{-}x)\overline{(\chi, \dot{-}x)}\, d\mu(x).$$

Полагая $\chi \equiv 1$, получаем с учетом леммы 1.11

$$(\hat{\varphi} * \hat{\psi})(1) = \int\limits_G \varphi(x)\psi(x)\, d\mu(x).$$

Если заменить ψ на $\bar{\psi}$, то получим равенство

$$(\hat{\varphi} * \bar{\psi}^{\wedge})(1) = \int\limits_G \varphi(x)\bar{\psi}(x)\, d\mu(x). \tag{1.34}$$

С другой стороны, для свертки $(\hat{\varphi} * \bar{\psi}^{\wedge})(\chi)$ имеем по определению

$$(\hat{\varphi} * \bar{\psi}^{\wedge})(\chi) = \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi t^{-1})(\bar{\psi})^{\wedge}(t)\, d\nu(t). \tag{1.35}$$

Используя определение $\bar{\psi}^{\wedge}$, находим

$$\bar{\psi}^{\wedge}(t) = \int\limits_G \bar{\psi}(x)\overline{(t, x)}\, d\mu(x) = \overline{\int\limits_G \psi(x)\overline{(t^{-1}, x)}\, d\mu(x)} = \overline{\hat{\psi}(t^{-1})}.$$

Соединяя это равенство и (1.35), получаем

$$(\hat{\varphi} * \bar{\psi}\hat{\ })(\chi) = \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi t^{-1})\overline{\hat{\psi}(t^{-1})}\, d\nu(t). \tag{1.36}$$

Полагая в (1.36) $\chi \equiv 1$ и приравнивая правые части в (1.35) и (1.34), получаем

$$\int\limits_X \hat{\varphi}(t^{-1})\overline{\hat{\psi}(t^{-1})}\, d\nu(t) = \int\limits_G \varphi(x)\bar{\psi}(x)\, d\mu(x),$$

откуда с учетом леммы имеем требуемое равенство. $\square$

Следствие 1.7. *Для гладкой финитной функции $\varphi(x)$ справедливо равенство*

$$\int\limits_G |\varphi(x)|^2\, d\mu(x) = \int\limits_X |\hat{\varphi}(\chi)|^2\, d\nu(\chi),$$

которое также называют равенством Планшереля.

Теорема 1.36. *Любая гладкая финитная функция на X есть преобразование Фурье некоторой гладкой финитной функции на G.*

Доказательство. Пусть $g(\chi)$ — гладкая финитная функция, определенная на X, и пусть

$$g(\chi) = \sum_{j=1}^{P_M P_{M+1} \dots P_{N-1}} \lambda_j \mathbf{1}_{G_M^\perp \cdot \chi_j}(\chi),$$

т. е. g постоянна на смежных классах по подгруппе $G_M^\perp$, лежащих в $G_N^\perp$ и $\operatorname{supp} g \subset G_N^\perp$. Определим функцию $f(x)$ равенством

$$f(x) = \int\limits_X g(\chi)(\chi, x) d\nu(\chi).$$

Тогда f — гладкая финитная функция с $\operatorname{supp} f \subset G_M$ и постоянная на смежных классах $G_N \dot{+} h_j$ $\quad (h_j = a_{N-1}g_{N-1} \dot{+} a_{N-2}g_{N-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_M g_M)$. Покажем, что $\hat{f}(\chi) = g(\chi)$. В самом деле, выберем $\chi \in G_M^\perp \cdot \zeta_j$, и пусть $\chi = \chi_M \cdot \zeta_j$, где $\chi_M \in G_M^\perp$ и $\zeta_j = r_M^{\beta_M} r_{M+1}^{\beta_{M+1}} \cdot \dots \cdot r_{N-1}^{\beta_{N-1}}$. Тогда

$$\hat{f}(\chi) = \int\limits_G f(x)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) = \int\limits_{G_M} f(x)\overline{(\chi_M \zeta_j, x)}\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{G_M} f(x)\overline{(\chi_M, x)(\zeta_j, x)}\, d\mu(x) = \int\limits_{G_M} f(x)\overline{(\zeta_j, x)}\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{G_M} \overline{(\zeta_j, x)}\, d\mu(x) \int\limits_X g(\tilde{\chi})(\tilde{\chi}, x) d\nu(\tilde{\chi}) = \int\limits_{G_M} \overline{(\zeta_j, x)}\, d\mu(x) \int\limits_{G_N^\perp} g(\tilde{\chi})(\tilde{\chi}, x) d\nu(\tilde{\chi}) =$$

$$= \int\limits_{G_M} \overline{(\zeta_j, x)}\, d\mu(x) \sum_k \int\limits_{G_N^\perp \chi_k} \lambda_k (\tilde{\chi}, x) d\nu(\tilde{\chi}). \tag{1.37}$$

Используя свойство инвариантности интеграла, находим при $x \in G_M$

$$\int\limits_{G_M^\perp \chi_k} (\tilde{\chi}, x) d\nu(\tilde{\chi}) = \int\limits_X (\tilde{\chi}, x) \mathbf{1}_{G_M^\perp \chi_k}(\tilde{\chi}) d\nu(\tilde{\chi}) =$$

$$= \int\limits_X (\tilde{\chi}, x) \mathbf{1}_{G_M^\perp}(\tilde{\chi}, \chi_k^{-1}) d\nu(\tilde{\chi}) = \int\limits_X (\tilde{\chi}\chi_k, x) \mathbf{1}_{G_M^\perp}(\tilde{\chi}) d\nu(\tilde{\chi}) =$$

$$= \int\limits_{G_M^\perp} (\tilde{\chi}, x)(\chi_k, x) d\nu(\tilde{\chi}) = \int\limits_{G_M^\perp} (\chi_k, x) d\nu(\tilde{\chi}) = (\chi_k, x)\nu(G_M^\perp).$$

Подставляя это выражение в (1.37), получаем окончательно

$$\hat{f}(\chi) = \int\limits_{G_m} \overline{(\zeta_j, x)}\, d\mu(x) \sum_k \lambda_k \nu(G_M^\perp)(\chi_k, x) =$$

$$= \nu(G_M^\perp) \cdot \sum_k \lambda_k \int\limits_{G_m} \overline{(\zeta_j, x)}(\chi_k, x)\, d\mu(x) = \nu(G_M^\perp)\mu G_m \sum_k \lambda_k \delta_{k,j} = \lambda_j. \quad \square$$

Теперь мы можем определить преобразование Фурье для функций, интегрируемых с квадратом. По следствию из теоремы 1.35 для гладкой финитной функции справедливо равенство

$$\int\limits_G |\varphi(x)|^2\, d\mu(x) = \int\limits_X |\hat{\varphi}(\chi)|^2\, d\nu. \tag{1.38}$$

Рассмотрим отображение $\mathscr{F}: \varphi \to \hat{\varphi}$, которое определено для гладких финитных функций. Равенство (1.38) означает, что $\mathscr{F}$ изометрично. Так как множество гладких финитных функций плотно в $L_2(G)$ и $L_2(X)$, то мы можем продолжить отображение $\mathscr{F}$ на все $L_2(G)$ так, что оно будет изометрично отображать $L_2(G)$ на $L_2(X)$. Образ $\mathscr{F}(\varphi)$ любой функции $\varphi \in L_2(G)$ также будем называть преобразованием Фурье и обозначать $\hat{\varphi}(\chi)$.

Теорема 1.37. *Справедливо равенство*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n(\chi), \tag{1.39}$$

где $\hat{\varphi}_n(\chi) = \int\limits_{G_n} \varphi(x)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x)$ *и предел в* (1.39) *понимается в смысле сходимости по норме* $L_2(X)$, *т. е.*

$$\lim_{n\to-\infty} \|\hat{\varphi}(\chi) - \hat{\varphi}_n(\chi)\|_{L_2(X)}.$$

Доказательство. Покажем, что последовательность $\hat{\varphi}_n(\chi)$ фундаментальна. Обозначим $\varphi_n(x) = \varphi(x)\mathbf{1}_{G_n}(x)$. Очевидно, что $\varphi_n \in L_1(G)$, т. е. преобразование Фурье $\hat{\varphi}_n$ определено. Кроме того, $\|\varphi_n - \varphi\|_{L_2(G)} \to 0$, значит, $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{L_2(G)} \to 0$ при $m, n \to -\infty$. В силу изометричности $\mathscr{F}$ имеем

$$\|\hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}_m\|_{L_2(X)} = \|\varphi_n - \varphi_m\|_{L_2(G)} \to 0,$$

т. е. последовательность $(\hat{\varphi}_n)$ фундаментальна в $L_2(X)$, значит, существует функция $\psi(\chi) \in L_2(X)$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi(\chi) - \hat{\varphi}_n(\chi)\|_{L_2(X)} = 0.$$

Из изометричности $\mathscr{F}$ следует, что $\psi = \mathscr{F}\varphi$. $\square$

Теорема 1.38. *Если* $f_n \in L_2(G)$ *и* $f_n \to f$ *по норме* $L_2(G)$, *то* $\hat{f}_n \to \hat{f}$ *по норме* $L_2(X)$.

Доказательство. Пусть φ_n — гладкие финитные функции, такие, что $\|\varphi_n - f_n\|_{L_2(G)} \leqslant \frac{1}{2^n}$. Тогда $\varphi_n \to f$ по норме $L_2(G)$, значит, $\hat{f} = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n$ в $L_2(X)$. Так как $\|\hat{\varphi}_n - \hat{f}_n\|_{L_2(X)} = \|\varphi_n - f_n\|_{L_2(G)} \leqslant \frac{1}{2n}$, то $\|\hat{f} - \hat{f}_n\|_{L_2(X)} \leqslant +\|\hat{f} - \hat{\varphi}_n\|_{L_2(X)} + \|\hat{\varphi}_n - \hat{f}_n\|_{L_2(X)} \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Теорема 1.39 (равенство Планшереля). *Если* $f, g \in L_2(G)$, *то*

$$\int\limits_G f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x) = \int\limits_X \hat{f}(\chi)\overline{\hat{g}(\chi)}\, d\nu(\chi).$$

Доказательство. Пусть φ_n и ψ_n — финитные гладкие функции, такие, что $\|f - \varphi_n\|_{L_2(G)} \to 0$ и $\|g - \psi_n\|_{L_2(G)} \to 0$. По равенству Планшереля для гладких финитных функций

$$\int\limits_G \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\, d\mu(x) = \int\limits_X \hat{\varphi}_n(\chi)\overline{\hat{\psi}_n(\chi)}\, d\nu(\chi).$$

Но
$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_G \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\,d\mu(x)=\int\limits_G f\overline{g}\,d\mu.$$

В самом деле,
$$\left|\int\limits_G \varphi_n\overline{\psi_n}\,d\mu-\int\limits_G f\overline{g}\,d\mu\right|\leqslant\int\limits_G|\varphi_n\overline{\psi_n}-f\overline{g}|\,d\mu\leqslant\int\limits_G|\varphi_n\overline{\psi_n}-f\overline{\psi_n}|\,d\mu+$$
$$+\int\limits_G|f\overline{\psi_n}-f\overline{g}|\,d\mu\leqslant\|\overline{\psi_n}\|\cdot\|\varphi_n-f\|+\|f\|\cdot\|\overline{\psi_n}-\overline{g}\|\to 0\quad(n\to+\infty).$$

Аналогично
$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X \hat{\varphi}_n(\chi)\overline{\hat{\psi}_n(\chi)}\,d\mu(\chi)=\int\limits_G \hat{f}\overline{\hat{g}}\,d\nu(\chi).$$

Отсюда и следует утверждение теоремы. □

2 ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ НА НУЛЬМЕРНЫХ ГРУППАХ

2.1 Кратномасштабный анализ на локально компактной группе

В этом параграфе мы вводим понятие кратномасштабного анализа (КМА) на локально компактной нульмерной группе G и указываем условия на ступенчатую функцию $\varphi \in L_2(G)$, при которых она порождает ортогональный КМА [19–21].

Определение 2.1. Пусть $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — базисная система в G. Положим по определению

$$H_0 = \{h = a_{-1}g_{-1} + a_{-2}g_{-2} + \dots + a_{-s}g_{-s} : \ s \in \mathbb{N}\},$$
$$H_n = \{h = a_{-1}g_{-1} + a_{-2}g_{-2} + \dots + a_{-n-1}g_{-n-1}\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Замечание 2.1. Множество H_0 есть аналог множества натуральных чисел, так как при стандартном отображении $\varphi(x) = \sum\limits_n \frac{a_n}{m_{n+1}}$ выполняется равенство

$$\varphi(H_0) = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}_0.$$

Предложение 2.1. *$\hat{\varphi}_{\dot{-}h}(x) = \hat{\varphi}(\chi)\overline{(\chi, h)}$ при любом $h \in G$.*

Доказательство.

$$\hat{\varphi}_{\dot{-}h}(x) = \int\limits_G \varphi(x\dot{-}h)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) = \int\limits_G \varphi(x)\overline{(\chi, x\dot{+}h)}\, d\mu(x) =$$
$$= \int\limits_G \varphi(x)\overline{(\chi, x)} \cdot \overline{(\chi, h)}\, d\mu(x) = \overline{(\chi, h)}\hat{\varphi}(\chi). \qquad \square$$

Теорема 2.1. *Если $\varphi \in L_2(G)$, $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ почти всюду, то $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ — ортонормированная система в $L_2(G)$.*

Доказательство. Пусть $h, g \in H_0$. Тогда

$$\int\limits_G \varphi(x\dot{-}h)\overline{\varphi(x\dot{-}g)}\, d\mu(x) = \int\limits_X \hat{\varphi}_{\dot{-}h}(\chi)\overline{\hat{\varphi}_{\dot{-}g}(\chi)}\, d\nu(\chi) =$$
$$= \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi)\overline{(\chi, h)} \cdot \overline{\hat{\varphi}(\chi)}(\chi, g)\, d\nu(\chi) =$$
$$= \int\limits_X |\hat{\varphi}(\chi)|^2\overline{(\chi, h)}(\chi, g)\, d\nu(\chi) = \int\limits_X \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)(\chi, g\dot{-}h)\, d\nu(\chi) =$$

$$= \int\limits_{G_0^\perp} (\chi, g\dot{-}h)\, d\nu(\chi) = \mathbf{1}_{G_0}(g\dot{-}h).$$

Если $g = h$, то $g\dot{-}h = 0 \in G_0 \Rightarrow \mathbf{1}_{G_0}(g\dot{-}h) = 1$.
Если $g, h \in H_0$ и $g \neq h$, то $g\dot{-}h \notin G_0 \Rightarrow \mathbf{1}_{G_0}(g\dot{-}h) = 0$.
Таким образом, $\varphi(x\dot{-}h)$ — ортонормированная система. □

Теорема 2.2. *Пусть $\varphi(x)$ — гладкая финитная функция, $\operatorname{supp}\hat{\varphi}(\chi) \subset G_0^\perp$, $\hat{\varphi}(1) = 1$ и $\varphi(x\dot{-}h)_{h\in H_0}$ — ортонормированная система. Тогда $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$.*

Доказательство. Рассмотрим при $h \in H_0$ интеграл

$$\int\limits_G \varphi(x)\overline{\varphi(x\dot{-}h)}\, d\mu(x) = \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi)\overline{\hat{\varphi}(\chi)}(\chi, h)\, d\nu(\chi) =$$
$$= \int\limits_X |\hat{\varphi}(\chi)|^2(\chi, h)\, d\nu(\chi) = \int\limits_{G_0} |\hat{\varphi}(\chi)|^2(\chi, h)\, d\nu(\chi).$$

Так как φ — гладкая финитная функция, то $\hat{\varphi}$ — тоже гладкая финитная функция. Пусть $\hat{\varphi}(\chi)$ постоянна на смежных классах $G_{-N}^\perp\zeta = G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{-1}^{\alpha_{-1}}$. Интеграл представляем в виде

$$\int\limits_{G_0} |\hat{\varphi}(\chi)|^2(\chi, h)\, d\nu(\chi) = \sum_{\alpha_{-N}=0}^{p_{-N}-1} \cdots \sum_{\alpha_{-1}=0}^{p_{-1}-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp\zeta)|^2 \int\limits_{G_{-N}^\perp\zeta} (\chi, h)\, d\nu(\chi).$$

Вычисляем

$$\int\limits_{G_{-N}^\perp\zeta} (\chi, h)\, d\nu(\chi) = \int\limits_X \mathbf{1}_{G_{-N}^\perp\zeta}(\chi)(\chi, h)\, d\nu(\chi) = \int\limits_X \mathbf{1}_{G_{-N}^\perp\zeta}(\chi\zeta)(\chi\zeta, h)\, d\nu(\chi) =$$
$$= \int\limits_X \mathbf{1}_{G_{-N}^\perp}(\chi)(\chi, h)(\zeta, h)\, d\nu(\chi) = (\zeta, h) \int\limits_{G_{-N}^\perp} (\chi, h)\, d\nu(\chi) =$$
$$= (\zeta, h)\mathbf{1}_{G_{-N}}(h)\mu G_{-N}^\perp.$$

Положим $h = a_{-1}g_{-1}\dot{+}\dots\dot{+}a_{-N}g_{-N}$, получаем систему уравнений:

$$\sum_{\alpha_{-N}=0}^{p_{-N}-1} \cdots \sum_{\alpha_{-1}=0}^{p_{-1}-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{-1}^{\alpha_{-1}})|^2 (r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{-1}^{\alpha_{-1}}, \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}g_{-k}) \cdot \mu G_{-N}^\perp =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ если все } a_1 = \dots = a_n = 0, \\ 0, \text{ если среди них по крайней мере один не ноль.} \end{cases}$$

Матрица этой системы ортогональна, значит, система имеет единственное решение. Очевидно, что таким решением будет

$$|\hat{\varphi}(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{-1}^{\alpha_{-1}})|^2 = 1. \qquad \square$$

В дальнейшем мы будем рассматривать группы, в которых $p_n = p$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, так как только в этом случае удается определить оператор растяжения.

Определение 2.2. Пусть $(G, \dot{+})$ — локально компактная нульмерная группа, $(G_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ — основная цепочка, $(G_n/G_{n+1})^\sharp = p$, (p — простое), $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ — базисная последовательность. Определим оператор $\mathscr{A} : G \to G$ равенством

$$\mathscr{A}(x) = \mathscr{A}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n g_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n g_{n-1}, \quad \text{если} \quad x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n g_n.$$

Если оператор $\mathscr{A}$ аддитивен, т. е. $\mathscr{A}(x \dot{+} y) = \mathscr{A}(x) \dot{+} \mathscr{A}(y)$, то будем называть его оператором растяжения.

Замечание 2.2. Оператор $\mathscr{A}$ будет аддитивным, если операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию

$$p g_n = \gamma_1 g_{n+1} \dot{+} \gamma_2 g_{n+2} \dot{+} \dots \dot{+} \gamma_s g_{n+s} \quad (\gamma_j = \overline{0, p-1}),$$

где γ_i $(i = \overline{1, s})$ — фиксированные числа.

Свойства оператора растяжения.

Свойство 1. $\mathscr{A}(G_n) = G_{n-1}$.

Доказательство. $\mathscr{A}(G_n) = \{\mathscr{A}(a_n g_n \dot{+} a_{n+1} g_{n+1} \dot{+} \dots)\} = \{(a_n g_{n-1} \dot{+} \dot{+} a_{n+1} g_n \dot{+} \dots)\} = G_{n-1}$. $\square$

Свойство 2. $\int\limits_G f(x)\, d\mu(x) = p \int\limits_G f(\mathscr{A} x)\, d\mu(x)$.

Доказательство. Пусть $f(x) = \mathbf{1}_{G_n}(x)$. Тогда

$$f(\mathscr{A} x) = \mathbf{1}_{G_n}(\mathscr{A} x) = \mathbf{1}_{\mathscr{A} G_{n+1}}(\mathscr{A} x) = \mathbf{1}_{G_{n+1}}(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int\limits_G f(x)\, dx = \int\limits_{G_n} d\mu(x) = \mu G_n,$$

$$\int_G f(\mathscr{A}x)\,d\mu(x) = \int_G \mathbf{1}_{G_{n+1}}(x)\,d\mu(x) = \mu G_{n+1} = \frac{1}{p}\mu G_n.$$

Таким образом, равенство доказано для функции $\mathbf{1}_{G_n}(x)$, отсюда следует, что оно верно для гладких финитных функций, значит, верно для всех $f \in L(G)$. $\square$

Определение 2.3. Определим оператор растяжения $\mathscr{A}$ на группе характеров X следующим образом: $(\chi\mathscr{A}, x) \overset{df}{=} (\chi, \mathscr{A}x)$, т. е. оператор $\mathscr{A}$ действует на элементы $x \in G$ слева, а на элементы $\chi \in X$ справа.

Свойство 3. $G_n^\perp \mathscr{A} = G_{n+1}^\perp$.

Доказательство. $\chi \in G_n^\perp \Leftrightarrow (\chi, G_n) = 1 \Leftrightarrow (\chi\mathscr{A}, \mathscr{A}^{-1}G_n) = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\chi\mathscr{A}, G_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow \chi\mathscr{A} = G_{n+1}^\perp$. $\square$

Свойство 4. Если $r_0 \in G_0^\perp \backslash G_{0+1}^\perp$ — функции Радемахера, то функции $r_0\mathscr{A}^n \in G_n^\perp \setminus G_{n+1}^\perp$, т. е. $r_0\mathscr{A}^n$ есть n-я функция Радемахера.

Доказательство очевидно с учетом предыдущего свойства. $\square$

Лемма 2.1. *Если $g, h \in H_0$, то*

$$\int_{G_0^\perp} \overline{(\chi, g)}(\chi, h)\,d\nu(\chi) = \delta_{g,h} = \begin{cases} 1, & g = h, \\ 0 & g \neq h. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим элементы $x \in G$ как характеры группы X, и пусть $\tilde{x} = x|_{G_0^\perp}$ — сужения этих характеров на группу $G_0^\perp$. Тогда

$$\tilde{x} = a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}a_{-N}g_{-N} \in H_0$$

(здесь надо учесть, что $(G_0^\perp, g_k) = 1$ при $k \geqslant 0$). Поэтому H_0 есть группа характеров компактной группы $G_0^\perp$, значит, элементы из H_0, точнее их сужения на $G_0^\perp$, образуют ортонормированную систему в $L_2(G_0^\perp)$. $\square$

Следствие 2.1. *Справедливы равенства:*

1) $\int\limits_{G_0^\perp} (\chi, x)\,d\nu(\chi) = \mathbf{1}_{G_0}(x)$;

2) $\int\limits_{G_0} (\chi, x)\,d\mu(x) = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$.

Первое из этих равенств есть непосредственное следствие из леммы 2.1, второе является двойственным к первому.

Следствие 2.2. *Для любого $n \in \mathbb{Z}$ справедливы равенства:*
1) $\int\limits_{G_n^\perp} (\chi, x)\, d\nu(\chi) = p^n \mathbf{1}_{G_n}(x)$;
2) $\int\limits_{G_n} (\chi, x)\, d\mu(x) = \frac{1}{p^n} \mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi)$.

Доказательство. Сначала докажем первое равенство. На основании равенства

$$\int\limits_X f(\chi\mathscr{A})\, d\nu(\chi) = p^{-1} \int\limits_X f(\chi)\, d\nu(\chi), \quad \mathbf{1}_{G_n^\perp}(x) = \mathbf{1}_{G_0}(\mathscr{A}^n x)$$

и предыдущего следствия мы имеем

$$\int\limits_{G_n^\perp} (\chi, x)\, d\nu(\chi) = \int\limits_X \mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi)(\chi, x)\, d\nu(\chi) = p^n \int\limits_X (\chi\mathscr{A}^n, x)\mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi\mathscr{A}^n)\, d\nu(\chi) =$$

$$= p^n \int\limits_X (\chi, \mathscr{A}^n x)\mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)\, d\nu(\chi) = p^n \mathbf{1}_{G_0}(\mathscr{A}^n x) = p^n \mathbf{1}_{G_n}(x).$$

Второе равенство доказывается аналогично. □

Следствие 2.3. *При каждом целом l функции $(p^{-l/2}\mathscr{A}^{-l}h)_{h\in H_0}$ образуют ортонормированную систему на подгруппе $G_l^\perp$.*

Доказательство.

$$\int\limits_{G_l^\perp} (\chi\mathscr{A}^{-l}, h)\overline{(\chi\mathscr{A}^{-l}, g)}\, d\nu(\chi) = \int\limits_X \mathbf{1}_{G_l^\perp}(\chi)(\chi\mathscr{A}^{-l}, h)\overline{(\chi\mathscr{A}^{-l}, g)}\, d\nu(\chi) =$$

$$= \int\limits_X \mathbf{1}_{G_l^\perp\mathscr{A}^{-l}}(\chi)(\chi\mathscr{A}^{-l}, h)\overline{(\chi\mathscr{A}^{-l}, g)}\, d\nu(\chi) =$$

$$= p^l \int\limits_X \mathbf{1}_{G_l^\perp\mathscr{A}^{-l}}(\chi)(\chi, h)\overline{(\chi, g)}\, d\nu(\chi) =$$

$$= p^l \int\limits_X \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)(\chi, h)\overline{(\chi, g)}\, d\nu(\chi) = p^l \int\limits_{G_0^\perp} (\chi, h)\overline{(\chi, g)}\, d\nu(\chi) = p^l \delta_{h,g}. \quad \square$$

Лемма 2.2. *Если $\varphi \in L_2(G)$ и $\mathscr{A}$ — оператор растяжения,то*

$$\hat{\varphi}_{\mathscr{A}\cdot\dot{-}g}(\chi) = \frac{1}{p}\overline{(\chi, \mathscr{A}^{-1}g)}\hat{\varphi}(\chi\mathscr{A}^{-1}),$$

где $\chi\mathscr{A}^{-1}$ — характер, определенный равенством $\chi\mathscr{A}^{-1}(x) = \chi(\mathscr{A}^{-1}x)$.

Доказательство. На основании свойств оператора растяжения получаем

$$\hat{\varphi}_{\mathscr{A}\cdot\dot{-}g}(\chi)=\int\limits_G \varphi(\mathscr{A}x\dot{-}g)\overline{(\chi,x)}\,d\mu(x)=\int\limits_G \varphi(\mathscr{A}x\dot{-}g)\overline{(\chi,\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}x)}\,d\mu(x)=$$

$$=\frac{1}{p}\int\limits_G \varphi(x\dot{-}g)\overline{(\chi,\mathscr{A}^{-1}x)}\,d\mu(x)=$$

$$=\frac{1}{p}\int\limits_G \varphi(x\dot{-}g)\overline{(\chi,\mathscr{A}^{-1}x\dot{-}\mathscr{A}^{-1}g\dot{+}\mathscr{A}^{-1}g)}\,d\mu(x)=$$

$$=\frac{1}{p}\overline{(\chi,\mathscr{A}^{-1}g)}\int\limits_G \varphi(x\dot{-}g)\overline{(\chi\mathscr{A}^{-1},x\dot{-}g)}\,d\mu(x)=$$

$$=\frac{1}{p}\overline{(\chi,\mathscr{A}^{-1}g)}\int\limits_G \varphi(x)\overline{(\chi\mathscr{A}^{-1},x)}\,d\mu(x)=\frac{1}{p}\overline{(\chi,\mathscr{A}^{-1}g)}\hat{\varphi}(\chi\mathscr{A}^{-1}). \qquad \square$$

Лемма 2.3. *Пусть* $\chi_{n,s}=r_n^{\alpha_n}r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\dots r_{n+s}^{\alpha_{n+s}}$ *— характер, не принадлежащий* $G_n^\perp$. *Тогда*

$$\int\limits_{G_n^\perp\chi_{n,s}}(\chi,x)\,d\nu(\chi)=p^n(\chi_{n,s},x)\mathbf{1}_{G_n}(x).$$

Доказательство. По аналогии с предыдущим имеем

$$\int\limits_{G_n^\perp\chi_{n,s}}(\chi,x)\,d\nu(\chi)=\int\limits_X \mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi)(\chi_{n,s}\chi,x)\,d\nu(\chi)=$$

$$=\int\limits_{G_n^\perp}(\chi_{n,s},x)(\chi,x)\,d\nu(\chi)=p^n(\chi_{n,s},x)\mathbf{1}_{G_n}(x). \qquad \square$$

Лемма 2.4. *Пусть* $h_{n,s}=a_{n-1}g_{n-1}\dot{+}a_{n-2}g_{n-2}\dot{+}\dots\dot{+}a_{n-s}g_{n-s}\notin G_n$. *Тогда*

$$\int\limits_{G_n\dot{+}h_{n,s}}(\chi,x)\,d\mu(x)=\frac{1}{p^n}(\chi,h_{n,s})\mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi).$$

Это лемма, двойственная к предыдущей.

Определение 2.4. Пусть $M,N\in\mathbb{N}$. Обозначим через $\mathfrak{D}_M(G_{-N})$ множество ступенчатых функций $f\in L_2(G)$, постоянных на смежных классах $G_M\dot{+}g$, для которых $\operatorname{supp} f\subset G_{-N}$. $\mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$ определяется аналогично.

Лемма 2.5. *Пусть* $M, N \in \mathbb{N}$, $f \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{f} \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^{\perp})$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть f постоянна на смежных классах $G_M \dot+ g$ и $\operatorname{supp} f \subset G_{-N}$. Покажем, что $\operatorname{supp} \hat{f} \subset G_M^{\perp}$. Пусть $\chi \notin G_M^{\perp}$. Тогда

$$\hat{f}(\chi) = \int\limits_G f(x)\overline{(\chi, x)}\,d\mu(x) = \int\limits_{G_{-N}} f(x)\overline{(\chi, x)}\,d\mu(x) =$$
$$= \sum_{h_{M,N} \in H_M^N} \int\limits_{G_M \dot+ h_{M,N}} f(x)\overline{(\chi, x)}\,d\mu(x),$$

где

$$H_M^N = \{h_{M,N} = a_{M-1}g_{M-1} \dot+ a_{M-2}g_{M-2} \dot+ \ldots \dot+ a_{-N}g_{-N}\}.$$

По лемме 2.4

$$\hat{f}(\chi) = \sum f(G_M \dot+ h_{M,N}) \int\limits_{G_M \dot+ h_{M,N}} \overline{(\chi, x)}\,d\mu(x) =$$
$$= \sum f(G_M \dot+ h_{M,N}) \frac{1}{p^M} \overline{(\chi, h_{M,N})} \mathbf{1}_{G_M^{\perp}}(\chi) = 0.$$

Теперь покажем, что $\hat{f}$ постоянна на смежных классах $G_{-N}^{\perp}\zeta$. В самом деле, пусть $\chi \in G_{-N}^{\perp}\zeta$ и $\zeta = r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \ldots r_{-N+s}^{\alpha_{-N+s}}$. Тогда $\chi = \chi_{-N}\zeta$, где $\chi_{-N} \in G_{-N}^{\perp}$. Поэтому

$$\hat{f}(\chi) = \int\limits_{G_{-N}} f(x)\overline{(\chi, x)}\,d\mu(x) = \int\limits_{G_{-N}} f(x)\overline{(\chi_{-N}\zeta, x)}\,d\mu(x) =$$
$$= \int\limits_{G_{-N}} f(x)\overline{(\zeta, x)}\,d\mu(x).$$

Это означает, что $\hat{f}(\chi)$ зависит только от ζ. Необходимость доказана.

Достаточность доказывается аналогично. □

Лемма 2.6. *Пусть* $\varphi \in L_2(G)$. *Система* $(\varphi(x \dot- h))_{h \in H_0}$ *ортонормирована тогда и только тогда, когда ортонормирована система* $\left(p^{\frac{n}{2}}\varphi(\mathscr{A}^n x \dot- h)\right)_{h \in H_0}$.

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из равенства

$$\int\limits_G p^{\frac{n}{2}}\varphi(\mathscr{A}^n x\dot{-}h)p^{\frac{n}{2}}\overline{\varphi(\mathscr{A}^n x\dot{-}g)}\,d\mu = \int\limits_G \varphi(x\dot{-}h)\overline{\varphi(x\dot{-}g)}\,d\mu. \qquad \square$$

Теперь мы можем ввести понятие кратномасштабного анализа на нульмерной группе.

Определение 2.5. Совокупность замкнутых в $L_2(G)$ подпространств $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ называется *кратномасштабным анализом*, если выполнены условия (аксиомы):

A1. $V_n \subset V_{n+1}$.

A2. $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ — плотно в $L_2(G)$, т. е. $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n} = L_2(G)$.

A3. $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}$.

A4. $\forall\, n,\ f \in V_n \Leftrightarrow f(\mathscr{A}x) \in V_{n+1}$.

A5. Если $f(x) \in V_0$, то $f(x\dot{-}h) \in V_0$ при $h \in H_0$.

A6. Существует функция $\varphi \in L_2(G)$ такая, что система $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ образует ортонормированный базис в $L_2(G)$. φ называется *масштабирующей функцией.*

Кратномасштабный анализ используют для построения ортонормированных базисов в $L_2(G)$. Поэтому возникает две задачи:

1) научиться строить КМА и функцию φ;

2) по функции φ построить функцию ψ (или несколько функций ψ_1, $\psi_2, \ldots, \psi_s$) такую, что $(\psi_j(\mathscr{A}^n x\dot{-}h))_{n\in\mathbb{Z},h\in H_0,\, j=\overline{1,s}}$ образуют ортонормированную систему в $L_2(G)$.

Рассмотрим эти задачи.

Задача 1. Пусть $\varphi \in L_2(G)$ такая, что сдвиги $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ есть ортонормированный базис. Мы знаем, что это выполняется, если $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$. По функции $\varphi(x)$ строятся подпространства $V_n = \overline{\operatorname{span}(\varphi(\mathscr{A}^n x\dot{-}h))_{h\in H_0}}$. Если V_n образуют КМА, то φ будет масштабирующей функцией в этом КМА. В этом случае говорят, что φ порождает ортогональный КМА, а φ называется ортогональной масштабирующей функцией. Основной вопрос: как найти такую функцию φ?

Теорема 2.3. *Если $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — КМА с ортогональной масштабирующей функций φ, то φ удовлетворяет уравнению*

$$\varphi(x) = \sum_{h\in H_0} \beta_h \varphi(\mathscr{A}x\dot{-}h), \quad \sum |\beta_h|^2 < +\infty. \tag{2.1}$$

Доказательство. Так как $\varphi(x\dot{-}h)$ — ортонормированный базис в V_0, то из аксиомы A4 для КМА следует, что $\sqrt{p}\varphi(\mathscr{A}x\dot{-}h)$ — ортонормированный базис в V_1, и так как $V_0 \subset V_1$, то

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(\mathscr{A}x\dot{-}h). \qquad \square$$

Определение 2.6. Уравнение (2.1) называют *масштабирующим.*

Таким образом, условие (2.1) является необходимым для ортогональной масштабирующей функции, порождающей КМА. Кроме того, система сдвигов должна быть ортонормированной системой. По теореме 2.1 система сдвигов $\varphi(x\dot{-}h)_{h\in H_0}$ будет ортонормированной, если $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$. Поэтому функцию, порождающую ортогональный КМА, будем искать среди функций, для которых выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} &1)\ |\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi), \\ &2)\ \varphi(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(\mathscr{A}x\dot{-}h). \end{aligned} \tag{2.2}$$

В теореме 2.4 указаны условия на функцию $\varphi \in L_2(G)$, при которых она порождает ортогональный КМА.

Теорема 2.4. *Пусть $\varphi \in L_2(G)$ такая, что*

$$1)\ |\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi), \quad 2)\ \varphi(x) = \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h \varphi(\mathscr{A}x\dot{-}h), \tag{2.3}$$

где $H_0^{(s)} = \{a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}a_{-s}g_{-s}\} \subset H_0$ — конечное множество. Тогда функция φ порождает ортогональный КМА.

Для доказательства этой теоремы надо доказать аксиомы КМА для подпространств $V_n = \overline{\mathrm{span}(\varphi(\mathscr{A}^n x\dot{-}h))_{h\in H_0}}$:

A1. $V_n \subset V_{n+1}$.

A2. $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n} = L_2(G)$.

A3. $\bigcap V_n = \{0\}$.

A4. $f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(\mathscr{A}x) \in V_{n+1}$.

A5. $f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x\dot{-}h) \in V_0$.

Будем последовательно проверять эти аксиомы.

Лемма 2.7. *Если* $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$, *то система*

$$\left(p^{n/2}\varphi(\mathscr{A}^n x \dot{-} h)\right)_{h\in H_0} \tag{2.4}$$

есть ортонормированный базис в V_n.

Доказательство. Достаточно доказать, что система (2.4) ортонормирована. Согласно теореме 2.1 система $\varphi(x\dot{-}h)$ есть ортонормированный базис в V_0, следовательно

$$\int\limits_G \varphi(x\dot{-}h)\bar{\varphi}(x\dot{-}q)\, d\mu(x) = \delta_{h,q} \ (h, q \in H_0).$$

По свойствам оператора растяжения

$$\int\limits_G \varphi(\mathscr{A}^n x\dot{-}h)\bar{\varphi}(\mathscr{A}^n x\dot{-}q)\, d\mu(x) = \frac{1}{p^n}\int\limits_G \varphi(x\dot{-}h)\bar{\varphi}(x\dot{-}q)\, d\mu(x) = \frac{1}{p^n}\delta_{hq}. \quad \square$$

Лемма 2.8. *Пусть* $\operatorname{supp}\hat{\varphi}(\chi) \subset G_0^\perp$ *и* $\varphi(x)$ *удовлетворяет масштабирующему уравнению* (2.1). *Тогда* $V_j \subset V_{j+1}$ *при любом* $j \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. По определению φ при любом $q_0 \in H_0$

$$\varphi(x\dot{-}q_0) = \sum_{h\in H_0} \beta_h \varphi(\mathscr{A}(x\dot{-}q_0)\dot{-}h).$$

Так как $pg_n = \alpha_1 g_{n+1}\dot{+}\ldots\dot{+}\alpha_s g_{n+s}$, то

$$\begin{aligned} Aq_0\dot{+}h = b_{-2}g_{-2}\dot{+}b_{-3}g_{-3}\dot{+}\ldots\dot{+}b_{-N}g_{-N}\dot{+}a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}b_{-N}g_{-N} = \\ = c_{-N}g_{-N}\dot{+}c_{-N+1}g_{-N+1}\dot{+}\ldots\dot{+}c_{-1}g_{-1}\dot{+}x_0, \quad x_0 \in G_0. \end{aligned}$$

По лемме 2.5 $\varphi(x)$ постоянна на смежных классах по G_0, значит, $\varphi(x\dot{+}x_0) = \varphi(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi(\mathscr{A}x\dot{-}\mathscr{A}q_0\dot{-}h) = \varphi(\mathscr{A}x\dot{-}(c_{-1}g_{-1}\dot{+}\ldots\dot{+}c_{-N}g_{-N}\dot{+}x_0)) = \\ = \varphi(\mathscr{A}x\dot{-}q) \quad (q \in H_0). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\varphi(x\dot{-}q_0) = \sum_{h\in H_0} \beta_h \varphi(Ax\dot{-}q_h) \quad (q_h \in H_0).$$

Это означает, что $L_0 \subset L_1$, следовательно, $V_0 \subset V_1$. Отсюда легко выводим $V_j \subset V_{j+1}$ при любом $j \in \mathbb{Z}$. $\square$

Лемма 2.9. *Пусть* $\varphi \in L_2(G)$ — *решение уравнения* (2.1) *и* $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$. *Тогда* $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n} = L_2(G)$ *в том и только том случае, когда*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{supp}\hat{\varphi}(\cdot\mathscr{A}^{-n}) = X.$$

Доказательство. 1. Покажем, что $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n}$ инвариантно относительно сдвигов. Сначала покажем, что V_n инвариантно относительно сдвигов $h \in H_n = \mathscr{A}^{-n}H_0$. В самом деле, пусть $f \in L_n = \operatorname{span}(\varphi(\mathscr{A}^n x \dot{-} h))_{h\in H_0}$. Тогда

$$f(x) = \sum_{h_n\in H_n} \beta_{h_n}\varphi(\mathscr{A}^n(x\dot{-}h_n)).$$

Поэтому при $h \in H_n$

$$f(x\dot{-}h) = \sum_{h_n\in H_n} \beta_{h_n}\varphi(\mathscr{A}^n x\dot{-}\mathscr{A}^n h_n\dot{-}\mathscr{A}^n h).$$

Так как $\mathscr{A}^n h, \mathscr{A}^n h_n \in H_0$, то

$$\mathscr{A}^n h = a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}a_{-N}g_{-N},$$
$$\mathscr{A}^n h_n = b_{-1}g_{-1}\dot{+}b_{-2}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}b_{-N}g_{-N}.$$

Поэтому $\mathscr{A}^n h_n\dot{+}\mathscr{A}^n h = c_{-1}g_{-1}\dot{+}c_{-2}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}c_{-N}g_{-N}\dot{+}x_0$, где $x_0 \in G_0$. Так как по лемме 2.5 $\varphi(x\dot{+}x_0) = \varphi(x)$, то $f(x\dot{-}h) \in L_n$. Пусть теперь $f \in V_n = \overline{L_n}$. Тогда существует последовательность (f_m) такая, что $f_m \in L_n$ и $\|f_m - f\|_2 \to 0$. Ввиду инвариантности L_n относительно сдвигов $h \in H_n$ имеем $f_m(\cdot\dot{+}h) \in L_n$. Учитывая инвариантность интеграла, получаем

$$\int_G |f(x\dot{+}h) - f_m(x\dot{+}h)|^2\,d\mu(x) = \int_G |f(x) - f_m(x)|^2\,d\mu(x) = \|f - f_m\|_2^2 \to 0.$$

Это означает, что $f(\cdot\dot{+}h) \in V_n$. Таким образом, мы доказали, что V_n инвариантно относительно сдвигов $h \in H_n$.

Покажем инвариантность $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n}$ относительно любых сдвигов. Пусть вначале $f \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n$. Так как $V_n \subset V_{n+1}$, то существует $n_1 \in \mathbb{Z}$ такое, что $f \in V_n$ для $n \geqslant n_1$. По доказанному выше $f(\cdot\dot{+}h_n) \in V_n$ при

$h_n \in H_n,\ n \geqslant n_1$. Выберем $h \in G$ произвольно. Тогда $h = \sum\limits_{l=-k}^{+\infty} a_l g_l$. Рассмотрим последовательность h_n, определенную равенством

$$h_n = a_{-k}g_{-k}\dot{+}a_{-k+1}g_{-k+1}\dot{+}\ldots\dot{+}a_{n-1}g_{n-1}.$$

Очевидно, $h_n \to h$ при $n \to +\infty$. Так как $h_n \in H_n$, то $f(x\dot{+}h_n) \in V_n$ при всех $n \geqslant n_1$, значит, $f(x\dot{+}h_n) \in \bigcup\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} V_\nu$ при всех $j \geqslant n_1$. Так как $f \in L_2(G)$, то $\|f(\cdot\dot{+}h) - f(\cdot\dot{+}h_n)\|_2 \to 0$, т. е. $f(\cdot\dot{+}h) \in \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n}$.

Пусть теперь $f \in \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n}$. Тогда существует последовательность $f_m \in \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}} V_n$ такая, что $\|f - f_m\|_2 \to 0$. По только что доказанному $f_n(\cdot\dot{+}h) \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n$. Поэтому

$$\|f(\cdot\dot{+}h) - f_m(\cdot\dot{+}h)\|_2 = \|f - f_m\|_2 \to 0,$$

т. е. $f(\cdot\dot{+}h) \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n$.

2. Перейдем к доказательству леммы. Обозначим $Y = \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n}$. Так как Y инвариантно относительно любых сдвигов $h \in G$, то по теореме Винера $\hat{Y} = L_2(X_1)$, где $X_1 \subset X$. Так как $Y = L_2(G) \Leftrightarrow \hat{Y} = L_2(X)$, то $Y = L_2(G) \Leftrightarrow X = X_1$ с точностью до множества меры ноль. Поэтому достаточно доказать, что

$$X = X_1 \Leftrightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{supp} \hat{\varphi}(\cdot A^{-j}) = X.$$

Обозначим $\varphi_j(x) = \varphi(A^j x),\ X_0 = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{supp} \hat{\varphi}_j$ и покажем, что $X_0 = X_1$ с точностью до множества меры ноль. Так как $\varphi_j \in V_j$, то $\operatorname{supp} \hat{\varphi}_j \subset X_1$, ибо $\varphi_j \in Y$ и $\hat{Y}$ состоит из функций, определенных на X_1. Поэтому

$$X_0 = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{supp} \hat{\varphi}_j \subset X_1.$$

Покажем, что $X_1 \setminus X_0$ имеет меру ноль. Выберем $f \in V_j$. Тогда

$$f = \lim f_n, \quad f_n = \sum_{h\in H_0} d_h \varphi(A^j x \dot{-} h),$$

где f_n есть конечная сумма. Отсюда находим, что при всех $\chi \in X_1 \setminus X_0$

$$\hat{f}_n(\chi) = \sum_{h\in H_0} d_n \int\limits_G \varphi(A^j x \dot{-} h)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) =$$

$$= \sum_{h\in H_0} d_n \overline{(\chi, A^{-j}h)} \int\limits_G \varphi(A^j(x \dot{-} A^{-j}h))\overline{(\chi, x \dot{-} A^{-j}h)}\, d\mu(x) =$$

$$= \sum_{h\in H_0} d_n \overline{(\chi, A^{-j}h)} \int\limits_G \varphi(A^j x)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) = 0,$$

т. е. $\hat{f}_n(\chi) = 0$ для всех $\chi \in X_1 \setminus X_0$. Отсюда следует $\hat{f}(\chi) = 0$ почти всюду на $X_1 \setminus X_0$ для $f \in V_j$, а значит, и для $f \in Y$. Следовательно, $L_2(X_0) = L_2(X_1)$ и поэтому $\nu(X_1 \setminus X_0) = 0$. Но $\operatorname{supp}\hat{\varphi}_j = \operatorname{supp}\hat{\varphi}(\cdot A^{-j})$, значит, $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{supp}\bar{\varphi}(\cdot A^{-j}) = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{supp}\hat{\varphi}_j = X_0$. Учитывая, что $X \supset X_1 \supset X_0$, получаем $X = X_1$ с точностью до множества меры ноль. Это означает, что $X_0 = X$ с точностью до множества меры ноль. Последнее равносильно тому, что $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{supp}\hat{\varphi}(\cdot A^{-j}) = X$ с точностью до множества меры ноль. □

Замечание 2.3. Формулировку и доказательство теоремы Винера в $\mathbb{R}^m$ можно найти в [1, прил. A8]. Для случая нульмерной группы ее формулировка и доказательство меняются незначительно.

Следствие 2.4. *Пусть* $\varphi \in L_2(G)$ *— решение уравнения* (2.1) *и* $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$. *Тогда* $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n} = L_2(G)$.

Доказательство. Из условия $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ следует $\operatorname{supp}\hat{\varphi}(\cdot A^{-n}) = G_n^\perp$. Так как

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} G_n^\perp = X,$$

то осталось воспользоваться леммой 2.9. □

Лемма 2.10. *Пусть* $\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset (G_M^\perp)$ *и* $(\varphi(x \dot{-} h))_{h\in H_0}$ *— ортонормированная система. Тогда* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}$.

Доказательство. Предположим, что функция $f \in L^2(G)$ принадлежит всем V_n, $n \in \mathbb{Z}$. Покажем, что $\hat{f} = 0$ почти всюду в X. Для выбранных $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует функция

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{h \in H_0^{(s)}} a_h \varphi(\mathscr{A}^{-n} x \dot{-} h) \quad (s \in \mathbb{N})$$

такая, что $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$. Тогда

$$\hat{f}_\varepsilon(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(s)}} a_h \hat{\varphi}_{\mathscr{A}^{-n} \cdot \dot{-} h}(\chi) = p^n \sum_{h \in H_0^{(s)}} a_h \overline{(\chi \mathscr{A}^n, h)} \hat{\varphi}(\chi \mathscr{A}^n).$$

Из этого следует, что $\hat{f}_\varepsilon(\chi) = 0$ для всех $\chi \notin \mathfrak{G}_{M-n}^\perp$. Так как $\|\hat{f} - \hat{f}_\varepsilon\| = \|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$, то $\int\limits_{X \setminus \mathfrak{G}_{M-n}^\perp} |\hat{f}|^2 < \varepsilon^2$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\int\limits_{X \setminus \mathfrak{G}_{M-n}^\perp} |\hat{f}|^2 \, d\nu = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\hat{f} = 0$ почти всюду в X. □

Лемма 2.11. *Если* $\operatorname{supp} \hat{\varphi} \subset G_0^\perp$, *то из условия* $f \in V_0$ *следует, что* $f(\cdot \dot{-} y) \in V_0$ *для* $g \in H_0$, *т. е. выполнена аксиома A5.*

Доказательство. Пусть $g, h \in H_0$ и

$$g = a_{-1} g_{-1} \dot{+} a_{-2} g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-N} g_{-N}, \quad h = b_{-1} g_{-1} \dot{+} b_{-2} g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} b_{-N} g_{-N}.$$

Тогда

$$g \dot{+} h = x_0 \dot{+} (\tilde{a}_{-1} g_{-1} \dot{+} \tilde{a}_{-2} g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} \tilde{a}_{-N} g_{-N}) = x_0 \dot{+} \tilde{h},$$

причем $\tilde{h} \in H_0$ и $x_0 \in G_0$.

Так как $\operatorname{supp} \hat{\varphi} \subset G_0^\perp$, то φ постоянна на смежных классах по подгруппе G_0. Учитывая, что $\tilde{h} \in H_0$ и $x_0 \in G_0$, получаем

$$\sum_{h \in H_0} c_h \varphi(x \dot{-} g \dot{-} h) = \sum_{h \in H_0} c_h \varphi(x \dot{-} x_0 \dot{-} \tilde{h}) = \sum_{\tilde{h} \in H_0} c_{\tilde{h}} \varphi(x \dot{-} \tilde{h}),$$

т. е. аксиома A5 выполнена. □

Лемма 2.12. *Если* $\varphi \in L_2(G)$, *то* $f \in V_n$ *тогда и только тогда, когда* $f(Ax) \in V_{n+1}$.

Доказательство. Утверждение леммы сразу следует из равенства

$$\int\limits_G \left| f(Ax) - \sum_{h \in H_0} c_h \varphi(A^n A x \dot{-} h) \right|^2 d\mu(x) =$$

$$= \frac{1}{p} \int\limits_G \left| f(x) - \sum_{h \in H_0} c_h \varphi(A^n x \dot{-} h) \right|^2 d\mu(x). \qquad \square$$

Теперь мы можем доказать сформулированную ранее теорему 2.4, которая есть основной результат этого параграфа.

Доказательство теоремы 2.4 следует из леммы 2.8, следствия из леммы 2.9 и лемм 2.10–2.12.

2.2 Построение вейвлетов

В этом параграфе мы покажем, как по ортогональной масштабирующей функции φ построить новые функции $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{p-1}$, сжатия и сдвиги которых образуют ортонормированный базис в $L_2(G)$. Эти функции называют вейвлетами. Сжатия и сдвиги вейвлетов — это функции $\psi_l(\mathscr{A}^n x \dot{-} h)$, где $n \in \mathbb{Z},\ h \in H_0$.

При построении вейвлетов будем использовать запись масштабирующего уравнения в частотной форме.

Определение 2.7. Пусть φ — решение масштабирующего уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h \varphi(Ax \dot{-} h). \tag{2.5}$$

Применим преобразование Фурье к обеим частям, получим

$$\hat{\varphi}(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h \overline{(\chi \mathscr{A}^{-1}, h)} \cdot \hat{\varphi}(\chi \mathscr{A}^{-1}).$$

Обозначая $m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum\limits_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h \overline{(\chi \mathscr{A}^{-1}, h)}$ получим

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \hat{\varphi}(\chi \mathscr{A}^{-1}). \tag{2.6}$$

Равенство (2.6) называется *масштабирующим уравнением в частотной области*, χ — *частотой*, функция $m_0(\chi)$ — *маской*.

Зная маску, преобразование Фурье $\hat{\varphi}$ можно восстановить по значению $\hat{\varphi}(1)$.

Лемма 2.13. *Пусть $\varphi \in L_2(G)$ — решение масштабирующего уравнения* (2.6), *$\hat{\varphi}(\chi)$ непрерывна в точке $\chi_0 \equiv 1$ и $\hat{\varphi}(1) \neq 0$. Тогда*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \hat{\varphi}(1) \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-k}). \tag{2.7}$$

Доказательство. Применяя последовательно равенство (2.6), получаем при натуральном N

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{N} m_0(\chi A^{-k})\hat{\varphi}(\chi A^{-N-1}).$$

Так как $\chi A^{-N-1} \to \chi_0 \equiv 1$ $(N \to +\infty)$ и $\hat{\varphi}$ непрерывна, то теорема доказана. $\square$

Справедливо и обратное утверждение.

Лемма 2.14. *Пусть $\hat{\varphi}$ определена равенством* (2.7), $m_0(1) = 1$. *Тогда*

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi A^{-1}).$$

Если $\chi \in G^{\perp}_{-s+l+1}$ $(l \geqslant 0)$, то

$$\hat{\varphi}(\chi) = \hat{\varphi}(1)\prod_{j=0}^{l-1} m_0(\chi A^{-j}), \tag{2.8}$$

в частности, при $l = 0$ (т. е. если $\chi \in G^{\perp}_{-s+1}$), $\hat{\varphi}(\chi) = 1$.

Доказательство. Заменяя в равенстве (2.7) χ на χA^{-1}, получаем равенство

$$\hat{\varphi}(\chi A^{-1}) = \hat{\varphi}(1)\prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-k-1}),$$

Умножая обе части этого равенства на $m_0(\chi)$ и учитывая (2.7), получаем (2.6).

Пусть $\chi \in G^{\perp}_{-s+l+1}$ $(l \geqslant 0)$. Проверим равенство (2.8). Так как $\chi \in G^{\perp}_{-s+l+1}$, то $\chi(G_{-s+l+1}) = 1$. Учитывая равенство $A^{-1}(G_n) = G_{n+1}$, находим $\chi A^{-l-1}(G_{-s}) = 1$. Если $h \in H_0^{(s)} \subset G_{-s}$, то $(\chi A^{-l}, A^{-1}h) = (\chi A^{-l-1}, h) = 1$. Поэтому

$$m_0(\chi A^{-l}) = \frac{1}{p}\sum_{h\in H_0^{(s)}} \beta_h \overline{(\chi A^{-l}, A^{-1}h)} = \frac{1}{p}\sum_{h\in H_0^{(s)}} \beta_h = m_0(1) = 1.$$

Но из условия $\chi \in G^{\perp}_{-s+l+1}$ следует, что $\chi \in G^{\perp}_{-s+j+1}$ при $j \geqslant l$, значит, $m_0(\chi A^{-j}) = 1$ при $j \geqslant l$. Отсюда находим, что если $\chi \in G^{\perp}_{-s+l+1}$ при $l \geqslant 0$, то

$$\hat{\varphi}(\chi) = \hat{\varphi}(1)\prod_{j=0}^{l-1} m_0(\chi A^{-j})\prod_{j=l}^{\infty} m_0(\chi A^{-j}) = \hat{\varphi}(1)\prod_{j=0}^{l-1} m_0(\chi A^{-j}).$$

При $l=0$ отсюда следует $\hat{\varphi}(\chi)=\hat{\varphi}(1)$ при $\chi\in G^{\perp}_{-s+1}$. □

Лемма 2.15. *Пусть для $\hat{\varphi}$ выполнены условия леммы 2.14. Тогда $\hat{\varphi}$ постоянна на смежных классах по подгруппе $G^{\perp}_{-s+1}$.*

Доказательство. Пусть $\chi\in G^{\perp}_{-s+l+1}$ ($l\geqslant 1$). Представим $G^{\perp}_{-s+l+1}$ в виде объединения смежных классов

$$G^{\perp}_{-s+l+1}=\bigsqcup_{\alpha_{-s+1}=0}^{p-1}\cdots\bigsqcup_{\alpha_{-s+l}=0}^{p-1}G^{\perp}_{-s+l}r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}}\dots r_{-s+l}^{\alpha_{-s+l}}.$$

На каждом таком смежном классе согласно лемме 2.14

$$\hat{\varphi}(G^{\perp}_{-s+1}r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}}\dots r_{-s+l}^{\alpha_{-s+l}})=\hat{\varphi}(1)\prod_{j=0}^{l-1}m_0(G^{\perp}_{-s+1}r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}}\dots r_{-s+l}^{\alpha_{-s+l}}A^{-j})=$$

$$=\hat{\varphi}(1)\frac{1}{p^l}\prod_{j=0}^{l-1}\sum_{h\in H_0^{(s)}}\beta_h\overline{(G^{\perp}_{-s+1}r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}}\dots r_{-s+l}^{\alpha_{-s+l}},A^{-j-1}h)}.$$

Так как $h\in G_{-s}$, то $A^{-j-1}h\in G_{-s+j+1}$, и поэтому $\overline{(G^{\perp}_{-s+1},A^{-j-1}h)}=1$. Отсюда находим, что

$$\hat{\varphi}(G^{\perp}_{-s+1}r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}}\dots r_{-s+l}^{\alpha_{-s+l}})=\hat{\varphi}(1)\frac{1}{p^l}\prod_{j=0}^{l-1}\sum_{h\in H_0^{(s)}}\beta_h\overline{(r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}}\dots r_{-s+l}^{\alpha_{-s+l}},A^{-j-1}h)}=$$

$$=\mathrm{const}.$$ □

Теорема 2.5. *Пусть $\hat{\varphi}$ определена равенством* (2.7), $\hat{\varphi}(1)=1$. *Если $|m_0(G_0^{\perp})|=1$ и $m_0(G_1^{\perp}\setminus G_0^{\perp})=0$, то $|\hat{\varphi}(\chi)|=\mathbf{1}_{G_0^{\perp}}(\chi)$.*

Доказательство. 1. По лемме 2.14

$$\hat{\varphi}(\chi)=m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi A^{-1}).$$

Если $m_0(G_1^{\perp}\setminus G_0^{\perp})=0$, то отсюда сразу находим $\hat{\varphi}(G_1^{\perp}\setminus G_0^{\perp})=0$. Если $\chi\in G_2^{\perp}\setminus G_1^{\perp}$, то $\chi A^{-1}\in G_1^{\perp}\setminus G_0^{\perp}$, значит, $\hat{\varphi}(\chi A^{-1})=0$, откуда $\hat{\varphi}(\chi)=0$. Продолжая рассуждения по индукции, получаем $\operatorname{supp}\hat{\varphi}\subset G_0^{\perp}$.

2. Пусть $|m_0(G_0^{\perp})|=1$. По лемме 2.14 если $\chi\in G^{\perp}_{-s+l+1}$, то

$$\hat{\varphi}(\chi)=\hat{\varphi}(1)\prod_{j=0}^{l-1}m_0(\chi A^{-j}).$$

Положим $l = s-1$. Тогда $\chi \in G_0^\perp$, значит,

$$\hat{\varphi}(\chi) = \hat{\varphi}(1)\prod_{j=0}^{s-2} m_0(\chi A^{-j}).$$

Так как $\chi \in G_0^\perp$, то $\chi A^{-j} \in G_{-j}^\perp \subset G_0^\perp$. Поэтому $|\hat{\varphi}(\chi)| = |\hat{\varphi}(1)| = 1$. $\square$

Верно и обратное утверждение.

Теорема 2.6. *Пусть $\hat{\varphi}$ определена равенством* (2.7), $\hat{\varphi}(1) = 1$. *Если* $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$, *то*

$$m_0(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0, \quad |m_0(G_0^\perp)| = 1.$$

Доказательство. Прежде всего, отметим, что из условия $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$ следует, что $\hat{\varphi}$ есть преобразование Фурье некоторой функции $\varphi \in L_2(G)$. Далее, так как $\hat{\varphi}_{\dot{-}h}(\chi) = \overline{(\chi, h)}\hat{\varphi}(\chi)$, то

$$\int\limits_G \varphi(x)\overline{\varphi(x\dot{-}h)}\,d\mu(x) = \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi)\overline{\hat{\varphi}_{\dot{-}h}(\chi)}\,d\nu(\chi) = \int\limits_X |\hat{\varphi}(\chi)|^2(\chi, h)\,d\nu(\chi) = \\ = \int\limits_{G_0^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)|^2(\chi, h)\,d\nu(\chi).$$

Используя лемму 2.15 при $l = s-1$, находим

$$\int\limits_G \varphi(x)\overline{\varphi(x\dot{-}h)}\,d\mu(x) = \sum_{\alpha_{-s+1}=0}^{p-1}\cdots\sum_{\alpha_{-1}=0}^{p-1}\int\limits_{G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}}\ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}}} |\hat{\varphi}(\chi)|^2(\chi, h)\,d\nu(\chi) = \\ = \sum_{\alpha_{-1}=0}^{p-1}\cdots\sum_{\alpha_{-s+1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}}\ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}})|^2 \int\limits_{G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}}\ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}}} (\chi, h)\,d\nu(\chi).$$

Если $\chi \in G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}}\ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}}$ и $h \in H_0^{(s-1)}$, то $(\chi, h) = (r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}}\ldots r_{-1}^{\alpha-1}, h)$. Поэтому

$$\int\limits_G \varphi(x)\overline{\varphi(x\dot{-}h)}\,d\mu(x) = \\ = \sum_{\alpha_{-1}=0}^{p-1}\cdots\sum_{\alpha_{-s+1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-s+1}^\perp r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}}\ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}})|^2 \frac{1}{p^{s-1}}(r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}}\ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}}, h). \quad (2.9)$$

Рассмотрим равенства (2.9) при

$$h \in H_0^{(s-1)} = \{a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}a_{-s+1}g_{-s+1}\}.$$

В этом случае равенства (2.9) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных $|\hat{\varphi}(G^{\perp}_{-s+1}r^{\alpha_{-s+1}}_{-s+1}\ldots r^{\alpha_{-1}}_{-1})|^2$ с коэффициентами $b_{j,k} = (r^{\alpha_{-s+1}}_{-s+1}\ldots r^{\alpha_{-1}}_{-1}, a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}a_{-s+1}g_{-s+1})$. Это система порядка p^{s-1}. Покажем, что $\det(b_{j,k}) \neq 0$.

Рассмотрим характеры $\chi_k = r^{\alpha_{-s+1}}_{-s+1}r^{\alpha_{-s+2}}_{-s+2}\ldots r^{\alpha_{-2}}_{-2}r^{\alpha_{-1}}_{-1}$ на группе G_{-s+1}. На каждом смежном классе $G_0\dot{+}h_j$ $(h_j = a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}a_{-s+1}g_{-s+1})$, объединение которых есть G_{-s+1}, характер χ_k принимает постоянное значение, равное $(r^{\alpha_{-s+1}}_{-s+1}r^{\alpha_{-s+2}}_{-s+2}\ldots r^{\alpha_{-2}}_{-2}r^{\alpha_{-1}}_{-1}, h_j)$. Так как характеры χ_k ортогональны на группе G_{-s+1}, то столбцы матрицы $(b_{j,k}) = (\chi_k, h_j)_{j,k=0}^{p^{s-1}-1}$ ортогональны. Отсюда следует, что матрица $\left(\dfrac{1}{\sqrt{p^{s-1}}}b_{j,k}\right)$ является унитарной. Это означает, что система (2.9) имеет единственное решение

$$|\hat{\varphi}(G^{\perp}_{-s+1}r^{\alpha_{-s+1}}_{-s+1}\ldots r^{\alpha_{-1}}_{-1})|^2 = 1.$$

Покажем, что $|m_0(G_0^{\perp})| = 1$. Запишем равенство (2.8) из леммы 2.14 при $l = 1$:

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \quad (\chi \in G^{\perp}_{-s+2},\ -s+2 \leqslant 0).$$

Так как $|\hat{\varphi}(G_0^{\perp})| = 1$ и $G^{\perp}_{-s+2} \subset G_0^{\perp}$, то $|m_0(G^{\perp}_{-s+2})| = 1$. Запишем равенство (2.8) при $l = 2$ (при условии, что $-s+3 \leqslant 0$):

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)m_0(\chi A^{-1}) \quad (\chi \in G^{\perp}_{-s+3}). \tag{2.10}$$

Если $\chi \in G^{\perp}_{-s+3} \setminus G^{\perp}_{-s+2}$, то $\chi A^{-1} \in G^{\perp}_{-s+2}$, значит, $|m_0(\chi A^{-1})| = 1$. Так как $|\hat{\varphi}(\chi)| = 1$ при $\chi \in G^{\perp}_{-s+3}$, то из (2.10) следует, что $|m_0(G^{\perp}_{-s+3} \setminus G^{\perp}_{-s+2})| = 1$, значит, $|m_0(G^{\perp}_{-s+3})| = 1$. Продолжая эти рассуждения с использованием равенства (2.8) при $l = \overline{3, s-1}$, получаем $|m_0(G_0^{\perp})| = 1$. Записывая равенство (2.8) при $l = s$, получаем с учетом $\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset G_0^{\perp}$ равенство $m_0(G_1^{\perp} \setminus G_0^{\perp}) = 0$. $\square$

Перейдем к построению вейвлетов. Как это принято в теории вейвлетов, через W_n обозначим ортогональное дополнение V_n до V_{n+1}, т. е. $V_{n+1} = V_n \otimes W_n$ и $V_n \perp W_n$ ($n \in \mathbb{Z}$, знак $\otimes$ обозначает прямую сумму).

Нетрудно проверить, что для W_n справедливы утверждения:

1) $f \in W_n \Leftrightarrow f(Ax) \in W_{n+1}$;

2) $W_n \perp W_k$ при $k \neq n$;

3) $\otimes W_n = L_2(G)$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Из лемм 2.13–2.15, теорем 2.5 и 2.6 следует алгоритм построения всплесковых базисов.

1. Выбираем натуральное s и строим функцию $m_0(\chi)$, постоянную на смежных классах к $G_{-s+1}^{\perp}$, следующим образом. Равенство

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h \overline{(\chi, A^{-1}h)} \tag{2.11}$$

записываем в виде системы линейных уравнений. Для этого элементу

$$h = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-s}g_{-s} \in H_0^{(s)}$$

присваиваем номер

$$j = a_{-1} + a_{-2}p + \cdots + a_{-s}p^{s-1} \quad (0 \leqslant j \leqslant p^s - 1).$$

Так как функция $m_0(\chi)$ постоянна на смежных классах по подгруппе $G_{-s+1}^{\perp}$, т. е. на множествах

$$G_{-s+1}^{\perp} r_{-s+1}^{\alpha_{-s+1}} r_{-s+2}^{\alpha_{-s+2}} \ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \subset G_1^{\perp},$$

то в каждом таком классе выбираем характеры

$$\chi_k \quad (k = \alpha_{-s+1} + \alpha_{-s+2}p + \cdots + \alpha_{-1}p^{s-2} + \alpha_0 p^{s-1}).$$

Тогда равенство (2.11) можно записать в виде системы

$$m_0(\chi_k) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p^s-1} \beta_j \overline{(\chi_k, A^{-1}h_j)} \quad (k = \overline{0, p^s - 1}) \tag{2.12}$$

относительно неизвестных β_j. Характеры χ_k рассмотрим на подгруппе G_{-s+1}, на которой они ортогональны. Элементы $A^{-1}h_j \in G_{-s+1}$. Поэтому матрица $p^{-s/2}(\chi_k, A^{-1}h_j)$ унитарна, значит, система (2.12) имеет единственное решение для любой конечной последовательности $(m_0(\chi_k))_{k=0}^{p^s-1}$.

2. Выбираем $m_0(\chi_k)$ так, чтобы $|m_0(\chi_k)| = 1$ при $k = \overline{0, p^{s-1} - 1}$ и $m_0(\chi_k) = 0$ при $k = \overline{p^{s-1}, p^s - 1}$. Решая систему (2.12), находим β_j.

Таким образом, мы построили функцию $m_0(\chi)$ постоянную на смежных классах по $G_{-s+1}^{\perp}$ и такую, что $|m_0(G_0^{\perp})| = 1$, $m_0(G_1^{\perp} \setminus G_0^{\perp}) = 0$.

3. Полагаем $\hat{\varphi}(1) = 1$ и строим $\hat{\varphi}(\chi)$, используя равенство (2.7), т. е.

$$\hat{\varphi}(\chi) = \hat{\varphi}(1) \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-k}).$$

По теореме 2.5 $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{G_0^{\perp}}(\chi)$, значит, функция φ порождает КМА.

4. Определим функции $m_l(\chi) = m_0(\chi r_0^{-l})$ $(l = 1, 2, \ldots, p-1)$. Очевидно, что $m_l(\chi)$ можно записать в виде

$$m_l(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h \overline{(\chi r_0^{-l}, A^{-1}h)} = \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h \overline{(r_0^{-l}, A^{-1}h)} \cdot \overline{(\chi, A^{-1}h)} =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h^{(l)} \overline{(\chi, A^{-1}h)}, \tag{2.13}$$

где $\beta_h^{(l)} = \beta_h \overline{(r_0^{-l}, A^{-1}h)}$. Ясно также, что $|m_l(G_0^{\perp} r_0^l)| = 1$ и $|m_l(G_0^{\perp} r_0^{\nu})| = 0$ при $\nu \neq l$.

5. Образуем функции

$$\psi_l(x) = \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h^{(l)} \varphi(Ax \dot{-} h) \quad (l = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Теорема 2.7. *Функции* $\psi_l(x \dot{-} h)$ $(l = \overline{1, p-1},\ h \in H_0)$ *образуют ортонормированный базис* W_0.

Доказательство. 1. Покажем, что $(\varphi(\cdot - g^{(1)}), \psi_l(\cdot - g^{(2)})) = 0$ для любых $g^{(1)}, g^{(2)} \in H_0$. Учитывая, что

$$\hat{\varphi}_{\cdot - h}(\chi) = \overline{(\chi, h)} \hat{\varphi}(\chi),$$

$$\hat{\varphi}_{A \cdot - g}(\chi) = \frac{1}{p} \overline{(\chi, A^{-1}g)} \hat{\varphi}(\chi A^{-1}),$$

имеем

$$(\varphi(\cdot - g^{(1)}), \psi_l(\cdot - g^{(2)})) = \int_G \varphi(x \dot{-} g^{(1)}) \overline{\psi_l(x \dot{-} g^{(2)})}\, d\mu(x) =$$

$$= \sum_{h \in H_0^{(s)}} \bar{\beta}_h^{(l)} \int_G \varphi(x \dot{-} g^{(1)}) \overline{\varphi}(Ax \dot{-} Ag^{(2)} \dot{-} h)\, d\mu(x) =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(s)}} \bar{\beta}_h^{(l)} \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi)\overline{(\chi, g^{(1)})}\overline{\hat{\varphi}(\chi A^{-1})}(\chi, g^{(2)})(\chi, A^{-1}h)\, d\nu(\chi) =$$

$$= \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi)\overline{\hat{\varphi}(\chi A^{-1})}\overline{(\chi, g^{(1)})}(\chi, g^{(2)}) \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(s)}} \bar{\beta}_h^{(l)}(\chi, A^{-1}h)\, d\nu(\chi) =$$

$$= \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi)\overline{\hat{\varphi}(\chi A^{-1})}\overline{(\chi, g^{(1)})}(\chi, g^{(2)})\overline{m_l(\chi)}\, d\nu(\chi) = 0,$$

так как $\operatorname{supp} \hat{\varphi}(\chi) = G_0^{\perp}$ и $m_l(G_0^{\perp}) = 0$ $(l = \overline{1, p-1})$. Аналогично убеждаемся, что $(\psi_l(\cdot \dot{-} g^{(1)}), \psi_k(\cdot \dot{-} g^{(2)})) = 0$ при $k \neq l$ $(k, l = \overline{1, p-1})$.

2. Проверим, что $(\psi_l(\cdot \dot{-} g^{(1)}), \psi_l(\cdot \dot{-} g^{(2)})) = 0$, если $g^{(1)}, g^{(2)} \in H_0$ и $g^{(1)} \neq g^{(2)}$. Прежде всего, отметим, что из равенства

$$0 = \int\limits_G \varphi(x \dot{-} g^{(1)})\overline{\varphi(x \dot{-} g^{(2)})}\, d\mu(x) = \int\limits_X \hat{\varphi}_{\cdot \dot{-} g^{(1)}}(\chi)\overline{\hat{\varphi}_{\cdot \dot{-} g^{(2)}}(\chi)}\, d\nu(\chi) =$$

$$= \int\limits_X \overline{(\chi, g^{(1)})}\hat{\varphi}(\chi)(\chi, g^{(2)})\overline{\hat{\varphi}(\chi)}\, d\nu(\chi) = \int\limits_{G_0^{\perp}} \overline{(\chi, g^{(1)})}(\chi, g^{(2)})\, d\nu(\chi)$$

следует, что элементы $g \in H_0$, образуют ортогональную систему на $G_0^{\perp}$, а значит, и на смежных классах $G_0^{\perp} r_0^l$ $(l = \overline{1, p-1})$. Поэтому из равенства

$$\int\limits_G \psi_l(x \dot{-} g^{(1)})\overline{\psi_l(x \dot{-} g^{(2)})}\, d\mu(x) = \int\limits_{G_0^{\perp} r_0^l} \overline{(\chi, g^{(1)})}(\chi, g^{(2)})\, d\nu(\chi)$$

получаем ортогональность системы сдвигов $(\psi_l(x \dot{-} g))_{g \in H_0}$ на G (при фиксированном $l = \overline{1, p-1}$). Таким образом, линейная оболочка системы $(\psi_l(x \dot{-} h))$ $(l = \overline{1, p-1}, h \in H_0)$ ортогональна к V_0, и система $(\psi(\cdot \dot{-} h))$ ортонормированна.

3. Докажем, что любая функция $f \in W_0$ однозначно представима в виде суммы ряда по системе $(\psi_l(x \dot{-} g))_{g \in H_0, l = \overline{1, p-1}}$. Вначале отметим, что $\hat{\psi}_l(\chi) = \hat{\varphi}(\chi A^{-1}) m_l(\chi)$. В самом деле,

$$\hat{\psi}_l(\chi) = \int\limits_G \psi_l(\chi)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) = \int\limits_G \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h^{(l)} \varphi(Ax \dot{-} h)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) =$$

$$= \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h^{(l)} \int\limits_G \varphi(Ax \dot{-} h)\overline{(\chi, x)}\, d\mu(x) = \sum_{h \in H_0^{(s)}} \beta_h^{(l)} \frac{1}{p}\overline{(\chi, A^{-1}h)}\hat{\varphi}(\chi A^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{p}\hat{\varphi}(\chi A^{-1}) \sum_{h\in H_0^{(s)}} \beta_h^{(l)}\overline{(\chi, A^{-1}h)} = \hat{\varphi}(\chi A^{-1})m_l(\chi). \tag{2.14}$$

Далее отметим, что если $f \in V_1$ и

$$f = \sum_{h\in H_0} a_h\varphi(Ax\dot{-}h), \tag{2.15}$$

то

$$\hat{f}(\chi) = \frac{1}{p}Q(\chi)\hat{\varphi}(\chi A^{-1}), \tag{2.16}$$

где

$$Q(\chi) = \sum_{h\in H_0} a_h\overline{(\chi, A^{-1}h)} \in L_2(G_1^{\perp}). \tag{2.17}$$

Последнее равенство понимается в смысле сходимости ряда по норме $L_2(G_1^{\perp})$. Верно и обратное: если $\hat{f}(\chi)$ определена равенством (2.16) и $Q(x)$ имеет вид (2.17), то f есть сумма ряда (2.15).

Выберем $u(x) \in W_0$ и покажем, что u есть сумма ряда по системе $(\psi_l(x\dot{-}h))$ $(l = \overline{1, p-1},\ h \in H_0)$. Пусть $v(x) \in V_0$. Тогда $f := v(x) + u(x) \in V_0 \otimes W_0 = V_1$ и поэтому

$$f = \sum_{h\in H_0} a_h\varphi(Ax\dot{-}h).$$

Тогда (см. (2.13)–(2.15))

$$\hat{f}(\chi) = \frac{1}{p}Q(\chi)\hat{\varphi}(\chi A^{-1}) = \frac{1}{p}Q(\chi)\mathbf{1}_{G_1^{\perp}}(\chi)\hat{\varphi}(\chi A^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{p}Q(\chi)\sum_{l=0}^{p-1}|m_l(\chi)|^2\hat{\varphi}(\chi A^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{p}Q(\chi)\overline{m_0(\chi)}\,\underbrace{m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi A^{-1})}_{=\hat{\varphi}(\chi)} + \sum_{l=1}^{p-1} Q(\chi)\overline{m_l(\chi)}\frac{1}{p}\,\underbrace{\hat{\varphi}(\chi A^{-1})m_l(\chi)}_{=\hat{\psi}_l(\chi)} =$$

$$= \frac{1}{p}Q(\chi)\overline{m_0(\chi)}\hat{\varphi}(\chi) + \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{p-1} Q(\chi)\overline{m_l(\chi)}\hat{\psi}_l(\chi). \tag{2.18}$$

Из последнего равенства следует, что

$$f(x) = \sum_{h\in H_0} b_h\varphi(x\dot{-}h) + \sum_{l=1}^{p-1}\sum_{h\in H_0} b_h^{(l)}\psi_l(x\dot{-}h). \tag{2.19}$$

Покажем это. Функции $Q(\chi) \in L_2(G_1^\perp) \subset L_2(G_0^\perp)$, $m_0(\chi)$ ограничены на $G_0^\perp$. Поэтому $\frac{1}{p}Q(\chi)\overline{m_0(\chi)} \in L_2(G_0^\perp)$, и так как по лемме 2.1 сужения элементов $h \in H_0$ на $G_0^\perp$ образуют ортонормированный базис $L_2(G_0^\perp)$, то

$$\frac{1}{p}Q(\chi)\overline{m_0(\chi)} = \sum_{h\in H_0} b_h\overline{(\chi, h)}.$$

Отсюда следует, что функция $\frac{1}{p}Q(\chi)\overline{m_0(\chi)}\hat{\varphi}(\chi)$ есть преобразование Фурье функции

$$v(x) = \sum_{h\in H_0} b_h\varphi(x\dot{-}h).$$

Рассмотрим функции $Q(\chi)\overline{m_l(\chi)}\,\bar{\psi}_l(\chi)$. Так как $Q(\chi) \in L_2(G_1^\perp)$, $m_l(\chi) = m_0(\chi r_0^{-l})$ ограничена на $G_0^\perp r^l$, $m_l(G_1^\perp \setminus G_0^\perp r_0^l) = 0$, то $Q(\chi)\overline{m_l(\chi)} \in L_2(G_0^\perp r_0^l)$, а значит, $\overline{Q(\chi)}m_l(\chi) \in L_2(G_0^\perp r_0^l)$. Элементы $h \in H_0$ рассмотрим как функции, определенные на $(G_0^\perp r_0^l)$. Так как сужения элементов $h \in H_0$ на $G_0^\perp$ образуют ортонормированный базис в $L_2(G_0^\perp)$, то элементы $h(\chi r_0^{-l})$ образуют ортонормированный базис в $L_2(G_0^\perp r_0^l)$. Поэтому при каждом $l = \overline{1, p-1}$ выполняются следующие равенства:

а) $\overline{Q(\chi)}m_l(\chi) = \sum\limits_{h\in H_0} \overline{b_h^{(l)}}(r_0^l, h)(\chi r_0^{-l}, h) \quad \left(\sum\limits_{h\in H_0} \left|\overline{b_h^{(l)}}(r_0^l, h)\right|^2 < \infty\right)$;

б) $U^{(l)}(x) = \sum\limits_{h\in H_0} b_h^{(l)}\psi_l(x\dot{-}h) \in L_2(G)$;

в) $\hat{U}^{(l)}(\chi) = \hat{\psi}_l(\chi)Q(\chi)\overline{m_l(\chi)}$.

Поэтому из (2.18) следует (2.19). В силу единственности представления f в виде $f = v + u$ $(v \in V_0, u \in W_0)$ получаем

$$u(x) = \sum_{l=1}^{p-1}\sum_{h\in H_0} b_h^{(l)}\psi_l(x\dot{-}h).$$

Это означает, что система $\psi_l(x\dot{-}h)$ — базис W_0, и теорема доказана. □

6. Так как пространства $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют КМА в $L_2(G)$, то функции

$$p^{\frac{p}{2}}\psi_l(A^n x\dot{-}h) \quad (l = \overline{1, p-1},\ n \in \mathbb{Z},\ h \in H_0)$$

образуют полную ортонормированную систему в $L_2(G)$.

Пример 2.1. Пусть $s = 1$. Маска m_0 имеет вид

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p}\sum_{h\in H_0^{(1)}} \beta_h\overline{(\chi, A^{-1}h)}$$

и постоянна на смежных классах по подгруппе $G_0^\perp$. Выбираем $m_0(\chi)$ так, чтобы $|m_0(G_0^\perp)| = 1$ и $m_0(\chi) = 0$ при $\chi \in G_1^\perp \setminus G_0^\perp$. Равенство (2.12) примет вид

$$m_0(\chi_k) = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}\beta_j\overline{(\chi_k, A^{-1}h_j)}. \tag{2.20}$$

В этом случае $h_j = jg_{-1}$, $A^{-1}h_j = jg_0$, $\chi_k = r_0^k$ $(j, k = \overline{0, p-1})$, и равенства (2.20) принимают вид

$$m_0(r_0^k) = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}\beta_j\overline{(r_0, g_0)^{k\cdot j}}.$$

Полагая $m_0(r_0^k) = 0 \;\; (k = \overline{1, p-1}), m_0(1) = 1$, получаем систему

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{p}}\begin{pmatrix}a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,p-1}\\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,p-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{p-1,0} & a_{p-1,1} & \dots & a_{p-1,p-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_{p-1}\end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

где $a_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{p}}\overline{(r_0, g_0)^{kj}}$. Матрица $(a_{k,j})$ унитарна, поэтому система (2.21) имеет единственное решение $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_{p-1} = 1$. Вычисляем

$$\beta_j^{(l)} = \beta_j\overline{(r_0^{-l}, jg_0)} = (r_0, g_0)^{jl} \quad (l = \overline{1, p-1})$$

и полагаем

$$\psi_l(x) = \sum_{j=0}^{p-1}(r_0, g_0)^{jl}\varphi(A(x \dot{-} jg_0)).$$

Осталось найти функцию φ. Полагаем $\hat\varphi(1) = 1$ и из равенства

$$\hat\varphi(\chi) = \hat\varphi(1)\prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-k})$$

находим $\hat\varphi(G_0^\perp) = 1$ и $\hat\varphi(\chi) = 0$ при $\chi \notin G_0^\perp$. Отсюда по следствию из леммы 2.1

$$\varphi(x) = \int_X \hat\varphi(\chi)(\chi, x)\,d\nu(\chi) = \int_{G_0^\perp}(\chi, x)\,d\nu(\chi) = \begin{cases}1, & x \in G_0,\\ 0 & x \notin G_0.\end{cases}$$

Подставляя $\varphi(x)$ в выражение для ψ_l, получаем

$$\psi_l(x) = r_0^l(x)\mathbf{1}_{G_0}(x) \quad (l = \overline{1, p-1}).$$

Таким образом, мы нашли ортонормированный базис, который получается из одной функции $r_0(x)\mathbf{1}_{G_0}(x)$ с помощью сжатий, сдвигов и возведения в степень.

Найденные функции ψ_l являются комплекснозначными. Укажем способ получения ортонормированного базиса, состоящего из действительнозначных функций. Для этого отметим, что функция $r_0(x)$ на смежных классах $G_1\dot{+}jg_0$ $(j = 0, 1, \ldots, p-1)$ постоянна и принимает значения, равные корням из 1 степени p. Можно считать без ограничения общности, что $r_0(G_1\dot{+}jg_0) = e^{\frac{2\pi i}{p}j}$. Поэтому

$$\psi_l(G_1\dot{+}jg_0) = e^{\frac{2\pi i}{p}jl} = \cos\frac{2\pi}{p}jl + i\sin\frac{2\pi}{p}jl.$$

Отсюда непосредственными вычислениями находим, что все функции $\operatorname{Re}\psi_l(x)$ ортогональны функциям $\operatorname{Im}\psi_m(x)$ при $m = \overline{1, p-1}$ и функциям $\operatorname{Re}\psi_m(x)$ при $m \neq l$ и $m \neq p-l$. Точно так же функции $\operatorname{Im}\psi_l(x)$ ортогональны всем функциям $\operatorname{Re}\psi_m(x)$ и функциям $\operatorname{Im}\psi_m(x)$ при $m \neq l$ и $m \neq p-l$. Поэтому по одной системе $(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_{p-1}(x))$ можно построить $4^{\frac{p-1}{2}}$ систем действительнозначных функций $(\psi_1^{(j)}, \psi_2^{(j)}, \ldots, \psi_{p-1}^{(j)})$ $(j = 1, 2, \ldots, 4^{\frac{p-1}{2}})$, среди которых могут быть одинаковые.

При $p = 2$ мы получаем одну функцию $\psi_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_1, \\ -1, & x \in G_0 \setminus G_1. \end{cases}$

Это классическая функция Хаара.

При $p = 3$ получаются 4 системы, из которых различны только две:

$$\psi_1^{(1)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & x \in G_1, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & x \in G_1\dot{+}g_0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & x \in G_1\dot{+}2g_0, \\ 0, & x \notin G_0, \end{cases} \qquad \psi_2^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in G_1, \\ \sqrt{\frac{3}{2}}, & x \in G_1\dot{+}g_0, \\ -\sqrt{\frac{3}{2}}, & x \in G_1\dot{+}2g_0, \\ 0, & x \notin G_0 \end{cases}$$

и симметричные им:

$$\psi_1^{(2)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & x \in G_1, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & x \in G_1\dot{+}g_0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & x \in G_1\dot{+}2g_0, \\ 0, & x \notin G_0, \end{cases} \qquad \psi_2^{(2)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in G_1, \\ -\sqrt{\frac{3}{2}}, & x \in G_1\dot{+}g_0, \\ \sqrt{\frac{3}{2}}, & x \in G_1\dot{+}2g_0, \\ 0, & x \notin G_0. \end{cases}$$

2.3 Кратномасштабный анализ на группах Виленкина

В этом параграфе мы рассмотрим вопросы построения ступенчатых функций, порождающих ортогональный КМА на группах Виленина. Для $p = 2$ эта задача рассмотрена в работах В.Ленга,В.Протасова и Ю.Фаркова [22–26]. При произвольном p в работах Ю.Фаркова, С.Лукомского, Г.Бердникова [27–34]. Группу Виленкина с постоянной образующей последовательностью будем обозначать через $\mathfrak{G}$. Она характеризуется свойством $pg_n = 0$. Определим характеры χ_{p^n} группы $\mathfrak{G}$ равенствами $\chi_{p^n}(x) = e^{\frac{2\pi i}{p}a_n}$, если $x = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k g_k$. Так как $\chi_{p^n}(\mathfrak{G}_{n+1}) = 1$ и $\chi_{p^n}(\mathfrak{G}_n \setminus \mathfrak{G}_{n+1}) \neq 1$, то $\chi_{p^n} \in \mathfrak{G}_{n+1}^{\perp} \setminus \mathfrak{G}_n^{\perp}$, т.е. χ_{p^n} есть функции Радемахера r_n. Очевидно, что $r_n(g_n) = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ и $r_n(g_m) = 1$ при $n \neq m$.

Мы знаем (теорема 2.3), что если функция φ порождает ортогональный КМА, то она является решением масштабирующего уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{h\in H_0} \beta_h \varphi(\mathscr{A}x \dot{-} h) \quad \left(\sum |\beta_h|^2 < +\infty\right). \tag{2.22}$$

Для ступенчатой функции количество слагаемых в уравнении (2.22) конечно.

Лемма 2.16. *Если $\varphi \in \mathfrak{D}_M(\mathfrak{G}_{-N})$ — решение уравнения (2.22)), то*

$$\varphi(x) = \sum_{h\in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathscr{A}x \dot{-} h). \tag{2.23}$$

Доказательство. Запишем $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \sum_{h\in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathscr{A}x \dot{-} h) + \sum_{h\notin H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathscr{A}x \dot{-} h). \tag{2.24}$$

Если $x \in \mathfrak{G}_{-N}$, то $\mathscr{A}x \in \mathfrak{G}_{-N-1}$. Поэтому

$$\mathscr{A}x = b_{-N-1}g_{-N-1} \dot{+} b_{-N}g_{-N} \dot{+} \ldots$$

Если $h \notin H_0^{(N+1)}$, то

$$h = a_{-1}g_{-1} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-N-1}g_{-N-1} \dot{+} a_{-N-2}g_{-N-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-N-s}g_{-N-s}$$

и $a_{-N-2}g_{-N-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-N-s}g_{-N-s} \neq 0$. Следовательно, $\mathscr{A}x \dot{-} h \notin H_0^{(N+1)}$ и $\varphi(\mathscr{A}x \dot{-} h) = 0$. Это означает, что

$$\sum_{h\notin H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathscr{A}x \dot{-} h) = 0,$$

когда $x \in \mathfrak{G}_{-N}$.

Пусть $x \notin \mathfrak{G}_{-N}$. Тогда $\varphi(x) = 0$ и $\mathscr{A}x \notin \mathfrak{G}_{-N-1}$. Следовательно,

$$\mathscr{A}x = \sum_{k=-N-s}^{-N-2} b_k g_k \dot{+} \sum_{k=-N-1}^{+\infty} b_k g_k.$$

Если $h \in H_0^{(N+1)}$, то $h = a_{-1}g_{-1} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-N}g_{-N} \dot{+} a_{-N-1}g_{-N-1}$, следовательно, $\mathscr{A}x \dot{-} h \notin \mathfrak{G}_{-N-1}$. Поэтому

$$\sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathscr{A}x \dot{-} h) = 0.$$

Используя равенство (2.24), получаем окончательно

$$\sum_{h \notin H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathscr{A}x \dot{-} h) = 0.$$

Лемма доказана. □

Применяя к обеим частям равенства (2.23) преобразование Фурье, получаем масштабирующее уравнение

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathscr{A}^{-1}) \tag{2.25}$$

в частотной области с маской

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{(\chi\mathscr{A}^{-1}, h)}. \tag{2.26}$$

Используя это соотношение, получим дополнительные свойства маски.

Лемма 2.17. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{D}_M(\mathfrak{G}_{-N})$. Тогда маска $m_0(\chi)$ постоянна на смежных классах $\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\zeta$.*

Доказательство. Мы будем доказывать, что $(\chi, \mathscr{A}^{-1}h)$ постоянна на смежных классах $\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\zeta$. Без потери общности будем предполагать, что $\zeta = r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_{-N+s}^{\alpha_{-N+s}} \notin \mathfrak{G}_{-N}^{\perp}$. Если

$$h = a_{-1}g_{-1} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-N-1}g_{-N-1} \in H_0^{(N+1)},$$

то

$$\mathscr{A}^{-1}h = a_{-1}g_0 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-N-1}g_{-N} \in \mathfrak{G}_{-N}.$$

Если $\chi \in \mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\zeta$, то $\chi = \chi_{-N}\zeta$, где $\chi_{-N} \in \mathfrak{G}_{-N}^{\perp}$. Поэтому $(\chi, \mathscr{A}^{-1}h) = (\chi_{-N}\zeta, \mathscr{A}^{-1}h) = (\zeta, \mathscr{A}^{-1}h)$. Это означает, что $(\chi, \mathscr{A}^{-1}h)$ зависит только от ζ. □

Лемма 2.18. *Маска $m_0(\chi)$ есть периодическая функция с любым периодом $r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_s^{\alpha_s}$ ($s \in \mathbb{N}$, $\alpha_j = \overline{0, p-1}$, $j = \overline{1, s}$).*

Доказательство. Используя равенство $(r_k, g_l) = 1, (k \neq l)$, находим

$$\begin{gathered}(\chi r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_s^{\alpha_s}, \mathscr{A}^{-1} h) = \\ = (\chi r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_s^{\alpha_s}, a_{-1} g_0 \dot{+} a_{-2} g_{-1} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-N-1} g_{-N}) = \\ = (\chi, a_{-1} g_0 \dot{+} a_{-2} g_{-1} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-N-1} g_{-N}) = (\chi \mathscr{A}^{-1}, h).\end{gathered}$$

Поэтому $m_0(\chi r_1^{\alpha_1} \dots r_s^{\alpha_s}) = m_0(\chi)$. Лемма доказана. □

Лемма 2.19. *Маска $m_0(\chi)$ полностью определена своими значениями на смежных классах $\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0}$ ($\alpha_j = \overline{0, p-1}$).*

Доказательство. Обозначим

$$\begin{gathered}k = \alpha_0 + \alpha_{-1} p + \dots + \alpha_{-N} p^N \in [0, p^{N+1} - 1], \\ l = a_{-1} + a_{-2} p + \dots + a_{-N-1} p^N \in [0, p^{N+1} - 1], \\ h_l = a_{-1} g_{-1} \dot{+} a_{-2} g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-N-1} g_{-N-1}.\end{gathered}$$

Тогда равенство (2.26) может быть записано в виде системы

$$m_0(\chi_k) = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p^{N+1}-1} \beta_l \overline{(\chi_k, \mathscr{A}^{-1} h_l)}, \quad k = \overline{0, p^{N+1} - 1} \tag{2.27}$$

относительно неизвестных β_l. Рассмотрим характеры χ_k на подгруппе $\mathfrak{G}_{-N}$. Так как $\mathscr{A}^{-1} h_l$ лежат в $\mathfrak{G}_{-N}$, то из этого следует, что матрица $p^{-\frac{N+1}{2}} \overline{(\chi_k, \mathscr{A}^{-1} h_l)}$ унитарна и система (2.27) имеет единственное решение для каждой конечной последовательности $(m_0(\chi_k))_{k=0}^{p^{N+1}-1}$. □

Лемма 2.20. *Пусть $\hat{f}_0(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_1^{\perp})$. Тогда*

$$\hat{f}_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{(\chi, \mathscr{A}^{-1} h)}. \tag{2.28}$$

Доказательство. Так как $\int\limits_{\mathfrak{G}_0^{\perp}} (\chi, g) \overline{(\chi, h)}\, d\nu(\chi) = \delta_{h,g}$ для $h, g \in H_0$, то

$$\int\limits_{\mathfrak{G}_0^{\perp}} (\chi \mathscr{A}^{-1}, g) \overline{(\chi \mathscr{A}^{-1}, h)}\, d\nu(\chi) = p \delta_{h,g}.$$

Поэтому мы можем рассматривать множество $\left(\dfrac{\mathscr{A}^{-1}h}{\sqrt{p}}\right)_{h\in H_0^{(N+1)}}$ как ортогональную систему на $\mathfrak{G}_1^\perp$. Мы знаем (лемма 2.17), что $(\chi,\mathscr{A}^{-1}h)$ постоянны на смежных классах $\mathfrak{G}_{-N}^\perp\zeta$. Очевидно, что размерность $\mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_1^\perp)$ равна p^{N+1}. Поэтому система $\left(\dfrac{\mathscr{A}^{-1}h}{\sqrt{p}}\right)_{h\in H_0^{(N+1)}}$ есть ортонормированный базис в $\mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_1^\perp)$, равенство (2.28) выполнено. □

Теперь мы получим критерий ортогональности системы сдвигов.

Теорема 2.8. *Пусть* $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(\mathfrak{G}_{-N})$. *Система сдвигов* $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ *будет ортонормированной тогда и только тогда, когда для любых* $\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1}=\overline{(0,p-1)}$:

$$\sum_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{M-1}=0}^{p-1}|\hat\varphi(\mathfrak{G}_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}}\ldots r_0^{\alpha_0}\ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2=1. \tag{2.29}$$

Доказательство. Сначала мы докажем, что система $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ будет ортонормированной тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\alpha_{-N},\ldots,\alpha_0,\ldots,\alpha_{M-1}}|\hat\varphi(\mathfrak{G}_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}}\ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2=p^N, \tag{2.30}$$

и для любого вектора $(a_{-1},a_{-2},\ldots,a_{-N})\neq(0,0,\ldots,0)$, $(a_j=\overline{0,p-1})$

$$\sum_{\alpha_{-1},\ldots,\alpha_{-N}}\exp\left(\frac{2\pi i}{p}(a_{-1}\alpha_{-1}+a_{-2}\alpha_{-2}+\cdots+a_{-N}\alpha_{-N})\right)\times$$
$$\times\sum_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{M-1}}|\hat\varphi(\mathfrak{G}_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}}\ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2=0. \tag{2.31}$$

Пусть $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ — ортонормированная система. Используя равенство Планшереля и лемму 2.6, имеем

$$\delta_{h_1h_2}=\int\limits_{\mathfrak{G}}\varphi(x\dot{-}h_1)\overline{\varphi(x\dot{-}h_2)}\,d\mu(x)=\int\limits_{\mathfrak{G}_M^\perp}|\hat\varphi(\chi)|^2(\chi,h_2\dot{-}h_1)\,d\nu(\chi)=$$

$$=\sum_{\alpha_{-N},\ldots,\alpha_0,\ldots,\alpha_{M-1}}\int\limits_{\mathfrak{G}_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}}\ldots r_0^{\alpha_0}\ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}|\hat\varphi(\chi)|^2(\chi,h_2\dot{-}h_1)\,d\nu(\chi)=$$

$$=\sum_{\alpha_{-N},\ldots,\alpha_{M-1}}|\hat\varphi(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}}\ldots r_0^{\alpha_0}\ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}|^2\int\limits_{\mathfrak{G}_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}}\ldots r_0^{\alpha_0}\ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}(\chi,h_2\dot{-}h_1)\,d\nu(\chi)=$$

$$= p^{-N}\mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}}(h_2\dot{-}h_1)\times$$
$$\times \sum_{\alpha_{-N},\dots,\alpha_{M-1}} |\hat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}}\dots r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}|^2 (r_{-N}^{\alpha_{-N}}\dots r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, h_2\dot{-}h_1).$$

Если $h_2 = h_1$, мы получаем равенство (2.30).

Если $h_2 \neq h_1$, то

$$h_2\dot{-}h_1 = a_{-1}g_{-1}\dot{+}\dots\dot{+}a_{-N}g_{-N} \in \mathfrak{G}_{-N} \tag{2.32}$$

или

$$h_2\dot{-}h_1 = a_{-1}g_{-1}\dot{+}\dots\dot{+}a_{-N}g_{-N}\dot{+}\dots\dot{+}a_{-s}g_{-s} \in \mathfrak{G}\setminus\mathfrak{G}_{-N}. \tag{2.33}$$

Если условие (2.33) выполнено, то

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}}(h_2\dot{-}h_1) = 0.$$

Если условие (2.32) выполнено, то

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}}(h_2\dot{-}h_1) = 1,$$
$$(r_{-N}^{\alpha_{-N}}\dots r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, h_2\dot{-}h_1) = (r_{-N}, g_{-N})^{a_{-N}\alpha_{-N}}\dots(r_{-1}, g_{-1})^{a_{-1}\alpha_{-1}}.$$

Используя равенство $(r_n, g_n) = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, получаем соотношение (2.32). Обратное утверждение может быть доказано аналогично.

Теперь докажем, что если для любого вектора $(a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-N}) \neq$ $\neq (0, 0, \dots, 0)$ условия (2.30) и (2.31) выполнены, то для любых α_{-N}, $\alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1} = \overline{0, p-1}$

$$\sum_{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{M-1}} |\hat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}}\dots r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = 1. \tag{2.34}$$

Обозначим

$$n = \sum_{j=1}^{N} a_{-j}p^{j-1}, \quad k = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{-j}p^{j-1}, \quad C_{n,k} = e^{\frac{2\pi i}{p}\left(\sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_{-j}a_{-j}\right)}$$

и запишем равенства (2.30) и (2.31) в виде системы

$$\begin{aligned} &C_{0,0}x_0 + C_{0,1}x_1 + \dots + C_{0,p^N-1}x_{p^N-1} = p^N,\\ &C_{1,0}x_0 + C_{1,1}x_1 + \dots + C_{1,p^N-1}x_{p^N-1} = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &C_{p^N-1,0}x_0 + C_{p^N-1,1}x_1 + \dots + C_{p^N-1,p^N-1}x_{p^N-1} = 0.\end{aligned} \tag{2.35}$$

относительно неизвестных

$$x_k = \sum_{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{M-1}} |\hat\varphi(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2.$$

Матрица $(C_{n,k})$ ортогональна. В самом деле, если $(a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-N}) \neq$ $\neq (a'_{-1}, a'_{-2}, \dots, a'_{-N})$, т.е. $k \neq n'$, мы получаем

$$\sum_{k=0}^{p^N-1} C_{n,k}\overline{C_{n',k}} =$$

$$= \sum_{\alpha_{-1},\dots,\alpha_{-N}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p}((a_{-1}-a'_{-1})\alpha_{-1} + (a_{-N}-a'_{-N})\alpha_{-N})\right) = 0,$$

так как по крайней мере одна из разностей $a_{-l} - a'_{-l} \neq 0$. Поэтому система (2.35) имеет единственное решений. Очевидно, что $x_k = 1$ есть решение системы. Это означает, что (2.34) выполнено и необходимость доказана. Достаточность очевидна. $\square$

Теперь мы получим необходимые и достаточные условия на функцию $m_0(\chi)$, при которых она будет маской на классе $\mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^\perp)$, т.е. существует $\hat\varphi \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^\perp)$, для которой

$$\hat\varphi(\chi) = m_0(\chi)\hat\varphi(\chi\mathscr{A}^{-1}). \tag{2.36}$$

Мы доказали выше, что если $m_0(\chi)$ — маска уравнения (2.36), то:

T1) $m_0(\chi)$ постоянна на смежных классах $\mathfrak{G}_{-N}^\perp\zeta$;

T2) $m_0(\chi)$ периодична с любым периодом $r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_s^{\alpha_s}$, $\alpha_j = \overline{0, p-1}$;

T3) $m_0(\mathfrak{G}_{-N}^\perp) = 1$.

Поэтому мы будем предполагать, что m_0 удовлетворяет этим условиям. Пусть

$$E_k \subset \mathfrak{G}_k^\perp \setminus \mathfrak{G}_{k-1}^\perp \quad (k = -N+1, -N+2, \dots, 0, 1, \dots, M, M+1)$$

— множество, на котором $m_0(E_k) = 0$. Так как $m_0(\chi)$ постоянна на смежных классах, $\mathfrak{G}_{-N}^\perp\zeta$, то E_k есть объединение таких смежных классов, или $E_k = \varnothing$.

Теорема 2.9. *$m_0(\chi)$ будет маской некоторого масштабирующего уравнения на классе $\mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^\perp)$, тогда и только тогда, когда*

$$\bigcup_{k=-N+1}^{M+1} E_k\mathscr{A}^{M+1-k} = \mathfrak{G}_{M+1}^\perp \setminus \mathfrak{G}_M^\perp. \tag{2.37}$$

Доказательство. Так как $m_0(\chi) = 1$ на $\mathfrak{G}_N$, то $m_0(\chi\mathscr{A}^{-M-N}) = 1$ для $\chi \in \mathfrak{G}_M^{\perp}$. Поэтому $m_0(\chi)$ будет маской тогда и только тогда, когда

$$m_0(\chi)m_0(\chi\mathscr{A}^{-1})\ldots m_0(\chi\mathscr{A}^{-M-N}) = 0 \tag{2.38}$$

на $\mathfrak{G}_{M+1}^{\perp} \setminus \mathfrak{G}_M^{\perp}$. В самом деле, если (2.38) выполнено, мы полагаем

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi\mathscr{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^{\perp}).$$

Тогда $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathscr{A}^{-1})$ и

$$m_0(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{(\chi\mathscr{A}^{-1}, h)}$$

для некоторых β_h. Поэтому $m_0(\chi)$ — маска. Обратно, пусть $m_0(\chi)$ — маска, т. е. $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathscr{A}^{-1}) \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^{\perp})$. Отсюда находим

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)m_0(\chi\mathscr{A}^{-1})\ldots m_0(\chi\mathscr{A}^{-M-N})\hat{\varphi}(\chi\mathscr{A}^{-M-N-1})$$

и $\hat{\varphi}(\chi\mathscr{A}^{-M-N-1}) = 1$ на $\mathfrak{G}_{M+1}^{\perp}$. Так как $\hat{\varphi}(\chi) = 0$ на $\mathfrak{G}_{M+1}^{\perp} \setminus \mathfrak{G}_M^{\perp}$, то

$$m_0(\chi)m_0(\chi\mathscr{A}^{-1})\ldots m_0(\chi\mathscr{A}^{-M-N}) = 0$$

на $\mathfrak{G}_{M+1}^{\perp} \setminus \mathfrak{G}_M^{\perp}$. Для завершения доказательства осталось заметить, что для любого $-N+1 \leqslant k \leqslant M+1$ включение $E_k\mathscr{A}^{-k+M+1} \subset \mathfrak{G}_{M+1}^{\perp} \setminus \mathfrak{G}_M^{\perp}$ выполнено. Поэтому равенство (2.37) имеет место тогда и только тогда, когда справедливо равенство (2.38). □

Отметим, что на практике зачастую удобнее использовать равенство (2.38) вместо (2.37).

Следующая теорема дает полезное необходимое условие ортонормированности системы сдвигов ступенчатой масштабирующей функции.

Теорема 2.10. *Пусть $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^{\perp})$ — решение масштабирующего уравнения $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathscr{A}^{-1})$ и $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ — ортонормированная система. Тогда для любых $\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \ldots, \alpha_{-1} = \overline{0, p-1}$*

$$\sum_{\alpha_0=0}^{p-1} |m_0(\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0})|^2 = 1. \tag{2.39}$$

Доказательство. Так как $\hat\varphi \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^\perp)$, то $\hat\varphi(\mathfrak{G}_{M+1}^\perp \setminus \mathfrak{G}_M^\perp) = 0$. Используя теорему 2.8, имеем

$$1 = \sum_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{M-1}=0} |\hat\varphi(\mathfrak{G}_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{M-1},\alpha_M=0} |\hat\varphi(\mathfrak{G}_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}} r_M^{\alpha_M})|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha_0=0}^{p-1} |m_0(\mathfrak{G}_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0})|^2 \times$$

$$\times \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{M-1},\alpha_M=0} |\hat\varphi(\mathfrak{G}_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}+1} \ldots r_{-1}^{\alpha_0} r_0^{\alpha_1} \ldots r_{M-2}^{\alpha_{M-1}} r_{M-1}^{\alpha_M})|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha_0=0}^{p-1} |\mathfrak{G}_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0}|^2. \qquad \square$$

Следствие 2.5. *Если $N = 1$ и $m_0(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0}) = \lambda_{\alpha_{-1}+\alpha_0 p}$, то мы можем записать равенство* (2.39) *в виде*

$$\sum_{\alpha_0=0}^{p-1} |\lambda_{\alpha_{-1}+\alpha_0 p}|^2 = 1. \tag{2.40}$$

Теорема 2.11. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{D}_M(\mathfrak{G}_{-N})$ и $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ — ортонормированная система. $V_n \subset V_{n+1}$ тогда и только тогда, когда функция $\varphi(x)$ есть решение масштабирующего уравнения* (2.23).

Доказательство. Вначале мы докажем, что $V_n \subset V_{n+1}$ тогда и только тогда, когда $V_0 \subset V_1$. В самом деле, пусть $V_0 \subset V_1$ и $f \in V_n$. Тогда

$$f(x) = \sum_h c_h \varphi(\mathscr{A}^n x \dot{-} h) \Rightarrow f(\mathscr{A}^{-n}x) = \sum_h c_h \varphi(x \dot{-} h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\mathscr{A}^{-n}x) \in V_0 \Rightarrow f(\mathscr{A}^{-n}x) \in V_1 \Rightarrow f(\mathscr{A}^{-n}x) = \sum_h \gamma_h \varphi(\mathscr{A}x \dot{-} h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_h \gamma_h \varphi(\mathscr{A}^{n+1}x \dot{-} h) \Rightarrow f \in V_{n+1}.$$

Таким образом, мы имеем $V_n \subset V_{n+1}$. Обратное доказывается аналогично. Теперь мы докажем, что $V_0 \subset V_1$ тогда и только тогда, когда функция $\varphi(x)$ есть решение масштабирующего уравнения (2.23). Необходимость очевидна. Пусть φ — решение (2.23).

Выберем функцию $f \in \operatorname{span}(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$. Тогда

$$f(x) = \sum_{\tilde{h}\in H_0^{(m)}} c_{\tilde{h}}\varphi(x\dot{-}\tilde{h})$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Так как φ есть решение уравнения (2.23), то мы можем записать f в виде

$$f(x) = \sum_{\tilde{h}\in H_0^{(m)}} c_{\tilde{h}} \sum_{h\in H_0^{(N+1)}} \beta_h\varphi(\mathscr{A}x\dot{-}(\mathscr{A}\tilde{h}\dot{+}h)).$$

Так как $\tilde{h} \in H_0^{(m)}$, то $\mathscr{A}\tilde{h} \in H_0$. Поэтому $\mathscr{A}\tilde{h}\dot{+}h \in H_0$. Это означает, что $f \in \operatorname{span}(\varphi(\mathscr{A}x\dot{-}h))_{h\in H_0}$. Следовательно, $V_0 \subset V_1$. □

Теорема 2.12. *Пусть* φ *— решение уравнения* (2.23), $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ *— ортонормированный базис* V_0. $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n} = L_2(\mathfrak{G})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{supp}\hat{\varphi}(\cdot\mathscr{A}^{-n}) = X.$$

Доказательство. Эта теорема доказана ранее для любой нульмерной группы при условии $|\hat{\varphi}| = \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_0^\perp}$ (см. лемму 2.9). Это условие появилось потому, что множество сдвигов H_0 в общем случае не является группой. В случае группы Виленкина множество сдвигов H_0 будет группой и условие $|\hat{\varphi}| = \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_0^\perp}$ можно опустить. □

Теорема 2.13. *Предположим, что функция* $m_0(\chi)$ *удовлетворяет условиям T1–T3,* (2.38) *и функция*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{n=0}^{\infty} m_0(\chi\mathscr{A}^{-n})$$

удовлетворяет условию ортогональности (2.29). *Тогда* $\varphi \in \mathfrak{D}_M(\mathfrak{G}_{-N})$ *порождает ортогональный КМА.*

Доказательство. Очевидно, что $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^\perp)$, $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \times \times \hat{\varphi}(\chi\mathscr{A}^{-1})$, $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ — ортонормированная система. Аксиома A5 следует из того, что множество сдвигов H_0 образует группу. Остальные аксиомы следуют из теорем 2.11, 2.12 и лемм 2.10, 2.12. □

Следующее утверждение доказывается аналогично.

Теорема 2.14. *Пусть* $\varphi \in \mathfrak{D}_M(\mathfrak{G}_{-N})$, $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ *— ортонормированная система. Тогда* $\varphi(x)$ *порождает ортогональный КМА.*

2.4 Построение ортогональной масштабирующей функции, порождающей КМА на группе Виленкина

Определение 2.8. Пусть $N, M \in \mathbb{N}$. Множество $E \subset X$ будем называть (N,M)-*элементарным*, если E есть дизъюнктное объединение p^N смежных классов

$$\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\zeta_j = \mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\underbrace{r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}}\dots r_{-1}^{\alpha_{-1}}}_{\xi_j}\underbrace{r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}}_{\eta_j} = \mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\xi_j\eta_j,$$

$j = 0, 1, \dots, p^N - 1$, $j = \alpha_{-N} + \alpha_{-N+1}p + \dots + \alpha_{-1}p^{N-1}$ $(\alpha_\nu = \overline{0, p-1})$ так, что

1) $\bigsqcup\limits_{j=0}^{p^N-1} \mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\xi_j = \mathfrak{G}_0^{\perp}$, $\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\xi_0 = \mathfrak{G}_{-N}^{\perp}$;

2) для любых $l = \overline{0, M+N-1}$ пересечение

$$(\mathfrak{G}_{-N+l+1}^{\perp} \setminus \mathfrak{G}_{-N+l}^{\perp}) \bigcap E \neq \emptyset.$$

Лемма 2.21. *Множество $H_0 \subset \mathfrak{G}$ есть ортонормальная система на любом (N,M)-элементарном множестве $E \subset X$.*

Доказательство. Используя определение (N,M)-элементарного множества, имеем

$$\int\limits_E (\chi,h)\overline{(\chi,g)}\,d\nu(x) = \sum_{j=0}^{p^N-1}\int\limits_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\zeta_j}(\chi,h)\overline{(\chi,g)}\,d\nu(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{p^N-1}\int\limits_X \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\zeta_j}(\chi)(\chi,h)\overline{(\chi,g)}\,d\nu(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{p^N-1}\int\limits_X \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\zeta_j}(\chi\eta_j)(\chi\eta_j,h)\overline{(\chi\eta_j,g)}\,d\nu(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{p^N-1}\int\limits_X \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\xi_j}(\chi)(\chi,h)\overline{(\chi,g)}(\eta_j,h)\overline{(\eta_j,g)}\,d\nu(x).$$

Так как

$$(\eta_j,h) = (r_0^{\alpha_0}r_1^{\alpha_1}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\dots\dot{+}a_{-s}g_{-s}) = 1,$$
$$(\eta_j,g) = (r_0^{\alpha_0}r_1^{\alpha_1}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, b_{-1}g_{-1}\dot{+}b_{-2}g_{-2}\dot{+}\dots\dot{+}b_{-s}g_{-s}) = 1,$$

то

$$\int\limits_E (\chi,h)\overline{(\chi,g)}\,d\nu(x) = \sum_{j=0}^{p^N-1} \int\limits_{\mathfrak{G}_{-N}^\perp \xi_j} (\chi,h)\overline{(\chi,g)}\,d\nu(x) =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{G}_0^\perp} (\chi,h)\overline{(\chi,g)}\,d\nu(x) = \delta_{h,g}. \qquad \square$$

Теорема 2.15. *Пусть $(\mathfrak{G},\dot{+})$ — группа Виленкина, $E \subset \mathfrak{G}_M^\perp$ есть (N,M)-элементарное множество. Если $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_E(\chi)$, то система сдвигов $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ есть ортонормированная система на $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{H}_0 \subset H_0$ — конечное множество. Используя равенство Планшереля, имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{G}} \varphi(x\dot{-}g)\overline{\varphi(x\dot{-}g)}\,d\mu(x) = \int\limits_X |\hat{\varphi}(\chi)|^2\overline{(\chi,g)}(\chi,h)d\nu(\chi) =$$

$$= \int\limits_E (\chi,h)\overline{(\chi,g)}d\nu(\chi) = \sum_{j=0}^{p^N-1} \int\limits_{\mathfrak{G}_{-N}^\perp \zeta_j} (\chi,h)\overline{(\chi,g)}\,d\nu(\chi).$$

Преобразуем внутренний интеграл

$$\int\limits_{\mathfrak{G}_{-N}^\perp \zeta_j} (\chi,h)\overline{(\chi,g)}\,d\nu(\chi) = \int\limits_X \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}^\perp \zeta_j}(\chi)(\chi,h)\overline{(\chi,g)}\,d\nu(\chi) =$$

$$= \int\limits_X \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}^\perp \zeta_j}(\chi\eta_j)(\chi\eta_j, h\dot{-}g)\,d\nu(\chi) =$$

$$= \int\limits_X \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_{-N}^\perp \xi_j}(\chi)(\chi\eta_j, h\dot{-}g)\,d\nu(\chi) = \int\limits_{\mathfrak{G}_{-N}^\perp \xi_j} (\chi\eta_j, h\dot{-}g)\,d\nu(\chi).$$

Повторяя рассуждения леммы 2.21, получаем

$$\int\limits_{\mathfrak{G}} \varphi(x\dot{-}h)\overline{\varphi(x\dot{-}g)}\,d\mu(x) = \delta_{h,g}. \qquad \square$$

Теперь мы сведем задачу построения ступенчатой масштабирующей функции к построению некоторого дерева. Мы будем рассматривать специальный класс масштабирующих функций $\varphi(\chi)$, для которых $|\hat{\varphi}(\chi)|$ есть характеристическая функция множества. Определим этот класс.

Определение 2.9. Маску $m_0(\chi)$ назовем *N-элементарной* ($N \in \mathbb{N}_0$), если $m_0(\chi)$ постоянна на смежных классах $\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\chi$, ее модуль $|m_0(\chi)|$ принимает только два значения: 0 и 1, и $m_0(\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}) = 1$. Масштабирующую функцию $\varphi(x)$ с преобразованием Фурье

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{n=0}^{\infty} m_0(\chi \mathscr{A}^{-n})$$

также будем называть *N-элементарной.* N-элементарную функцию φ назовем *(N, M)-элементарной*, если $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^{\perp})$. В этом случае преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\chi)$ тоже будем называть *(N, M)-элементарным.*

Определение 2.10. Пусть $\tilde{E} = \bigsqcup\limits_{\alpha_{-1},\alpha_0} \mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_1^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \subset \mathfrak{G}_1^{\perp}$ есть $(1,1)$-элементарное множество. Будем говорить, что множество $\tilde{E}_X$ есть *периодическое продолжение множества $\tilde{E}$*, если

$$\tilde{E}_X = \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigsqcup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s=0}^{p-1} \tilde{E} r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \ldots r_s^{\alpha_s}$$

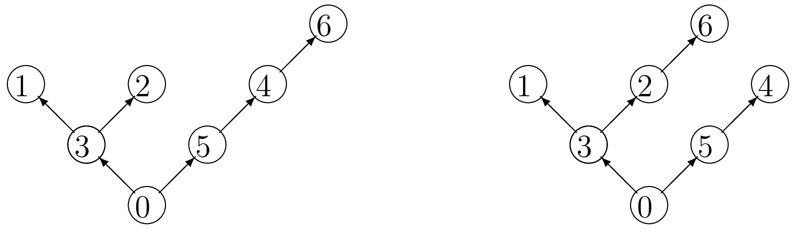
и, что *множество $\tilde{E}$ порождает $(1, M)$-элементарное множество E*, если $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{E}_X \mathscr{A}^n = E$.

Запишем множество $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ в виде

$$\{0, u_1, u_2, \ldots, u_q, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-q-1}\} = V, \quad 0 = u_0,$$

где $1 \leqslant q \leqslant p-1$. Мы будем рассматривать множество V как множество вершин. Через $T(0, u_1, u_2, \ldots, u_q, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-q-1}) = T(V)$ обозначим корневое дерево на множестве вершин V, где 0 является корнем, $u_1, u_2, \ldots, u_q$ — вершины первого уровня, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-q-1}$ — остальные вершины.

Например, для $p = 7$, $q = 2$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ мы имеем деревья, изображенные на рис. 2.1, *а* или *б* и т. д.



а *б*

Рис. 2.1

По произвольному пути $P_j = (0, u_j, \alpha_{s-1}, \alpha_{s-2}, \ldots, \alpha_0, \alpha_{-1})$ построим множество смежных классов

$$\mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{u_j},\ \mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{s-1}} r_0^{u_j},\ \mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{s-2}} r_0^{\alpha_{s-1}},\ \ldots,\ \mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_0} r_0^{\alpha_1},\ \mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0}. \quad (2.41)$$

Например, для дерева на рис. 2.1, *б* и пути $(0, 3, 2, 6)$ мы можем построить три смежных класса

$$\mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{3}, \quad \mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{2} r_0^{3}, \quad \mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{6} r_0^{2},$$

для пути $(0, 3, 1)$ получаем два смежных класса

$$\mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{3}, \mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{1} r_0^{3}.$$

Дерево $T(V)$, где T_j — ветви дерева $T(V)$ с корнем u_j, представлено на рис. 2.2.

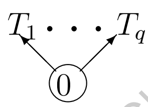


Рис. 2.2

Через E_j обозначим объединение всех смежных классов (2.41) при фиксированном j и положим

$$\tilde{E} = \left(\bigsqcup_{j=1}^{q} E_j \right) \bigsqcup \mathfrak{G}_{-1}^{\perp}. \quad (2.42)$$

Ясно, что $\tilde{E}$ есть $(1,1)$ элементарное множество и $\tilde{E} \subset \mathfrak{G}_1^{\perp}$.

Определение 2.11. Пусть $\tilde{E}_X$ — периодическое продолжение множества $\tilde{E}$. Будем говорить, что *дерево $T(V)$ порождает множество E*, если $E = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{E}_X \mathscr{A}^n$.

Лемма 2.22. *Пусть $T(V)$ — корневое дерево с нулем в качестве корня. Пусть $E \subset X$ — множество, порожденное деревом $T(V)$, H — высота дерева $T(V)$. Тогда E есть $(1, H-2)$-элементарное множество.*

Доказательство. Обозначим

$$m(\chi) = \mathbf{1}_{\tilde{E}_X}(\chi), \quad M(\chi) = \prod_{n=0}^{\infty} m(\chi \mathscr{A}^{-n}).$$

Вначале заметим, что $M(\chi)=\mathbf{1}_E(\chi)$. В самом деле,

$$\mathbf{1}_E(\chi)=1\Leftrightarrow\chi\in E\Leftrightarrow\forall n,\ \chi\mathscr{A}^{-n}\in\tilde{E}_X\Leftrightarrow\forall\ n,\ \mathbf{1}_{\tilde{E}_X}(\chi\mathscr{A}^{-n})=1\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \forall\ n,\ m(\chi\mathscr{A}^{-n})=1\Leftrightarrow\prod_{n=0}^{\infty}m(\chi\mathscr{A}^{-n})=1\Leftrightarrow M(\chi)=1.$$

Это означает, что $M(\chi)=\mathbf{1}_E(\chi)$.

Теперь мы докажем, что $\mathbf{1}_E(\chi)=0$ для $\chi\in\mathfrak{G}_{H-1}^{\perp}\setminus\mathfrak{G}_{H-2}^{\perp}$. Так как $\tilde{E}_X\supset\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}$, то $\mathbf{1}_{\tilde{E}_X}(\mathfrak{G}_{H-1}^{\perp}\mathscr{A}^{-H})=\mathbf{1}_{\tilde{E}_X}(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp})=1$. Следовательно,

$$\prod_{n=0}^{\infty}\mathbf{1}_{\tilde{E}_X}(\chi\mathscr{A}^{-n})=\prod_{n=0}^{H-1}\mathbf{1}_{\tilde{E}_X}(\chi\mathscr{A}^{-n}),$$

если $\chi\in\mathfrak{G}_{H-1}^{\perp}\setminus\mathfrak{G}_{H-2}^{\perp}$. Обозначим $m(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}r_{-1}^{i}r_0^{k})=\lambda_{i+kp}$. По определению смежных классов (2.41) $m(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}r_{-1}^{i}r_0^{k})\neq0\Leftrightarrow$ пара (k,i) есть ребро дерева $T(V)$.

Нам нужно доказать, что

$$\mathbf{1}_E(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}r_{-1}^{\alpha_{-1}}r_0^{\alpha_0}\dots r_{H-2}^{\alpha_{H-2}})=0$$

для $\alpha_{H-2}\neq0$. Так как $\tilde{E}_X$ — периодическое продолжение множества $\tilde{E}$, то функция $m(\chi)=\mathbf{1}_{\tilde{E}_X}(\chi)$ периодическая с любым периодом $r_1^{\alpha_1}r_2^{\alpha_2}\dots r_s^{\alpha_s}$, $s\in\mathbb{N}$, т.е. $m(\chi r_1^{\alpha_1}r_2^{\alpha_2}\dots r_s^{\alpha_s})=m(\chi)$, когда $\chi\in\mathfrak{G}_1^{\perp}$. Используя этот факт, мы можем записать $M(\chi)$ для $\chi\in\mathfrak{G}_{\alpha_{H-1}}^{\perp}\setminus\mathfrak{G}_{\alpha_{H-2}}^{\perp}$ в виде

$$M(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}\zeta)=M(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}r_{-1}^{\alpha_{-1}}r_0^{\alpha_0}\dots r_{H-2}^{\alpha_{H-2}})=$$
$$=m(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}r_{-1}^{\alpha_{-1}}r_0^{\alpha_0})m(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}r_{-1}^{\alpha_0}r_0^{\alpha_1})\dots m(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}r_{-1}^{\alpha_{H-3}}r_0^{\alpha_{H-2}})m(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}r_{-1}^{\alpha_{H-2}})=$$
$$=\lambda_{\alpha_{-1}+p\alpha_0}\lambda_{\alpha_0+p\alpha_1}\dots\lambda_{\alpha_{H-3}+p\alpha_{H-2}}\lambda_{\alpha_{H-2}},\ \alpha_{H-2}\neq0.$$

Если $\lambda_{\alpha_{H-2}}=0$, то $M(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}\zeta)=0$. Пусть $\lambda_{\alpha_{H-2}}\neq0$. Это означает, что $\alpha_{H-2}=u_j$ для некоторого $j=\overline{1,q}$. Если $\lambda_{\alpha_{H-3}+p\alpha_{H-2}}=0$, то $M(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}\zeta)=0$. Поэтому предположим, что $\lambda_{\alpha_{H-3}+p\alpha_{H-2}}\neq0$. Это верно тогда и только тогда, когда пара $(\alpha_{H-2},\alpha_{H-3})$ есть ребро дерева $T(V)$. Повторяя эти рассуждения, мы получаем путь $(0,u_j=\alpha_{H-2},\alpha_{H-3},\dots,\alpha_s)$ дерева $T(V)$. Так как $\mathrm{hight}(T)=H$, то $s\geqslant0$. Следовательно, (α_s,α_{s-1}) не ребро и $\lambda_{\alpha_{s-1}+p\alpha_s}=0$, где $s\geqslant0$. Это означает, что $M(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}\zeta)=0$.

Теперь мы докажем, что E есть $(1,H-2)$-элементарное множество. В самом деле, любой путь $(0,u_j=\alpha_{s-1},\alpha_{s-2},\dots,\alpha_0,\alpha_{-1})$ определяет смежный класс $\mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{s-1}^{\alpha_{s-1}} \subset E$. Но для любого $\alpha_{-1} = \overline{0, p-1}$ существует единственный путь с конечной точкой α_{-1} и начальной точкой в нуле. Это означает, что E есть $(1, H-2)$-элементарное множество. □

Теорема 2.16. *Пусть $M, p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 3$, $E \subset \mathfrak{G}_M^{\perp}$ есть $(1, M)$-элементарное множество, $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-1}(\mathfrak{G}_M^{\perp})$, $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_E(\chi)$, $\hat{\varphi}(\chi)$ — решение уравнения*

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi \mathscr{A}^{-1}), \tag{2.43}$$

где $m_0(\chi)$ есть 1-элементарная маска. Тогда существует корневое дерево $T(V)$ высотой $\mathrm{height}(T) = M + 2$, *которое порождает множество E.*

Доказательство. Так как множество E является $(1, M)$-элементарным и $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_E(\chi)$, то из теоремы следует, что система $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ будет ортонормированной в $L_2(\mathfrak{G})$. Используя теорему 2.8, получаем, что для $\alpha_{-1} = \overline{0, p-1}$

$$\sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1} = 0} |\hat{\varphi}(G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = 1.$$

Так как $\hat{\varphi}$ есть решение масштабирующего уравнения (2.43), то с учетом теоремы 2.10 получаем для $\alpha_{-1} = \overline{0, p-1}$

$$\sum_{\alpha_0=0}^{p-1} |m_0(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0})|^2 = 1. \tag{2.44}$$

Обозначим $\lambda_{\alpha_{-1} + p\alpha_0} := m_0(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0})$. Запишем (2.44) в виде

$$\sum_{\alpha_0=0}^{p-1} |\lambda_{\alpha_{-1} + p\alpha_0}|^2 = 1. \tag{2.45}$$

Так как маска $m_0(\chi)$ 1-элементарна, то $|\lambda_{i+pj}|$ принимает только два значения: 0 и 1.

Будем строить дерево T. Пусть $\mathfrak{U}$ — семейство смежных классов $\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}\zeta \subset \mathfrak{G}_M^{\perp}$ таких, что $\hat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}\zeta) \neq 0$ и $\mathfrak{G}_{-1}^{\perp} \notin \mathfrak{U}$. Мы можем записать смежный класс $\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}\zeta \in \mathfrak{U}$ в виде

$$\mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}.$$

Если $\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}\zeta \in \mathfrak{G}_n^{\perp} \setminus \mathfrak{G}_{n-1}^{\perp}$ $(n \leqslant M)$, то $\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}\zeta = \mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$, $\alpha_{n-1} = \overline{1, p-1}$.

Пусть $u \in \overline{1, p-1}$. Через T_u обозначим совокупность векторов $(u, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0, \alpha_{-1})$, для которых $\mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{n-1}^{\alpha_{n-1}} r_n^u \in \mathfrak{U}$. Вектор $(u, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0, \alpha_{-1})$ также будем называть путем. Таким образом, T_u есть множество путей с начальной точкой u, для которых $\hat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{n-1}^{\alpha_{n-1}} r_n^u) \neq 0$. Покажем, что T_u — корневое дерево с корнем u.

1. Все вершины α_j, u пути $(u, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0, \alpha_{-1})$ попарно различны. В самом деле,

$$\hat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{n-1}^{\alpha_{n-1}} r_n^u) = \lambda_{\alpha_{-1}+\alpha_0 p} \lambda_{\alpha_0+\alpha_1 p} \dots \lambda_{\alpha_{n-1}+pu} \lambda_u \neq 0, \quad u \neq 0.$$

Если $\alpha_{n-1} = u$, то $|\lambda_{u+pu}| = |\lambda_{u+p0}| = 1$, что противоречит равенству (2.45).

Если $\alpha_{n-1} = 0$, то $|\lambda_{0+pu}| = |\lambda_{0+p0}| = 1$, что также противоречит равенству (2.45). Следовательно, $\alpha_{n-1} \notin \{0, u\}$. Аналогично получаем, что $\alpha_i \notin \{0, u, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+1}\}$.

2. Если два пути $(u, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0, \alpha_{-1})$ и $(u, \beta_{l-1}, \dots, \beta_0, \beta_{-1})$ имеют общий подпуть $(u, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_{k-j+1}, \alpha_{k-j}) = (u, \beta_{l-1}, \dots, \beta_{l-j+1}, \beta_{l-j})$ и $\alpha_{k-j-1} \neq \beta_{l-j-1}$, то $\{\alpha_{-1}, \alpha_0, \dots, \alpha_{k-j-1}\} \bigcap \{\beta_{-1}, \beta_0, \dots, \beta_{l-j-1}\} = \emptyset$. В самом деле, предположим

$$\{\alpha_{-1}, \alpha_0, \dots, \alpha_{k-j-1}\} \bigcap \{\beta_{-1}, \beta_0, \dots, \beta_{l-j-1}\} \neq \emptyset.$$

Тогда существует $v \in \{\alpha_{-1}, \alpha_0, \dots, \alpha_{k-j-1}\} \bigcap \{\beta_{-1}, \beta_0, \dots, \beta_{l-j-1}\}$.

Предположим, что $v \neq \alpha_{k-j-1}$. Тогда $v = \alpha_\nu$, $-1 \leqslant \nu \leqslant k-j-2$ и $v = \beta_\mu$, $-1 \leqslant \mu \leqslant l-j-1$. Из этого следует, что

$$(u = \alpha_k, \dots, \alpha_{k-j}, \alpha_{k-j-1}, \dots, \alpha_{\nu+1}, \alpha_\nu = \beta_\mu, \beta_{\mu-1}, \dots, \beta_0, \beta_{-1}) \in T_u,$$
$$(u = \beta_l, \dots, \beta_{l-j} = \alpha_{k-j}, \beta_{l-j-1}, \dots, \beta_{\mu+1}, \beta_\mu, \beta_{\mu-1}, \dots, \beta_0, \beta_{-1}) \in T_u.$$

Таким образом, мы имеем два различных пути с тем же самым листом β_{-1}, что противоречит теореме 2.8. Это означает, что T_u не имеет циклов, следовательно, T_u есть дерево с корнем u.

3. Аналогично можно доказать, что различные деревья T_u и T_v не имеют общих вершин. Из этого следует, что граф $T = (0, T_{u_1}, \dots, T_{u_q})$ есть дерево с корнем в нуле.

4. Очевидно, что это дерево порождает масштабирующую функцию $\hat{\varphi}$ с маской m_0. Покажем, что $\operatorname{height}(T) = M + 2$. В самом деле, так

как $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-1}(\mathfrak{G}_M^\perp)$, то существует смежный класс $\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}$, $\alpha_{M-1} \neq 0$, для которого $|\hat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})| = 1$. Этот смежный класс порождает путь $(0, \alpha_{M-1} = u, \alpha_{M-2}, \dots, \alpha_0, \alpha_{-1})$ дерева T, который содержит $M+2$ вершины. Это означает, что $\mathrm{height}(T) \geqslant M+2$. С другой стороны, не существует смежного класса $\mathfrak{G}_{-1}^\perp \zeta \subset \mathfrak{G}_{M+1}^\perp \setminus \mathfrak{G}_M^\perp$, следовательно, не существует пути, для которого $L > M+2$. Таким образом, $\mathrm{height}(T) = M+2$. Так как $\operatorname{supp} \hat{\varphi}(\chi)$ есть $(1, M)$-элементарное множество, это означает, что множество всех вершин дерева T есть множество $\{0, 1, \dots, p-1\}$. Теорема доказана. □

Определение 2.12. Пусть $T(V)$ — корневое дерево с корнем в нуле, H — высота дерева $T(V)$, $V = \{0, 1, \dots, p-1\}$. Используя смежные классы (2.41), определим маску $m_0(\chi)$ на подгруппе $\mathfrak{G}_1^\perp$ следующим образом: $m_0(\mathfrak{G}_{-1}^\perp) = 1, m_0(\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^i r_0^j) = \lambda_{i+pj}$, $|\lambda_{i+pj}| = 1$, если $\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^i r_0^j \subset \tilde{E}$ (см. (2.42)), $|\lambda_{i+pj}| = 0$, если $\mathfrak{G}_{-1}^\perp r_{-1}^i r_0^j \subset \mathfrak{G}_1^\perp \setminus \tilde{E}$. Продолжим маску $m_0(\chi)$ на $X \setminus \mathfrak{G}_1^\perp$ периодически, т. е. $m_0(\chi r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_s^{\alpha_s}) = m_0(\chi)$. В этом случае скажем, что *дерево* $T(V)$ *порождает маску* $m_0(\chi)$.

Обозначим $\hat{\varphi}(\chi) = \prod\limits_{n=0}^{\infty} m_0(\chi \mathscr{A}^{-n})$. Из леммы 2.22 следует:

1) $\operatorname{supp} \hat{\varphi}(\chi) \subset \mathfrak{G}_{H-2}^\perp$;

2) $\hat{\varphi}(\chi)$ есть $(1, H-2)$-элементарная функция;

3) $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ есть ортонормированная система.

В этом случае будем говорить, что *дерево* $T(V)$ *порождает масштабирующую функцию* $\varphi(x)$.

Теорема 2.17. *Пусть $p \geqslant 3$ — простое число, $V = \{0, u_1, u_2, \dots, u_q, a_1, a_2, \dots, a_{p-q-1}\}$ — множество вершин, $T(V)$ — корневое дерево с корнем в нуле, $u_1, u_2, \dots, u_q$ — вершины первого уровня. Пусть H — высота дерева $T(V)$. Через $\varphi(x)$ обозначим функцию, порожденную деревом $T(V)$. Тогда $\varphi(x)$ порождает ортогональный КМА на p-ичной группе Виленкина.*

Доказательство. Так как $T(V)$ порождает функцию φ, то:

1) $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-1}(\mathfrak{G}_1^\perp)$;

2) $\hat{\varphi}(\chi)$ есть $(1, H-2)$-элементарная функция;

3) $\hat{\varphi}(\chi)$ есть решение масштабирующего уравнения (2.25);

4) $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ — ортонормированная система.

По теореме 2.13 $\varphi(x)$ порождает ортогональный КМА. □

Замечание 2.4. Можно указать непосредственный алгоритм построения масштабирующей функции $\varphi(x)$. Пусть $T(V)$ — дерево на множестве вершин $\{0,1,\dots,p-1\}$. Строим конечную последовательность $(\lambda_{i+jp})_{i,j=0}^{p-1}$ следующим образом: $\lambda_0 = 1$, $|\lambda_{i+pj}| = 1$, если пара (j,i) является ребром дерева $T(f)$. Для любой вершины α_{-1} выбираем путь $(0=\alpha_{s+1}, u_j=\alpha_s, \alpha_{s-1},\dots,\alpha_0,\alpha_{-1})$ и полагаем

$$\hat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0}\dots r_{s-1}^{\alpha_{s-1}} r_s^{\alpha_s} r_{s+1}^{0}) = \lambda_{\alpha_{-1}+\alpha_0 p}\cdot\lambda_{\alpha_0+\alpha_1 p}\cdot\dots\cdot\lambda_{\alpha_{s-1}+\alpha_s p}\cdot\lambda_{\alpha_s}.$$

В противном случае мы полагаем $\hat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-1}^{\perp}\zeta)=0$. Тогда φ порождает ортогональный КМА на группе Виленкина $\mathfrak{G}$.

Список литературы

1. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М. : Физматлит, 2005.
2. *Чуи К.* Введение в вейвлеты : пер. с англ. М. : Мир, 2001.
3. *Holshneider M.* Wavelets : an Analysis Tool. Oxford : Clarendon Press, 1995.
4. *Mallat S.* Multiresolution representation and wavelets. Ph.D. thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, 1988.
5. *Meyer Y.* Ondelettes et fonctions splines. Seminaire EDP. Paris : Ecole Polytechnique, December 1986.
6. *Хренников А. Ю., Шелкович В. М.* Современный p-адический анализ и математическая физика. Теория и приложения. М. : Физматлит, 2012.
7. *Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.* p-adic nonorthogonal wavelet bases // Избранные вопросы математической физики и p-адического анализа : сб. статей / Тр. МИАН. Т. 265. М. : МАИК, 2009. С. 7–18.
8. *Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.* p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames // J. Fourier Analysis and Applications. 2010. Vol. 16, № 5. P. 693–714.
9. *Козырев С. В.* Вейвлет анализ как p-адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66, № 2. С. 149–158.
10. *Козырев С. В.* p-адические псевдо-дифференциальные операторы и p-адические вейвлеты // Теор. матем. физ. 2004. Т. 138, № 3. С. 1–42.
11. *Shelkovich V. M., Khrennikov A. Yu., Skopina M. A.* p-adic refinable functions and MRA-based wavelets // J. Approx. Theory. 2009. Vol. 161, № 1. P. 226–238.
12. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.*Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку : Элм, 1981.
13. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша : Теория и применения. М. : Изд-во ЛКИ, 2008.
14. *Behera B., Jahan Q.* Multiresolution analysis on local fields and characterization of scaling functions // Adv. Pure Appl. Math. 2012. Vol. 3. P. 181–202.
15. *Behera B., Jahan Q.* Biorthogonal Wavelets on Local Fields of Positive haracteristic // Commun. Math. Anal. 2013. Vol. 15, № 2. P. 52–75.
16. *Jiang H., Li D., Jin N.* Multiresolution analysis on local fields // J. Math. Anal. Appl. 2004. Vol. 294. P. 523–532.
17. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М. : Наука, 1982.
18. *Lukomskii S. F.* Haar system on a product of zero-dimensional compact group // Centr. Eur. J. Math. 2011. Vol. 9, № 3. P. 627–639.
19. *Лукомский С. Ф.* Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–65.
20. *Lukomskii S. F.* Multiresolution analysis on product of zero-dimensional Abelian groups // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 385, iss. 2. P. 1162–1178.
21. *Лукомский С. Ф.* Кратномасштабный анализ Рисса на нульмерных группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79, № 1. С. 153–184.
22. *Lang W. C.* Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group // SIAM J. Math. Anal. 1996. Vol. 27, № 1. P. 305–312.
23. *Lang W. C.* Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Housten J. Math. 1998. Vol. 24, № 3. P. 533–544.

24. *Lang W. C.* Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group // Intern. J. Math. Math. Sci. 1998. Vol. 21, № 2. P. 307–314.
25. *Протасов В. Ю., Фарков Ю. А.* Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 10. С. 129–160.
26. *Протасов В. Ю.* Аппроксимация диадическими всплесками // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 11. С. 135–152.
27. *Farkov Yu. A.* Examples of frames on the Cantor dyadic group // J. Math. Sciences. 2012. Vol. 187, № 1. P. 22–34.
28. *Фарков Ю. А.* Биортогональные всплески на группах Виленкина // Избранные вопросы математической физики и p-адического анализа : сб. статей / Тр. МИАН. Т. 265. М. : МАИК, 2009. С. 110–124.
29. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 3. С. 193–220.
30. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 6. С. 934–952.
31. *Фарков Ю. А., Родионов Е. А.* Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши // Матем. заметки. 2009. Т. 86, вып. 3. С. 429–444.
32. *Farkov Yu. A., Rodionov E. A.* Algorithms for wavelet construction on Vilenkin groups // p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. 2011. Vol. 3, № 3. P. 181–195.
33. *Lukomskii S. F.* Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups // J. Fourier Anal. Appl. 2014. Vol. 20, № 1. P. 42–65.
34. *Lukomskii S. F., Berdnikov G. S.* N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups // Int. J. Wavelets Multiresolut Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 5. 23 p. DOI: 10.1142/S021969131550037X.

Р а з д е л III

ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ, СОХРАНЯЮЩЕЕ K-ВЫПУКЛОСТЬ

ВВЕДЕНИЕ

Для многих прикладных задач теории приближений зачастую необходимо не просто аппроксимировать заданную функцию, а приблизить ее с сохранением некоторых ее свойств, связанных с формой функции (положительность, монотонность, выпуклость и т. п.). Раздел теории приближений, посвященный такого рода задачам, называется теорией формосохраняющего приближения.

Одной из первых публикаций по данной тематике была работа Ю. Пала (J. Pál) [1], опубликованная в 1925 г., в которой доказывается, что произвольную выпуклую функцию можно равномерно приблизить на отрезке последовательностью выпуклых алгебраических полиномов. Конструктивное доказательство этого факта было предложено Т. Поповичу (T. Popoviciu) [2] в 1937 г., который показал, что если функция f является выпуклой порядка k на [0,1], то многочлены Бернштейна $B_n f(x) := \sum\limits_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$ также будут выпуклыми порядка k на [0,1].

Интерес к данной проблематике усилился в конце 60-х годов XX века, когда появились работы О. Шиша (O. Shisha) [3], Г. Г. Лоренца (G. G. Lorentz) и К. Л. Целлера (K. L. Zeller) [4, 5]. Они дали толчок работам Р. ДеВора (R. A. DeVore) [6] по монотонному приближению и работам А. С. Шведова [7,8], Д. Ньюмана (D. J. Newman) [9], Р. К. Битсона (R. K. Beatson) и Д. Левиатана (D. Leviatan) [10], Г. Г. Лоренца и К. Л. Целлера [11] по комонотонной аппроксимации в 70-е и 80-е годы прошлого века. Обзор некоторых результатов теории формосохраняющего приближения можно найти в книгах [12–14], а также в статьях [15,16].

В последние 25 лет в этой области шли интенсивные исследования, появилось много новых результатов. Большинство из них касаются оценок величин наилучшего приближения функций различных классов алгебраическими или тригонометрическими полиномами с сохранением формы приближаемой функции. В настоящее время теория формосохраняющего приближения представляет собой сложившееся и актуальное направление теории приближения функций.

Интерес к теории формосохраняющего приближения вызван, прежде всего, тем, что ее результаты имеют множество приложений, большинство из которых связано с применением в компьютерном графическом дизайне (CAGD, computer-aided graphical design), для которого вопросы сохранения формы графических объектов являются существенными. В CAGD часто рассматривается задача создания поверхности тела сложной формы (например, фюзеляжа самолета, деталей двигателя, архитектурного сооружения) как дискретного набора точек. Чтобы представить тело, необходимо расположить эти точки на некоторой кривой или поверхности. Отсутствие непрерывности производной или смена знака производной первого или даже второго порядка заметны для человеческого глаза. По этой причине интерес представляет гладкое приближение, которое сохраняет форму данных. Сплайн-методы приближения, наследующие такие геометрические свойства, рассматривались, в частности, в работах [17–25]. Обзор результатов можно найти в книге [26].

К настоящему времени сложилось несколько основных направлений исследований в теории формосохраняющего приближения [12]:

1. Изучение формосохраняющих свойств интерполяционных полиномов (в алфавитном порядке: Б. И. Квасов, F. Deutch, S. Gal, W. J. Kammerer, K. Kopotun, G. G. Lorenz, M. G. Nikolcheva, E. Passow, T. Popoviciu, J. A. Roulier, Z. Rubinstein, J. Szabados, W. Wolibner, S. W. Young, K. L. Zeller и др.).
2. Исследование формосохраняющих свойств сплайнов (в алфавитном порядке: Ю. С. Волков, Б. И. Квасов, Ю. Н. Субботин, В. Т. Шевалдин, И. А. Шевчук, R. DeVore, K. Kopotun, D. Leviatan, A. Shadrin и др.).
3. Исследование формосохраняющих свойств полиномов типа полиномов Бернштейна (в алфавитном порядке: H. Berens, P. L. Butzer, J. M. Carnicer, W. Dahmen, M. M. Derrienic, R. DeVore, A. D. Gadzijev, T. N. T. Goodman, I. I. Ibragimov, L. M. Kocić, I. B. Lacković, C. A. Micchelli, F. J. Muñoz- Delgado, R. J. Nessel, V. Ramírez-González, I. Raşa, P. Sabloniére, D. D. Stancu, B. Wood и др.).
4. Результаты типа результатов Шиша. Метод основан на полиномах одновременного приближения функции и ее производных, при этом к ним прибавляются подходящие полиномы (равномерно стремящиеся к 0) таким образом, чтобы сумма сохраняла некоторые

знаки производных приближаемой функции (G. A. Anastassiou, J. A. Roulier, O. Shisha и др.).

5. Результаты типа результатов Коровкина. Получение условий сходимости последовательностей линейных формосохраняющих операторов, т.е. аналогов теоремы Коровкина об условиях сходимости последовательностей линейных положительных операторов к тождественному оператору (D. Cárdenas-Morales, H. Gonska, H.-B. Knoop, F. J. Muñoz-Delgado, P. Pottinger, V. Ramírez-González и др.).

Несмотря на успешное и активное развитие рассматриваемой области теории приближений, а также большое число публикаций по данной тематике, все еще отсутствует обзор результатов по линейному формосохраняющему приближению. Отметим также, что проблемы, связанные с количественными оценками скорости сходимости линейных формосохраняющих методов приближения, недостаточно освещены в специализированной литературе. В частности, оставался открытым вопрос о существовании эффекта «насыщения» для линейных методов, обладающих свойством формосохранения, а также о его количественной характеристике. Эта проблема впервые была сформулирована Р. ДеВором [27]. Данной работой мы попытаемся восполнить этот пробел. Класс всех k-выпуклых функций на $[0, 1]$ обозначим Δ^k. В настоящей работе мы рассмотрим ряд аппроксимативных свойств формосохраняющих линейных операторов L, сохраняющих k-выпуклость, т.е. таких, что $L(\Delta^k) \subset \Delta^k$. Для данного класса операторов мы приведем аналоги базовых свойств линейных положительных операторов, найдем оценки линейных относительных поперечников классов дифференцируемых функций, построим оптимальные конечномерные линейные операторы, для которых достигаются значения линейных относительных поперечников, покажем справедливость гипотезы Р. ДеВора о том, что для линейных конечномерных операторов, сохраняющих k-выпуклость, имеет место эффект «насыщения».

1 БАЗОВЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ФОРМОСОХРАНЯЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

1.1 Конус функций

Пусть X есть линейное нормированное пространство. Тот факт, что функция $f \in X$ обладает некоторыми свойствами формы, означает принадлежность элемента f некоторому конусу V в X (например, конусу монотонных или конусу выпуклых функций в $C[0,1]$). Если $f \in V$, то говорят, что f имеет форму в смысле конуса V.

Обозначим через $C^k[0,1]$, $k \geqslant 0$, пространство всех действительнозначных k раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $[0,1]$, с субнормой

$$\|f\|_{C^k[0,1]} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k} \frac{1}{i!} \sup_{x \in [0,1]} |D^i f(x)|, \tag{1.1}$$

где D^i означает оператор дифференцирования порядка i, $D^i f(x) = \dfrac{d^i f}{dx^i}$, и $D^0 = I$ есть тождественный оператор. Производные в (1.1) являются правосторонними в точке 0 и левосторонними в точке 1.

$B^k[0,1]$, $k \geqslant 0$ будет означать пространство всех действительнозначных функций, определенных на $[0,1]$, имеющих ограниченную производную порядка k, с субнормой (1.1). Обозначим $B[0,1]$ линейное подпространство всех функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, которые являются ограниченными, с нормой равномерной сходимости, определенной следующим образом:

$$\|f\|_{B[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad f \in B[0,1],$$

по отношению к которой $B[0,1]$ является банаховым пространством.

Символ $C[0,1]$ будет означать линейное подпространство всех непрерывных действительнозначных функций, определенных на [0,1].

Обозначим через Π_k линейное подпространство $C[0,1]$, порожденное системой функций $\{e_0, e_1, \ldots, e_k\}$, где $e_i(x) = x^i$, $i = 1, 2, \ldots$

Определение 1.1. Говорят, что функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ является k-выпуклой ($k \geqslant 1$) на $[0,1]$, если для произвольно выбранных $k+1$ различных точек $t_0, \ldots, t_k$ из $[0,1]$ имеет место неравенство

$$[t_0, \ldots, t_k] f \geqslant 0,$$

где $[t_0, \ldots, t_k] f$ означает разделенную разность порядка k функции f по узлам $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_k \leqslant 1$. Функция f является 0-выпуклой, если $f(t_0) \geqslant 0$ для произвольного $t_0 \in [0,1]$.

Таким образом, функция является 0-выпуклой, если она является неотрицательной на отрезке, 1-выпуклой в случае, если она является неубывающей, и 2-выпуклой, если она является выпуклой в обычном смысле. Отметим, что k-выпуклость для $k \geqslant 3$ на отрезке была впервые рассмотрена Э. Хопфом (E. Hopf) [28] в его диссертации, а затем глубоко изучена Т. Поповичу (T. Popoviciu) как в его диссертации [29], так и монографии [30].

Класс всех k-выпуклых функций на $[0,1]$ обозначим $\Delta^k[0,1]$. Если $f \in C^k[0,1]$, тогда $f \in \Delta^k[0,1]$ в том и только том случае, когда $f^{(k)}(t) \geqslant 0$, $t \in [0,1]$. Положим

$$\Delta^0[0,1] := \{f \in C[0,1] : \ f(t) \geqslant 0, \ t \in [0,1]\}.$$

Известно, что функция f является k-выпуклой ($k \geqslant 3$) на (0,1) в том и только в том случае, если ее производная $f^{(k-2)}$ существует и выпукла на (0,1). Этот факт был впервые доказан Э. Хопфом [28, с. 24] и Т. Поповичу [29, с. 48], см. также [31].

В следующем определении мы вводим конус, являющийся пересечением конусов выпуклых функций некоторых порядков, взятых с заданными знаками.

Определение 1.2. Пусть $0 \leqslant h \leqslant k$ есть два целых числа и пусть $\sigma = (\sigma_i)_{i=0}^k$ есть последовательность чисел такая, что $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$ и $\sigma_h \cdot \sigma_k \neq 0$. Обозначим

$$\Delta^{h,k}(\sigma) := \bigcap_{\substack{h \leqslant p \leqslant k \\ \sigma_p \neq 0}} \sigma_p \Delta^p[0,1] = \Big\{ f \in C[0,1] : \ \sigma_p f \in \Delta^p[0,1], \ h \leqslant p \leqslant k \Big\}.$$

Следующее утверждение выходит непосредственно из определения 1.2.

Утверждение 1.1. *Множество Δ^k (так же, как и множество $\Delta^{h,k}(\sigma)$) является замкнутым остроконечным коническим множеством с непустой внутренностью.*

1.2 Основные свойства линейных формосохраняющих операторов

В настоящем параграфе мы приводим некоторые базовые свойства линейных операторов, обладающих формосохраняющими свойствами относительно конуса k-выпуклых функций, а также конуса $\Delta^{h,k}(\sigma)$.

Сначала мы напомним хорошо известные свойства линейных положительных операторов и затем получим аналоги этих свойств для линейных формосохраняющих операторов.

1.2.1 Свойства положительных линейных операторов

Одним из наиболее изученных классов линейных операторов, обладающих свойствами формосохранения, являются положительные операторы.

Говорят, что линейный оператор $L : C[0,1] \to B[0,1]$ является положительным, если $Lf \geqslant 0$ для всякой $f \in C[0,1]$, $f \geqslant 0$.

Каждому линейному положительному оператору $L : C[0,1] \to B[0,1]$ соответствует семейство $(\mu_y)_{y\in[0,1]}$ положительных линейных функционалов, заданных на $C[0,1]$, определенных следующим образом:

$$\mu_y(f) := Lf(x),\ \ f \in C[0,1].$$

Ниже приведены хорошо известные основные свойства линейных положительных функционалов и операторов (см., например [32]).

Утверждение 1.2. *Если $L : C[0,1] \to B[0,1]$ есть линейный положительный оператор, тогда*

1) *(монотонность) для произвольных $f, g \in C[0,1]$ таких, что $f \leqslant g$, имеет место*
$$Lf \leqslant Lg;$$

2) *для всякой $f \in C[0,1]$*
$$|Lf| \leqslant L(|f|);$$

3) *(неравенство Коши – Шварца) для произвольных $f, g \in C[0,1]$ имеет место*
$$L(|fg|) \leqslant \sqrt{L(f^2)\cdot L(g^2)},$$
в частности $(L(|f|))^2 \leqslant L(e_0)\cdot L(f^2)$, где $e_0 \equiv 1$;

4) *L является непрерывным и $\|L\| = \|Le_0\|$.*

Таким образом, если $\mu : C[0,1] \to \mathbb{R}$ является линейным положительным функционалом, то μ — непрерывно и $\|\mu\| = \mu(e_0)$.

Классическими для класса положительных операторов являются результаты П. П. Коровкина. Им были найдены [33] условия сходимости последовательности линейных положительных операторов к тождественному оператору I в пространстве $C[0,1]$. Кроме того, П. П. Коровкин показал [34], что порядок приближения линейными положительными полиномиальными операторами порядка n не выше чем n^{-2} даже на системе из трех функций $1, x, x^2$.

Обозначим $e_j(t) = t^j$, $j = 0, 1, \ldots$, $\|\cdot\|$ означает равномерную норму, $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Теорема 1.1. *Пусть* $L_n : C[0,1] \to C[0,1]$, $n \geqslant 1$ *есть последовательность линейных операторов. Если*

1) $L_n(V_0) \subset V_0$, $n \geqslant 1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|(L_n - I)e_j\| = 0$, $j = 0, 1, 2$,

то

$$\lim_{n\to\infty} \|(L_n - I)f\| = 0$$

для всех $f \in C[0,1]$.

1.2.2 Свойства линейных формосохраняющих операторов

Основная цель п. 1.2.2 состоит в получении аналогов утверждения 1.2 и теоремы 1.1 для линейных операторов L, таких, что $L(\Delta^k) \subset \Delta^k$.

Нам потребуются вспомогательная лемма.

Лемма 1.1. *Пусть* $\Phi : C^k[0,1] \to \mathbb{R}$ *есть линейный функционал, обладающий следующим свойством:* $\Phi(f) \geqslant 0$ *для всякой функции* $f \in C^k[0,1]$ *такой, что* $f \in \Delta^k$. *Пусть* $\langle\cdot,\cdot\rangle : C^k[0,1] \times C^k[0,1] \to \mathbb{R}$ *означает бифункционал, порожденный функционалом* Φ *следующим образом: для произвольных* $f, g \in C^k[0,1]$ *мы полагаем* $\langle f, g\rangle = \Phi(\gamma)$, *где функция* $\gamma \in C^k[0,1]$ *такова, что* $D^k\gamma = D^k f D^k g$ *и* $D^i\gamma(0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. *Тогда*

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant [\langle f, f\rangle]^{\frac{1}{2}}[\langle g, g\rangle]^{\frac{1}{2}}, \quad f, g \in C^k[0,1]. \tag{1.2}$$

Доказательство. Из линейности функционала Φ следует, что бифункционал $\langle\cdot,\cdot\rangle$ является билинейным. Очевидно, что $\langle\cdot,\cdot\rangle$ также является коммутативным и неотрицательным бифункционалом (т. е. $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$ и $\langle f, f\rangle \geqslant 0$, $f, g \in C^k[0,1]$). Таким образом, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ есть скалярное произведение.

Имеем

$$0 \leqslant \langle f + cg, f + cg\rangle = \langle f, f\rangle + 2c\langle f, g\rangle + c^2\langle g, g\rangle$$

для произвольных $c \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^k[0,1]$. Если взять $c = -\langle f, g\rangle\langle g, g\rangle^{-1}$, то мы получим (1.2).

Если же $\langle g, g\rangle = 0$, то тогда будет $\langle f, g\rangle = 0$ и (1.2) выполнено. $\square$

Заметим, что если $f = g$, то мы имеем знак равенства в (1.2).

Приведем простейшие свойства линейных операторов $L : C^k[0,1] \to \to B^k[0,1]$ таких, что $L(\Delta^k) \subset \Delta^k$.

Утверждение 1.3. *Пусть $L : C^k[0,1] \to B^k[0,1]$ есть линейный оператор, такой что*

$$L(\Delta^k) \subset \Delta^k.$$

Тогда

1) *для произвольных $f, g \in C^k[0,1]$, $g - f \in \Delta^k$ справедливо неравенство*

$$D^k L f \leqslant D^k L g;$$

2) *для всякой $f \in C^k[0,1]$ имеет место неравенство*

$$|D^k L f| \leqslant \sigma_k D^k L \varphi,$$

где $\varphi \in C^k[0,1]$ определена так, что $D^k\varphi = \sigma_k |D^k f|$, где $D^i\varphi(0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$;

3) *для произвольных $f, g \in C^k[0,1]$ справедливо неравенство*

$$|D^k L\varphi| \leqslant \sqrt{D^k L\varphi_1 \cdot D^k L\varphi_2}, \tag{1.3}$$

где $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in C^k[0,1]$ определены так, что $D^k\varphi = D^k f \cdot D^k g$, $D^k\varphi_1 = (D^k f)^2$, $D^k\varphi_2 = (D^k g)^2$, $D^i\varphi(0) = D^i\varphi_1(0) = D^i\varphi_2(0) = 0$, $i = 0, \ldots, k-1$;

4) *оператор $D^k L : C^k[0,1] \to B[0,1]$ является непрерывным и*

$$\|D^k L\| = \|D^k L e_k\|. \tag{1.4}$$

Доказательство. 1. «Монотонность» следует непосредственно из свойства формосохранения оператора.

2. Из того, что $\varphi - f, \varphi + f \in \Delta^k$, следует, что $L(\varphi - f) \in \Delta^k$ и $L(\varphi + f) \in \Delta^k$. Таким образом, как $\sigma_k(D^k L\varphi - D^k L f) \geqslant 0$, так и $\sigma_k(D^k L\varphi + D^k L f) \geqslant 0$, т.е $|D^k L f| \leqslant D^k L\varphi$.

3. Возьмем $x \in [0,1]$ и определим линейный функционал Φ_x: $C^k[0,1] \to \mathbb{R}$ следующим образом: $\Phi_x(f) = D^k Lf(x)$, $f \in C^k[0,1]$. Очевидно, что $\Phi_x(f) \geqslant 0$ для всех $f \in \Delta^k$. Тогда (1.3) следует из утверждения леммы 1.1.

4. Мы имеем

$$\|D^k L\| := \sup_{\|f\|_{C^k[0,1]} \leqslant 1} \|D^k Lf\|_\infty,$$

где $\|\cdot\|_{C^k[0,1]}$ определена соотношением (1.1). Для всякой $f \in C^k[0,1]$ такой, что $\|f\|_{C^k[0,1]} \leqslant 1$, мы имеем

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant k} \frac{1}{i!} |D^i f(x)| \leqslant 1 = \frac{1}{k!} D^k e_k(x),$$

следовательно,

$$|D^k f(x)| \leqslant D^k e_k(x). \tag{1.5}$$

Из (1.5) получается, что $|D^k Lf(x)| \leqslant D^k Le_k(x)$ для всех $x \in [0,1]$. Таким образом,

$$\|D^k Lf\|_{B[0,1]} \leqslant \|D^k Le_k\|_{B[0,1]} \tag{1.6}$$

для всех $f \in C^k[0,1]$, таких, что $\|f\|_{C^k[0,1]} \leqslant 1$. Из (1.6) следует, что

$$\|D^k L\|_{B[0,1]} \leqslant \|D^k Le_k\|_{B[0,1]}.$$

С другой стороны, так как $\|e_k\|_{C^k[0,1]} \leqslant 1$, мы имеем

$$\sup_{\|f\|_{C^k[0,1]} \leqslant 1} \|D^k Lf\|_\infty \geqslant \|D^k Le_k\|_{B[0,1]},$$

и соотношение (1.4) справедливо. Из ограниченности величины $\|D^k L\|$ следует, что оператор $D^k L : C^k[0,1] \to B[0,1]$ является непрерывным. □

Нам потребуется также следующий результат.

Пусть $\Delta^{h,k}(\sigma)$ — конус. Для $i \in \{h, \ldots, k-1\}$ обозначим $s(i) := \min\{s > i : \sigma_s \neq 0\}$.

Лемма 1.2. *Пусть $\Phi : C^k[0,1] \to \mathbb{R}$ есть линейный функционал, обладающий следующим свойством: $\Phi(f) \geqslant 0$ для всякой функции $f \in \Delta^{h,k}(\sigma)$. Пусть $\gamma \geqslant 1$ есть фиксированное число. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle : C^k[0,1] \times C^k[0,1] \to \mathbb{R}$ есть бифункционал, порожденный функционалом Φ следующим образом: для произвольных функций $f, g \in C^k[0,1]$ мы полагаем $\langle f, g \rangle = \Phi(\nu)$, где $\nu \in C^k[0,1]$ выбирается таким образом, чтобы*

1) $D^k\nu = \sigma_k\, D^k f\, D^k g$;

2) *для* $i \leqslant k-1$*:*

$$D^i\nu(0) = \begin{cases} 0, \text{ если } \sigma_i = 0; \\ 0, \text{ если } \sigma_i \neq 0 \text{ и } \sigma_i = \sigma_{s(i)}; \\ -\gamma \int\limits_0^1 D^{i+1}\nu(z)dz, \text{ если } \sigma_i \neq 0 \text{ и } \sigma_i = -\sigma_{s(i)}. \end{cases}$$

Тогда

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant [\langle f, f\rangle]^{\frac{1}{2}}[\langle g, g\rangle]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.7}$$

для всех $f, g \in C^k[0,1]$.

Доказательство. Из линейности функционала Φ следует, что бифункционал $\langle\cdot,\cdot\rangle$ является билинейным функционалом. Очевидно, что $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — коммутативный, т. е. $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$, $f, g \in C^k[0,1]$. Кроме того, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ является неотрицательным, т. е. $\langle f, f\rangle \geqslant 0$ для всех $f \in C^k[0,1]$. Действительно, мы имеем $\langle f, f\rangle = \Phi(\nu)$, где $\nu \in C^k[0,1]$ удовлетворяет условиям 1), 2) при $g = f$.

Далее мы проверим по индукции, что

$$\nu \in \Delta^{h,k}(\sigma),$$

т. е. $\sigma_i D^i\nu \geqslant 0$, $i = h, \ldots, k$. Имеем

$$D^k\nu = \sigma_k (D^k f)^2, \quad \text{т. е.} \quad \sigma_k D^k\nu \geqslant 0.$$

Предположим (по индукции), что для некоторого $i \geqslant h+1$ выполнены неравенства

$$\sigma_l D^l\nu \geqslant 0, \quad l = i+1, \ldots, k.$$

Рассмотрим три отдельных случая.

1. Если $\sigma_i = 0$, то

$$D^i\nu(t) = \int\limits_0^t D^{i+1}\nu(z)\, dz + D^i\nu(0), \tag{1.8}$$

и так как $D^i\nu(0) = 0$, мы имеем $\operatorname{sgn} D^i\nu = \operatorname{sgn} D^{i+1}\nu$.

2. Если $\sigma_i \neq 0$ и $\sigma_i = \sigma_{s(i)}$, тогда из (1.8) следует, что $\operatorname{sgn} D^i\nu = \operatorname{sgn} D^{i+1}\nu = \ldots = \operatorname{sgn} D^{s(i)}\nu = \sigma_i$.

3. Если $\sigma_i \neq 0$ и $\sigma_i = -\sigma_{s(i)}$, тогда $\operatorname{sgn} D^{i+1}\nu = \sigma_{s(i)}$ и

$$D^i\nu(t) = \int\limits_0^t D^{i+1}\nu(z)\,dz + D^i\nu(0) = \int\limits_0^t D^{i+1}\nu(z)\,dz - \gamma \int\limits_0^1 D^{i+1}\nu(z)\,dz =$$

$$= -\int\limits_t^1 D^{i+1}\nu(z)\,dz + (1-\gamma)\int\limits_0^1 D^{i+1}\nu(z)\,dz =$$

$$= \sigma_i \int_t^1 \sigma_{s(i)} D^{i+1}\nu(z)dz + (\gamma - 1)\sigma_i \int_0^1 \sigma_{s(i)} D^{i+1}\nu(z)dz,$$

следовательно, $\sigma_i D^i\nu \geqslant 0$.

Мы имеем

$$0 \leqslant \langle f + cg, f + cg\rangle = \langle f, f\rangle + 2c\langle f, g\rangle + c^2\langle g, g\rangle$$

для всех $c \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^k[0,1]$. Если мы возьмем $c = -\langle f, g\rangle\langle g, g\rangle^{-1}$, то получим (1.7). Если $\langle g, g\rangle = 0$, то $\langle f, g\rangle = 0$ для всех $f \in C^k[0,1]$ и (1.7) имеет место. $\square$

Другое важное направление в рассматриваемой области связано с получением качественных результатов, развивающих идеи П. П. Коровкина для случая линейного формосохраняющего приближения. Ряд работ (в частности, работы [35–38] и др.) посвящен данной проблематике.

Справедлива следующая теорема типа теоремы Коровкина.

Теорема 1.2. *Пусть $L_n : C^k[0,1] \to C^k[0,1]$, $n \geqslant 1$ есть последовательность линейных операторов. Если*

1) $L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|D^k - D^k(L_n e_j)\| = 0$, $j = k, k+1, k+2$,

то

$$\lim_{n\to\infty} \|D^k - D^k(L_n f)\| = 0$$

для всех $f \in C^k[0,1]$.

Мы приведем доказательство более общего результата.

Ф. Х. Муньос-Дельгадо (F. J. Muñoz-Delgado), В. Рамирес-Гонсалес (V. Ramírez-González) и Д. Карденас-Моралес (D. Cárdenas-Morales) установили [38] следующий результат типа Коровкина для последовательностей линейных формосохраняющих операторов.

Теорема 1.3. *Пусть $\Delta^{h,k}(\sigma)$ — конус. Пусть $L_n : C^k[0,1] \to C^k[0,1]$, $n \geqslant 1$ есть последовательность линейных операторов. Если*

1) $L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \sigma_k \Delta^k$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|D^k - D^k(L_n e_j)\| = 0$, $j = h, \ldots, k+2$,

то

$$\lim_{n\to\infty} \|D^k - D^k(L_n f)\| = 0$$

для всех $f \in C^k[0,1]$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1.3, докажем следующее вспомогательное утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Пусть X — компактное подмножество R^m, R^X — пространство всех действительнозначных функций, определенных на X. Пусть B есть подмножество R^X, A — подпространство $C(X)$, $A \subset B$. Пусть $L : B \to R^X$ — линейный оператор такой, что $L(A) \subset C(X)$.

Лемма 1.3. *Пусть $P = \{f \in B : Lf \geqslant 0\}$ и пусть V есть конус в A. Пусть U — подпространство A, удовлетворяющее следующим свойствам:*

1) *найдется $u \in U$ такая, что $Lu(x) = 1$ для всех $x \in X$;*

2) *для любой точки $z \in [0,1]$ существует функция $\phi_z \in V \cap U$ такая, что*

   а) $L\phi_z(z) = 0 < L\phi_z(x)$ для всех $x \in [0,1] \setminus z$;

   б) $\forall\ f \in A$, $\exists\ \alpha = \alpha(f) > 0$: $\beta > \alpha \Rightarrow \beta\phi_z + f \in V$.

Пусть $\{K_n\}_{n\geqslant 1}$, $K_n : A \to B$ есть последовательность линейных операторов, удовлетворяющих следующим свойствам:

1) *$K_n(P \cap V) \subset P$, $n \geqslant 1$;*

2) *для всякой $f \in U$, $L(K_n f)$ сходится равномерно к Lf при $n \to \infty$.*

Тогда для любой $f \in A$, $L(K_n f)$ сходится равномерно к Lf при $n \to \infty$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $f \in A$. Так как функция Lf непрерывна и множество X компактно, найдется такая константа $M > 0$, что

$$-M < Lf(x) - Lf(y) < M, \quad \forall\, x, y \in X. \tag{1.9}$$

Для фиксированных $z \in X$ и $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(z) > 0$ такое, что если $x \in B(z, \delta) := \{x \in X : \ |z - x| < \delta\}$, то

$$-\frac{\varepsilon}{3} < Lf(x) - Lf(z) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.10}$$

По условиям леммы существует функция $\phi_z \in V \cap U$ такая, что

а) $L\phi_z(z) = 0 < L\phi_z(x)$ для всех $x \in [0,1] \setminus z$;

б) $\forall\, f \in A$, $\exists\, \alpha = \alpha(f) > 0$: $\beta > \alpha \Rightarrow \beta\phi_z + f \in V$.

Обозначим M_δ минимальное значение функции $L\phi_z$ на $X \setminus B(z, \delta)$.

Тогда из соотношений (1.9) и (1.10) следует

$$-\frac{\varepsilon}{3} - L\phi_z(x)\frac{M\beta}{M_\delta} < Lf(x) - Lf(z) < \frac{\varepsilon}{3} + L\phi_z(x)\frac{M\beta}{M_\delta} \tag{1.11}$$

для всех $x \in X$, $\beta > 1$.

По условию леммы можно взять достаточно большое β таким образом, чтобы

$$\frac{M\beta}{M_\delta}\phi_z + \frac{\varepsilon}{3}u + Lf(z)u \in V$$

и

$$\frac{M\beta}{M_\delta}\phi_z + \frac{\varepsilon}{3}u - Lf(z)u \in V.$$

Из соотношения (1.11) следует, что эти функции также принадлежат P. По условию леммы $K_n(P \cap V) \subset P$ для $n \geqslant 1$, поэтому образы этих функции при отображении K_n также принадлежат P для всех $n \geqslant 1$. Значит,

$$-\frac{\varepsilon}{3}L(K_n u)(x) - \frac{M\beta}{M_\delta}L(K_n\phi_z)(x) < L(K_n f)(x) - Lf(z)L(K_n u)(x) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3}L(K_n u)(x) + \frac{M\beta}{M_\delta}L(K_n\phi_z)(x)$$

для всех $x \in X$, или

$$L(K_n f)(x) \leqslant Lf(z)L(K_n u)(x) + \frac{\varepsilon}{3}L(K_n u)(x) +$$

$$+\frac{M\beta}{M_\delta}L(K_n\phi_z)(x), \quad x \in X \tag{1.12}$$

и

$$L(K_nf)(x) \geqslant Lf(z)L(K_nu)(x) - \frac{\varepsilon}{3}L(K_nu)(x) - \\ -\frac{M\beta}{M_\delta}L(K_n\phi_z)(x), \quad x \in X. \tag{1.13}$$

Так как по условию леммы для всякой $f \in U$, $L(K_nf)$ сходится равномерно к Lf при $n \to \infty$, найдется такое число $N(\varepsilon, z)$, что если $n \geqslant N(\varepsilon, z)$, то

$$-\frac{\varepsilon/9}{\varepsilon/3 + |Lf(z)|} + 1 < L(K_nu)(x) < \frac{\varepsilon/9}{\varepsilon/3 + |Lf(z)|} + 1, \ \forall\, x \in X, \tag{1.14}$$

и

$$-\frac{(\varepsilon/9)M_\delta}{M\beta} + L\phi_z(x) < L(K_n\phi_z)(x) < \frac{(\varepsilon/9)M_\delta}{M\beta} + L\phi_z(x), \ \forall\, x \in X. \tag{1.15}$$

Тогда из соотношений (1.12), (1.14), (1.15) при $n \geqslant N(\varepsilon, z)$ имеем

$$L(K_nf)(x) < \frac{|Lf(z)|(\varepsilon/9)}{\varepsilon/3 + |Lf(z)|} + Lf(z) + \frac{(\varepsilon/3)(\varepsilon/9)}{\varepsilon/3 + |Lf(z)|} + \frac{\varepsilon}{3} + \\ +\frac{M\beta}{M_\delta}\left(L\phi_z(x) + \frac{(\varepsilon/9)M_\delta}{M\beta}\right) = \frac{\varepsilon}{9} + Lf(z) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{9} + \frac{M\beta}{M_\delta}L\phi_z(x) = \\ = \frac{2\varepsilon}{9} + Lf(z) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{M\beta}{M_\delta}L\phi_z(x), \quad \forall\, x \in X. \tag{1.16}$$

Из соотношений (1.13)–(1.15) при $n \geqslant N(\varepsilon, z)$ имеем

$$L(K_nf)(x) > -\frac{(\varepsilon/3)(\varepsilon/9)}{\varepsilon/3 + |Lf(z)|} - \frac{|Lf(z)|(\varepsilon/9)}{\varepsilon/3 + |Lf(z)|} - \frac{\varepsilon}{3} + Lf(z) - \\ -\frac{M\beta}{M_\delta}\left(L\phi_z(x) + \frac{(\varepsilon/9)M_\delta}{M\beta}\right) = -\frac{\varepsilon}{9} - \frac{\varepsilon}{3} + Lf(z) - \frac{\varepsilon}{9} - \frac{M\beta}{M_\delta}L\phi_z(x) = \\ = -\frac{2\varepsilon}{9} + Lf(z) - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{M\beta}{M_\delta}L\phi_z(x), \quad \forall\, x \in X. \tag{1.17}$$

С другой стороны, в силу непрерывности $L\phi_z$ существует число $\delta_z > 0$, $\delta_z < \delta = \delta(z)$ такое, что если $x \in B(z, \delta_z)$, то

$$L\phi_z(x) < \frac{(\varepsilon/9)M_\delta}{M\beta}. \tag{1.18}$$

Таким образом, с учетом (1.16), (1.17), (1.18), если $x \in B(z, \delta_z)$ и $n \geqslant N(\varepsilon, z)$, будем иметь

$$|L(K_n f)(x) - Lf(z)| < \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{1.19}$$

Итак, с учетом (1.10), (1.19) мы показали, что для любого $\varepsilon > 0$ и $z \in X$ найдутся положительное целое число $N(\varepsilon, z)$ и число $\delta_z > 0$ такие, что если $n \geqslant N(\varepsilon, z)$ и $x \in B(z, \delta_z)$, то

$$|L(K_n f)(x) - Lf(z)| < \varepsilon.$$

Семейство $\{B(z, \delta_z) : \ z \in X\}$ открытых подмножеств множества X есть открытое покрытие X. Так как X есть компакт, существует конечное подмножество J множества X, такое, что $\{B(z, \delta_z) : \ z \in J\}$ – конечное подпокрытие X. Если выбрать $N = \max\{N(\varepsilon, z) : \ z \in J\}$, то для любой точки $x \in X$ найдется $z \in J$ такое, что $x \in B(z, \delta_z)$. Следовательно, если $n > N$, то $|L(K_n f)(x) - Lf(z)| < \varepsilon$. □

Докажем теперь теорему 1.3 с использованием леммы 1.3.

Доказательство. Положим $\sigma^{(j)} = \{\sigma_i^{(j)}\}_{i \geqslant 0}$, где $\sigma_i^{(j)} = \sigma_i$, если $i \neq j$ и $\sigma_j^{(j)} = 0$. Пусть L будет оператором D^k, $A = B = C^k[0,1]$, $V = \Delta^{h,k}(\sigma^{(k)})$, $U = \operatorname{span}\{e_h, \ldots, e_{k+2}\}$, $P = \sigma_k \Delta^k$, $P \cap V = \Delta^{h,k}(\sigma)$.

Обозначим $u = (1/k!)\sigma_k e_k$. Для произвольной точки $z \in [0,1]$ определим ϕ_z следующим образом:

1) $D^k \phi_z(x) = \sigma_k (x - z)^2, \ \ x \in [0,1]$;

2) $D^i \phi_z(0) = \sigma_i (1 + \beta_i), \ \ \beta_i \geqslant \|D^{i+1}\phi_z\|$ для $i = k-1, k-2, \ldots, h$.

Легко видеть, что условия леммы 1.3 выполнены. В самом деле, если $h \leqslant i \leqslant k-1$ и $\sigma_i \neq 0$, то

$$\sigma_i D^i \phi_z(x) = \sigma_i D^i \phi_z(0) + \sigma_i \int_0^x D^{i+1}\phi_z(t)dt \geqslant \sigma_i D^i \phi_z(0) - \beta_i \geqslant 1$$

для всех $x \in [0,1]$. Следовательно, $\phi_z \in V$.

Остальные условия леммы легко проверяются. □

2 ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ФОРМОСОХРАНЯЮЩЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

2.1 Линейные операторы, сохраняющие k-выпуклость

2.1.1 Операторы Бернштейна

В работе Т. Поповичу [2] показывается, что многочлены Бернштейна

$$B_n f(x) := \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$$

сохраняют выпуклость любого порядка на [0,1]. Вместе с тем, порядок приближения операторами Бернштейна не является высоким. Так, в 1932 году Е. В. Вороновская [39] доказала, что для $f \in C^2[0,1]$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} n(B_n f(x) - f(x)) = \frac{x(1-x)}{2} D^2 f(x).$$

Этот результат показывает, что если f дважды дифференцируема, то асимптотический порядок приближения функции f операторами Бернштейна не может быть выше n^{-1}. Аналогичный результат имеет место и при приближении оператора дифференцирования порядка k. В частности, М. Флоатер установил следующий результат [40].

Утверждение 2.1. *Если $f \in C^{k+2}[0,1]$ для некоторого $k \geqslant 0$, то*

$$|D^k(I - B_n) f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2n} \big(k(k-1)\|D^k f\| + k|1-2x| \, \|D^{k+1} f\| + x(1-x)\|D^{k+2}\|\big)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} n(D^k(B_n - I) f(x)) = \frac{1}{2} \frac{d^k}{dx^k} \{x(1-x) D^2 f(x)\}$$

равномерно для $x \in [0,1]$.

В связи с этим представляет интерес задача поиска конструкций линейных операторов конечного ранга, сохраняющих свойство выпуклости заданного порядка и обладающих более высоким порядком приближения как функции, так и ее производных.

2.1.2 Конструкции операторов, использующих значения производных функции в узлах сетки

Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant k+2$, $z_j = j/n$, $j = 0, 1, \ldots, n$, и определим линейный оператор $\Lambda_{k,n} : C^k[0,1] \to C^k[0,1]$ по шагам слева направо следующим образом [41]:

$$\Lambda_{k,n} f(x) = \sum_{l=0}^{k} \frac{D^l f(0)}{l!} x^l + \frac{n x^{k+1}}{(k+1)!} \left[D^k f(z_1) - D^k f(0) \right], \quad x \in [0, z_1], \tag{2.1}$$

$$\Lambda_{k,n} f(x) = \sum_{l=0}^{k} \frac{D^l \Lambda_{k,n} f(z_j)}{l!} (x - z_j)^l + \frac{n (x - z_j)^{k+1}}{(k+1)!} \times$$
$$\times \left[D^k f(z_{j+1}) - D^k f(z_j) \right], \quad x \in (z_j, z_{j+1}], \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. $\Lambda_{k,n} : C^k[0,1] \to C^k[0,1]$ *есть непрерывный линейный оператор конечного ранга* $n+1$ *такой, что*

1) $\Lambda_{k,n}(\Delta^k) \subset \Delta^k$*;*

2) *существует число* $0 < c \leqslant 2^{k-3}/k!$*, не зависящее от* n *такое, что*

$$\sup_{f \in B_\infty^{(k+2)} \cap \Delta^k} \|\Lambda_{k,n} f - f\|_{C^k[0,1]} \leqslant c n^{-2}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Так как $D^k(\Lambda_{k,n} f)$ есть кусочно-линейная функция на [0,1] с точками перелома $\{(z_j, D^k f(z_j))\}_{j=0,\ldots,n}$, то для всякой $f \in C^k[0,1]$ такой, что $D^k f \geqslant 0$, будет выполнено неравенство $D^k(\Lambda_{k,n} f) \geqslant 0$, т. е. $\Lambda_{k,n}(\Delta^k) \subset \Delta^k$.

Обозначим $e_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \ldots$ Легко проверить, что $\Lambda_{k,n} e_p = e_p$ для всех $p = 0, 1, \ldots, k+1$, и если $x \in [z_j, z_{j+1})$ для некоторого $0 \leqslant j \leqslant n-1$, то

$$(D^k(\Lambda_{k,n} e_{k+2}) - D^k e_{k+2})(x) = (k+2)! \, (z_{j+1} - x)(x - z_j)/2.$$

Пусть f есть функция из $B_\infty^{(k+2)} \cap \Delta^k$. Пусть $x \in [z_j, z_{j+1}]$. Тогда $D^k f \in W_\infty^{(2)}[0,1]$ может быть представлена как

$$D^k f(x) = D^k f(z_j) + \frac{D^{k+1} f(z_j)}{1!} (x - z_j) + \int_{z_j}^{1} (x - t)_+ D^{k+2} f(t) \, dt, \tag{2.4}$$

где $y_+ := \max\{y, 0\}$. Аналогично, если $x \in [z_j, z_{j+1}]$, то

$$D^k(\Lambda_{k,n} f)(x) = D^k(\Lambda_{k,n} f)(z_j) +$$

$$+\frac{D_+^{k+1}\Lambda_{k,n}f\left(z_j\right)}{1!}\left(x-z_j\right)+\int_{z_j}^{1}(x-t)_+D^{k+2}\Lambda_{k,n}f(t)dt, \qquad (2.5)$$

где $D_+^{k+1}\Lambda_{k,n}f(z_j)$ означает правостороннюю производную функции $D^k\Lambda_{k,n}f$, взятую в точке z_j. Из (2.4) и (2.5) следует, что если $x\in[z_j,z_{j+1}]$, то

$$\left(D^k(\Lambda_{k,n}f)-D^kf\right)(x)=\left(x-z_j\right)\Big[n\left(D^kf\left(z_{j+1}\right)-D^kf\left(z_j\right)\right)-$$
$$-D^{k+1}f\left(z_j\right)\Big]-\int_{z_j}^{1}\left(x-t\right)_+D^{k+2}f(t)\,dt=$$
$$=\int_{z_j}^{1}\left(n\left(x-z_j\right)\left(z_{j+1}-t\right)_+-\left(x-t\right)_+\right)D^{k+2}f(t)dt.$$

Так как $\|D^{k+2}f\|_\infty\leqslant 1$, мы получаем

$$\sup_{x\in[z_j,z_j]}\left|D^k(\Lambda_{k,n}f)(x)-D^kf(x)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{x\in[0,\frac{1}{n}]}\int_0^{\frac{1}{n}}\left|nx\left(\frac{1}{n}-t\right)_+-\left(x-t\right)_+\right|dt\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{x\in[0,\frac{1}{n}]}\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{n}-x\right)=\frac{1}{8n^2}. \qquad (2.6)$$

Из (2.1.2) следует, что

$$\left|D^k(\Lambda_{k,n}f)(x)-D^kf(x)\right|\leqslant\frac{1}{8n^2}$$

для каждого $x\in[0,1]$. Так как $D^i(\Lambda_{k,n}f-f)(0)=0$ для всех $i=0,\ldots,k$, мы получаем по индукции для $i=k-1,\ldots,0$ и $x\in[0,1]$

$$|D^i(\Lambda_{k,n}f-f)(x)|=\left|D^i(\Lambda_{k,n}f-f)(0)+\int_0^x D^{i+1}(\Lambda_{k,n}f-f)(t)\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{8n^2}\frac{x^{k-i}}{(k-i)!}. \qquad (2.7)$$

Мы использовали тот факт, что если $g\in C[0,1]$ и существует константа $a\in\mathbb{R}$ такая, что $|g|\leqslant a$ на [0,1], то

$$0\leqslant\int_0^x\int_0^{t_{p-1}}\ldots\int_0^{t_1}|g(t_1)|dt_1\ldots dt_p\leqslant a\frac{x^p}{p!}$$

для всех $p\in\mathbb{N}$.

Тогда (2.1.2) влечет

$$\|D^i(\Lambda_{k,n}f) - D^i f\|_{C[0,1]} \leqslant \frac{1}{8n^2}\frac{1}{(k-i)!},$$

утверждение леммы доказано. При этом

$$c \leqslant \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!(k-i)!} = \frac{2^{k-3}}{k!}.$$

□

Заметим, что линейный оператор $\Lambda_{k,n}$, определенный в (2.1) и (2.2), есть минимальная формосохраняющая проекция [42] на первом интервале $[0, 1/n]$, которая далее гладко продолжается на последующие интервалы.

2.1.3 Конструкции операторов, использующих значения функции в узлах сетки

Представим пример линейного конечномерного метода аппроксимации [43], который сохраняет k-выпуклость приближаемых функций и использует значения функции в равноудаленных точках на [0,1] (а не значения производных функции как в определении (2.1)–(2.2) оператора $\Lambda_{k,n}$).

Пусть $\mathscr{D}_l(f; z, h)$ означает центрально-симметричную разделенную разность, вычисляемую по точкам $z \pm jh$, $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, приближающую производную порядка l функции f с точностью второго порядка, т. е.

$$\mathscr{D}_0(f; z, h) = f(z),$$

$$\mathscr{D}_1(f; z, h) = (f(z+h) - f(z-h))/(2h),$$

$$\mathscr{D}_2(f; z, h) = (f(z+h) - 2f(z) + f(z-h))/(h^2),$$

$$\mathscr{D}_3(f; z, h) = (f(z+2h) - 2f(z+h) + 2f(z-h) - f(z-2h))/(2h^3),$$

$$\mathscr{D}_4(f; z, h) = (f(z+2h) - 4f(z+h) + 6f(z) - 4f(z-h) + f(z-2h))/(h^4)$$

и т. д.

Обозначим $B^{(k+2)} := \{f \in C^{k+2}[0,1] : \ \|f\|_{C^{k+2}[0,1]} \leqslant 1\}$. Известно, что существуют числа $a_r > 0$, $r = 0, 1, \ldots, k$, такие, что для всякой $f \in B^{(k+2)}$ имеет место

$$|D^r f(z) - \mathscr{D}_r(f; z, h)| \leqslant a_r h^2, \ r = 0, 1, \ldots, k. \qquad (2.8)$$

Пример (k четное). В этом параграфе мы будем полагать, что k является четным, т. е. $k = 2p$, $p \in \{1, 2, \ldots\}$. Пусть $z_j := j/n$, $j = 0, \ldots, n$.

Определим линейный оператор $M_{k,n} : C^k[0,1] \to C^k[0,1]$, $n \geqslant k+1$ следующим образом:

1) в точке $x = z_p$:

$$D^l M_{k,n} f(z_p) = \mathscr{D}_l(f; z_p, 1/n), \; l = 0, 1, \ldots, k-1; \tag{2.9}$$

2) по шагам слева направо:

$$M_{k,n} f(x) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!}(x - z_j)^l D^l M_{k,n} f(z_j) + (x - z_j)^k [z_{j-p}, \ldots, z_{j+p}] f + \\ + (x - z_j)^{k+1} [z_{j-p}, \ldots, z_{j+p+1}] f, \; x \in (z_j, z_{j+1}], \; j = p, \ldots, n - p - 1. \tag{2.10}$$

$$M_{k,n} f(x) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!}(x - z_j)^l D^l M_{k,n} f(z_j) + (x - z_j)^k [z_{n-k-1}, z_{n-k}, \ldots, z_{n-1}] f + \\ + (x - z_j)^{k+1} [z_{n-k-1}, \ldots, z_n] f, \; x \in (z_j, z_{j+1}], \; j = n - p, \ldots, n - 1. \tag{2.11}$$

3) по шагам справа налево:

$$M_{k,n} f(x) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!}(x - z_j)^l D^l M_{k,n} f(z_j) + (x - z_j)^k [z_0, z_{j+1}, \ldots, z_k] f + \\ + (x - z_j)^{k+1} [z_0, z_2, \ldots, z_{k+1}] f, \quad x \in [z_{j-1}, z_j), \quad j = p, p-1, \ldots, 1. \tag{2.12}$$

Пример (случай $k = 2p+1$). Полагаем, что k является нечетным, т. е. $k = 2p+1$, $p \in \{1, 2, \ldots\}$. Пусть $z_j := j/n$, $j = 0, \ldots, n$. Обозначим $x_j = z_j - \frac{1}{2n}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$. Определим линейный оператор $M_{k,n} : C^k[0,1] \to C^k[0,1]$, $n \geqslant k+1$ следующим образом:

1) в точке $x = z_{p+1}$:

$$D^l M_{k,n} f(z_{p+1}) = \mathscr{D}_l(f; z_{p+1}, 1/n), \quad l = 0, 1, \ldots, k-1; \tag{2.13}$$

2) по шагам слева направо:

$$M_{k,n} f(x) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!}(x - z_{p+1})^l D^l M_{k,n} f(z_{p+1}) + (x - z_{p+1})^k [z_0, \ldots, z_{2p+1}] f + \\ + (x - z_{p+1})^{k+1} [z_0, \ldots, z_{2p+2}] f, \quad \text{если} \quad x \in [x_{p+1}, x_{p+2}], \tag{2.14}$$

$$M_{k,n}f(x) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!}(x-x_j)^l D^l M_{k,n} f(x_j) + (x-x_j)^k [z_{j-p-1}, \dots, z_{j+p}]f +$$
$$+ (x-x_j)^{k+1} [z_{j-p-1}, \dots, z_{j+p+1}]f,$$
$$x \in (x_j, x_{j+1}], \quad j = p+2, \dots, n-p-1, \tag{2.15}$$
$$M_{k,n}f(x) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!}(x-x_j)^l D^l M_{k,n} f(x_j) +$$
$$+(x-x_j)^k [z_{n-k-1}, z_{n-k}, \dots, z_{n-1}]f + (x-x_j)^{k+1} [z_{n-k-1}, \dots, z_n]f,$$
$$x \in (x_j, x_{j+1}], \quad j = n-p, \dots, n. \tag{2.16}$$

3) по шагам справа налево:

$$M_{k,n}f(x) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!}(x-x_j)^l D^l M_{k,n} f(x_j) + (x-x_j)^k [z_0, z_1, \dots, z_k]f +$$
$$+ (x-x_j)^{k+1} [z_0, z_2, \dots, z_{k+1}]f,$$
$$x \in [x_{j-1}, x_j), \quad j = p+1, p, \dots, 1. \tag{2.17}$$

Аппроксимативные свойства $M_{k,n}$. Здесь мы приведем свойства оператора $M_{k,n} : C^k[0,1] \to C^k[0,1]$, определенного соотношениями (2.21)–(2.24), если k четное, и соотношениями (2.13)–(2.17), если k нечетное.

Лемма 2.2. *Пусть $n-1 > k \geqslant 2$. Тогда $M_{k,n}(\Delta^k) \subset \Delta^k$.*

Доказательство. Мы приведем доказательство для случая $k = 2p$. Случай $k = 2p+1$ доказывается аналогично. Обозначим

$$\phi_c^{k-1}(x) := \begin{cases} 0, \text{ если } x \in [0, c); \\ (x-c)^{k-1}, \text{ если } x \in [c, 1]. \end{cases}$$

Для того чтобы доказать, что $M_{k,n}f$ сохраняет k-выпуклость, мы будем использовать хорошо известный результат Й. Цимбаларио (J. Tzimbalario) [44], который утверждает, что если $L : C[0,1] \to C[0,1]$ есть линейный непрерывный оператор, тогда необходимыми и достаточными условиями для импликации $f \in \Delta^k \Rightarrow Lf \in \Delta^k$ являются следующие условия:

1) если p есть алгебраический полином степени $\leqslant k-1$, то Lp также алгебраический полином степени $\leqslant k-1$;
2) $L\phi_c^{k-1} \in \Delta^k[0,1]$ для каждого $c \in [0,1]$.

Непосредственная проверка показывает, что $D^l M_{k,n} e_s(z_p) = D^l e_s(z_p)$, $l = 0, 1, \ldots, k-1$ для всех $s = 0, 1, \ldots, k-1$.

Если $x \in [z_p, z_{p+1}]$, то для всех $s = 0, 1, \ldots, k-1$ мы получим

$$M_{k,n} e_s(x) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!}(x - z_p)^l D^l M_{k,n} e_s(z_p) = \sum_{l=0}^{s} \frac{1}{l!}(x - z_p)^l D^l e_s(z_p) = e_s(x),$$

поскольку все разделенные разности функции e_s порядка $\geqslant s+1$ равны 0.

Пусть $s \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, предположим, что $M_{k,n} e_s \equiv e_s$ на $[z_p, z_{j+1}]$ для некоторого $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Имеем for $x \in (z_{j+1}, z_{j+2}]$ $M_{k,n} e_s(x) = e_s(x)$.

Таким образом, $M_{k,n} e_s \equiv e_s$ на [0,1] для всех $s \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, следовательно, если p есть алгебраический многочлен степени $\leqslant k-1$, то таким же будет и $M_{k,n} p$.

Теперь покажем, что $M_{k,n} \phi_c^{k-1} \in \Delta^k[0,1]$ для каждого $c \in [0,1]$. Чтобы это доказать, достаточно показать, что $D^k M_{k,n} \phi_c^{k-1} \geqslant 0$ для любого $c \in [0,1]$. Заметим, что если $c = 0$, то $\phi_c^{k-1} \equiv e_{k-1}$ на [0,1]. Так как $M_{k,n} e_{k-1} \equiv e_{k-1}$ на [0,1], мы имеем $D^k M_{k,n} \phi_c^{k-1} \equiv 0$ на [0,1]. Рассмотрим несколько возможных случаев.

1. Пусть $x \in [z_j, z_{j+1}]$ для некоторого фиксированного $j = p, \ldots, n-p-1$. Имеем (по определению разделенной разности)

$$[z_{j-p}, \ldots, z_{j+p+1}] f = \frac{n}{k+1} ([z_{j-p+1}, \ldots, z_{j+p+1}] f - [z_{j-p}, \ldots, z_{j+p}] f).$$

Тогда

$$\begin{gathered} D^k M_{k,n} \phi_c^{k-1}(x) = k! [z_{j-p}, \ldots, z_{j+p}] \phi_c^{k-1} + \\ + k! n\,(x - z_j) \left([z_{j-p+1}, \ldots, z_{j+p+1}] \phi_c^{k-1} - [z_{j-p}, \ldots, z_{j+p}] \phi_c^{k-1}\right) = \\ = k!(n\,(x - z_j)\,[z_{j-p+1}, \ldots, z_{j+p+1}] \phi_c^{k-1} + (1 - n\,(x - z_j)) [z_{j-p}, \ldots, z_{j+p}] \phi_c^{k-1}) \end{gathered}$$

является неотрицательным, поскольку $0 \leqslant n\,(x - z_j) \leqslant 1$, все разделенные разности порядка k функции ϕ_c^{k-1} неотрицательны (см., например, [45]).

2. Если $x \in [z_j, z_{j+1}]$, для некоторого $j = n-p, \ldots, n-1$, то

$$\begin{gathered} D^k M_{k,n} \phi_c^{k-1}(x) = k!(n\,(x - z_j)\,[z_{n-k}, z_{n-k+1}, \ldots, z_n] \phi_c^{k-1} + \\ + (1 - n\,(x - z_j)) [z_{n-k-1}, z_{n-k}, \ldots, z_{n-1}] \phi_c^{k-1}) \geqslant 0, \end{gathered}$$

так как $0 \leqslant n\,(x - z_j) \leqslant 1$, все разделенные разности порядка k функции ϕ_c^{k-1} неотрицательны.

3. Если $x \in [z_{j-1}, z_j]$, для некоторого $j = p, p-1, \dots, 1$, то

$$D^k M_{k,n} \phi_c^{k-1}(x) = k!(n\,(z_j - x)\,[z_1, \dots, z_k]\phi_c^{k-1} + \\ +(1 - n\,(z_j - x))[z_0, \dots, z_k]\phi_c^{k-1})$$

является неотрицательным, так как $0 \leqslant n\,(x - z_j) \leqslant 1$, все разделенные разности порядка k функции ϕ_c^{k-1} неотрицательны. □

Лемма 2.3. *Пусть* $n - 1 > k \geqslant 2$. *Существуют* $c_i > 0$ *такие, что для всех* $f \in B^{(k+2)}$

$$\sup_{x \in [z_p, z_{n-p}]} |D^i f(x) - D^i M_{k,n} f(x)| \leqslant c_i n^{-2}, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Доказательство. Мы приведем доказательство для случая $k = 2p$. Случай $k = 2p + 1$ может быть доказан аналогично.

Так как $f \in B^{(k+2)}$, функция $D^k f$ может быть представлена в виде

$$D^k f(x) = D^k f(a) + D^{k+1} f(a)(x - a) + \int_a^1 (x - t)_+ D^{k+2} f(t) dt,$$

где $x, a \in [0, 1]$, $\|D^{k+2} f\|_{C[0,1]} \leqslant (k + 2)!$ и $(x - t)_+ = \phi_t^1(x)$.

1. Если $x \in [z_j, z_{j+1}]$, $j = p, \dots, n - p - 1$, то

$$D^k M_{k,n} f(x) - D^k f(x) = k![z_{j-p}, \dots, z_{j+p}]f + \\ +k!n(x - z_j)([z_{j-p+1} \dots, z_{j+p+1}]f - [z_{j-p}, \dots, z_{j+p}]f) - \\ -D^k f(z_j) - \frac{D^{k+1} f(z_j)}{1!}(x - z_j) - \frac{1}{(k+1)!} \int_{z_j}^1 (x - t)_+^{k+1} D^{k+2} f(t)\, dt = \\ = (k![z_{j-p}, \dots, z_{j+p}]f - D^k f(z_j)) + \\ +(x - z_j)((k + 1)![z_{j-p}, \dots, z_{j+p+1}]f - D^{k+1} f(z_j)) - \\ -\frac{1}{(k+1)!} \int_{z_j}^1 (x - t)_+^{k+1} D^{k+2} f(t)\, dt.$$

Хорошо известно [46], что если $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ из [0,1], то

$$|k![x_0, \dots, x_k]f - D^k f(\overline{x})| \leqslant \frac{k}{24n^2} \|D^{k+2} f\|_{C[0,1]}, \quad \overline{x} := \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k x_i,$$

следовательно, мы имеем

$$|k![z_{j-p}, \dots, z_{j+p}]f - D^k f(z_j)| \leqslant \frac{k(k+2)!}{24n^2}. \tag{2.18}$$

Из неравенств

$$|(k+1)![z_{j-p},\dots,z_{j+p+1}]f - D^{k+1}f(z_j)| \leqslant \frac{(k+1)(k+1)!}{n},$$
$$\left|\int_{z_j}^{1}(x-t)_+^{k+1}D^{k+2}f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{(k+2)!}{2n^2}, \quad x\in[z_j,z_{j+1}],$$

и (2.18) следует, что существует $c_k > 0$ такое, что

$$|D^k M_{k,n}f(x) - D^k f(x)| \leqslant c_k n^{-2}, \quad x\in[z_j,z_{j+1}], \quad j=p,\dots,n-p-1.$$

Поэтому для всякой $f\in B^{(k+2)}$ и произвольного $x\in[z_p,z_{n-p}]$ будет

$$|D^k f(x) - D^k M_{k,n}f(x)| \leqslant c_k n^{-2}. \tag{2.19}$$

Предположим (по индукции), что $\|D^i f - D^i M_{k,n}f\|_{C[0,1]} \leqslant c_i n^{-2}$. Из (2.8) следует, что для всех $x\in[0,1]$

$$|D^i(M_{k,n}f - f)(x)| = \left|D^i(M_{k,n}f - f)(z_p) + \int_{z_p}^{x} D^{i+1}(M_{k,n}f - f)(t)dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant a_i n^{-2} + \left|\int_{z_p}^{x} D^{i+1}(M_{k,n}f - f)(t)dt\right|.$$

Тогда

$$|D^i(M_{k,n}f - f)(x)| \leqslant a_i n^{-2} + \frac{1}{n^2}\frac{x^{k-1-i}}{(k-1-i)!}. \tag{2.20}$$

Мы использовали тот факт, что если $f\in L_\infty[0,1]$ и для некоторого числа $a\in\mathbb{R}$ справедливо неравенство $|f|\leqslant a$ на [0,1], тогда

$$\left|\int_0^x\int_0^{t_{p-1}}\dots\int_0^{t_1} f(t_1)dt_1\dots dt_p\right| \leqslant \int_0^x\int_0^{t_{p-1}}\dots\int_0^{t_1} |f(t_1)|dt_1\dots dt_p \leqslant a\frac{x^p}{p!}$$

для каждого $p\in\mathbb{N}$.

Утверждение теоремы следует из (2.20), если мы возьмем

$$c_{i-1} = a_i + \frac{c_i x^{k-1-i}}{(k-1-i)!}.$$

□

2.1.4 Формосохраняющее приближение в пространствах Соболева

Пусть $W_\infty^{(k)}[0,1]$ есть пространство Соболева всех действительнозначных, $(k-1)$-раз дифференцируемых функций, чья производная порядка $(k-1)$ есть абсолютно непрерывная функция и чья производная порядка k из $L^\infty[0,1]$, $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

Обозначим $z_j := j/n$, $j = 0,\dots,n$. Определим линейный оператор $L_{k,n} : W_\infty^{(k)}[0,1] \to W_\infty^{(k)}[0,1]$, $k \geqslant 2$, $n \geqslant k$ следующим образом:

$$L_{k,n}f(x) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!} x^l D^l f(0) + \frac{2}{k!} x^k [z_0, z_1, z_2] D^{k-2} f +$$
$$+\frac{2n}{(k+1)!} x^{k+1} \left([z_1, z_2, z_3] D^{k-2} f - [z_0, z_1, z_2] D^{k-2} f \right),$$
$$\text{если } x \in [z_0, z_1]; \tag{2.21}$$

$$L_{k,n}f(x) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!} (x-z_j)^l D^l L_{k,n} f(z_j) + \frac{2}{k!} (x-z_j)^k [z_j, z_{j+1}, z_{j+2}] D^{k-2} f +$$
$$+\frac{2n}{(k+1)!} (x-z_j)^{k+1} \left([z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}] D^{k-2} f - [z_j, z_{j+1}, z_{j+2}] D^{k-2} f \right),$$
$$\text{если } x \in (z_j, z_{j+1}],\ j = 1, 2, \dots, n-3; \tag{2.22}$$

$$L_{k,n}f(x) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!} (x-z_{n-2})^l D^l L_{k,n} f(z_{n-2}) +$$
$$+\frac{2}{k!} (x-z_{n-2})^k [z_{n-3}, z_{n-2}, z_{n-1}] D^{k-2} f + \frac{2n}{(k+1)!} (x-z_{n-2})^{k+1} \times$$
$$\times \left([z_{n-2}, z_{n-1}, z_n] D^{k-2} f - [z_{n-3}, z_{n-2}, z_{n-1}] D^{k-2} f \right),$$
$$\text{если } x \in (z_{n-2}, z_{n-1}]; \tag{2.23}$$

$$L_{k,n}f(x) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!} (x-z_{n-1})^l D^l L_{k,n} f(z_{n-1}) +$$
$$+\frac{2}{k!} (x-z_{n-1})^k [z_{n-3}, z_{n-2}, z_{n-1}] D^{k-2} f + \frac{2n}{(k+1)!} (x-z_{n-1})^{k+1} \times$$
$$\times ([z_{n-2}, z_{n-1}, z_n] D^{k-2} f - [z_{n-3}, z_{n-2}, z_{n-1}] D^{k-1} f),$$
$$\text{если } x \in (z_{n-1}, 1]. \tag{2.24}$$

Лемма 2.4. *Пусть $k \geqslant 2$ и линейный оператор $L_{k,n} : W_\infty^{(k)}[0,1] \to \to W_\infty^{(k)}[0,1]$ определен в (2.21), (2.22), (2.23), (2.24). Тогда*

1) $L_{k,n}(\Delta^k) \subset \Delta^k$;

2) $D^k L_{k,n} e_k = D^k e_k$;

3) *существует число $c > 0$ такое, что $\|f - L_{k,n} f\|_\infty \leqslant cn^{-2}$ для всех $f \in B_\infty^{(k)}$.*

Доказательство. Заметим, что $D^k L_{k,n} f$ есть кусочно-линейная функция и для любого $0 \leqslant j \leqslant n-1$ $D^k L_{k,n} f$ есть линейная функция на $[z_j, z_{j+1}]$. Возьмем произвольное $x \in (z_j, z_{j+1}]$, тогда

$$D^k L_{k,n} f(x) = 2(j+1-nx)[z_j, z_{j+1}, z_{j+2}]D^{k-2}f+$$
$$+2(nx-j)[z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}]D^{k-2}f, \quad j = 0, 1, \ldots, n-3, \tag{2.25}$$

$$D^k L_{k,n} f(x) = 2(n-1-nx) \cdot [z_{n-3}, z_{n-2}, z_{n-1}]D^{k-2}f+$$
$$+2(nx-n+2) \cdot [z_{n-2}, z_{n-1}, z_n]D^{k-2}f], \quad j = n-2, \tag{2.26}$$

$$D^k L_{k,n} f(x) = 2(n-nx) \cdot [z_{n-3}, z_{n-2}, z_{n-1}]D^{k-2}f+$$
$$+2(nx-n+1) \cdot [z_{n-2}, z_{n-1}, z_n]D^{k-2}f, \quad j = n-1. \tag{2.27}$$

Если $f \in \Delta^k$, тогда из (2.25)–(2.27) следует, что $D^k L_{k,n} f \geqslant 0$ на каждом из (x_j, x_{j+1}), $j = 0, \ldots, n-1$, т. е. $L_{k,n} f \in \Delta^k$. Следовательно, $L_{k,n}(\Delta^k) \subset \Delta^k$.

Непосредственная проверка показывает, что $D^k L_{k,n} e_k = D^k e_k$.

Так как $f \in B_\infty^{(k)}$, то производная порядка $(k-2)$ функции f может быть записана в виде

$$D^{k-2}f(x) = D^{k-2}f(0) + \frac{D^{k-1}f(0)}{1!}x + \int_0^1 (x-t)_+ D^k f(t)dt,$$

где $\|D^k f\|_\infty \leqslant 1$ и $t_+ = t$, если $t \geqslant 0$, и 0 в противном случае.

Пусть $x \in [0, \frac{1}{n}]$ (случай $x \in (z_j, z_{j+1})$, $j = 1, \ldots, n-3$, аналогичен), тогда

$$D^{k-2}L_{k,n}f(x) - D^{k-2}f(x) = x^2[z_0, z_1, z_2]D^{k-2}f+$$
$$+\frac{1}{3}nx^3\left([z_1, z_2, z_3]D^{k-2}f - [z_0, z_1, z_2]D^{k-2}f\right) - \int_0^1 (x-t)_+ D^k f(t)dt =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 \left((z_0 - t)_+ - 2(z_1 - t)_+ + (z_2 - t)_+\right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{3} n x^3 \left((z_1 - t)_+ - 2(z_2 - t)_+ + (z_3 - t)_+\right) -$$
$$\left. - \frac{1}{3} n x^3 \left((z_0 - t)_+ - 2(z_1 - t)_+ + (z_2 - t)_+\right) - (x - t)_+\right] D^{k-2} f \, dt, \quad (2.28)$$

откуда

$$|D^{k-2} L_{k,n} f(x) - D^{k-2} f(x)| \leqslant \frac{1}{2} n^{-2} + 3n^{-4}, \; x \in [z_j, z_{j+1}], \; j = 1, \ldots, n-3.$$

Аналогично получаем

$$|D^{k-2} L_{l,n} f(x) - D^{k-2} f(x)| \leqslant n^{-2}, \quad x \in [z_{n-2}, z_{n-1}], \quad x \in [z_{n-1}, 1].$$

Следовательно,

$$|D^{k-2} f(x) - D^{k-2} L_{k,n} f(x)| \leqslant n^{-2} \quad (2.29)$$

для всякой $f \in B_\infty^{(k)}$ и любого $x \in [0, 1]$.

Если $k = 2$, лемма доказана. Пусть $k > 2$. Так как $D^i(L_{k,n} f - f)(0) = 0$ имеет место для $i = 0, \ldots, k-2$, то

$$D^i(L_{k,n} f - f)(x) = D^i(L_{k,n} f - f)(0) + \int_0^x D^{i+1}(L_{k,n} f - f)(t) \, dt =$$
$$= \int_0^x D^{i+1}(L_{k,n} f - f)(t) \, dt$$

для всех $x \in [0, 1]$ и $i = 0, \ldots, k-3$. Тогда

$$|D^i(L_{k,n} f - f)(x)| \leqslant \frac{1}{n^2} \frac{x^{k-1-i}}{(k-1-i)!}. \quad (2.30)$$

Мы использовали тот факт, что если $f \in L_\infty[0, 1]$ и существует $a \in \mathbb{R}$ такое, что $|f| \leqslant a$ на [0,1], тогда

$$\left| \int_0^x \int_0^{t_{p-1}} \ldots \int_0^{t_1} f(t_1) dt_1 \ldots dt_p \right| \leqslant \int_0^x \int_0^{t_{p-1}} \ldots \int_0^{t_1} |f(t_1)| dt_1 \ldots dt_p \leqslant a \frac{x^p}{p!}$$

для любого $p \in \mathbb{N}$.

Тогда утверждение 3) леммы следует из (2.30) при $i = 0$. □

2.2 Пример линейного оператора, сохраняющего пересечение конусов

Пусть $k > h$. Приведем пример линейного оператора конечного ранга n, сохраняющего конус $\Delta^{h,k}(\sigma)$.

Обозначим $s(i) := \min\{s : \ s > i, \ \sigma_s \neq 0\}$ для $i \in \{h, \dots, k-1\}$. Пусть $t_j = j/n$, $j = 0, 1, \dots, n$. Обозначим $(\delta_p)_{p=0}^k$ бинарную последовательность, определенную следующим образом:

$$\delta_p = \begin{cases} 0, \text{ если } p = k \ \text{ или } \ \text{если } \sigma_p\sigma_{s(p)} \neq -1, \ p \leqslant k-1, \\ 1, \text{ если } \sigma_p\sigma_{s(p)} = -1, \ p \leqslant k-1. \end{cases}$$

Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant k+2$ и $\Lambda_n^{h,k} : C^k[0,1] \to C^k[0,1]$ есть линейный оператор, определенный по шагам слева направо следующим образом:

$$\Lambda_n^{h,k} f(x) = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} e_l(x) \left(D^l f(t_0) - \delta_l \int\limits_{t_0}^{t_1} D^{l+1} \left(\Lambda_n^{h,k} f - f\right)(t) dt \right) +$$
$$+ \frac{n e_{k+1}(x)}{(k+1)!} \left[D^k f(t_1) - D^k f(t_0) \right], \quad \text{если} \quad x \in [t_0, t_1], \tag{2.31}$$

$$\Lambda_n^{h,k} f(x) = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} (x - t_j)^l \left(D^l \Lambda_n^{h,k} f(t_j) - \delta_l \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} D^{l+1} \left(\Lambda_n^{h,k} f - f\right)(t) dt \right) +$$
$$+ \frac{n e_{k+1}(x - t_j)}{(k+1)!} \left[D^k f(t_{j+1}) - D^k f(t_j) \right],$$
$$\text{если} \quad x \in (t_j, t_{j+1}], \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \tag{2.32}$$

Лемма 2.5. *Пусть $\Lambda_n^{h,k} : C^k[0,1] \to C^k[0,1]$ есть непрерывный линейный оператор конечного ранга n, определенный в* (2.31)–(2.32). *Тогда $\Lambda_n^{h,k}(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma)$ и для любого $0 \leqslant i \leqslant k$ существует не зависящее от n число $c > 0$ такое, что справедливо соотношение*

$$\sup_{f \in B^{(k+2)}} \|D^i(\Lambda_n^{h,k} f) - D^i f\|_{B[0,1]} \leqslant c n^{-2}. \tag{2.33}$$

Доказательство. Заметим, что для любой $f \in C^k[0,1]$ функция $D^k \Lambda_n^{h,k} f$ есть кусочно-линейная функция, определенная на [0,1], с множеством узловых точек $\{(t_j, D^k f(t_j))\}_{j=0,\dots,n}$. Значит, для всякой f такой, что $D^k f \geqslant 0$, выполнено неравенство $D^k \Lambda_n^{h,k} f \geqslant 0$.

Пусть $f \in \Delta^{h,k}(\sigma)$. Предположим (по индукции), что для некоторого фиксированного $i \geqslant h+1$ справедливы неравенства

$$\sigma_l D^l(\Lambda_n^{h,k} f - f) \geqslant 0, \quad l = i+1, \dots, k \tag{2.34}$$

на $[t_0, t_1]$. Для произвольного $x \in [t_0, t_1]$ имеем

$$D^i(\Lambda_n^{h,k} f - f)(x) = D^i(\Lambda_n^{h,k} f - f)(t_0) + \int\limits_{t_0}^{x} D^{i+1}(\Lambda_n^{h,k} f - f)(z)\, dz. \quad (2.35)$$

Рассмотрим три случая.

1. Если $\sigma_i = 0$, то $\delta_i = 0$ и из $D^i\Lambda_n^{h,k} f(0) = D^i f(0)$ следует, что

$$\operatorname{sgn} D^i(\Lambda_n^{h,k} f - f) = \operatorname{sgn} D^{i+1}(\Lambda_n^{h,k} f - f).$$

2. Если $\sigma_i \neq 0$ и $\sigma_i = \sigma_{s(i)}$, то из (2.35) следует, что

$$\operatorname{sgn} D^i(\Lambda_n^{h,k} f - f) = \operatorname{sgn} D^{i+1}(\Lambda_n^{h,k} f - f) = \ldots = \operatorname{sgn} D^{s(i)}(\Lambda_n^{h,k} f - f) = \sigma_i.$$

3. Если $\sigma_i \neq 0$ и $\sigma_i = -\sigma_{s(i)}$, то $\operatorname{sgn} D^{i+1}(\Lambda_n^{h,k} f - f) = \sigma_{s(i)}$ и

$$D^i(\Lambda_n^{h,k} f - f)(x) = D^i(\Lambda_n^{h,k} f - f)(t_0) + \int\limits_{t_0}^{x} D^{i+1}(\Lambda_n^{h,k} f - f)(z)\, dz =$$

$$= -\int\limits_{t_0}^{t_1} D^{i+1}(\Lambda_n^{h,k} f - f)(z)\, dz + \int\limits_{t_0}^{x} D^{i+1}(\Lambda_n^{h,k} f - f)(z)\, dz =$$

$$= -\int\limits_{x}^{t_1} D^{i+1}(\Lambda_n^{h,k} f - f)(z)\, dz = \sigma_i \int_x^{t_1} \sigma_{s(i)} D^{i+1}(\Lambda_n^{h,k} f - f)(z)\, dz.$$

Используя (2.34), имеем $\sigma_i D^i(\Lambda_n^{h,k} f - f) \geqslant 0$ на $[t_0, t_1]$, или $\sigma_i D^i \Lambda_n^{h,k} f \geqslant \sigma_i D^i f$ на $[t_0, t_1]$, т. е. $\Lambda_n^{h,k} f \in \sigma_i \Delta^i[t_0, t_1]$, если $f \in \sigma_i \Delta^i[t_0, t_1]$.

Аналогично может быть показано (по индукции с j как переменной индукции), что $\Lambda_n^{h,k} f \in \sigma_i \Delta^i[t_j, t_{j+1}]$, если $f \in \sigma_i \Delta^i[t_j, t_{j+1}]$ для любого $j = 1, \ldots, n-1$. Поэтому $\Lambda_n^{h,k}(\sigma_i \Delta^i[0,1]) \subset \sigma_i \Delta^i[0,1]$.

После завершения шагов индукции для $i = k-1, k-4, \ldots, h$ мы можем заключить, что $\Lambda_n^{h,k}(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma)$.

Легко проверить, что

1) $\Lambda_n^{h,k} e_p = e_p$ для всех $p = 0, 1, \ldots, h-1$ (так как $\pm e_p \in \Delta^{h,k}(\sigma)$ для всех $p = 0, 1, \ldots, h-1$);

2) если $x \in [t_j, t_{j+1})$ для некоторого $0 \leqslant j \leqslant n-1$, то

$$D^k(\Lambda_n^{h,k} e_{k+2} - e_{k+2})(x) = k!\,(t_{j+1} - x)\,(x - t_j)\,/2. \quad (2.36)$$

Из (2.36) следует, что на [0,1] справедливо неравенство

$$0 \leqslant D^k(\Lambda_n^{h,k} e_{k+2} - e_{k+2}) \leqslant \frac{k!}{8} n^{-2}.$$

Предположим (по индукции), что для фиксированного $i \geqslant h+1$ существуют $c_l > 0$, $l = i+1, \dots, k$, такие, что для любого $x \in [0,1]$

$$0 \leqslant \sigma_l D^l(\Lambda_n^{h,k} f - f)(x) \leqslant c_l n^{-2}, \quad l = i+1, \dots, k. \tag{2.37}$$

Из равенства

$$D^i(\Lambda_n^{h,k} e_{k+2} - e_{k+2})(0) = D^i e_{k+2}(0) - \delta_i \int\limits_0^1 D^{i+1}\left(\Lambda_n^{h,k} e_{k+2} - e_{k+2}\right)(t)dt$$

следует, что для $x \in [0,1]$

$$\begin{gathered} \left|D^i(\Lambda_n^{h,k} e_{k+2} - e_{k+2})(x)\right| = \\ = \left|D^i(\Lambda_n^{h,k} e_{k+2} - e_{k+2})(0) + \int_0^x D^{i+1}(\Lambda_n^{h,k} e_{k+2} - e_{k+2})(t)dt\right| \leqslant \\ \leqslant 2\left|\int_0^1 D^{i+1}(\Lambda_n^{h,k} e_{k+2} - e_{k+2})(t)dt\right|. \end{gathered} \tag{2.38}$$

Тогда

$$\left|D^i(\Lambda_n^{h,k} e_{k+2} - e_{k+2})(x)\right| \leqslant 2\frac{c_{i+1}}{n^2}\frac{1}{(k-i)!}. \tag{2.39}$$

Мы использовали тот факт, что если $f \in C[0,1]$ и существует константа $a \in \mathbb{R}$ такая, что $|f| \leqslant a$ на [0,1], то для всякого $p \in \mathbb{N}$

$$\left|\int_0^x \int_0^{t_{p-1}} \dots \int_0^{t_1} f(t_1)dt_1 \dots dt_p\right| \leqslant a\frac{x^p}{p!}.$$

Тогда (2.39) влечет

$$\|D^i(\Lambda_n^{h,k} e_{k+2}) - D^i e_{k+2}\|_{B[0,1]} \leqslant c_i n^{-2}, \tag{2.40}$$

где $c_i = 2\dfrac{c_{i+1}}{(k-i)!}$, следовательно,

$$\|\Lambda_n^{h,k} e_{k+2} - e_{k+2}\|_{B^k[0,1]} := \sum_{i=0}^{k+2} \frac{1}{i!}\|D^i(\Lambda_n^{h,k} e_k - e_k)\|_{B[0,1]} \leqslant n^{-2}\sum_{i=0}^{k+2}\frac{c_i}{i!}.$$

Прямая проверка показывает, что $\Lambda_n^{h,k} e_p = e_p$ для всех $p = h, \dots, k+1$.

Пусть $f \in B^{(k+2)}$. Так как функция $D^k f \in W_\infty^{(2)}[0,1]$, ее можно представить в виде

$$D^k f(x) = D^k f(0) + \frac{D^{k+1} f(0)}{1!} x + \int_0^1 (x-t)_+ D^{k+2} f(t) dt,$$

где

$$x_+^m = \begin{cases} x^m, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Без ограничения общности считаем $x \in [0, 1/n]$. Тогда имеем

$$D^k \Lambda_n^{h,k} f(x) - D^k f(x) = \int_0^1 \left[nx \left(\frac{1}{n} - t \right)_+ - (x-t)_+ \right] D^{k+2} f(t) dt,$$

где $\Lambda_n^{h,k}$ определен в (2.31)–(2.32). Тогда для любого $x \in [0,1]$

$$\left| D^k \Lambda_n^{h,k} f(x) - D^k f(x) \right| \leqslant \frac{1}{8n^2}.$$

Повторяя рассуждения (2.37)–(2.40) и используя свойства линейного оператора $\Lambda_n^{h,k}$, определенного в (2.1), можно показать, что существует такое число $c_2 > 0$, что $\sup_{f \in B^{(k)}} \|D^i(\Lambda_n^{h,k} f) - D^i f\|_{B[0,1]} \leqslant c_2 n^{-2}$. Таким образом, (2.33) выполнено и утверждение леммы доказано. □

Следующие утверждения есть следствие теорем 1.2, 1.3 и свойств линейных операторов $\Lambda_{k,n}$, $\Lambda_n^{h,k}$, установленных при доказательстве лемм 2.1 и 2.5.

Утверждение 2.2. *Для последовательности линейных операторов* $\{\Lambda_{k,n}\}_{n>k+1}$, *определенных соотношениями* (2.1) *и* (2.2), *имеет место*

$$\lim_{n\to\infty} \|D^k \Lambda_{k,n} f - D^k f\| = 0$$

для всех $f \in C^k[0,1]$.

Утверждение 2.3. *Для последовательности линейных операторов* $\{\Lambda_n^{h,k}\}_{n>k+1}$, *определенных соотношениями* (2.31)–(2.32), *имеет место*

$$\lim_{n\to\infty} \|D^k \Lambda_n^{h,k} f - D^k f\| = 0$$

для всех $f \in C^k[0,1]$.

3 ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПОПЕРЕЧНИКОВ

3.1 Линейные относительные n-поперечники

В теории формосохраняющего приближения возникают и представляют интерес классические задачи теории приближения функций. Одной из таких задач является задача существования, единственности, характеризации элемента наилучшего формосохраняющего приближения. Пусть V есть некоторый конус в линейном нормированном пространстве X. Пусть X_n — произвольное n-мерное подпространство X такое, что $X_n \cap V \neq \varnothing$. Обозначим $E(f, X_n \cap V)$ величину наилучшего приближения элемента $f \in V$ элементами множества $X_n \cap V$:

$$E(f, X_n \cap V)_X = \inf_{g \in X_n \cap V} \|f - g\|_X.$$

Другой классической задачей теории приближений, интенсивно изучаемой в теории формосохраняющего приближения, является задача об уклонении множеств от заданного конечномерного подпространства. Пусть $A \subset X$, $A \cap V \neq \varnothing$. Величина

$$E(A \cap V, X_n \cap V)_X = \sup_{f \in A \cap V} E(f, X_n \cap V)_X = \sup_{f \in A \cap V} \inf_{g \in X_n \cap V} \|f - g\|_X$$

является уклонением $A \cap V$ от $X_n \cap V$.

Оценке величины $E(A \cap V, X_n \cap V)_X$ для различных конкретных множеств A и конечномерных подпространств X_n посвящено много работ. Обзор существующих результатов для полиномиального формосохраняющего приближения, т. е. когда X_n — множество алгебраических полиномов степени не выше $n-1$, V — некоторые конусы (положительных, монотонных, выпуклых) функций в $X = L_p[-1, 1]$, можно найти в работе Д. Левиатана (D. Leviatan) [47] (см. также [12, 15]).

Дальнейшим развитием этого направления является задача оценки относительных поперечников множеств. Пусть X — линейное нормированное пространство, A и V есть непустые подмножества X, $A \cap V \neq \varnothing$. Тогда относительным n-поперечником, по Колмогорову, множества A в X с ограничением V называется величина

$$d_n(A \cap V, V)_X = \inf_{X_n} E(A \cap V, X_n \cap V)_X = \inf_{X_n} \sup_{f \in A \cap V} \inf_{g \in X_n \cap V} \|f - g\|_X, \quad (3.1)$$

где левый инфимум ищется среди всех n-мерных линейных многообразий X_n пространства X, таких, что $X_n \cap V \neq \varnothing$.

Впервые понятие относительного поперечника было введено В. Н. Коноваловым [48] в 1984 году. Хотя в этой работе решалась задача, непосредственно не связанная с формосохранением, тем не менее это понятие необходимо возникает при изучении свойств формосохраняющего приближения функций. Оценки относительных (не обязательно формосохраняющих) поперечников были получены в статьях [49–54].

Конечно, невозможно получить значения $d_n(A \cap V, V)_X$ и определить оптимальные подпространства X_n (если они существуют) в общем случае, т. е. без учета специфики A, V, X. Тем не менее некоторые оценки относительных формосохраняющих n-поперечников были в последнее время получены в работах [55–57].

Одной из классических задач теории приближений является задача оценки линейных поперечников множеств. Пусть X есть линейное нормированное пространство, A — некоторое подмножество пространства X. Напомним [58], что линейный n-поперечник множества $A \subset X$ в пространстве X определяется следующим образом:

$$\delta_n(A)_X := \inf_{L_n} \sup_{f \in A} \|(I - L_n)f\|_X, \tag{3.2}$$

где инфимум ищется среди всех линейных непрерывных операторов L_n: $X \to X$ конечного ранга n, I есть тождественный оператор.

В теории формосохраняющего приближения представляет интерес задача оценки величин линейных поперечников вида (3.2), где инфимум ищется среди всех линейных непрерывных операторов $L_n : X \to X$ конечного ранга n, обладающих некоторыми дополнительными свойствами (свойствами формосохранения). Под формосохраняющим понимается оператор, отображающий конус, связанный с некоторыми свойствами формы приближаемых функций, в себя. Определения таких поперечников (определения 3.4 и 3.5) даны в [59–61] и носят название линейных относительных поперечников.

Можно рассматривать задачу нахождения (если существует) линейного оператора конечного ранга n, обладающего минимальной ошибкой приближения тождественного оператора на некотором множестве, среди всех линейных операторов L конечного ранга n, обладающих формосохраняющим свойством $L(V) \subset V$, где V есть некоторый конус. Это естественным образом приводит к понятию линейного относительного n-поперечника.

Определение 3.1. Пусть A есть некоторое подмножество пространства X и пусть $L : X \to X$ — линейный непрерывный оператор. Величина

$$e(A, L)_X := \sup_{f \in A} \|f - Lf\|_X = \sup_{f \in A} \|(I - L)f\|_X$$

есть *ошибка приближения тождественного оператора I оператором L на множестве A в X.*

Определение 3.2. Пусть $L : X \to X$ есть линейный оператор и V — некоторый конус в пространстве X, $V \neq \varnothing$. Будем говорить, что оператор L является *формосохраняющим относительно конуса V* (или *сохраняет форму в смысле конуса V*), если $L(V) \subset V$.

Определение 3.3. Напомним, что линейный оператор $L : X \to X$ есть *оператор конечного ранга n*, если размерность подпространства $L(X)$ равна n, $\dim\{L(X)\} = n$.

Мы приведем два определения линейных относительных поперечника. Первое из них основано на идеях В. Н. Коновалова [48].

Определение 3.4. Пусть X есть линейное нормированное пространство, а V — некоторый конус в X. *Линейный относительный n-поперечник по Коновалову множества $A \cap V$ в пространстве X с ограничением V* определим следующим образом:

$$\delta_n(A \cap V, V)_X := \inf_{L_n(V) \subset V} e(A \cap V, L_n)_X,$$

где инфимум ищется среди всех линейных непрерывных операторов L_n таких, что

1) $L_n : X \to X$ имеют конечный ранг n;
2) $L_n(V) \subset V$.

Второе определение линейного относительного поперечника связано с идеями Коровкина.

При рассмотрении задачи приближения гладких функций некоторым классом линейных операторов, может оказаться, что операторы этого класса обладают некоторым свойством, которое ограничивает порядок приближения гладких функций операторами данного класса. Приведем хорошо известные примеры. Так, П. П. Коровкиным было показано [34], что если линейный полиномиальный оператор обладает свойством положительности, порядок приближения непрерывных функций является низким. В частности, он доказал, что порядок приближений положительными линейными операторами степени n не может быть выше, чем n^{-2} в пространстве $C[0,1]$ даже на системе из трех функций — 1, x, x^2. Более того, В. С. Виденский показал [62] , что этот результат П. П. Коровкина [34] зависит не столько от свойства полиномиальности операторов, сколько от ограниченности пространства образов операторов (конечномерности).

Чтобы иметь инструмент для количественной оценки негативного влияния свойства формосохранения операторов на порядок приближения ими (эффекта «насыщения»), мы вводим следующее определение.

Определение 3.5. Пусть X есть линейное нормированное пространство, а V — некоторый конус в X. *Линейный относительный n-поперечник по Коровкину множества $A \subset X$ в пространстве X с ограничением V* определим следующим образом:

$$\delta_n(A,V)_X := \inf_{L_n(V)\subset V} e(A,L_n)_X,$$

где инфимум ищется среди всех линейных непрерывных операторов L_n таких, что

1) $L_n : X \to X$ имеет конечный ранг n;
2) $L_n(V) \subset V$.

Если мы сравним значение линейного относительного n-поперечника по Коровкину множества $A \subset X$ в пространстве X с ограничением V со значением линейного n-поперечника множества $A \subset X$ в X, то сможем оценить негативное влияние свойства формосохранения $L_n(V) \subset V$ на ошибку приближения формосохраняющими линейными операторами конечного ранга n по сравнению с ошибкой приближения линейными операторами конечного ранга n на том же множестве.

Если

$$\delta_n(A,V)_X = \sup_{f\in A} \|(I-L_n)f\|_X,$$

где L_n есть линейный непрерывный оператор конечного ранга не выше n, такой, что $L_n(V) \subset V$, тогда будем говорить, что L_n — оптимальный линейный оператор для $\delta_n(A, V)_X$.

Оценка линейных относительных n-поперечников представляет интерес в теории формосохраняющего приближения, поскольку? зная величину относительного линейного n-поперечника (как по Коновалову, так и по Коровкину) с ограничением V, мы можем судить, насколько «хорош» или «плох» (в смысле оптимальности) тот или иной конечномерный метод приближения, обладающий формосохраняющим свойством $L_n(V) \subset V$.

3.2 Оценки линейных относительных поперечников для операторов, сохраняющих k-выпуклость

В данном параграфе находятся значения линейных относительных поперечников для операторов L_n конечного ранга, обладающих свойством

$$L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k,$$

где $\Delta^k := \Delta^k[0, 1]$, $k \geqslant 0$ означает класс всех k-выпуклых на $[0, 1]$ функций.

Используя идеи [63] и [62], докажем следующий вспомогательный результат, оценивающий порядок приближения производными операторов, сохраняющих k-выпуклость [41].

Лемма 3.1. *Пусть $L_n : C^k[0, 1] \to B^k[0, 1]$ есть линейный оператор конечного ранга n, $n > k + 2$ такой, что*

$$L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k. \tag{3.3}$$

Тогда

$$\sup_{x\in[0,1]} \left(\frac{2}{(k+2)!} \left| D^k L_n e_{k+2}(x) - D^k e_{k+2}(x) \right| + \right.$$
$$+ \frac{2}{(k+1)!} \left| D^k L_n e_{k+1}(x) - D^k e_{k+1}(x) \right| +$$
$$\left. + \frac{1}{k!} \left| D^k L_n e_k(x) - D^k e_k(x) \right| \right) \geqslant \frac{1}{4n^2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — система функций, порождающая линейное пространство $\{D^k L_n f: \ f \in C^k[0,1]\}$, т.е.

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\} = \{D^k L_n f: \ f \in C^k[0,1]\}.$$

Рассмотрим матрицу

$$A = (v_j(z_i))_{j=1,\ldots,n}^{i=0,\ldots,n},$$

где $z_i = i/n$, $i = 0, \ldots, n$. Мы будем полагать, что ранг матрицы A не равен 0, $\operatorname{rank} A \neq 0$. Действительно, если $\operatorname{rank} A = 0$, то $D^k L_n f(z_i) = \sum_{j=1}^{n} a_j(f) v_j(z_i) = 0$, $i = 0, \ldots, n$, для всякой $f \in C^k[0,1]$, следовательно, $\|D^k L_n e_k - D^k e_k\| \geqslant 1$. Поэтому исключим случай $\operatorname{rank} A = 0$ из нашего анализа.

Возьмем нетривиальный вектор $\delta = (\delta_0, \ldots, \delta_n) \in R^{n+1}$ такой, чтобы

$$\sum_{i=0}^{n} |\delta_i| = 1, \quad \sum_{i=0}^{n} \delta_i v_j(z_i) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Пусть функция $h \in C^k[0,1]$ такова, что
1) $D^k h(z_i) = \operatorname{sgn} \delta_i$, $i = 0, \ldots, n$;
2) $D^k h$ линейна на $[z_0, z_1], \ldots, [z_{n-1}, z_n]$;
3) $D^i h(0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$.
Из $D^k L_n h \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ следует, что

$$\sum_{i=0}^{n} \delta_i D^k L_n h(z_i) = 0.$$

Тогда

$$1 = \sum_{i=0}^{n} |\delta_i| = \sum_{i=0}^{n} \delta_i D^k h(z_i) = \sum_{i=0}^{n} \delta_i (D^k h(z_i) - D^k L_n h(z_i)) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{n} |\delta_i| |D^k L_n h(z_i) - D^k h(z_i)| \leqslant \|D^k L_n h - D^k h\|. \tag{3.5}$$

Для $x \in [0,1]$ имеем

$$|D^k L_n h(x) - D^k h(x)| = \left| D^k L_n h(x) - D^k h(x) \frac{1}{k!} D^k L_n e_k(x) + \right.$$

$$+D^k h(x)\frac{1}{k!}D^k L_n e_k(x) - D^k h(x)\frac{1}{k!}D^k e_k(x)\Bigg| \leqslant$$
$$\leqslant \left|D^k L_n\left(h - D^k h(x)\frac{1}{k!}e_k\right)(x)\right| +$$
$$+\frac{1}{k!}|D^k h(x)||D^k L_n e_k(x) - D^k e_k(x)|. \tag{3.6}$$

Пусть функция $p_x \in C^k[0,1]$ такова, что

$$D^k p_x = \left|D^k\left(h - D^k h(x)\frac{1}{k!}e_k\right)\right|, \quad D^i p_x(0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Имеем

$$D^k(h - D^k h(x)\frac{1}{k!}e_k) \leqslant D^k p_x$$

и

$$D^k(-(h - D^k h(x)\frac{1}{k!}e_k)) \leqslant D^k p_x.$$

Из $L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k$ следует, что

$$D^k L_n(h - D^k h(x)\frac{1}{k!}e_k)(x) \leqslant D^k L_n p_x(x) \tag{3.7}$$

и

$$-D^k L_n(h - D^k h(x)\frac{1}{k!}e_k)(x) \leqslant D^k L_n p_x(x). \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) получаем, что

$$\left|D^k L_n\left(h - D^k h(x)\frac{1}{k!}e_k\right)(x)\right| \leqslant D^k L_n p_x(x). \tag{3.9}$$

Пусть $q_x \in C^k[0,1]$ такова, что

$$D^k q_x(t) = |t - x| \quad \text{и} \quad D^i q_x(0) = 0, \; i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Имеем

$$D^k p_x(t) = \left|D^k\left(h(t) - D^k h(x)\frac{1}{k!}t^k\right)\right| = |D^k h(t) - D^k h(x)| \leqslant$$
$$\leqslant 2n|t - x| = 2nD^k q_x(t).$$

Справедливо неравенство $D^k(2nq_x - p_x) \geqslant 0$, тогда из формосохраняющего свойства $L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k$ следует, что $D^k L_n(2nq_x - p_x)(x) \geqslant 0$, т.е.

$$D^k L_n p_x(x) \leqslant 2nD^k L_n q_x(x). \tag{3.10}$$

Из леммы 1.1 следует, что

$$D^k L_n q_x(x) \leqslant [D^k L_n g_x(x)]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{k!} D^k L_n e_k(x)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant [D^k L_n g_x(x)]^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{k!}\left|D^k L_n e_k(x) - D^k e_k(x)\right|\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.11}$$

где

$$g_x = \frac{2}{(k+2)!} e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!} x e_{k+1} + \frac{1}{k!} x^2 e_k.$$

Имеем

$$D^k L_n g_x(x) = \frac{2}{(k+2)!}(D^k L_n e_{k+2} - D^k e_{k+2})(x) -$$

$$-\frac{2}{(k+1)!} x (D^k L_n e_{k+1} - D^k e_{k+1})(x) + \frac{1}{k!} x^2 (D^k L_n e_k - D^k e_k)(x) +$$

$$+\frac{2}{(k+2)!} D^k e_{k+2}(x) - \frac{2}{(k+1)!} x D^k e_{k+1}(x) + \frac{1}{k!} x^2 D^k e_k(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{(k+2)!}\left|D^k L_n e_{k+2}(x) - D^k e_{k+2}(x)\right| +$$

$$+\frac{2}{(k+1)!}\left|D^k L_n e_{k+1}(x) - D^k e_{k+1}(x)\right| + \frac{1}{k!}\left|D^k L_n e_k(x) - D^k e_k(x)\right|. \tag{3.12}$$

Если

$$\frac{1}{k!}\|D^k L_n e_k - D^k e_k\| \leqslant \frac{1}{4n^2}, \tag{3.13}$$

то из (3.6), (3.9)–(3.11) получаем, что

$$1 - \frac{1}{k!}\left\|D^k L_n e_k - D^k e_k\right\|_{C[0,1]} \leqslant$$

$$\leqslant 2n \left(\sup_{x\in[0,1]} D^k L_n g_x(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{4n^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.14}$$

Обе части неравенства положительны, поэтому

$$4n^2 \sup_{x\in[0,1]} D^k L_n g_x(x) \geqslant \frac{(1-\frac{1}{4n^2})^2}{1+\frac{1}{4n^2}} \geqslant 1 - \frac{1}{n^2}, \quad n \geqslant k+2,$$

и тогда (3.4) следует из (3.12). Если неравенство (3.13) не выполнено, тогда (3.4) тем более имеет место. □

Как было отмечено ранее, приближение, сохраняющее положительность ($k = 0$), было рассмотрено В.С. Виденским [62]. Следует отметить, что результаты для случая сохранения k-выпуклости не могут быть получены как прямое следствие из результатов для положительного приближения, поскольку

$$\|D^k(L_n f) - D^k f\| = \|L_n(D^k f) - D^k f\|,$$

вообще говоря, не выполняется.

Обозначим

$$\Pi_m := \operatorname{span}\{e_0, e_1, \ldots, e_m\}, \quad P_m := \{f \in \Pi_m : \ \|f\|_{C^m[0,1]} \leqslant 1\}.$$

Теорема 3.1. *Пусть $n \geqslant k+2$. Тогда существует число $0 < c_1 \leqslant \leqslant 2^{k-3}/k!$, не зависящее от n, такое, что*

$$\delta_n(B_\infty^{(k+2)} \cap \Delta^k, \Delta^k)_{C^k[0,1]} < c_1 n^{-2}. \tag{3.15}$$

Оценка (3.15) *не может быть улучшена даже на множестве алгебраических многочленов P_{k+2}, ограниченных в $C^{k+2}[0,1]$, а именно существует число $c_2 > 0$, не зависящее от n, такое, что справедливо равенство*

$$c_2 n^{-2} < \delta_n(P_{k+2} \cap \Delta^k, \Delta^k)_{C^k[0,1]}. \tag{3.16}$$

Доказательство. Неравенство (3.15) следует из леммы 2.1. Оценка (3.18) есть следствие леммы 3.1. $\square$

При доказательстве леммы 2.1 показано, что линейный оператор $\Lambda_{k,n}$ конечного ранга n удовлетворяет свойствам $\Lambda_{k,n}(\Delta^k) \subset \Delta^k$ и

$$\sup_{f \in P_m} \|D^i(\Lambda_{k,n} f) - D^i f\| = 0, \ 0 \leqslant m \leqslant k+1,$$

для всех $0 \leqslant i \leqslant k$. Следовательно,

$$\delta_n(P_m \cap \Delta^k, \Delta^k)_{C^k[0,1]} = 0$$

для всех $0 \leqslant m \leqslant k+1$.

Утверждение, аналогичное теореме 3.1, имеет место и для линейных относительных поперечников по Коровкину.

Теорема 3.2. *Пусть $n \geqslant k+2$. Тогда существует число $0 < c_1 \leqslant \leqslant 2^{k-3}/k!$, не зависящее от n, такое, что*

$$\delta_n(B_\infty^{(k+2)}, \Delta^k)_{C^k[0,1]} < c_1 n^{-2}. \tag{3.17}$$

Оценка (3.17) *не может быть улучшена даже на множестве алгебраических многочленов* P_{k+2}, *ограниченных в* $C^{k+2}[0,1]$, *а именно существует число* $c_2 > 0$, *не зависящее от* n, *такое, что справедливо равентсво*

$$c_2 n^{-2} < \delta_n(P_{k+2}, \Delta^k)_{C^k[0,1]}. \tag{3.18}$$

Приведем оценку ошибки приближения формосохраняющими линейными конечномерными методами в пространствах Соболева.

Лемма 3.2. *Пусть оператор* $L : W_\infty^{(k)}[0,1] \to W_\infty^{(k)}[0,1]$ *таков, что* $L(\Delta^k) \subset \Delta^k$ *и* $D^k L e_k = D^k e_k$. *Если* $f \in W_\infty^{(k)}[0,1]$ *такова, что* $\|D^k f\|_\infty \leqslant 1$, *то* $\|D^k L f\|_\infty \leqslant 1$.

Доказательство. Для всякой $f \in W_\infty^{(k)}[0,1]$ такой, что $\|D^k f\|_\infty \leqslant 1$, мы имеем

$$|D^k f(x)| \leqslant 1 = \frac{1}{k!} D^k e_k(x)$$

для почти всех $x \in [0,1]$. Так как $L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k$, для почти всех $x \in [0,1]$ имеет место следующее неравенство: $|D^k L f(x)| \leqslant \dfrac{1}{k!} D^k L e_k(x)$. Следовательно, мы имеем $\|D^k L f\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{k!}\|D^k L e_k\|_\infty$. Из $D^k L e_k = D^k e_k$ следует, что $\|D^k L f\|_\infty \leqslant 1$. □

Другими словами, лемма 3.2 утверждает, что если $L : W_\infty^{(k)}[0,1] \to$ $\to W_\infty^{(k)}[0,1]$ удовлетворяет условиям леммы, тогда $L(B_\infty^{(k)}) \subset B_\infty^{(k)}$.

Теорема 3.3. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\inf_{L_n(\Delta^k)\subset\Delta^k} \sup_{f\in B_\infty^{(k)}} \|f - L_n f\|_\infty \asymp \begin{cases} n^{-2}, & k \geqslant 2, \\ n^{-1}, & k = 1, \end{cases} \tag{3.19}$$

где инфимум ищется среди всех линейных непрерывных операторов L_n, *определенных в* $W_\infty^{(k)}[0,1]$, *со значениями в* $W_\infty^{(k)}[0,1]$, *конечного ранга* n, *удовлетворяющих условиям* $L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k$ *и* $D^k L_n e_k = D^k e_k$.

Доказательство. Имеем (по определению)

$$\inf_{L_n(\Delta^k)\subset\Delta^k} \sup_{f\in B_\infty^{(k)}} \|f - L_n f\|_\infty = \inf_{X_n} \inf_{\substack{L_n(\Delta^k)\,\subset\,\Delta^k \\ L_n\,:\,W_\infty^{(k)}[0,1]\,\to\,X_n}} \sup_{f\in B_\infty^{(k)}} \|f - L_n f\|_\infty,$$

где первый инфимум ищется среди всех n-мерных подпространств X_n пространства $W_\infty^{(k)}[0,1]$, а второй — среди всех непрерывных линейных операторов L_n, определенных в $W_\infty^{(k)}[0,1]$, со значениями в X_n, удовлетворяющих условиям $L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k$ и $D^k L_n e_k = D^k e_k$.

Так как $f \in B_\infty^{(k)}$, из леммы 3.2 следует, что $L_n f \in B_\infty^{(k)}$. Тогда равенство (3.20) влечет

$$\inf_{L_n(\Delta^k)\subset\Delta^k} \sup_{f\in B_\infty^{(k)}} \|f - L_n f\|_\infty \geqslant \inf_{X_n} \sup_{f\in B_\infty^{(k)}} \inf_{g\in B_\infty^{(k)}\cap X_n} \|f-g\|_\infty.$$

В работе В. Н. Коновалова [48] показано, что

$$\inf_{X_n} \sup_{f\in B_\infty^{(k)}} \inf_{g\in B_\infty^{(k)}\cap X_n} \|f-g\|_\infty \asymp \begin{cases} n^{-2}, & k \geqslant 2, \\ n^{-1}, & k = 1. \end{cases}$$

Для завершения доказательства необходимо показать, что существует конечномерный метод $M_{k,n}$, который является оптимальным по порядку для n-поперечника (3.19). Если $k \geqslant 2$, то, как следует из леммы 2.4, линейный оператор $M_{k,n} : W_\infty^{(k)}[0,1] \to W_\infty^{(k)}[0,1]$, определенный в (2.21)–(2.24), обладает необходимыми свойствами и является оптимальным по порядку для n-поперечника (3.19). Если $k = 1$, то оптимальным по порядку будет оператор кусочно-линейной интерполяции с узлами z_j, $j = 0,\dots,n$. □

3.3 Оценка линейных относительных поперечников для операторов, сохраняющих конус $\Delta^{h,k}(\sigma)$

Перейдем к задаче нахождения значения линейных относительных поперечников для операторов L_n конечного ранга n, обладающих свойством формосохранения

$$L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma). \tag{3.20}$$

Такие операторы обладают свойством

$$L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \sigma_p \Delta^p[0,1] \tag{3.21}$$

для любого $h \leqslant p \leqslant k$. Оценки и значения линейных относительных поперечников для этого случая в целом получаются аналогично тому, как они получаются для случая операторов, сохраняющих k-выпуклость. Отметим также, что при $h = k$ оператор, удовлетворяющий условию (3.21), есть оператор, сохраняющий k-выпуклость.

Вначале докажем вспомогательный результат.

Пусть $i \in \{h,\dots,k-1\}$. Обозначим $s(i) := \min\{s > i : \ \sigma_i \neq 0\}$.

Лемма 3.3. *Пусть линейный оператор $L_n : C^k[0,1] \to B^k[0,1]$ есть оператор конечного ранга n, $n > k+2$ такой, что*

$$L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \sigma_k \Delta^k. \tag{3.22}$$

Тогда

$$\frac{1}{k!}\|D^k L_n e_k - D^k e_k\| + 2\sum_{i=k+1}^{k+2} \frac{1}{i!}\|D^k L_n e_i - D^k e_i\| + \\ + \sum_{i=h}^{k-1} \frac{c_i}{i!}\|D^k L_n e_i - D^k e_i\| \geqslant \frac{1}{4n^2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \tag{3.23}$$

где c_i зависят только от h, k, σ.

Доказательство. Пусть система $\{u_j\}_{j=1}^n$ порождает линейное пространство $\{L_n f : f \in C^k[0,1]\}$. Рассмотрим матрицу

$$A = (D^k u_j(z_i))_{j=1,\ldots,n}^{i=0,\ldots,n},$$

где $z_i = i/n$, $i = 0, \ldots, n$. Так как $D^k L_n e_k = D^k e_k$, ранг матрицы A не равен нулю, $\operatorname{rank} A \neq 0$. Возьмем нетривиальный вектор $\delta = (\delta_i)_{i=0}^n$, ортогональный всем строкам матрицы A:

$$\sum_{i=0}^n |\delta_i| = 1, \quad \sum_{i=0}^n \delta_i D^k u_j(z_i) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Определим функцию $\rho \in C^k[0,1]$ таким образом, чтобы
1) $D^k\rho(z_i) = \operatorname{sgn}\delta_i$, $i = 0, \ldots, n$;
2) $D^k\rho$ линейна на каждом из интервалов $[z_0, z_1], \ldots, [z_{n-1}, z_n]$;
3) $D^i\rho(0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Так как функция $D^k L_n \rho$ принадлежит линейному пространству, порожденному системой $\{D^k u_j\}$, мы получаем

$$\sum_{i=0}^n \delta_i D^k L_n \rho(z_i) = 0.$$

Тогда

$$1 = \sum_{i=0}^n |\delta_i| = \sum_{i=0}^n \delta_i D^k\rho(z_i) = \sum_{i=0}^n \delta_i (D^k\rho(z_i) - D^k L_n\rho(z_i)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n} |\delta_i||D^k L_n\rho(z_i) - D^k\rho(z_i)| \leqslant \|D^k L_n\rho - D^k\rho\|. \tag{3.24}$$

С другой стороны, мы имеем для $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |D^k L_n\rho(x) - D^k\rho(x)| = \bigg| D^k L_n\rho(x) - D^k\rho(x)\frac{1}{k!}D^k L_n e_k(x) + \\ + D^k\rho(x)\frac{1}{k!}D^k L_n e_k(x) - D^k\rho(x)\frac{1}{k!}D^k e_k(x)\bigg| \leqslant \\ \leqslant \left| D^k L_n\left(\rho - D^k\rho(x)\frac{1}{k!}e_k\right)(x)\right| + \\ + \frac{1}{k!}|D^k\rho(x)||D^k L_n e_k(x) - D^k e_k(x)|. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Пусть функция $v_x \in C^k[0,1]$ такова, что

1) $D^k v_x = \sigma_k|D^k(\rho - D^k\rho(x)\frac{1}{k!}e_k)|$,

и для $i \leqslant k-1$:

2) $D^i v_x(0) = 0$, если $\sigma_i = 0$;

3) $D^i v_x(0) = 0$, если $\sigma_i \neq 0$ и $\sigma_i = \sigma_{s(i)}$;

4) $D^i v_x(0) = -2\int\limits_0^1 D^{i+1}v_x(z)dz$, если $\sigma_i \neq 0$ и $\sigma_i = -\sigma_{s(i)}$.

Тогда

$$v_x - \left(\rho - D^k\rho(x)\frac{1}{k!}e_k\right) \in \Delta^{h,k}(\sigma)$$

и

$$v_x + \left(\rho - D^k\rho(x)\frac{1}{k!}e_k\right) \in \Delta^{h,k}(\sigma).$$

Из (3.22) следует, что

$$L_n\left(v_x - \left(\rho - D^k\rho(x)\frac{1}{k!}e_k\right)\right) \in \Delta^{h,k}(\sigma^{[k]})$$

и

$$L_n\left(v_x + \left(\rho - D^k\rho(x)\frac{1}{k!}e_k\right)\right) \in \Delta^{h,k}(\sigma^{[k]}),$$

следовательно,

$$\left| D^k L_n\left(\rho - D^k\rho(x)\frac{1}{k!}e_k\right)(x)\right| \leqslant \sigma_k D^k L_n v_x(x). \tag{3.26}$$

Пусть функция $q_x \in C^k[0,1]$ такова, что

1) $D^k q_x(t) = |t-x|$;

и для $i \leqslant k-1$:

2) $D^i q_x(0) = 0$, если $\sigma_i = 0$;

3) $D^i q_x(0) = 0$, если $\sigma_i \neq 0$ и $\sigma_i = \sigma_{s(i)}$;

4) $D^i q_x(0) = -4 \int\limits_0^1 D^{i+1} q_x(z)dz$, если $\sigma_i \neq 0$ и $\sigma_i = -\sigma_{s(i)}$.

Мы имеем

$$\sigma_k D^k v_x(t) = \left| D^k \left(\rho(t) - D^k \rho(x) \frac{1}{k!} e_k(t) \right) \right| =$$
$$= |D^k \rho(t) - D^k \rho(x)| \leqslant 2(n+1)|t-x| = 2n\sigma_k D^k q_x(t)$$

и

$$2nq_x - v_x \in \Delta^{h,k}(\sigma).$$

Из (3.22) следует, что $L_n(2nq_x - v_x) \in \Delta^{h,k}(\sigma^{[k]})$, таким образом,

$$\sigma_k D^k L_n v_x(x) \leqslant 2n\sigma_k D^k L_n q_x(x). \tag{3.27}$$

Из леммы 1.2 (с $\Phi(f) = D^k L_n f(x)$) следует, что

$$\sigma_k D^k L_n q_x(x) \leqslant [D^k L_n g_x(x)]^{\frac{1}{2}} [D^k L_n r(x)]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.28}$$

где $g_x \in \Delta^{h,k}(\sigma)$ есть единственная функция из подпространства

$$\mathrm{span}\ \{e_h, \ldots, e_{k+2}\},$$

которая удовлетворяет условиям

1)$D^k g_x(t) = \sigma_k (t-x)^2$;

и для $i \leqslant k-1$:

2) $D^i g_x(0) = 0$, если $\sigma_i = 0$;

3) $D^i g_x(0) = 0$, если $\sigma_i \neq 0$ и $\sigma_i = \sigma_{s(i)}$;

4) $D^i g_x(0) = -4 \int\limits_0^1 D^{i+1} g_x(z)dz$, если $\sigma_i \neq 0$ и $\sigma_i = -\sigma_{s(i)}$,

$r(x) \in \mathrm{span}\{e_h, \ldots, e_k\}$ есть единственная функция, которая удовлетворяет условиям

1) $D^k r(t) = \sigma_k$;

и для $i \leqslant k-1$:

2) $D^i r(0) = 0$, если $\sigma_i = 0$;

3) $D^i r(0) = 0$, если $\sigma_i \neq 0$ и $\sigma_i = \sigma_{s(i)}$;

4) $D^i r(0) = -4 \int\limits_0^1 D^{i+1} r(z)dz$, если $\sigma_i \neq 0$ и $\sigma_i = -\sigma_{s(i)}$.

Таким образом,

$$g_x = \frac{2}{(k+2)!} e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!} x e_{k+1} + \frac{1}{k!} x^2 e_k + \sum_{i=h}^{k-1} \frac{a_i(x)}{i!} e_i, \tag{3.29}$$

где $a_i(x) = D^i g_x(0)$, $i = 0, \ldots, k-1$,

$$r = \frac{1}{k!} e_k + \sum_{i=h}^{k-1} \frac{b_i}{i!} e_i, \tag{3.30}$$

где $b_i = D^i r(0)$, $i = 0, \ldots, k-1$.

Обозначим $c_i = \max\{\|a_i\|, b_i\}$, $i = 0, \ldots, k-1$.

Мы имеем

$$D^k L_n g_x(x) = \frac{2}{(k+2)!} (D^k L_n e_{k+2} - D^k e_{k+2})(x) -$$

$$- \frac{2}{(k+1)!} x (D^k L_n e_{k+1} - D^k e_{k+1})(x) + \frac{1}{k!} x^2 (D^k L_n e_k - D^k e_k)(x) +$$

$$+ \sum_{i=h}^{k-1} \frac{a_i(x)}{i!} (D^k L_n e_i - D^k e_i). \tag{3.31}$$

Если

$$\frac{1}{k!} \|D^k L_n e_k - D^k e_k\| + \sum_{i=h}^{k-1} \frac{c_i}{i!} \|D^k L_n e_i - D^k e_i\| \leqslant \frac{1}{4n^2}, \tag{3.32}$$

то из (3.24)–(3.31) следует, что

$$\frac{(1 - \frac{1}{4n^2})^2}{4n^2} \leqslant \left(\frac{1}{k!} \|D^k L_n e_k - D^k e_k\| + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{i=k+1}^{k+2} \frac{1}{i!} \|D^k L_n e_i - D^k e_i\| + \sum_{i=h}^{k-1} \frac{c_i}{i!} \|D^k L_n e_i - D^k e_i\| \right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{k!} \|D^k L_n e_k - D^k e_k\| + \sum_{i=h}^{k-1} \frac{c_i}{i!} \|D^k L_n e_i - D^k e_i\| \right),$$

имеет место (3.23). Если (3.32) не выполнено, то (3.23) тем более имеет место. □

Теорема 3.4. *Пусть $n \geqslant k+2$. Тогда существует число $c_1 > 0$, не зависящее от n, такое, что*

$$\delta_n(B_\infty^{(k+2)} \cap \Delta^{h,k}(\sigma), \Delta^{h,k}(\sigma))_{C^k[0,1]} < c_1 n^{-2}. \tag{3.33}$$

Оценка (3.33) не может быть улучшена даже на множестве алгебраических многочленов P_{k+2}, ограниченных в $C^{k+2}[0,1]$, а именно существует число $c_2 > 0$, не зависящее от n, такое, что справедливо равенство

$$c_2 n^{-2} < \delta_n(P_{k+2} \cap \Delta^{h,k}(\sigma), \Delta^{h,k}(\sigma))_{C^k[0,1]}. \tag{3.34}$$

Доказательство. Неравенство (3.33) следует из леммы 2.5. Оценка (3.36) есть следствие леммы 3.3. □

При доказательстве леммы 2.5 показано, что линейный оператор $\Lambda_n^{h,k}$ конечного ранга n удовлетворяет свойствам $\Lambda_n^{h,k}(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma)$ и

$$\sup_{f \in P_m} \|D^i(\Lambda_{k,n} f) - D^i f\| = 0, \quad 0 \leqslant m \leqslant k+1$$

для всех $0 \leqslant i \leqslant k$. Следовательно,

$$\delta_n(P_m \cap \Delta^{h,k}(\sigma), \Delta^{h,k}(\sigma))_{C^k[0,1]} = 0$$

для всех $0 \leqslant m \leqslant k+1$.

Утверждение, аналогичное теореме 3.4, имеет место и для линейных относительных поперечников по Коровкину.

Теорема 3.5. *Пусть $n \geqslant k+2$. Тогда существует число $c_1 > 0$, не зависящее от n, такое, что*

$$\delta_n(B_\infty^{(k+2)}, \Delta^{h,k}(\sigma))_{C^k[0,1]} < c_1 n^{-2}. \tag{3.35}$$

Оценка (3.35) не может быть улучшена даже на множестве алгебраических многочленов P_{k+2}, ограниченных в $C^{k+2}[0,1]$, а именно существует число $c_2 > 0$, не зависящее от n, такое, что справедливо равенство

$$c_2 n^{-2} < \delta_n(P_{k+2}, \Delta^{h,k}(\sigma))_{C^k[0,1]}. \tag{3.36}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, если линейный оператор конечного ранга n сохраняет k-выпуклость (или форму в смысле пересечения конусов выпуклых функций некоторых порядков $\Delta^{h,k}(\sigma)$, взятых с некоторыми знаками), то порядок приближения производных порядка $0 \leqslant i \leqslant k$ непрерывных функций производными этого оператора не может быть лучше, чем n^{-2}, как на множестве P_{k+2}, так и на шаре $B_{\infty}^{(k+2)}$. Это показывает, что свойство сохранения k-выпуклости является негативным в том смысле, что ошибка приближения такими операторами не уменьшается с ростом степени гладкости приближаемых функций. Другими словами, имеет место эффект насыщения для линейных конечномерных операторов, сохраняющих k-выпуклость. Следует отметить, что нелинейная аппроксимация, сохраняющая k-выпуклость, не обладает этим недостатком [64]. С другой стороны, операторы Бернштейна, хотя и являются линейными и сохраняют k-выпуклость, не являются оптимальными при приближении гладких функций [40, 65].

Список литературы

1. *Pál J.* Approksimation of konvekse Funktioner ved konvekse Polynomier // Mat. Tidsskrift. 1925. Vol. B. P. 60–65.
2. *Popoviciu T.* About the Best Polynomial Approximation of Continuous Functions. Mathematical Monography. Sect. Math. Univ. Cluj, 1937. (In Romanian), fasc. III.
3. *Shisha O.* Monotone approximation // Pacific J. Math. 1965. Vol. 15, № 2. P. 667–671.
4. *Lorentz G. G., Zeller K. L.* Degree of approximation by monotone polynomials, I // J. Approx. Theory. 1968. № 1. P. 501–504.
5. *Lorentz G. G., Zeller K. L.* Degree of approximation by monotone polynomials, II // J. Approx. Theory. 1969. № 2. P. 265–269.
6. *DeVore R. A., Yu X. M.* Pointwise estimates for monotone polynomial approximation // Constr. Approx. 1985. Vol. 1. P. 323–331.
7. *Шведов А. С.* Комонотонная полиномиальная аппроксимация функций // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250, № 1. С. 39–42.
8. *Шведов А. С.* Порядок ко-приближения функций алгебраичскими полиномами // Матем. заметки. 1981. Т. 29, № 1. С. 117–130.
9. *Newman D. J.* Efficient comonotone approximation // J. Approx. Theory. 1979. Vol. 25. P. 189–192.
10. *Beatson R. K., Leviatan D.* On comonotone approximation // Canad. Math. Bull. 1983. Vol. 26. P. 220–224.
11. *Lorentz G. G., Zeller K. L.* Monotone approximation by algebraic polynomials // Trans. Amer. Soc. 1970. Vol. 149, № 1. P. 1–18.
12. *Gal S. G.* Shape-Preserving Approximation by Real and Complex Polynomials. Dordrecht : Springer, 2008.
13. Шевчук И. А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев : Наук. думка, 1992.
14. *Квасов Б. И.* Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М. : Физматлит, 2006.
15. *Kopotun K. A., Leviatan D., Prymak A., Shevchuk I. A.* Uniform and Pointwise Shape Preserving Approximation by Algebraic Polynomials // Surv. Approx. Theory. 2011. Vol. 6. P. 24–74.
16. *Kocic L., Milovanovic G.* Shape preserving approximations by polynomials and splines // Comp. & Math. Appl. 1997. Vol. 33, № 11. P. 59 – 97.
17. *Волков Ю. С.* Новый способ построения интерполяционных кубических сплайнов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, № 2. С. 231–241.
18. *Богданов В. В., Волков Ю. С.* Выбор параметров обобщённых кубических сплайнов при выпуклой интерполяции // Сиб. журн. вычисл. матем. 2006. Т. 9, № 1. С. 5–22.
19. *Волков Ю. С., Галкин В. М.* О выборе аппроксимаций в прямых задачах построения сопла // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47, № 5. С. 923–936.
20. *Волков Ю. С., Богданов В. В., Мирошниченко В. Л., Шевалдин В. Т.* Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами // Сиб. журн. вычисл. матем. 2010. Т. 88, № 6. С. 836–844.
21. *Волков Ю. С., Стрелкова Е. В., Шевалдин В. Т.* Локальная аппроксимация сплайнами со смещением узлов // Матем. тр. 2011. Т. 14, № 2. С. 73–82.

22. *Стрелкова Е. В., Шевалдин В. Т.* Формосохранение при аппроксимации локальными экспоненциальными сплайнами произвольного порядка // Сиб. журн. вычисл. матем. 2011. Т. 17, № 3. С. 291–299.
23. *Волков Ю. С., Шевалдин В. Т.* Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 145–152.
24. *Квасов Б. И.* Монотонная и выпуклая интерполяция весовыми кубическими сплайнами // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 10. С. 1610–1621.
25. *Квасов Б. И.* Алгоритмы изогеометрической аппроксимации обобщенными кубическими сплайнами // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36, № 12. С. 3–22.
26. *Шевалдин В.* Аппроксимация локальными сплайнами. Екатеринбург : УрО РАН, 2014.
27. *DeVore R. A.* Monotone Approximation by Splines // SIAM J. Math. Anal. 1977. Vol. 8. P. 891–905.
28. *Hopf E.* Über die Zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differenzenquotienten reeller Funktionen einer reellen Variablen und deren Differenzierbarkeitseigenschaften : Ph. D. thesis / Universität Berlin, 1926.
29. *Popoviciu T.* Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles // Mathematica. 1934. Vol. 8. P. 1–85.
30. *Popoviciu T.* Les Fonctions Convexes. Paris : Hermann & Cie, 1944.
31. *Boas R. P., Widder D. V.* Functions with positive differences // Duke Math. J. 1940. Vol. 7, № 1. P. 496–503.
32. *Altomare F.* Korovkin-type Theorems and Approximation by Positive Linear Operators // Surveys in Approximation Theory. 2010. Vol. 5. P. 92–164.
33. *Коровкин П. П.* О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90, № 5. С. 961–964.
34. *Коровкин П. П.* О порядке приближения функций линейными положительными операторами // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 6. С. 1158–1161.
35. *Gonska H. H.* Quantitative Korovkin type theorems on simultaneous approximation // Mathematische Zeitschrift. 1984. Vol. 186, № 3. P. 419–433.
36. *Knoop H.-B., Pottinger P.* Ein Satz vom Korovkin-Typ fur C^k Raume // Math. Z. 1976. Vol. 148. P. 23–32.
37. *Muñoz-Delgado F. J., Cárdenas-Morales D.* Almost convexity and quantitative Korovkin type results // Appl. Math. Lett. 1998. Vol. 94, № 4. P. 105–108.
38. *Muñoz-Delgado F. J., Ramírez-González V., Cárdenas-Morales D.* Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144–159.
39. *Вороновская Е.* Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. Сер. А. 1932. Т. 4. С. 79–85.
40. *Floater M. S.* On the convergence of derivatives of Bernstein approximation // J. Approx. Theory. 2005. Vol. 134, № 1. P. 130–135.
41. *Sidorov S. P.* On the order of approximation by linear shape-preserving operators of finite rank // East J. on Approx. 2001. Vol. 7, № 1. P. 1–8.

42. *Lewicki G., Prophet M. P.* Minimal Shape-Preserving Projections Onto Π_n : Generalizations and Extensions // Numer. Funct. Anal. Optim. 2006. Vol. 27, № 7–8. P. 847–873.
43. *Boytsov D. I., Sidorov S. P.* Linear approximation method preserving k-monotonicity // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. Vol. 12. P. 21–27.
44. *Tzimbalario J.* Approximation of functions by convexity preserving continuous linear operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 53. P. 129–132.
45. *Karlin S., Stadden W.* Tchebycheff systems : With applications in analysis and statistics. N. Y. : Interscience Publishers John Wiley & Sons, 1966. Vol. XV of Pure and applied mathematics.
46. *Floater M. S.* Error formulas for divided difference expansions and numerical differentiation // J. Approx. Theory. 2003. Vol. 122. P. 1–9.
47. *Leviatan D.* Shape-preserving approximation by polynomials // J. of Comp. and Appl. Math. 2000. Vol. 121. P. 73–94.
48. *Коновалов В. Н.* Оценки диаметров типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. 1984. Т. 35. С. 369–380.
49. *Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.* Точные значения относительных поперечников классов дифференцируемых функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65. С. 871–879.
50. *Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.* Относительные поперечники классов дифференцируемых функций в метрике L^2 // УМН. 2001. Т. 56, № 4. С. 159–160.
51. *Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.* Сплайны и относительные поперечники классов дифференцируемых функций // Теория приближений. Асимптотические разложения : сб. статей / Тр. ИММ УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 208–216.
52. *Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.* Об относительных поперечниках классов дифференцируемых функций // Исследования по теории функций и дифференциальным уравнениям : сб. статей к 100-летию со дня рожд. акад. С. М. Никольского / Тр. МИАН. Т. 248. М. : Наука, 2005. С. 250–261.
53. *Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.* К вопросу о равенстве колмогоровских и относительных поперечников классов дифференцируемых функций // Матем. заметки. 2009. № 86. С. 456–465.
54. *Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.* Уточнение оценок относительных поперечников классов дифференцируемых функций // Теория функций и дифференциальные уравнения : сб. статей к 105-летию со дня рожд. акад. С. М. Никольского / Тр. МИАН. Т. 269. М. : Наука, 2010. С. 242–253.
55. *Gilewicz J., Konovalov V. N., Leviatan D.* Widths and shape-preserving widths of Sobolev-type classes of s-monotone functions // J. Approx. Theory. 2006. Vol. 140, № 2. P. 101–126.
56. *Konovalov V., Leviatan D.* Shape preserving widths of Sobolev-type classes of k-monotone functions on a finite interval // Israel J. Math. 2003. Vol. 133. P. 239–268.
57. *Konovalov V., Leviatan D.* Shape-Preserving Widths of Weighted Sobolev-Type Classes of Positive, Monotone, and Convex Functions on a Finite Interval // Constr. Approx. 2008. Vol. 19. P. 23–58.
58. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // УМН. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.

59. *Sidorov S. P.* Estimates of linear relative n-widths in $L^p[0,1]$ // ATA. 2012. Vol. 28, № 1. P. 1–11.
60. *Sidorov S. P.* Linear relative n-widths of sets of smooth functions // Proc. Intern. Conf. Constructive Theory of Functions, Sozopol–2010. In memory of Borislav Bojanov / eds. G. Nikolov, R. Uluchev. Sofia : Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, 2012. P. 354–362.
61. *Sidorov S. P.* Linear relative n-widths for linear operators preserving an intersection of cones // Intern. J. Math. and Math. 2014. Vol. 2014, Article ID 409219. P. 1–7.
62. *Виденский В. С.* Об одном точном неравенстве для линейных положительных операторов конечного ранга // Докл. АН ТаджССР. 1981. Т. 24, № 12. С. 715–717.
63. *Vasiliev R. K., Guendouz F.* On the order of approximation of continuous functions by positive linear operators of finite rank // J. Approx. Theory. 1992. Vol. 69, № 2. P. 133–140.
64. *Kopotun K., Shadrin A.* On k-Monotone Approximation by Free Knot Splines // SIAM J. Math. Anal. 2003. Vol. 34. P. 901–924.
65. *Cárdenas-Morales D., Garrancho P., Raşa I.* Bernstein-type operators which preserve polynomials // Comput. Math. Appl. 2011. Vol. 62. P. 158–163.

Раздел IV

БАНАХОВЫ ФРЕЙМЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ

ВВЕДЕНИЕ

Определение 0.1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ненулевых элементов пространства H.

Говорят, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *фрейм в гильбертовом пространстве* H, если существуют постоянные $0 < A \leqslant B < \infty$ такие, что для любого вектора $h \in H$ справедливы неравенства

$$A\|h\|_H^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |(h, \varphi_n)|^2 \leqslant B\|h\|_H^2. \tag{0.1}$$

Понятие *фрейма* введено Даффином (R. J. Duffin), Шеффером (A. C. Schaeffer) [1] в 1952 году в связи с изучением негармонических рядов Фурье, т. е. рядов по системе экспонент $\{e^{i\lambda_n t}\}$ с непериодическим спектром $\lambda_n \neq 2\pi n$. Несколькими годами ранее, в 1946 г., последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства, для которой выполняются неравенства (0.1), была рассмотрена в работах Бари [2,3] под названием *система Рисса – Фишера* в контексте исследований по базисам и биортогональным системам гильбертова пространства, что, в свою очередь, было мотивировано проблемами теории несамосопряженных операторов.

Положительные постоянные A и B в неравенстве (0.1) называют *нижней и верхней границей фрейма* соответственно, а сами неравенства (0.1) — *фреймовыми* или *рамочными неравенствами*. Понятно, что фреймовые неравенства можно рассматривать как обобщение классического равенства Парсеваля – Стеклова для ортонормированного базиса

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(h, \varphi_n)|^2 = \|h\|_H^2. \tag{0.2}$$

Определение 0.2. Фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H, для которого совпадают нижняя и верхняя границы $A = B$, называют *жестким фреймом*. Если $A = B = 1$, т. е. выполняется равенство (0.2), то $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют *фреймом Парсеваля – Стеклова*.

Связь между ортонормированными базисами и фреймами Парсеваля – Стеклова устанавливает следующий результат, который является прямым следствием теоремы Наймарка [4] об обобщенном спектральном разложении, полученной в 1940 г.

Теорема 0.1 (Наймарк)**.** *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фрейм Парсеваля – Стеклова в гильбертовом пространстве H. Тогда существуют объемлющее гильбертово пространство $H' \supset H$ (содержащее исходное пространство H в качестве своего замкнутого подпространства) и ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве H' такие, что*

$$\varphi_n = \pi e_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{0.3}$$

где π — оператор ортогонального проектирования из H' на H.

Заметим, что обратное к теореме Наймарка утверждение очевидно: если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H' и π — ортопроектор из H' на подпространство H, то последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, заданная равенством (0.3), образует фрейм Парсеваля – Стеклова в H после удаления из нее нулевых элементов.

Таким образом, теорема Наймарка дает исчерпывающее описание фреймов Парсеваля – Стеклова как ортопроекций ортонормированных базисов. Аналогичное описание фреймов общего вида как ортогональных проекций базисов Рисса было получено независимо в работах Кашина и Куликовой [5], Касазза (P. G. Casazza), Хана (D. Han), Ларсона (D. R. Larson) [6].

Определение 0.3. Последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H называется *базисом Рисса*, если существуют обратимый ограниченный оператор $A : H \to H$ и ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве H такие, что

$$\psi_n = A e_n, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 0.2 (Кашин, Куликова; Касазза, Хан, Ларсон)**.** *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фрейм в гильбертовом пространстве H. Тогда существуют объемлющее гильбертово пространство $H' \supset H$ и базис Рисса $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве H' такие, что*

$$\varphi_n = \pi \psi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{0.4}$$

где π — оператор ортогонального проектирования из H' на H.

Обратное утверждение очевидно: если $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис Рисса в гильбертовом пространстве H' и π — ортопроектор из H' на подпространство H, то последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, заданная равенством (0.4), образует фрейм в H после удаления из нее нулевых элементов.

Сформулированные проекционные описания фреймов Парсеваля – Стеклова и фреймов Даффина – Шеффера общего вида не только полезны с теоретической точки зрения для решения различных задач теории функций и функционального анализа (негармонических рядов Фурье, теории всплесков, теории операторов, геометрии нормированных пространств), но и находят свое практическое приложение в вычислительной математике, квантовой теории информации, теории сигналов и вопросах обработки, хранения и передачи информации.

Фреймы Даффина – Шеффера обладают, кроме их проекционного описания, целым рядом важных свойств. Укажем на некоторые их них. Эти и другие свойства фреймов Даффина – Шеффера изложены в монографиях Янга (R. M. Young) [7], Добеши (I. Daubechies) [8] (русский перевод — [9]) и Кристенсена (O. Christensen) [10] (см. также книгу Новикова, Протасова, Скопиной [11]).

Теорема 0.3. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фрейм в гильбертовом пространстве H. Тогда существует двойственный фрейм $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H такой, что для любого вектора $h \in H$ справедливо представление*

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, \widetilde{\varphi}_n) \varphi_n. \tag{0.5}$$

При этом если для некоторой числовой последовательности $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет место представление $h = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} |(h, \widetilde{\varphi}_n)|^2. \tag{0.6}$$

Двойственный фрейм $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}$ к фрейму $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяется по формуле

$$\widetilde{\varphi}_n = T^{-1} \varphi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где *фреймовый* или *рамочный оператор* $T : H \to H$ дается равенством

$$Th = \sum_{n=1}^{\infty} (h, \varphi_n) \varphi_n.$$

Из фреймовых неравенств (0.1) непосредственно следует, что T — положительно определенный самосопряженный оператор со спектром $\sigma(T) \subset [A, B]$.

С каждым фреймом $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ассоциирован *оператор анализа* $R : H \to \ell^2$, определяемый равенством

$$Rh = \{(h, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}, \qquad h \in H,$$

и *оператор синтеза* $S : \ell^2 \to H$, определяемый равенством

$$S\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n, \qquad \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2.$$

Операторы анализа и синтеза сопряжены друг к другу, причем $T = SR$.

Обозначим $\widetilde{R}$, $\widetilde{S}$ и $\widetilde{T}$ — оператор анализа, оператор синтеза и фреймовый оператор соответственно, ассоциированные с двойственным фреймом $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда

$$S\widetilde{R} = I, \qquad \widetilde{S}R = I, \qquad \widetilde{T} = T^{-1},$$

где I — тождественный оператор в H и третье равенство означает, что переход к двойственному фрейму является инволюцией, т. е. исходный фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ также является двойственным по отношению к $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Представление (0.5) называется разложением вектора h по фрейму $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Наряду с разложением вектора по фрейму, вообще говоря, существуют и другие представления этого вектора в виде суммы ряда по элементам фрейма $h = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$. Неравенство (0.6) теоремы 0.3 показывает, что разложение (0.5) является самым «экономичным». Это свойство называют *минимальностью* ℓ^2-нормы коэффициентов разложения по фрейму.

Кроме двойственного фрейма $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}$, в общем случае фрейм обладает широким семейством *альтернативных дуальных фреймов*, т. е. таких фреймов $\{\varphi'_n\}_{n=1}^{\infty}$, что для каждого вектора $h \in H$ выполняется аналог разложения (0.5): $h = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (h, \varphi'_n)\varphi_n$. В том случае, если разложение по фрейму является единственно возможным представлением для каждого вектора h, то фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса и двойственный фрейм $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}$ совпадает с биортогонально сопряженной системой (двойственным базисом Рисса) к нему. Из теоремы 0.3 следует тот принципиально важный факт, что всякий фрейм Даффина – Шеффера является *системой представления*. Последнее означает, что для каждого вектора $h \in H$ существует числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $h = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$. Это обстоятельство открывает широкие возможности для применения фреймов к решению задач о представлении функций рядами по конкретным системам функций в различных функциональных пространствах.

Фреймам Даффина – Шеффера посвящена монография Кристенсена [10]. В ней изложена общая теория фреймов и базисов Рисса, а также значительное место уделено построению фреймов экспонент, сдвигов, всплесков и др. Эта монография содержит также обширную библиографию по фреймам.

Важным этапом развития теории фреймов стало доказательство в 2013 году справедливости гипотезы Файхтингера: *всякий почти нормированный фрейм является объединением конечного числа последовательностей Рисса*, которая эквивалентна широко известной в функциональном анализе гипотезе Кадисона – Зингера.

В последние годы наблюдается нарастающий интерес со стороны широкого круга математиков во всем мире к теории фреймов. В частности, одним из направлений ее развития является построение теории банаховых фреймов, что открывает новые возможности для применения теории фреймов к решению различных задач теории функций, функционального анализа, вычислительной математики, дифференциальных уравнений и т. д.

В разделе IV будут рассмотрены вопросы построения теории фреймов в банаховом пространстве с точки зрения задачи о представлении функций рядами. В качестве иллюстрации общей теории будут приведены конструкции фреймов на основе аффинных систем функций в различных функциональных банаховых пространствах.

1 ФРЕЙМЫ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть F — сепарабельное банахово пространство, $G = F^*$ — сопряженное пространство. Кроме того, рассмотрим некоторое банахово пространство X, состоящее из числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение 1.1. Пространство числовых последовательностей X назовем *модельным пространством*, если система канонических ортов

$$\varepsilon_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{\infty}, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

образует базис пространства X. Здесь δ_{ij} — символ Кронекера.

Базис из канонических ортов $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют *естественным базисом.*

Модельными пространствами являются, например, пространство числовых последовательностей ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$, пространство c_0 сходящихся к нулю числовых последовательностей, пространство Орлича ℓ^M (в том случае, когда функция $M(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию), пространство Лоренца d_w, а также их весовые аналоги, прямые произведения, пространства со смешанными нормами и т. д. Пространство ℓ^∞ не сепарабельно и поэтому не будет модельным. В качестве примера сепарабельного пространства, не являющегося модельным, можно привести пространство c сходящихся последовательностей.

Укажем универсальный способ построения модельных пространств. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ненулевых элементов банахова пространства F. Напомним, что *пространством коэффициентов* последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют пространство $X(\varphi)$, состоящее из всех числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n$ сходится в F, снабженное нормой

$$\|x\|_{X(\varphi)} = \sup_{n\geqslant 1}\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\varphi_k\right\|_F .$$

Пространство коэффициентов $X(\varphi)$ полно относительно этой нормы, и система канонических ортов $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис пространства $X(\varphi)$. Таким образом, всякое пространство последовательностей является модельным. С другой стороны, всякое модельное пространство X будет пространством последовательностей $X(\varepsilon)$ для своего естественного базиса $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, причем

$$\|x\|_X \leqslant \|x\|_{X(\varepsilon)} \leqslant K\|x\|_X ,$$

где K — константа Банаха естественного базиса, т. е. пространства совпадают как множества $X = X(\varepsilon)$ и имеют эквиалентные нормы.

Координатные функционалы $l_n(x) = x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны на модельном пространстве X. Поэтому всякое модельное пространство является *BK-пространством.* Сопряженное пространство X^* к модельному пространству допускает реализацию в виде банахова пространства Y, состоящего из числовых последовательностей $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|y\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| < \infty.$$

Изометрический изоморфизм $X^* \sim Y$ ставит в соответствие непрерывному линейному функционалу l на модельном пространстве X последовательность $\{l(\varepsilon_n)\}_{n=1}^{\infty}$ значений этого функционала на элементах естественного базиса $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$. При этом

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

— общий вид непрерывного линейного функционала на X. Принадлежность $y \in Y$ равносильна условию $\|y\|_Y < \infty$. Данный факт позволяет избежать обсуждения вопроса о принадлежности числовой последовательности пространству Y после проверки конечности нормы этой последовательности, что будет использовано в дальнейшем.

Перейдем к определению понятия фрейма в банаховом пространстве. В 1991 году Грохенигом (K. Gröchenig) [12] были введены понятия *банахова фрейма* и *атомарного разложения.* В 1999 году в работах [6, 13] были предложены другие определения *фрейма*, а также *фрейма Шаудера*, *фрейминга* и *модели фрейминга* в ситуации банахова пространства. В 2005 году Касазза, Кристенсен, Стоева (D. T. Stoeva) [14] ввели понятие *X_d-фрейма.* Позднее рассматривались различные варианты этих определений, которых в настоящее время насчитывается более десяти (близких между собой, но попарно не эквивалентных). В работах П. А. Терехина [15–25] предложен иной, двойственный подход к определению понятия фрейма в банаховом пространстве, принципиально отличный от других известных определений и идейно основанный на исследованиях Бари [2, 3] по биортогональным системам и базисам гильбертова пространства. Начнем с формулировки определения, установим некоторые свойства фреймов, а затем обсудим основные отличия нашего определения от ранее известных.

Определение 1.2. Скажем, что последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \subset F \setminus \{0\}$ является *фреймом в банаховом пространстве* F *относительно модельного пространства* X, если существуют постоянные $0 < A \leqslant \leqslant B < \infty$ такие, что для любого непрерывного линейного функционала $g \in G$ последовательность его коэффициентов Фурье $\{(\varphi_n, g)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$A\|g\|_G \leqslant \|\{(\varphi_n, g)\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \leqslant B\|g\|_G. \tag{1.1}$$

Неравенства (1.1) будем называть *рамочными*.

Если $F = G = H$ — гильбертово пространство и $X = Y = \ell^2$, то рамочные неравенства (1.1) совпадают с неравенствами (0.1) из классического определения фрейма Даффина – Шеффера. Таким образом, понятие фрейма в смысле определения 1.2 является обобщением фрейма Даффина – Шеффера для ситуации банахова пространства.

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X.

Синтезирующим оператором (или *оператором синтеза*) называется линейный оператор $S : X \to F$, заданный равенствами

$$S\varepsilon_n = \varphi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{1.2}$$

Анализирующим оператором (или *оператором анализа*) называется линейный оператор $R : G \to Y$, заданный равенством

$$Rg = \{(g, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}. \tag{1.3}$$

Синтезирующий оператор $S : X \to F$ — ограниченный. Сопряженным к синтезирующему оператору $S : X \to F$ является анализирующий оператор $R : G \to Y$.

Теорема 1.1 (о представлении). *Пусть* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— фрейм в банаховом пространстве* F *относительно модельного пространства* X.

Тогда для любого вектора $f \in F$ *найдется числовая последовательность* $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ *такая, что справедливо представление*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n. \tag{1.4}$$

Сформулированная теорема 1.1 показывает, что всякий фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X автоматически является системой представления. Верно также и в некотором смысле обратное утверждение.

Теорема 1.2. *Всякая система представления $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ является фреймом в банаховом пространстве F относительно своего пространства коэффициентов $X(\varphi)$.*

Итак, всякий фрейм является системой представления и, наоборот, всякая система представления является фреймом, но, возможно, относительно разных модельных пространств. Таким образом, чтобы доказать, что некоторая система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует систему представления в некотором банаховом пространстве F, достаточно установить рамочные неравенства вида (1.1). При этом, подбирая модельное пространство, можно получить дополнительную информацию о коэффициентах представляющего ряда.

Теоремы 1.1 и 1.2 указывают на универсальность понятия фрейма в банаховом пространстве, введенного определением 1.2, для общих вопросов представления функций рядами.

1.1 Проекционные характеристики фреймов

Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис банахова пространства F' и P — непрерывный линейный проектор из пространства F' на замкнутое подпространство $F \subset F'$. Очевидно, что система элементов $\varphi_n = P\psi_n$, $n = 1, 2, \dots,$ является системой представления в пространстве F и после удаления нулевых элементов образует фрейм в банаховом пространстве F относительно пространства коэффициентов $X(\psi)$ исходного базиса.

Рассмотрим обратную задачу:

при выполнении каких условий фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X является непрерывной линейной проекцией базиса $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ объемлющего банахова пространства $F' \supset F$, пространство коэффициентов которого совпадает с исходным модельным пространством: $X(\psi) = X$?

В случае если $F = H$ — гильбертово пространство и $X = \ell^2$, то фрейм в H относительно ℓ^2 суть классический фрейм Даффина – Шеффера, который является ортогональной проекцией базиса Рисса объемлющего гильбертова пространства согласно результатам работ [5, 6].

Очевидно, что для фреймов в банаховом пространстве непосредственный аналог упомянутого результата не имеет места. Основное препятствие возникает уже в геометрии банахова пространства F, содержащего фрейм, который является проекцией базиса объемлющего пространства. Именно такое пространство F будет дополняемым подпространством банахова пространства с базисом, что равносильно тому, что пространство F обладает ограниченным аппроксимационным свойством [26, 27]. Существуют и другие препятствия геометрического характера. Например, будет показано, что

если модельное пространство X является примарным и банахово пространство F не изоморфно X: $F \ncong X$, то ни один фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве F относительно X не может быть проекцией базиса $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ объемлющего банахова пространства, для которого $X(\psi) = X$.

Напомним, что банахово пространство X называется *примарным,* если каждое его бесконечномерное дополняемое подпространство изоморфно X.

Определение 1.3. *Проекционным фреймом* назовем такой фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства F относительно модельного пространства X, для которого существуют объемлющее банахово пространство $F' \supset F$, включающее в себя исходное пространство F в качестве дополняемого замкнутого подпространства, базис $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства F', пространство коэффициентов которого совпадает с модельным пространством фрейма: $X(\psi) = X$, и непрерывный линейный проектор $P : F' \to F$ из пространства F' на пространство F такие, что

$$\varphi_n = P\psi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Для того чтобы сформулировать критерий проекционного фрейма, нам потребуется следующее

Определение 1.4. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X.

Обозначим через $N = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X : \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n = 0 \right\}$ *пространство коэффициентов нуль-рядов* фрейма $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Понятно, что N — замкнутое подпространство модельного пространства X.

Теорема 1.3. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X.*

Тогда $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — проекционный фрейм в том и только том случае, когда пространство коэффициентов нуль-рядов N является дополняемым подпространством модельного пространства X.

Если $X = \ell^2$ — гильбертово пространство, то всякое его подпространство дополняемо, следовательно, любой фрейм относительно модельного пространства ℓ^2 будет проекцией базиса объемлющего гильбертова (так как по построению $F' \cong X$) пространства. Поскольку пространством коэффициентов этого базиса является ℓ^2, то это базис Рисса. Тем самым мы проходим к проекционному результату [5, 6].

Обозначим через $G' = F'^*$ пространство, сопряженное к объемлющему простанству F'. Тогда для любого непрерывного линейного функционала $g' \in G'$ последовательность его коэффициентов Фурье $\{(g', \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ по базису $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет удовлетворять рамочным неравенствам вида

$$A'\|g'\|_{G'} \leqslant \|\{(g', \psi_n)\}\|_Y \leqslant B'\|g'\|_{G'}$$

с рамочными константами A' и B', зависящими от границ A, B исходного фрейма $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и от выбора нормы для прямой суммы $F' = F \oplus N$. Можно проверить, что в рассмотренной ситуации, при которой $X = \ell^2$, при следующем выборе упомянутой нормы

$$\|(f, x)\|_{F'} = \sqrt{\|f\|_F^2 + \|jx\|_N^2},$$

где $f \in F$, $x \in N$, $j : N \to N$ — произвольный изоморфизм со свойством $A\|x\|_N \leqslant \|jx\|_N \leqslant B\|x\|_N$ и норма $\|\cdot\|_F$ индуцирована скалярным произведением, имеем $A' = A$ и $B' = B$.

Определение 1.5. Дефектом фрейма $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X назовем размерность пространства коэффициентов нуль-рядов N.

Теорема 1.4. *Всякий фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X с конечным дефектом $\dim N < \infty$ является проекционным.*

Теорема 1.5. *Пусть модельное пространство X является примарным и банахово пространство F не изоморфно X: $F \ncong X$.*

Тогда ни один фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве F относительно X не является проекционным.

Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства. Запись $E_1 \overset{c}{\hookrightarrow} E_2$ означает, что пространство E_1 изоморфно дополняемому подпространству пространства E_2. Если $E_1 \overset{c}{\hookrightarrow} E_2$ и $E_2 \overset{c}{\hookrightarrow} E_1$, то пишут $E_1 \overset{c}{\sim} E_2$.

Говорят, что пространство E_1 удовлетворяет *свойству Шредера – Бернштейна,* если всякий раз, когда пространство E_2 удовлетворяет условию $E_1 \overset{c}{\sim} E_2$, имеет место изоморфизм $E_1 \cong E_2$.

Теорема 1.6. *Пусть по крайней мере одно из пространств X или F удовлетворяет свойству Шредера – Бернштейна.*

Пусть $X \overset{c}{\hookrightarrow} F$, но $X \ncong F$.

Тогда ни один фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве F относительно X не является проекционным.

Рассмотрим теперь более общий вопрос, чем нахождение условий проекционности фрейма:
при выполнении каких условий система представления в банаховом пространстве является непрерывной линейной проекцией базиса объемлющего банахова пространства?
— без дополнительных условий на пространство коэффициентов этого базиса.

Теорема 1.7. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ — система представления в банаховом пространстве F.*

Тогда для существования базиса $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ объемлющего банахова пространства $F' \supset F$, включающего в себя пространство F в качестве дополняемого замкнутого подпространства такого, что

$$\varphi_n = P\psi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

для некоторого непрерывного линейного проектора $P : F' \to F$ из пространства F' на пространство F необходимо и достаточно, чтобы пространство коэффициентов нуль-рядов $N(\varphi)$ было дополняемым подпространством пространства коэффициентов $X(\varphi)$ этой системы.

1.2 Линейные алгоритмы разложения по фрейму

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X.

Скажем, что имеет место *линейный алгоритм* разложения по фрейму $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, если существует система $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ непрерывных линейных функционалов на пространстве F такая, что для любого вектора

$f \in F$ числовая последовательность $\{(f, \widetilde{\varphi}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит пространству X и справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \widetilde{\varphi}_n)\varphi_n. \qquad (1.5)$$

Для фреймов Даффина – Шеффера в гильбертовом пространстве всегда имеет место линейный алгоритм.

Найдем условия существования линейного алгоритма разложения по фрейму в банаховом пространстве.

Напомним, что ограниченный линейный оператор $L : E_1 \to E_2$ называется *ретракцией,* если существует ограниченный линейный оператор $L' : E_2 \to E_1$, называемый *коретракцией,* такой что $LL'y = y$ для всех $y \in E_2$.

Очевидно, что каждая ретракция $L : E_1 \to E_2$ является сюръективным оператором, т. е. отображением пространства E_1 на пространство E_2, так как для любого $y \in E_2$ существует $x = L'y \in E_1$, для которого $Lx = LL'y = y$.

Будем говорить, что ограниченный линейный оператор $L : E_1 \to E_2$ является *проекцией изоморфизма,* если существуют объемлющее банахово пространство $E_3 \supset E_2$, включающее в себя пространство E_2 в качестве дополняемого замкнутого подпространства, изоморфизм $J : E_1 \to E_3$ и непрерывный линейный проектор $P : E_3 \to E_2$ такие, что $L = PJ$.

Нам потребуется следующий факт учебного характера.

Лемма 1.1. *Пусть $L : E_1 \to E_2$ — ограниченный линейный оператор, отображающий банахово пространство E_1 на банахово пространство E_2.*

Тогда следующие условия эквивалентны:

1) *оператор L является ретракцией;*

2) *оператор L является проекцией изоморфизма;*

3) *ядро $Ker(L)$ дополняемо в пространстве E_1.*

Лемма 1.2. *Для существования линейного алгоритма разложения по фрейму $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X необходимо и достаточно, чтобы синтезирующий оператор $S : X \to F$ был ретракцией.*

Теорема 1.8. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X.*

Тогда для существования линейного алгоритма разложения по фрейму $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ необходимо и достаточно, чтобы этот фрейм являлся проекционным.

1.3 Другие определения фрейма

Теперь перейдем к изложению различных подходов к определению понятия фрейма для случая банаховых пространств. Впервые с достаточной степенью общности вопрос о распространении понятия фрейма Даффина – Шеффера на банаховы пространства был рассмотрен в работе Грохенига [12], датированной 1991 годом. Воспроизведем здесь принадлежащие Грохенигу определения понятий атомарного разложения (atomic decomposition) и банахова фрейма (Banach frame).

Определение 1.6. *Атомарным разложением* банахова пространства F относительно пространства последовательностей X называется упорядоченная пара $(\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty})$ систем $\widetilde{\varphi} \subset F \setminus \{0\}$ и $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F^* \setminus \{0\}$ ненулевых элементов пространства F и сопряженного к нему пространства F^* соответственно, для которых выполняются следующие условия:

1) для всех $f \in F$ числовая последовательность $\{(f, \widetilde{\varphi}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит пространству X;

2) существуют положительные постоянные $A, B > 0$ такие, что для всех $f \in F$ выполняются неравенства

$$A\|f\|_F \leqslant \|\{(f, \widetilde{\varphi}_n)\}\|_X \leqslant B\|f\|_F; \tag{1.6}$$

3) для любого вектора $f \in F$ справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \widetilde{\varphi}_n)\varphi_n. \tag{1.7}$$

Понятно, что в том случае, когда $F = F^* = H$ — гильбертово пространство и $X = \ell^2$, неравенства (1.6) из определения атомарного разложения превращаются (с точностью до извлечения квадратного корня из постоянных A и B) в неравенства (0.1) из определения фрейма Даффина – Шеффера, записанные для системы $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}$. В этом смысле понятие атомарного разложения является обобщением понятия фрейма.

Заметим, что в общем случае банахова пространства F неравенства (1.6) не обеспечивают справедливость теоремы о представлении так, как это имеет место для фреймов Даффина – Шеффера. Поэтому выполнение представления (1.7) приходится постулировать дополнительно посредством условия 3).

Общая теория атомарного разложения в функциональных пространствах, тесно связанная с вопросами теории представлений групп, была развита в работах [28–31].

Следующее определение понятия банахова фрейма обобщает понятие атомарного разложения.

Определение 1.7. *Банаховым фреймом* для банахова пространства F относительно пространства последовательностей X называется упорядоченная пара $(\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}, S)$, где $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F^* \setminus \{0\}$ — система ненулевых элементов сопряженного пространства F^* и $S : X \to F$ — ограниченный линейный оператор, для которых выполняются следующие условия:

1) для всех $f \in F$ числовая последовательность $\{(f, \widetilde{\varphi}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит пространству X;

2) существуют положительные постоянные $A, B > 0$ такие, что для всех $f \in F$ выполняются неравенства (1.6);

3) для любого вектора $f \in F$ справедливо равенство

$$f = S\{(f, \widetilde{\varphi}_n)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Очевидно, что последнее равенство обобщает представление (1.7) из определения атомарного разложения. С другой стороны, в работе [6] показано, что содержание понятий атомарного разложения и банахова фрейма одинаково, если система канонических ортов $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис пространства коэффициентов X, а именно если $(\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}, S)$ — банахов фрейм, то $(\{S\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty})$ — соответствующее атомарное разложение.

Как отмечается в работе [6], следующий проекционный результат основан на классической конструкции Пелчинского (A. Pelczynski) [26]: *всякое атомарное разложение $(\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty})$ в банаховом пространстве F относительно пространства последовательностей X является проекцией базиса $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ объемлющего банахова пространства $F' \supset F$,* точнее, существуют банахово пространство F', включающее в себя исходное пространство F в качестве дополняемого замкнутого подпространства, базис $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства F' и непрерывный линейный проектор P из пространства F' на подпространство F такие, что

$$\varphi_n = P\psi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{1.8}$$

В работе [13] введено понятие *фрейма Шаудера* как такой системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства F, для которой существуют базис (базис Шаудера) $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ объемлющего банахова пространства $F' \supset F$ и непрерывный линейный проектор $P : F' \to F$ такие, что выполняются проекционные соотношения (1.8). Таким образом, фреймы Шаудера $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ — это в точности те системы, для которых существует система $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F^*$ такая, что $(\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty})$ — атомарное разложение в банаховом пространстве F относительно некоторого пространства последовательностей X. Аналогичный смысл имеет понятие *безусловного фрейма Шаудера,* также введенное в [13]. Подробный анализ взаимосвязи между рассмотренными понятиями фрейма Даффина – Шеффера, атомарного разложения и банахова фрейма по Грохенигу, (безусловного) фрейма Шаудера имеется в работе [6]. Отметим, что все перечисленные понятия основаны, прямо или косвенно, на том обобщении неравенств (0.1) из определения фрейма Даффина – Шеффера, которое дается неравенствами (1.6) из определения атомарного разложения по Грохенигу.

Далее, возвращаясь к вопросу о распространении понятия фрейма на случай системы элементов банахова пространства, обратим внимание на возникающую неоднозначность в прочтении двойственности (h, φ_n):

– с одной стороны, можно говорить о *выборке значений* последовательности непрерывных линейных функционалов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ на векторе h;

– с другой — о *коэффициентах Фурье* непрерывного линейного функционала h по системе векторов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Первый подход реализуется посредством неравенств (1.6) из определения атомарного разложения, а второй — посредством неравенств (1.1) из определения 1.2. Эти подходы не являются эквивалентными, даже если мы ограничимся рассмотрением рефлексивных банаховых пространств.

Наконец, сравнивая неравенства (1.6) и (1.1), отметим, что первые представляют собой в определенном смысле сэмплинг-теорему и, безусловно, полезны в вопросах характеризации принадлежности функций конкретным функциональным пространствам в терминах дискретных выборок значений функционалов, а вторые, как нами было показано, имеют непосредственное отношение к задаче о представлении функций рядами.

2 ФРЕЙМЫ В ЗАДАЧЕ АФФИННОГО СИНТЕЗА

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ и b — невырожденные вещественные $d \times d$-матрицы такие, что

$$\lim_{j\to\infty} a_j^{-1} = 0.$$

Аффинной системой, порожденной функцией $\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, будем называть семейство функций

$$\psi_{j,k}(x) = |\det a_j|^{1/2}\psi(a_j x - bk), \qquad j \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Под задачей *аффинного синтеза* мы понимаем задачу представления произвольной функции f из некоторого функционального пространства $F = F(\mathbb{R}^d)$ посредством ряда по элементам аффинной системы

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{j,k}\psi_{j,k},$$

коэффициенты $\{c_{j,k}\}_{j\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{Z}^d}$ которого принадлежат некоторому пространству числовых семейств X.

Понятно, что тип сходимости представляющего функцию f ряда должен быть уточнен в каждой конкретной ситуации.

Положительное решение задачи аффинного синтеза равносильно корректной определенности и сюръективности *синтезирующего оператора* $S : X \to F$, заданного равенством

$$Sc = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{j,k}\psi_{j,k}.$$

Согласно известной двойственности между инъективными и сюръективными операторами в банаховых пространствах желаемые свойства синтезирующего оператора являются следствием ограниченности и инъективности сопряженного к нему *анализирующего оператора* $R : G \to Y$, заданного равенством

$$Rg = \{(g, \psi_{j,k})\}_{j\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{Z}^d},$$

где $G = F^*$ и $Y = X^*$ — сопряженные пространства, реализуемые при определенных условиях как функциональное пространство $G = G(\mathbb{R}^d)$ и некоторое пространство числовых семейств Y соответственно. Далее, условия ограничености и инъективности анализируещего оператора R могут быть записаны в виде *рамочных неравенств*

$$A\|g\|_G \leqslant \|\{(g, \psi_{j,k})\}\|_Y \leqslant B\|g\|_G$$

с некоторыми постоянными $0 < A \leqslant B < \infty$.

Таким образом, положительное решение задачи аффинного синтеза обеспечивают рамочные неравенства указанного вида.

Наш метод получения рамочных неравенств будет основан на нахождении предельных соотношений для коэффициентов Фурье $\{(g, \psi_{j,k})\}_{j\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{Z}^d}$, которые, в свою очередь, будут получены как следствие результатов об ограниченности и сходимости дискретных матричных аналогов средних Соболева.

2.1 Дискретные матричные аналоги средних Соболева

Пусть функция $\psi \in L_1 \cap L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, dx = 1. \tag{2.1}$$

Для функции $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1/p + 1/q = 1$, и положительного числа $\varepsilon > 0$ обозначим

$$g * \psi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x+y)\varepsilon^{-d}\psi(y/\varepsilon)\, dy$$

ε-усреднение функции g по Соболеву [32].

Известно (см., например, [33]), что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|g * \psi_\varepsilon - g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Нетрудно видеть, что аналогичное предельное соотношение сохранится после замены скалярного параметра ε на матричный параметр a, точнее, на a^{-1}:

$$\lim_{a^{-1}\to 0} \|g * \psi_a - g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = 0,$$

где

$$g * \psi_a(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x+y)|\det a|\psi(ay)\, dy$$

и a — невырожденная вещественная матрица $d \times d$.

Далее рассмотрим значения функции $g * \psi_a(x)$ в узлах $x = a^{-1}bk$, $k \in \mathbb{Z}^d$, решетки $a^{-1}b\mathbb{Z}^d$. Будем иметь

$$g * \psi_a(a^{-1}bk) = \int_{\mathbb{R}^d} g(a^{-1}bk + y)|\det a|\psi(ay)\,dy \quad [a^{-1}bk + y = z] =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(z)|\det a|\psi(az - bk)\,dz.$$

В частности, полагая $a = a_j$, согласно определению аффинной системы получим

$$g * \psi_{a_j}(a_j^{-1}bk) = \int_{\mathbb{R}^d} g(z)|\det a_j|\psi(a_j z - bk)\,dz = |\det a_j|^{1/2}(g, \psi_{j,k}).$$

Для каждого $j \in \mathbb{N}$ построим кусочно-постоянную функцию $g_j(x)$, принимающую значение $g * \psi_{a_j}(a_j^{-1}bk)$ на параллелотопах вида

$$Q_{j,k} = \{x : [b^{-1}a_j x] = k\}, \quad k \in \mathbb{Z}^d,$$

где $[x] = ([x_1], \ldots, [x_d])$ для вектора $x = (x_1, \ldots, x_d)$, причем $[x_\nu]$ — целая часть числа x_ν, $\nu = 1, \ldots, d$. Искомыми будут функции

$$g_j(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_j x] + y)|\det a_j|\psi(a_j y)\,dy, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Действительно, при $x \in Q_{j,k}$ имеем

$$g_j(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(a_j^{-1}bk + y)|\det a_j|\psi(a_j y)\,dy = g * \psi_{a_j}(a_j^{-1}bk).$$

Последовательность функций g_j назовем *дискретными матричными аналогами средних Соболева* функции g.

Найдем условия принадлежности функций g_j пространству $L_q(\mathbb{R}^d)$.

Лемма 2.1. *Имеет место равенство*

$$\|g_j\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = |\det a_j|^{1/2-1/q}\left(|\det b|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|(g, \psi_{j,k})|^q\right)^{1/q}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Непосредственным вычислением получаем

$$\|g_j\|^q_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d}|g_j(x)|^q\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{Q_{j,k}}|g_j(x)|^q\,dx =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\det a_j|^{q/2} |(g,\psi_{j,k})|^q \operatorname{mes} Q_{j,k} =$$
$$= |\det a_j|^{q(1/2-1/q)} |\det b| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |(g,\psi_{j,k})|^q.$$

Здесь учли, что при замене $y = b^{-1}a_j x$ в кратном интеграле будем иметь

$$\operatorname{mes} Q_{j,k} = \int\limits_{\{x:[b^{-1}a_jx]=k\}} dx = \int\limits_{\{y:[y]=k\}} |\det a_j^{-1} b|\, dy = |\det a_j|^{-1} |\det b|. \qquad \square$$

Лемма 2.2. *Пусть $j \in \mathbb{N}$ и $\psi \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$. Тогда для того, чтобы для любой функции $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1/p + 1/q = 1$, имела место принадлежность $g_j \in L_q(\mathbb{R}^d)$, необходимо и достаточно существование постоянной $M > 0$ такой, что для любого числового семейства $\{c_k\} \in l_p(\mathbb{Z}^d)$ выполняется неравенство*

$$\left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k \psi(x - bk) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant M \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_k|^p \right)^{1/p}. \tag{2.4}$$

При этом справедлива оценка

$$\|g_j\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C \|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \tag{2.5}$$

с постоянной $C = M|\det b|^{1/q}$.

Доказательство. *Необходимость.* Из принадлежности $g_j \in L_q(\mathbb{R}^d)$ и из равенства (2.3) следует, что рассматриваемый на пространстве $L_q(\mathbb{R}^d)$ выпуклый функционал

$$p_j(g) = |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(|\det b| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |(g,\psi_{j,k})|^q \right)^{1/q}$$

всюду конечен. Этот функционал является точной верхней гранью последовательности непрерывных выпуклых функционалов

$$p_j^{[n]}(g) = |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(|\det b| \sum_{|k|\leqslant n} |(g,\psi_{j,k})|^q \right)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу леммы Гельфанда (см., например, [34]) функционал p_j непрерывный. Поэтому существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$p_j(g) \leqslant C \|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Тем самым, с учетом леммы 2.1 установлена справедливость оценки (2.5).

Далее, для финитного числового семейства $\{c_k\}$ имеем

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\psi_{j,k}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}\leqslant 1}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k(g,\psi_{j,k})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}\leqslant 1}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|(g,\psi_{j,k})|^q\right)^{1/q} =$$

$$= |\det a_j|^{-(1/2-1/q)}|\det b|^{-1/q}\sup_{\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}\leqslant 1} p_j(g)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k|^p\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant C|\det a_j|^{1/2-1/p}|\det b|^{-1/q}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k|^p\right)^{1/p}.$$

С другой стороны, непосредственное вычисление L_p-нормы при замене $y = a_jx$ в кратном интеграле дает

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\psi_{j,k}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k|\det a_j|^{1/2}\psi(a_jx-bk)\right|^p dx\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k|\det a_j|^{1/2}\psi(y-bk)\right|^p |\det a_j^{-1}|\,dy\right)^{1/p} =$$

$$= |\det a_j|^{1/2-1/p}\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\psi(y-bk)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}.$$

Сравнивая последние две выкладки, для финитных числовых семейств $\{c_k\}$ получаем неравенство

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\psi(x-k)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C|\det b|^{-1/q}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k|^p\right)^{1/p}.$$

Последнее неравенство будет справедливо для любого числового семейства $\{c_k\}\in l_p(\mathbb{Z}^d)$, так как множество всех финитных числовых семейств плотно в пространстве $l_p(\mathbb{Z}^d)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Неравенство (2.4) так же, как и при доказательстве необходимости, запишем в эквивалентном виде

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\psi_{j,k}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant M|\det a_j|^{1/2-1/p}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k|^p\right)^{1/p}.$$

Фиксируем функцию $g\in L_q(\mathbb{R}^d)$. На множестве финитных числовых семейств $c=\{c_k\}$ определим линейный функционал

$$l_j(c)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k(g,\psi_{j,k}).$$

Имеем

$$|l_j(c)|\leqslant\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\psi_{j,k}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}\leqslant$$
$$\leqslant M|\det a_j|^{1/2-1/p}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k|^p\right)^{1/p}\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда следует, что функционал l_j можно продолжить до непрерывного линейного функционала на пространстве $l_p(\mathbb{Z}^d)$, причем

$$\|l_j\|\leqslant M|\det a_j|^{1/2-1/p}\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

По определению функционала l_j и на основании теоремы об общем виде непрерывного линейного функционала в $l_p(\mathbb{Z}^d)$ заключаем, что числовое семейство $\{(g,\psi_{j,k})\}$ принадлежит пространству $l_q(\mathbb{Z}^d)$, при этом выполняется неравенство

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|(g,\psi_{j,k})|^q\right)^{1/q}\leqslant M|\det a_j|^{1/2-1/p}\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Применение леммы 2.1 дает искомую оценку

$$\|g_j\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}=|\det a_j|^{1/2-1/q}\left(|\det b|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|(g,\psi_{j,k})|^q\right)^{1/q}\leqslant$$
$$\leqslant|\det a_j|^{1/2-1/q}M|\det b|^{1/q}|\det a_j|^{1/2-1/p}\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}=C\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Достаточность доказана. □

Теперь перейдем к вопросу о сходимости дискретных матричных аналогов средних Соболева в метрике пространства $L_q(\mathbb{R}^d)$.

Лемма 2.3. *Пусть функция* $\psi \in L_1 \cap L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, *удовлетворяет условию* (2.1).

Пусть существует постоянная $M > 0$ *такая, что для любого числового семейства* $\{c_k\} \in l_p(\mathbb{Z}^d)$ *выполняется неравенство* (2.4).

Тогда для любой функции $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1/p + 1/q = 1$, *справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{j\to\infty} \|g_j - g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = 0. \tag{2.6}$$

Доказательство. Предположим, что функция g непрерывна и имеет компактный носитель. Пусть для определенности носитель функции g лежит внутри шара с центром в начале координат радиуса R

$$\operatorname{supp} g \subset B(0, R) = \{x : |x| < R\}.$$

В качестве нормы в пространстве $\mathbb{R}^d$ нам удобнее здесь рассматривать чебышевскую норму

$$|x| = \max_{1\leqslant\nu\leqslant d} |x_\nu|, \quad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Сразу заметим, что при таком выборе нормы для любого вектора $x \in \mathbb{R}^d$ имеет место неравенство

$$|x - [x]| = \max_{1\leqslant\nu\leqslant d} |x_\nu - [x_\nu]| \leqslant 1,$$

и для произвольного шара $B(y, R) = \{x : |x - y| < R\}$ имеем

$$\operatorname{mes} B(y, R) = (2R)^d.$$

Обозначим через $\omega(\delta) = \sup\limits_{|x-y|\leqslant\delta} |g(x) - g(y)|$ равномерный модуль непрерывности функции g.

По определению дискретных матричных аналогов средних Соболева (2.2) и с учетом нормировки (2.1) находим

$$g_j(x) - g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(a_j^{-1} b[b^{-1} a_j x] + y) |\det a_j| \psi(a_j y)\, dy - g(x) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(a_j^{-1} b[b^{-1} a_j x] + a_j^{-1} y) \psi(y)\, dy - g(x) \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y)\, dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(g(a_j^{-1} b[b^{-1} a_j x] + a_j^{-1} y) - g(x)\right) \psi(y)\, dy.$$

Применим интегральное неравенство Минковского. Получим

$$\|g_j(x)-g(x)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\ \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \|g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx]+a_j^{-1}y)-g(x)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}|\psi(y)|\,dy. \tag{2.7}$$

Фиксируем вектор $y \in \mathbb{R}^d$ и рассмотрим функцию

$$G(x) = g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx]+a_j^{-1}y)-g(x).$$

Во-первых, из следующей цепочки неравенств

$$|a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx]+a_j^{-1}y-x| \leqslant |a_j^{-1}y|+|x-a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx]| \leqslant \\ \leqslant |a_j^{-1}bb^{-1}y|+|a_j^{-1}b(b^{-1}a_jx-[b^{-1}a_jx])| \leqslant \\ \leqslant \|a_j^{-1}b\|(|b^{-1}y|+|b^{-1}a_jx-[b^{-1}a_jx]|) \leqslant \\ \leqslant \|a_j^{-1}\|\|b\|(|b^{-1}y|+1) = C(y)\|a_j^{-1}\|$$

следует оценка

$$|G(x)| \leqslant \omega(C(y)\|a_j^{-1}\|). \tag{2.8}$$

Очевидно также, что

$$|G(x)| \leqslant 2\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|g(x)| = 2\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.9}$$

Во-вторых, имеет место оценка

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp} G \leqslant C_0, \tag{2.10}$$

в которой величина C_0 не зависит от y. В самом деле, если $G(x) \neq 0$, то $g(x) \neq 0$ или $g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx]+a_j^{-1}y) \neq 0$. В первом случае $x \in B(0,R)$, а во втором случае

$$|a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx]+a_j^{-1}y| < R,$$

откуда

$$|x+a_j^{-1}y| \leqslant |x-a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx]|+|a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx]+a_j^{-1}y| < \\ < |a_j^{-1}b(b^{-1}a_jx-[b^{-1}a_jx])+R \leqslant \|a_j^{-1}b\||b^{-1}a_jx-[b^{-1}a_jx]|+R \leqslant \\ \leqslant \|a_j^{-1}b\|+R \leqslant \|a_j^{-1}\|\|b\|+R.$$

Это означает, что $x \in B(-a_j^{-1}y, \|a_j^{-1}\|\|b\|+R)$. Таким образом, установлено включение

$$\{x : G(x) \neq 0\} \subset B(0,R) \cup B(-a_j^{-1}y, \|a_j^{-1}\|\|b\|+R).$$

Отсюда

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp} G \leqslant (2R)^d + (2\|a_j^{-1}\|\|b\| + 2R)^d.$$

Замечая, что

$$A = \sup_{j\in\mathbb{N}} \|a_j^{-1}\| < \infty$$

в силу условия $a_j^{-1} \to 0$ при $j \to \infty$, получаем оценку (2.10) с величиной

$$C_0 = (2R)^d + (2A\|b\| + 2R)^d.$$

Используя оценки (2.8), (2.9) и (2.10), получаем неравенство

$$\|G(x)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant \min\left\{\omega(C(y)\|a_j^{-1}\|), 2\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\right\} C_0^{1/q}. \tag{2.11}$$

Неравенство (2.11) показывает, что выражение

$$\|G(x)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \|g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx] + a_j^{-1}y) - g(x)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)},$$

во-первых, стремится к нулю при $j \to \infty$ при фиксированном y, поскольку модуль непрерывности $\omega(C(y)\|a_j^{-1}\|) \to 0$ вместе с нормой $\|a_j^{-1}\| \to 0$, а во-вторых, равномерно ограничено по $j \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{R}^d$ величиной $2\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}C_0^{1/q}$. Следовательно, для последовательности функций

$$F_j(y) = \|g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx] + a_j^{-1}y) - g(x)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}|\psi(y)|, \quad j \in \mathbb{N},$$

стоящих под знаком интеграла в правой части неравенства (2.7), выполнены все условия теоремы Лебега о мажорируемой сходимости:

$$F_j(y) \leqslant 2\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}C_0^{1/q}|\psi(y)|, \qquad j \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{j\to\infty} F_j(y) = 0 \text{ для почти всех } y \in \mathbb{R}^d.$$

Переходя к пределу под знаком интеграла, окончательно находим

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \|g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx] + a_j^{-1}y) - g(x)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}|\psi(y)|\,dy =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} F_j(y)\,dy = 0,$$

что доказывает предельное соотношение (2.6) для непрерывных функций g с компактным носителем.

Пусть теперь g — произвольная функция из пространства $L_q(\mathbb{R}^d)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем такую непрерывную функцию h с компактным носителем, что $\|g-h\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$. В силу уже доказанного найдется такой номер j_0, что для всех $j \geqslant j_0$ будет выполняться неравенство $\|h_j - h\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$. На основании оценки (2.5) из леммы 2.2 находим

$$\|g_j - h_j\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \|(g-h)_j\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|g-h\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} < C\varepsilon.$$

Следовательно, при $j \geqslant j_0$ будем иметь

$$\|g_j - g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g_j - h_j\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} + \|h_j - h\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} + \|h-g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} < (C+2)\varepsilon.$$

Итак, получили предельное соотношение (2.6) с произвольной функцией g из пространства $L_p(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Сравнение лемм 2.2 и 2.3 указывает на то, что из ограниченности дискретных матричных аналогов средних Соболева автоматически следует их сходимость.

2.2 Аффинные фреймы

Пусть $\Lambda = \{\lambda\}$ — некоторое счетное индексное множество.

Семейство элементов $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ банахова пространства F называется *бесселевой системой* в пространстве F относительно модельного пространства $l_p(\Lambda)$, короче, *p-бесселевой системой,* если существует положительная постоянная $M > 0$ такая, что для любого неперрывного линейного функционала $g \in G$ семейство его коэффициентов Фурье $\{(g,\psi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ удовлетворяет неравенству

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} |(g,\psi_\lambda)|^q\right)^{1/q} \leqslant M\|g\|_G.$$

Нетрудно показать, что семейство $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является p-бесселевой системой в том и только том случае, когда существует положительная постоянная $M > 0$ такая, что для любого числового семейства $\{c_\lambda\} \in l_p(\Lambda)$ выполняется неравенство

$$\left\|\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda\varphi_\lambda\right\|_F \leqslant M\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} |c_\lambda|^p\right)^{1/p}.$$

В частности, система сдвигов $\{\psi(x-bk)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ является p-бесселевой системой в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$, если существует постоянная $M > 0$

такая, что для любого числового семейства $\{c_k\} \in l_p(\mathbb{Z}^d)$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k \psi(x-bk) \right\|_p \leqslant M \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_k|^p \right)^{1/p}.$$

Теорема 2.1. *Пусть* $\psi \in L_1 \cap L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, *и* $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1/p + 1/q = 1$. *Для* $j \in \mathbb{N}$ *и* $k \in \mathbb{Z}^d$ *обозначим*

$$(g, \psi_{j,k}) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \psi_{j,k}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) |\det a_j|^{1/2} \psi(a_j x - bk)\, dx$$

— коэффициенты Фурье функции g по элементам аффинной системы $\{\psi_{j,k}\}_{j\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{Z}^d}$.

Пусть система сдвигов $\{\psi(x-bk)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ *является p-бесселевой системой в пространстве* $L_p(\mathbb{R}^d)$.

Тогда имеет место предельное соотношение

$$\lim_{j\to\infty} |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(|\det b| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |(g, \psi_{j,k})|^q \right)^{1/q} =$$
$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, dx \right| \|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Доказательство. Нормируем функцию ψ условием

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, dx = 1.$$

Тогда выполнены все условия леммы 2.3. По этой лемме для любой функции $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$ выполняется предельное соотношение (2.6), следовательно, соотношение

$$\lim_{j\to\infty} \|g_j\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Очевидно, что без принятой нормировки будем иметь

$$\lim_{j\to\infty} \|g_j\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, dx \right| \cdot \|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Осталось применить равенство (2.3) леммы 2.1. $\square$

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает

Теорема 2.2. *В предположениях теоремы 2.1 и при выполнении условия*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,dx \neq 0$$

справедливы рамочные неравенства

$$A\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |(g,\psi_{j,k})|^q\right)^{1/q} \leqslant B\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}$$

с рамочными константами

$$A = |\det b|^{-1/q} \left|\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,dx\right|, \qquad B = M,$$

где $M > 0$ — постоянная из условия p-бесселевости системы сдвигов $\{\psi(x-bk)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ порождающей функции ψ.

Доказательство. В самом деле, непосредственно получаем нижнюю оценку

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |(g,\psi_{j,k})|^q\right)^{1/q} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{j\to\infty} |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |(g,\psi_{j,k})|^q\right)^{1/q} =$$

$$= |\det b|^{-1/q} \left|\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,dx\right| \|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)},$$

а верхняя оценка вытекает из равенства (2.3) леммы 2.1 и неравенства (2.5) леммы 2.2

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |(g,\psi_{j,k})|^q\right)^{1/q} =$$

$$= |\det b|^{-1/q} \sup_{j\in\mathbb{N}} \|g_j\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\det b|^{-1/q} C\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = M\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \qquad \square$$

Пусть теперь X — банахово пространство всех числовых семейств $\{c_{j,k}\}_{j\in\mathbb{N},\,k\in\mathbb{Z}^d}$, для которых конечна норма

$$\|c\|_X = \sum_{j\in\mathbb{N}} |\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_{j,k}|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

Пространство X является весовым пространством типа $l_1(l_p)$ и изометрически изоморфно ему посредством диагонального оператора $\{c_{j,k}\} \mapsto \{|\det a_j|^{1/2-1/p} c_{j,k}\}$. Поэтому сопряженным к пространству X будет банахово пространство Y, являющееся весовым пространством типа $l_\infty(l_q)$ и состоящее из всех числовых семейств $\{c_{j,k}\}_{j\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{Z}^d}$, для которых конечна норма

$$\|c\|_Y = \sup_{j\in\mathbb{N}} |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_{j,k}|^q\right)^{1/q} < \infty.$$

Кроме того, система канонических ортов образует базис пространства X. Таким образом, X может быть выбрано как модельное пространство.

Рассмотрим синтезирующий оператор $S : X \to L_p(\mathbb{R}^d)$, заданный равенством

$$Sc = \sum_{j,k} c_{j,k}\psi_{j,k}.$$

Сопряженным к нему будет анализирующий оператор $R : L_q(\mathbb{R}^d) \to Y$, заданный равенством

$$Rg = \{(g, \psi_{j,k})\}_{j\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{Z}^d}.$$

Заметим, что рамочные неравенства из предыдущей теоремы 2.1 можно записать в виде

$$A\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\{(g, \psi_{j,k})\}\|_Y \leqslant B\|g\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Эти рамочные неравенства показывают, что аффинная система $\{\psi_{j,k}\}_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}^d}$ образует фрейм в банаховом пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$ относительно модельного пространства числовых семейств X.

Используя теорему о представлении для общих фреймов, получаем основной результат настоящего пункта.

Теорема 2.3. *Пусть функция $\psi \in L_1 \cap L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, имеет отличный от нуля интеграл*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, dx \neq 0.$$

Пусть система сдвигов $\{\psi(x - bk)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ является p-бесселевой системой в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$.

Тогда для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ найдется числовое семейство $\{c_{j,k}\}_{j\in\mathbb{N},\,k\in\mathbb{Z}^d}$ такое, что

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_{j,k}|^p\right)^{1/p} < \infty \tag{2.12}$$

и справедливо представление

$$f = \sum_{j,k} c_{j,k}\psi_{j,k}. \tag{2.13}$$

При этом представление (2.13) имеет место в следующем смысле:

1) *суммируемость: семейство функций $\{c_{j,k}\psi_{j,k}\}_{j\in\mathbb{N},\,k\in\mathbb{Z}^d}$ суммируется (неупорядоченно сходится) к функции f по норме пространства $L_p(\mathbb{R}^d)$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой конечный набор индексов $I_0 = \{(j,k)\}$, что для любого конечного набора индексов $I \supset I_0$ выполняется неравенство*

$$\left\| f - \sum_{(j,k)\in I} c_{j,k}\psi_{j,k} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon;$$

2) *абсолютная сходимость по индексу j:*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{j,k}\psi_{j,k} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} < \infty;$$

3) *безусловная сходимость: при любой нумерации $\sigma \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d$ семейства индексов $\{(j,k)\}_{j\in\mathbb{N},\,k\in\mathbb{Z}^d}$ полученный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{\sigma(n)}\psi_{\sigma(n)}$$

сходится к функции f в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Для всякой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ существует числовое семейство $c = \{c_{j,k}\} \in X$ такое, что

$$f = Sc = \sum_{j,k} c_{j,k}\psi_{j,k}.$$

Осталось обсудить качество сходимости представляющего функцию f ряда. Принадлежность семейства коэффициентов $\{c_{j,k}\}$ пространству X означает, что

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_{j,k}|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем j_0 так, чтобы

$$\sum_{j>j_0} |\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_{j,k}|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Далее выберем конечные подмножества $\mathbb{Z}_j^d \subset \mathbb{Z}^d$, $1 \leqslant j \leqslant j_0$, так, чтобы

$$|\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\mathbb{Z}_j^d} |c_{j,k}|^p\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{j_0}.$$

Положим $I_0 = \{(j,k) : k \in \mathbb{Z}_j^d, 1 \leqslant j \leqslant j_0\}$. Тогда для любого конечного множества $I \supset I_0$ пар индексов (j,k) находим

$$\left\| f - \sum_{(j,k)\in I} c_{k,j}\psi_{j,k} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d,(j,k)\notin I} c_{j,k}\psi_{j,k} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{j\leqslant j_0} |\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\mathbb{Z}_j^d} |c_{j,k}|^p\right)^{1/p} +$$

$$+M \sum_{j>j_0} |\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_{j,k}|^p\right)^{1/p} <$$

$$< M \sum_{j\leqslant j_0} \frac{\varepsilon}{j_0} + M\varepsilon = 2M\varepsilon.$$

Здесь учли неравенство

$$\left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\psi_{j,k} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant M |\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_k|^p\right)^{1/p},$$

которое получаем из условия p-бесселовости с помощью замены переменного $x \mapsto a_j x$. Итак, доказана суммируемость представления (2.13).

Абсолютная сходимость по индексу j представления (2.13) прямо вытекает из последнего неравенства

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{j,k}\psi_{j,k}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}|\det a_j|^{1/2-1/p}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_{j,k}|^p\right)^{1/p} = M\|c\|_X < \infty.$$

Наконец, безусловная сходимость представления (2.13) эквивалентна свойству суммируемости. $\square$

Периодизацией функции $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$, относительно решетки bZ^d называется функция

$$P_b f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-bk).$$

Лемма 2.4. *Если $P_b(|\psi|)\in L_p^{loc}$, то система сдвигов $\{\psi(x-bk)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ является p-бесселевой системой в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$.*

Доказательство. Имеем

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\psi(x-bk)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k\psi(x-bk)|\right)^p dx.$$

Воспользуемся неравенством Гельдера для числовых семейств

$$\sum x_k y_k \leqslant \left(\sum x_k^p\right)^{1/p}\left(\sum y_k^q\right)^{1/q},$$

полагая в нем $x_k = |c_k|\cdot|\psi(x-bk)|^{1/p}$ и $y_k = |\psi(x-bk)|^{1/q}$. Получим

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\psi(x-bk)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k|^p|\psi(x-bk)|\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|\psi(x-bk)|\right)^{p/q} dx =$$

$$= |\det b|^{-p/q}\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k|^p|\psi(x-bk)|\cdot P_b^{p/q}(|\psi|)\,dx.$$

Представим пространство $\mathbb{R}^d$ в виде дизъюнктного объединения параллелотопов $b(\mathscr{C}-l)$, $l\in\mathbb{Z}^d$. Преобразуем последний интеграл к виду

$$|\det b|^{-p/q}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\int_{b(\mathscr{C}-l)}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k|^p|\psi(x-bk)|\cdot P_b^{p/q}(|\psi|)\,dx.$$

В каждом таком интеграле выполним замену $[x=y-bl, y\in b\mathscr{C}]$. Будем иметь

$$|\det b|^{-p/q}\int_{b\mathscr{C}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}|c_k|^p|\psi(y-b(l+k))|\cdot P_b^{p/q}(|\psi|)\,dy.$$

Мы учли, что функция $P_b(|\psi|)$ является $b\mathbb{Z}^d$-периодической. Окончательно получим

$$\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}c_k\psi(x-bk)\Big\|^p_{L_p(\mathbb{R}^d)}\leqslant$$

$$\leqslant|\det b|^{-p/q}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k|^p\int_{b\mathscr{C}}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}|\psi(y-bl)|\cdot P_b^{p/q}(|\psi|)\,dy=$$

$$=|\det b|^{-p}\int_{b\mathscr{C}}P_b^p(|\psi|)\,dy\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k|^p=M^p\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k|^p$$

с конечной постоянной

$$M=|\det b|^{-1}\|P_b(|\psi|)\|_{L_p(b\mathscr{C})}<\infty,$$

так как $P_b(|\psi|)\in L_p^{loc}$. Итак, система $\{\psi(x-bk)\}$ является p-бесселевой. □

Теорема 2.4. *Пусть функция* $\psi\in L_1\cap L_p(\mathbb{R}^d)$, $1<p<\infty$, *имеет отличный от нуля интеграл*

$$\int_{\mathbb{R}^d}\psi(x)\,dx\neq 0$$

и удовлетворяет дополнительному условию $P_b(|\psi|)\in L_p^{loc}$.

Тогда для любой функции $f\in L_p(\mathbb{R}^d)$ *справедливо представление* (2.13), *для коэффициентов* $\{c_{j,k}\}_{j\in\mathbb{N},\,k\in\mathbb{Z}^d}$ *которого выполняется неравенство* (2.12).

Доказательство непосредственно следует из основной теоремы 2.3 и предыдущей леммы 2.4.

Задача аффинного синтеза в пространстве $L_1(\mathbb{R}^d)$ получила решение в работах [35,36]. В [35] показано, что необходимым и достаточным условием положительного решения задачи аффинного синтеза при $p = 1$ является условие отличия от нуля интеграла от порождающей функции ψ:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, dx \neq 0.$$

В [36] этот результат уточнен в следующем смысле: доказано, что синтезирующий оператор $S : X \to L_1(\mathbb{R}^d)$ сюръективен для пространства X числовых семейств $\{c_{j,k}\}_{j\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{Z}^d}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\det a_j|^{-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_{j,k}| < \infty.$$

В случае $p = 2$ классическим является результат Добеши [8] о полноте аффинной системы $\{\psi_{j,k}\}_{j\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{Z}^d}$ при выполнении следующих условий:

1) функция $|\hat{\psi}(\xi)|$ непрерывна в начале координат и $|\hat{\psi}(0)| \neq 0$;

2) функция $P_{b'}(|\widehat{\psi}|^2)$ принадлежит пространству $L_\infty(\mathbb{R}^d)$,

где $b' = (b^{-1})^t$ — транспонированная обратная матрица к матрице b.

В случае произвольного $p \in (1, \infty)$ в работе [35] показано, что если функция $\psi \in L_1 \cap L_p(\mathbb{R}^d)$ по-прежнему имеет отличный от нуля интеграл и удовлетворяет дополнительному условию

$$|\psi(x)| \leqslant C|x|^{-d-\varepsilon}, \qquad |x| \to \infty,$$

где $\varepsilon > 0$, то всякая функция $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ представима в виде суммы безусловно сходящегося ряда

$$f = \sum_{j,k} c_{j,k}\psi_{j,k}.$$

Метод работы [35] не позволял получить информацию о коэффициентах представляющего ряда. Кроме того, условие на рост функции ψ слишком ограничительно и не зависит от показателя p. В связи с этим в работе [35] была высказана гипотеза о справедливости соотвествующей теоремы представления при ослаблении дополнительного условия на порождающую функцию:

$$P_b(|\psi|) = |\det b| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\psi(x - bk)| \in L_p^{loc}.$$

Справедливость этой гипотезы была доказана П. А. Терехиным в 1999 г. [16]. В работе [37] были постоены аппроксимирующие функцию $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ агрегаты вида

$$f_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (f, \psi^*_{j,k})\psi_{j,k}$$

такие, что

$$f = \lim_{J\to\infty} \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} f_j.$$

При этом система $\{\psi^*_{j,k}\}$ является аффинной системой, порожденной функцией $\psi^* \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1/p + 1/q = 1$, удовлетворяющей условию $P_b(|\psi^*|) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Однако конструкция работы [37] не предоставляла ряда по аффинной системе. Впоследствии в работе [38], в предположениях гипотезы Филиппова – Освальда [35], была получена конструкция, указывающая искомый представляющий ряд по аффинной системе. В [38] отмечалось, что соответствующая теорема получена ранее автором данной главы. Основная теорема 2.3 этого пункта установлена в работе [21]. Наиболее общие условия справедливости теоремы о представлении функций в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$ по элементам аффинной системы получены Сильниченко [39] с использованием метода порядкосохраняющих жадных алгоритмов. В работах [40–42] методом орторекурсивных разложений решен вопрос о представлении функций в пространстве $L^p[0,1]$ по элементам аффинной системы, порождающая функция которой имеет носитель $\operatorname{supp}\psi \subset [0,1]$.

3 АФФИННЫЕ ФРЕЙМЫ НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ p-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

3.1 Определение аффинной системы над кольцом $\mathbb{Z}_p$

Пусть p — простое число.

Напомним определение поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ и его некоторые свойства (см., например, [43–47]).

p-показателем $\nu_p(m)$ целого рационального числа $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, называют наибольшую степень простого числа p, на которую делится m. Таким образом, если

$$m = \pm p^{\alpha} \prod_{p_k \neq p} p_k^{\alpha_k},$$

то $\nu_p(m) = \alpha$, причем формально полагаем $\nu_p(0) = +\infty$.

Для рационального числа $r = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, величина

$$|r|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{\nu_p(m)-\nu_p(n)}$$

называется *p-адической нормой* числа $r \in \mathbb{Q}$. При этом $|0|_p = 0$.

Величина $|r|_p$ удовлетворяет всем аксиомам *нормирования поля:*

1) $|r|_p \geqslant 0$, причем $|r|_p = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$;

2) $|r_1 r_2|_p = |r_1|_p |r_2|_p$;

3) $|r_1 + r_2|_p \leqslant |r_1|_p + |r_2|_p$.

Последняя аксиома треугольника выполняется в усиленном варианте:

3′) $|r_1 + r_2|_p \leqslant \max\{|r_1|_p, |r_2|_p\}$.

Такие нормирования поля называют *неархимедовскими,* поскольку

$$|nr|_p = |r + \ldots + r|_p \leqslant |r|_p$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. не выполнена аксиома Архимеда.

Два нормирования $|\cdot|$ и $|\cdot|_*$ поля называются *эквивалентными,* если $|\cdot| = |\cdot|_*^{\beta}$ для некоторого действительного числа β.

Теорема Островского утверждает, что

всякое нормирование поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ эквивалентно либо абсолютной величине $|r|$, либо одной из величин $|r|_p$.

При этом справедлива *адельная формула*

$$\prod_p |r|_p = |r|^{-1},$$

где $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$.

Полем p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ называется пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по p-адической норме.

Всякое p-адическое число $x \in \mathbb{Q}_p$ допускает разложение в ряд по возрастающим степеням простого числа p:

$$x = \xi_{-m}\frac{1}{p^m} + \ldots + \xi_{-1}\frac{1}{p} + \xi_0 + \xi_1 p + \ldots + \xi_n p^n + \ldots, \tag{3.1}$$

с коэффициентами $\xi_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $k \geqslant -m$.

Для ненулевого p-адического числа $x \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ существует, и притом единственное, целое рациональное число $-m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, такое что $\xi_{-m} \neq 0$. В этом случае разложение (3.1) называют *каноническим представлением* p-адического числа x, величину $|x|_p = p^m$ — p-адической нормой числа x (причем $|0|_p = 0$) и, наконец, выражение

$$\{x\}_p = \xi_{-m}\frac{1}{p^m} + \ldots + \xi_{-1}\frac{1}{p}$$

называют дробной частью p-адического числа x. Если $\{x\}_p = 0$ или, что одно и то же, $|x|_p \leqslant 1$, то число x называют целым p-адическим.

Множество всех целых p-адических чисел обозначают $\mathbb{Z}_p$.

Таким образом, любое целое p-адическое число $x \in \mathbb{Z}_p$ однозначно представляется в виде

$$x = \xi_0 + \xi_1 p + \ldots + \xi_n p^n + \ldots, \tag{3.2}$$

где $\xi_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $k \geqslant 0$.

Следует отметить, что ряды (3.1) и (3.2) сходятся по p-адической норме, поскольку

$$\left| x - \xi_{-m}\frac{1}{p^m} - \ldots - \xi_{-1}\frac{1}{p} - \xi_0 - \xi_1 p - \ldots - \xi_n p^n \right|_p \leqslant$$

$$\leqslant \left|\xi_{n+1}p^{n+1} + \ldots\right|_p \leqslant \left(\frac{1}{p}\right)^{n+1} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Множество всех целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ замкнуто относительно операций сложения и умножения, так как если $|x|_p \leqslant 1$ и $|y|_p \leqslant 1$, то $|x+y|_p \leqslant \max\{|x|_p, |y|_p\} \leqslant 1$ и $|xy|_p = |x|_p|y|_p \leqslant 1$. Поэтому $\mathbb{Z}_p$ является *кольцом.*

Кольцо $\mathbb{Z}_p$ называют *кольцом целых p-адических чисел.* Оно играет ту же роль в поле $\mathbb{Q}_p$, что и отрезок $[0, 1]$ для поля всех действительных чисел $\mathbb{R}$.

Теперь примем специальные обозначения:

– $\mathbb{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty}\{0, 1, \ldots, p-1\}^k$ — семейство всех конечных последовательностей $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, состоящих из чисел 0, 1, …, или $p-1$ (включая при $k = 0$ пустую последовательность);

– $|\alpha|$ — длина последовательности $\alpha \in \mathbb{A}$, т. е. $|\alpha| = k$, если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, длину пустой последовательности считаем равной нулю;

– $\alpha\beta$ — конкатенация последовательностей $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$: если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$, то $\alpha\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l)$;

– $\Delta(\alpha) = \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \{x \in \mathbb{Z}_p : \xi_{k-\nu} = \alpha_\nu, 1 \leqslant \nu \leqslant k\}$, где $\alpha \in \mathbb{A}$ и $\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}$ — коэффициенты в представлении (3.2) целого p-адического числа $x \in \mathbb{Q}_p$ (в частности, $\Delta = \Delta(\varnothing) = \mathbb{Z}_p$).

Семейство $\mathscr{S} = \{\varnothing\} \cup \{\Delta(\alpha) : \alpha \in \mathbb{A}\}$ образует *полукольцо множеств,* и функция множества $|\Delta(\alpha)| = p^{-|\alpha|}$ является *мерой* на $\mathscr{S}$, лебеговское продолжение которой совпадает с индуцированной на $\mathbb{Z}_p$ нормированной *мерой Хаара dx* в поле $\mathbb{Q}_p$.

Определим преобразование $T : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ посредством равенства

$$Tx = x/p \; (\operatorname{mod} \mathbb{Z}_p).$$

Точнее, если целое p-адическое число $x \in \mathbb{Z}_p$ представимо в виде

$$x = \xi_0 + \xi_1 p + \ldots + \xi_n p^n + \ldots,$$

то для частного x/p справедливо представление

$$x/p = \frac{\xi_0}{p} + \xi_1 + \xi_2 p + \ldots,$$

откуда получаем

$$Tx = \xi_1 + \xi_2 p + \ldots + \xi_{n+1} p^n + \ldots$$

Видим, что кольцо $\mathbb{Z}_p = \Delta$ представимо в виде дизъюнктного объединения

$$\Delta = \bigcup_{\xi_0=0}^{p-1} \Delta(\xi_0)$$

и преобразование T взаимнооднозначно отображает каждое из множеств $\Delta(\xi_0)$ на Δ.

Далее нам потребуются некоторые понятия эргодической теории (см., например, [48, 49]).

Лемма 3.1. *Преобразование $T : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ сохраняет меру Хаара, т. е. для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{Z}_p$ выполняется равенство*

$$|T^{-1}(E)| = |E|. \tag{3.3}$$

Доказательство. Последнее равенство (3.3) достаточно проверить на множествах $E = \Delta(\alpha)$ из полукольца $\mathbb{S}$.

Принадлежность $x \in \Delta(\alpha)$ означает, что

$$x = \alpha_k + \alpha_{k-1}p + \ldots + \alpha_1 p^{k-1} + \xi_k p^k + \ldots$$

Пусть

$$y = \eta_0 + \eta_1 p + \ldots + \eta_k p^k + \ldots$$

Тогда принадлежность $y \in T^{-1}(\Delta(\alpha))$ означает, что представление

$$Ty = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_k p^{k-1} + \eta_{k+1} p^k + \ldots$$

тождественно совпадает с представлением

$$x = \alpha_k + \alpha_{k-1}p + \ldots + \alpha_1 p^{k-1} + \xi_k p^k + \ldots,$$

откуда $\eta_1 = \alpha_k, \ldots, \eta_k = \alpha_1$. Следовательно,

$$y = \eta_0 + \alpha_k p + \ldots + \alpha_1 p^k + \ldots$$

Поэтому множество $T^{-1}(\Delta(\alpha))$ является дизъюнктным объединением множеств

$$T^{-1}(\Delta(\alpha)) = T^{-1}(\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)) = \bigcup_{\eta_0=0}^{p-1} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \eta_0).$$

Окончательно получаем

$$|T^{-1}(\Delta(\alpha))| = \sum_{\eta_0=0}^{p-1} |\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \eta_0)| = \sum_{\eta_0=0}^{p-1} p^{-(k+1)} = p^{-k} = |\Delta(\alpha)|. \qquad \square$$

Лемма 3.2. *Преобразование $T : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ является перемешиванием, т. е. для любых измеримых множеств $F \subset \mathbb{Z}_p$ и $G \subset \mathbb{Z}_p$ справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} |T^{-n}(F) \cap G| = |F| \cdot |G|.$$

Доказательство. Снова искомое предельное соотношение достаточно проверить на множествах $F = \Delta(\alpha)$ и $G = \Delta(\beta)$ из полукольца $\mathbb{S}$.

По аналогии с доказательством леммы 3.1 получим представление

$$T^{-n}(\Delta(\alpha)) = T^{-n}(\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)) = \bigcup_{\gamma_1=0}^{p-1} \ldots \bigcup_{\gamma_n=0}^{p-1} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_n).$$

Отсюда

$$T^{-n}(\Delta(\alpha)) \cap \Delta(\beta) = \bigcup_{\gamma_1=0}^{p-1} \ldots \bigcup_{\gamma_n=0}^{p-1} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \cap \Delta(\beta_1, \ldots, \beta_l).$$

Пусть $n > l$. Тогда пересечение

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \cap \Delta(\beta_1, \ldots, \beta_l)$$

не пусто в том и только том случае, когда

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \subset \Delta(\beta_1, \ldots, \beta_l).$$

Последнее включение означает, что $\gamma_n = \beta_l, \ldots, \gamma_{n-l+1} = \beta_1$, причем $\gamma_{n-l}, \ldots, \gamma_1$ — произвольные. Следовательно, удаляя пустые множества, находим

$$T^{-n}(\Delta(\alpha)) \cap \Delta(\beta) = \bigcup_{\gamma_1=0}^{p-1} \ldots \bigcup_{\gamma_{n-l}=0}^{p-1} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-l}, \beta_1, \ldots, \beta_l).$$

Окончательно будем иметь

$$|T^{-n}(\Delta(\alpha)) \cap \Delta(\beta)| = p^{n-l} p^{-(k+n)} = p^{-(k+l)} = |\Delta(\alpha)| \cdot |\Delta(\beta)|. \qquad \square$$

Обозначим через $L_\rho(\mathbb{Z}_p)$, $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$, пространство Лебега суммируемых со степенью ρ измеримых функций $f(x)$, с нормой

$$\|f\|_\rho = \left(\int_{\mathbb{Z}_p} |f(x)|^\rho \, dx \right)^{1/\rho}.$$

Как обычно, при $\rho = \infty$ мы полагаем

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x\in\mathbb{Z}_p}|f(x)|.$$

Рассмотрим индуцированный преобразованием $T : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ оператор

$$Uf(x) = f(Tx).$$

Лемма Купмана [50] утвержает, что оператор U — изометрический в каждом пространстве $L_\rho(\mathbb{Z}_p)$. В самом деле, имеем

$$\|Uf\|_\rho^\rho = \int_{\mathbb{Z}_p} |f(Tx)|^\rho\,dx = \int_\Delta |f(Tx)|^\rho\,dx = \sum_{\xi_0=0}^{p-1}\int_{\Delta(\xi_0)} |f(Tx)|^\rho\,dx =$$

$$= \sum_{\xi_0=0}^{p-1}\int_\Delta |f(y)|^\rho\,\frac{dy}{p} = \int_{\mathbb{Z}_p} |f(y)|^\rho\,dy = \|f\|_\rho^\rho.$$

Из свойства перемешивания

$$\lim_{n\to\infty} |T^{-n}(F)\cap G| = |F|\cdot|G|$$

стандартным образом получаем предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}(U^n f, g) = (f,1)(g,1)$$

для функций $f \in L_\rho(\mathbb{Z}_p)$ и $g \in L_{\rho'}(\mathbb{Z}_p)$, $1 \leqslant \rho,\ \rho' \leqslant \infty$, $1/\rho + 1/\rho' = 1$, где $1 = \chi_\Delta$ — характеристическая функция множества $\mathbb{Z}_p$.

Лемма 3.3. *Для любых функций $f \in L_\rho(\mathbb{Z}_p)$ и $g \in L_{\rho'}(\mathbb{Z}_p)$, $1 \leqslant \rho$, $\rho' \leqslant \infty$, $1/\rho + 1/\rho' = 1$, выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{Z}_p} U^n f(x) g(x)\,dx = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,dx \int_{\mathbb{Z}_p} g(x)\,dx.$$

Доказательство. Последнее предельное соотношение достаточно проверить для характеристических функций $f = \chi_{\Delta(\alpha)}$ и $g = \chi_{\Delta(\beta)}$ множеств $\Delta(\alpha)$ и $\Delta(\beta)$ из полукольца $\mathbb{S}$, поскольку их линейные комбинации (т. е. ступенчатые функции) всюду плотны в пространствах $L_\rho(\mathbb{Z}_p)$ и $L_{\rho'}(\mathbb{Z}_p)$ при $\rho \in [1,\infty)$ и $\rho \in (1,\infty]$ соответственно.

Осталось заметить, что при достаточно большом n имеем

$$\int_{\mathbb{Z}_p} U^n \chi_{\Delta(\alpha)}(x)\chi_{\Delta(\beta)}(x)\,dx = \int_{T^{-n}(\Delta(\alpha))\cap\Delta(\beta)} \chi_{\Delta(\alpha)}(T^n x)\chi_{\Delta(\beta)}(x)\,dx =$$

$$= |T^{-n}(\Delta(\alpha)) \cap \Delta(\beta)| = |\Delta(\alpha)| \cdot |\Delta(\beta)| =$$
$$= \int_{\mathbb{Z}_p} \chi_{\Delta(\alpha)}(x)\,dx \int_{\mathbb{Z}_p} \chi_{\Delta(\beta)}(x)\,dx. \qquad \square$$

Пусть фиксирован показатель $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$ и функция $f \in L_\rho(\mathbb{Z}_p)$ продолжена нулем за пределы кольца $\mathbb{Z}_p$ так, что $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{Z}_p$. Положим

$$V_\xi f(x) = p^{1/\rho} f\left(\frac{x-\xi}{p}\right), \qquad \xi = 0, \ldots, p-1.$$

Сразу заметим, что так как $\operatorname{supp} f \subset \Delta$, то $\operatorname{supp} V_\xi f \subset \Delta(\xi)$. При этом

$$\frac{x-\xi}{p} = \begin{cases} Tx, & x \in \Delta(\xi), \\ 0, & x \in \Delta \setminus \Delta(\xi). \end{cases}$$

Очевидно, что $V_\xi : L_\rho(\mathbb{Z}_p) \to L_\rho(\mathbb{Z}_p)$, $\xi = 0, \ldots, p-1$, — изометрические операторы.

Для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{A}$ положим

$$V^\alpha = V_{\alpha_k} \ldots V_{\alpha_1}$$

— произведение операторов: первым действует оператор V_{α_1}, последним — V_{α_k}, причем при $k = 0$ пустое произведение считаем равным тождественному оператору I.

Операторы V_ξ при $\rho = 2$ являются представлением алгебры Кунца $\mathscr{O}_p$ в пространстве $L_2(\mathbb{Z}_p)$ [51–53], поскольку

$$V_\xi^* V_\eta = \delta_{\xi\eta} I, \qquad \sum_{\xi=0}^{p-1} V_\xi V_\xi^* = I.$$

Пусть $\operatorname{supp} \varphi \in \mathbb{Z}_p$ и $\varphi \in L_\rho(\mathbb{Z}_p)$, $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$.

Аффинной системой, порожденной функцией φ, назовем семейство функций

$$\varphi_n = \varphi_\alpha = V^\alpha \varphi = V_{\alpha_k} \ldots V_{\alpha_1} \varphi, \tag{3.4}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{A}$ соответствует натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ так, что

$$n = p^k + \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu p^{k-\nu} = p^k + j$$

— p-ичное разложение числа n. Таким образом,

$$\varphi_n(x) = p^{1/\rho} \ldots p^{1/\rho} \varphi\left(p^{-1}(\ldots p^{-1}(x-\alpha_k) \ldots - \alpha_1)\right) =$$
$$= p^{k/\rho} \varphi\left(p^{-k}x - \alpha_k p^{-k} - \ldots - \alpha_1 p^{-1}\right) = p^{k/\rho} \varphi\left(\frac{x-j}{p^k}\right).$$

3.2 Аффинные фреймы в пространствах $L_\rho(\mathbb{Z}_p)$

Всюду далее полагаем $p_k = 1 + p + \dots + p^{k-1} = \dfrac{p^k - 1}{p - 1}$.

Теорема 3.1. *Пусть $1 < \rho \leqslant \infty$ и $1/\rho + 1/\rho' = 1$.*

Пусть $\varphi \in L_\rho(\mathbb{Z}_p)$.

Тогда для любой функции $g \in L_{\rho'}(\mathbb{Z}_p)$ последовательность ее коэффициентов Фурье по аффинной системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$

$$(g, \varphi_n) = (g, \varphi_\alpha) = \int_{\mathbb{Z}_p} g(x) p^{k/\rho} \varphi\left(\frac{x - j}{p^k}\right) dx, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

где $n = p^k + j = p^k + \sum\limits_{\nu=1}^{k} \alpha_k p^{k-\nu}$, $k \geqslant 0$, $0 \leqslant j < p^k$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{A}$, удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} |(g, \varphi_n)|^{\rho'} \right)^{1/\rho'} = \left| \int_{\mathbb{Z}_p} g(x)\, dx \right| \cdot \|g\|_{\rho'}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Заметим, что соотношение (3.5) достаточно доказать для ступенчатых функций вида

$$g = \sum_{|\beta|=l} c_\beta \chi_{\Delta(\beta)}, \qquad l = 0, 1, \dots,$$

поскольку линейное многообразие таких функций плотно в пространстве $L_{\rho'}(\mathbb{Z}_p)$, $1 \leqslant \rho' < \infty$.

Пусть $k > l$. Тогда

$$(g, \varphi_n) = \sum_{|\beta|=l} c_\beta (\chi_{\Delta(\beta)}, \varphi_\alpha) = c(\alpha_{k-l+1}, \dots, \alpha_k)(\chi_{\Delta(\alpha_{k-l+1}, \dots, \alpha_k)}, \varphi_\alpha),$$

так как $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset \Delta(\alpha)$ и пересечение $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ не пусто в том и только том случае, когда

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \subset \Delta(\beta_1, \dots, \beta_l),$$

что равносильно равенствам $\beta_1 = \alpha_{k-l+1}$, ..., $\beta_l = \alpha_k$.

При этом

$$(\chi_{\Delta(\alpha_{k-l+1}, \dots, \alpha_k)}, \varphi_\alpha) = \int_{\Delta(\alpha)} \varphi_\alpha(x)\, dx = p^{k/\rho} \int_{\Delta(\alpha)} \varphi\left(\frac{x - j}{p^k}\right) dx.$$

В последнем интеграле сделаем замену $x = p^k y + j$, причем $y \in \Delta = \mathbb{Z}_p$, поскольку принадлежность $x \in \Delta(\alpha)$ означает, что

$$x = \alpha_k + \ldots + \alpha_1 p^{k-1} + \xi_k p^k + \ldots .$$

После замены будем иметь

$$p^{k/\rho} \int_{\Delta(\alpha)} \varphi\left(\frac{x-j}{p^k}\right) dx = p^{k/\rho} \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(y)\, \frac{dy}{p^k}.$$

Поэтому

$$(g, \varphi_n) = c(\alpha_{k-l+1}, \ldots, \alpha_k) p^{-k/\rho'} \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(y)\, dy.$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} |(g, \varphi_n)|^{\rho'} \right)^{1/\rho'} =$$

$$= p^{-k/\rho'} \left| \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(y)\, dy \right| \left(\sum_{|\alpha|=k} |c(\alpha_{k-l+1}, \ldots, \alpha_k)|^{\rho'} \right)^{1/\rho'} =$$

$$= p^{-k/\rho'} \left| \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(y)\, dy \right| \left(\sum_{|\beta|=l} p^{k-l} |c(\beta_1, \ldots, \beta_l)|^{\rho'} \right)^{1/\rho'} =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(y)\, dy \right| \left(\sum_{|\beta|=l} p^{-l} |c_\beta|^{\rho'} \right)^{1/\rho'} = \left| \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(y)\, dy \right| \cdot \|g\|_{\rho'}. \qquad \square$$

Следует отметить, что при $\rho = 1$ теорема 3.1 не верна. Можно показать, что предел в левой части соотношения (3.5) может не быть равным выражению в правой части, более того, этот предел может вообще не существовать.

Теорема 3.2. *Пусть $\rho = 1$ и $\varphi \in L_1(\mathbb{Z}_p)$. Тогда для любой функции $g \in L_\infty(\mathbb{Z}_p)$ последовательность ее коэффициентов Фурье по аффинной системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$*

$$(g, \varphi_n) = (g, \varphi_\alpha) = \int_{\mathbb{Z}_p} g(x) p^{k/\rho} \varphi\left(\frac{x-j}{p^k}\right) dx, \qquad n = 1, 2, \ldots ,$$

где $n = p^k + j = p^k + \sum\limits_{\nu=1}^{k} \alpha_k p^{k-\nu}$, $k \geqslant 0$, $0 \leqslant j < p^k$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{A}$, *удовлетворяет предельному соотношению*

$$\liminf_{k\to\infty} \max_{p_k+1\leqslant n\leqslant p_{k+1}} |(g,\varphi_n)| \geqslant \left|\int_{\mathbb{Z}_p} g(x)\,dx\right| \cdot \|g\|_\infty. \tag{3.6}$$

Кроме того, если $\varphi(x) \geqslant 0$ *почти всюду, то*

$$\lim_{k\to\infty} \max_{p_k+1\leqslant n\leqslant p_{k+1}} |(g,\varphi_n)| = \left|\int_{\mathbb{Z}_p} g(x)\,dx\right| \cdot \|g\|_\infty. \tag{3.7}$$

Доказательство. Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) =\in \mathbb{A}$ положим

$$I(\alpha) = \int_{\Delta(\alpha)} g(x)\,dx.$$

Применим лемму 3.3 к функции

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \Delta(\alpha), \\ 0, & x \in \Delta \setminus \Delta(\alpha). \end{cases}$$

Получим

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Delta(\alpha)} U^n\varphi(x) g(x)\,dx = I(\alpha) \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(x)\,dx.$$

При $n > k$ будем иметь

$$\int_{\Delta(\alpha)} U^n\varphi(x) g(x)\,dx = p^{-n} \sum_{|\beta|=n-k} (V^{\alpha\beta}\varphi, g),$$

поскольку $\operatorname{supp} V^{\alpha\beta}\varphi \subset \Delta(\alpha\beta)$ и для всех $x \in \Delta(\alpha\beta)$

$$V^{\alpha\beta}\varphi(x) = p^n \varphi\left(\frac{x - \alpha_k - \ldots - \alpha_1 p^{k-1} - \beta_l p^k - \ldots - \beta_1 p^{k+l-1}}{p^n}\right) =$$
$$= p^n \varphi\left(\frac{x}{p^n} (\mathrm{mod}\mathbb{Z}_p)\right) = p^n \varphi(T^n x) = p^n U^n \varphi(x).$$

Следовательно,

$$\left|\int_{\Delta(\alpha)} U^n\varphi(x) g(x)\,dx\right| \leqslant p^{-n} p^{n-k} \max_{|\beta|=n-k} |(V^{\alpha\beta}\varphi, g)| \leqslant p^{-k} \max_{|\gamma|=n} |(V^\gamma\varphi, g)|.$$

Устремив здесь $n \to \infty$, получим предельное соотношение

$$|I(\alpha)| \cdot \left| \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(x)\, dx \right| \leqslant p^{-k} \lim_{n\to\infty} \max_{|\gamma|=n} |(V^\gamma \varphi, g)|.$$

Осталось заметить, что

$$\|g\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{Z}_p} |g(x)| = \sup_{\alpha\in\mathbb{A}} \left| p^k I(\alpha) \right|,$$

так как для почти всех $x \in \mathbb{Z}_p$ имеем

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} p^k \int_{\Delta(\alpha)\ni x} g(t)\, dt.$$

Окончательно находим

$$\left| \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(x)\, dx \right| \cdot \|g\|_\infty \leqslant \lim_{n\to\infty} \max_{|\gamma|=n} |(V^\gamma \varphi, g)|.$$

Предельное соотношение (3.6) доказано.

Соотношение (3.7) следует из (3.6) и очевидной оценки

$$\limsup_{k\to\infty} \max_{p_k+1\leqslant n\leqslant p_{k+1}} |(g, \varphi_n)| \leqslant \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(x)\, dx \cdot \|g\|_\infty. \qquad \square$$

Теорема 3.3. *Пусть функция* $\varphi \in L_\rho(\mathbb{Z}_p)$, $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$, *имеет отличный от нуля интеграл*

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(x)\, dx \neq 0.$$

Тогда для любого бесконечного множества натуральных чисел K *величина*

$$N(g) = N(g; \varphi, K) = \sup_{k\in K} \left(\sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} |(g, \varphi_n)|^{\rho'} \right)^{1/\rho'}$$

определяет эквивалентную норму в $L_{\rho'}(\mathbb{Z}_p)$, $1/\rho + 1/\rho' = 1$.

Доказательство непосредственно следует из теорем 3.1 и 3.2.

Обозначим через X пространство всех числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$, для которых конечна норма

$$\|x\|_X = \sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} |x_n|^\rho \right)^{1/\rho} < \infty.$$

Сопряженным пространством к X будет пространство Y, состоящее из всех числовых посредовательностей $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|y\|_Y = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} |y_n|^{\rho'} \right)^{1/\rho'} < \infty,$$

где ρ' — сопряженный показатель.

Теорема 3.4. *Пусть функция $\varphi \in L_\rho(\mathbb{Z}_p)$, $1 \leqslant \rho < \infty$, имеет отличный от нуля интеграл*

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(x)\,dx \neq 0.$$

Тогда аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует фрейм в пространстве $L_\rho(\mathbb{Z}_p)$ относительно модельного пространства X.

Доказательство. В силу теоремы 3.3 найдутся положительные постоянные $A, B > 0$ такие, что для любой функции $g \in L_{\rho'}(\mathbb{Z}_p)$ выполняется рамочное неравенство

$$A\|g\|_{\rho'} \leqslant \|\{(g,\varphi_n)\}\|_Y \leqslant B\|g\|_{\rho'}.$$

Мы учли, что $N(g;\varphi,\mathbb{N}) = \|\{(g,\varphi_n)\}\|_Y$ — норма пространства Y последовательности $\{(g,\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ коэффициентов Фурье функции g по аффинной системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Можно показать, что в качестве рамочных постоянных можно взять

$$A = \left| \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(x)\,dx \right|, \qquad B = \left(\int_{\mathbb{Z}_p} |\varphi(x)|^\rho\,dx \right)^{1/\rho}. \qquad \square$$

Из теоремы 3.4 вытекает, что для любой функции $f \in L_\rho(\mathbb{Z}_p)$, $1 \leqslant \rho < < \infty$, существует числовая последовательность $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, принадлежащяя модельному пространству X и такая, что справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n.$$

Таким образом, аффинный синтез в пространстве $L_\rho(\mathbb{Z}_p)$ имеет место при самых общих условиях.

3.3 Аффинные фреймы в пространстве $C(\mathbb{Z}_p)$

Пусть по-прежнему $\mathbb{A}$ — семейство всех конечных последовательностей $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $k \geqslant 0$, для которых $\alpha_\nu = 0, \ldots, p-1$, $1 \leqslant \nu \leqslant k$, и, по определению,

$$\Delta(\alpha) = \{x \in \mathbb{Z}_p : \xi_{k-\nu} = \alpha_\nu, 1 \leqslant \nu \leqslant k\},$$

где $x = \xi_0 + \xi_1 p + \ldots \xi_{k-1} p^k + \ldots$, причем при $k = 0$ для пустой последовательности $\alpha \in \mathbb{A}$ полагаем $\Delta = \Delta(\alpha) = \mathbb{Z}_p$.

Напомним, что совокупность $\mathscr{S} = \{A \subset X\}$ подмножеств A множества X называется *полукольцом множеств,* если выполняются следующие условия:

1) совокупность $\mathscr{S}$ не пуста;

2) если $A, A' \in \mathscr{S}$, то $A \cap A' \in \mathscr{S}$;

3) для любых множеств $A, A' \in \mathscr{S}$ существует конечный набор непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{S}$ такой, что

$$A \setminus A' = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Рассмотрим совокупность подмножеств кольца целых p-адических чисел:

$$\mathscr{S} = \{\varnothing\} \cup \{\Delta(\alpha) : \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) =\in \mathbb{A}\}.$$

Как уже отмечалось, совокупность $\mathscr{S}$ образует полукольцо множеств и функция множества $|\Delta(\alpha)| = p^{-k}$ является мерой на $\mathscr{S}$, лебеговское продолжение которой совпадает с индуцированной на $\mathbb{Z}_p$ нормированной мерой Хаара dx в поле $\mathbb{Q}_p$.

Далее, p-адическая норма $|\cdot|_p$ определяет топологию в поле $\mathbb{Q}_p$, в которой множества $\Delta(\alpha)$ являются открыто-замкнутыми шарами и любое открытое множество в $\mathbb{Z}_p$ является конечным или счетным объединением таких шаров (см., например, [47]).

Отсюда следует, что σ-алгебра $\mathscr{U}$ всех борелевских множеств в $\mathbb{Z}_p$ совпадает с наименьшей σ-алгеброй $\mathscr{U}(\mathscr{S})$, содержащей все множества полукольца $\mathscr{S}$.

Обозначим $C(\mathbb{Z}_p)$ — пространство всех вещественных непрерывных функций $f(x)$, заданных на хаусдорфовом компакте $\mathbb{Z}_p$, снабженное нормой

$$\|f\|_C = \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|.$$

Пусть $V(\mathbb{Z}_p)$ — пространство всех регулярных борелевских мер μ на $\mathbb{Z}_p$. Напомним, что принадлежность $\mu \in V(\mathbb{Z}_p)$ означает, что μ — счетно-аддитивная вещественная функция, определенная на $\mathscr{U}$ и такая, что для любого множества $E \in \mathscr{U}$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся открытое множество $G \supset E$ и замкнутое множество $F \subset E$ такие, что $|\mu|(G \setminus E) < \varepsilon$ и $|\mu|(E \setminus F) < \varepsilon$, где $|\mu|(\cdot)$ — полная вариация функции μ на соответствующем множестве.

Из теоремы Рисса об общем виде линейного функционала следует, что пространство, сопряженное к $C(\mathbb{Z}_p)$, изометрически изоморфно пространству $V(\mathbb{Z}_p)$ с нормой

$$\|\mu\|_V = |\mu|(\mathbb{Z}_p),$$

причем

$$(f, \mu) = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\, d\mu$$

— общий вид непрерывного линейного функционала в $C(\mathbb{Z}_p)$.

Пусть $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathscr{S}$ — набор элементов полукольца $\mathscr{S}$. Набор $\{B_1, \ldots, B_m\} \subset \mathscr{S}$ называется *системой составляющих* для набора $\{A_1, \ldots, A_n\}$, если выполняются следующие условия:

1) множества $B_1, \ldots, B_m$ попарно не пересекаются;

2) справедливо равенство

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{l=1}^{m} B_l;$$

3) для любого $k = 1, \ldots, n$ имеем

$$A_k = \bigcup_{l: B_l \subset A_k} B_l.$$

Хорошо известно, что для каждого набора $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathscr{S}$ существует система составляющих $\{B_1, \ldots, B_m\} \subset \mathscr{S}$.

Лемма 3.4. *Справедливо равенство*

$$\|\mu\|_V = |\mu|(\mathbb{Z}_p) = \sup_{k \geqslant 0} \sum_{|\alpha|=k} |\mu(\Delta(\alpha))|. \tag{3.8}$$

Доказательство. По определению полной вариации меры μ и с учетом равенства $\mathscr{U} = \mathscr{U}(\mathscr{S})$ имеем

$$|\mu|(\mathbb{Z}_p) = \sup \sum_{n} |\mu(\Delta(\alpha_n))|,$$

где верхняя грань берется по произвольным конечным наборам попарно непересекающихся множеств $\Delta(\alpha_n)$ из полукольца $\mathscr{S}$. Положим для такого набора $k = \max_n |\alpha_n|$. Тогда $\Delta(\alpha)$, $|\alpha| = k$, — система составляющих для набора множеств $\Delta(\alpha_n)$. Поэтому

$$\sum_n |\mu(\Delta(\alpha_n))| = \sum_n \left| \sum_{\{|\alpha|=k:\Delta(\alpha)\subset\Delta(\alpha_n)\}} \mu(\Delta(\alpha)) \right| \leqslant \sum_{|\alpha|=k} |\mu(\Delta(\alpha))|,$$

откуда

$$|\mu|(\mathbb{Z}_p) \leqslant \sup_{k\geqslant 0} \sum_{|\alpha|=k} |\mu(\Delta(\alpha))|.$$

Обратное неравенство очевидно, поскольку $\Delta(\alpha)$, $|\alpha| = k$, — частные случаи рассматриваемых конечных наборов множеств $\Delta(\alpha_n)$. Равенство (3.8) установлено. □

Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{Q}_p$, имеет носитель $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{Z}_p$ и $f \in C(\mathbb{Z}_p)$.

Следует отметить, что при этом функция $f(x)$ будет непрерывной на всем множестве $\mathbb{Q}_p$, поскольку кольцо $\mathbb{Z}_p$ является открыто-замкнутым подмножеством поля $\mathbb{Q}_p$. Таким образом, пространство $C(\mathbb{Z}_p)$ состоит в точности из всех сужений на $\mathbb{Z}_p$ функций, непрерывных на множестве $\mathbb{Q}_p$ и имеющих носитель на $\mathbb{Z}_p$.

Рассмотрим операторы

$$V_\xi f(x) = f\left(\frac{x-\xi}{p}\right), \qquad \xi = 0, 1, \ldots, p-1.$$

По-прежнему полагаем

$$V^\alpha = V_{\alpha_k} \ldots V_{\alpha_1}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{A}.$$

Очевидно, что V^α — изометрические операторы в пространстве $C(\mathbb{Z}_p)$, причем $\operatorname{supp} V^\alpha f \subset \Delta(\alpha)$.

Пусть функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{Q}_p$, имеет носитель $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{Z}_p$ и $\varphi \in C(\mathbb{Z}_p)$. Для натурального числа n положим

$$\varphi_n(x) = \varphi_\alpha(x) = V^\alpha\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x-j}{p^k}\right),$$

где

$$n = p^k + j = p^k + \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu p^{k-\nu}$$

— p-ичное разложение числа n.

Систему функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ назовем *аффинной системой*, порожденной функцией φ.

Заметим, что все функции аффинной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывны на множестве $\mathbb{Q}_p$.

Рассмотрим сначала важный частный случай аффинной системы, порожденный функцией

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z}_p, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p. \end{cases}$$

Функция $\phi(x)$ является характеристической функцией кольца целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ и порождает p-адический кратно-масштабный анализ Хаара (см. [54, 55]).

Обозначим X — пространство всех числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|x\|_X = \sum_{k=0}^{\infty} \max_{p_k+1 \leqslant n \leqslant p_{k+1}} |x_n| < \infty.$$

Сопряженным к пространству X будет пространство Y, состоящее из всех числовых последовательностей $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|y\|_Y = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} |y_n| < \infty.$$

Теорема 3.5. *Пусть $\mu \in V(\mathbb{Z}_p)$. Тогда для последовательности $\{(\phi_n, \mu)\}_{n=1}^{\infty}$ коэффициентов Фурье меры μ по аффинной системе $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполняется равенство*

$$\|\{(\phi_n, \mu)\}\|_Y = \|\mu\|_V.$$

Доказательство. Согласно леммы 3.4 имеем

$$\|\mu\|_V = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{|\alpha|=k} |\mu(\Delta(\alpha))| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{|\alpha|=k} |(\phi_\alpha, \mu)| =$$

$$= \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} |(\phi_n, \mu)| = \|\{(\phi_n, \mu)\}\|_Y. \qquad \square$$

Теорема 3.6. *Пусть функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{Q}_p$, имеет носитель* $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{Z}_p$, *причем $\varphi(x) > 0$ при $x \in \mathbb{Z}_d$. Тогда аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует фрейм в пространстве $C(\mathbb{Z}_p)$ относительно модельного пространства X.*

Доказательство. Обозначим $T : X \to C(\mathbb{Z}_p)$ — синтезирующий оператор, ассоциированной с аффиной системой $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Напомним, что

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} x_n\varphi_n.$$

Оператор T ограниченный, поскольку

$$\|Tx\|_C \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\left\|\sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} x_n\varphi_n\right\|_C = \sum_{k=0}^{\infty}\max_{p_k+1\leqslant n\leqslant p_{k+1}}|x_n|\|\varphi\|_C = \|x\|_X\|\varphi\|_C.$$

Сопряженный к оператору T анализирующий оператор $T^* : V(\mathbb{Z}_p) \to Y$ дается равенством

$$T^*\mu = \{(\varphi_n, \mu)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Далее пусть $T_0 : X \to C(\mathbb{Z}_p)$ — синтезирующий оператор, ассоциированный с аффинной системой $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $T_0^* : V(\mathbb{Z}_p) \to Y$ — анализирующий оператор, причем

$$T_0^*\mu = \{(\phi_n, \mu)\}_{n=1}^{\infty}.$$

По теореме 3.5 оператор T_0^* изометрический:

$$\|T_0^*\mu\|_Y = \|\mu\|_Y.$$

Пусть $\lambda > 0$. Тогда

$$\|\lambda T_0^*\mu - T^*\mu\|_Y = \sup_{k\geqslant 0}\sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}}|\lambda(\phi_n, \mu) - (\varphi_n, \mu)| =$$

$$= \sup_{k\geqslant 0}\sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}}\left|\int_{\mathbb{Z}_p}(\lambda\phi_n(x) - \varphi_n(x))\,d\mu\right|.$$

Теперь учтем, что если $n \in \mathbb{N}$ соответствует $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) =\in \mathbb{A}$ по формуле

$$n = p^k + \sum_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu p^{k-\nu},$$

то имеет место включение

$$\operatorname{supp}(\lambda\phi_n - \varphi_n) \subset \Delta(\alpha).$$

Следовательно,

$$\|\lambda T_0^*\mu - T^*\mu\|_Y = \sup_{k\geqslant 0}\sum_{|\alpha|=k}\left|\int_{\Delta(\alpha)}(\lambda\phi_\alpha(x)-\varphi_\alpha(x))\,d\mu\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{k\geqslant 0}\sum_{|\alpha|=k}\|\lambda\phi_\alpha-\varphi_\alpha\|_C|\mu|(\Delta(\alpha)) =$$

$$= \|\lambda\phi-\varphi\|_C\sup_{k\geqslant 0}\sum_{|\alpha|=k}|\mu|(\Delta(\alpha)) = \|\lambda\phi-\varphi\|_C\|\mu\|_V.$$

Отсюда

$$\|T^*\mu\|_Y \geqslant \lambda\|T_0^*\mu\|_Y - \|\lambda T_0^*\mu - T^*\mu\|_Y \geqslant (\lambda - \|\lambda\phi-\varphi\|_C)\|\mu\|_V.$$

Теперь выберем $\lambda > 0$ так, чтобы

$$\gamma = \lambda - \|\lambda\phi-\varphi\|_C > 0.$$

Это возможно, поскольку в силу условий теоремы

$$0 < m = \inf_{x\in\mathbb{Z}_p}\varphi(x), \qquad M = \sup_{x\in\mathbb{Z}_p}\varphi(x) < \infty.$$

Положим $\lambda = \dfrac{M+m}{2}$. Будем иметь

$$|\lambda\phi(x)-\varphi(x)| = |\lambda-\varphi(x)| \leqslant \lambda - m = M-\lambda = \frac{M-m}{2} < \lambda,$$

откуда $\|\lambda\phi-\varphi\|_C < \lambda$. Итак, окончательно находим

$$\|T^*\mu\|_Y \geqslant \gamma\|\mu\|_V, \qquad \gamma > 0,$$

что равносильно рамочным неравенствам

$$\gamma\|\mu\|_V \leqslant \|\{(\varphi_n,\mu)\}\|_V \leqslant \|T^*\|\|\mu\|_V. \qquad \square$$

Условие $\varphi(x) > 0$, $x\in\mathbb{Z}_p$, положительности порождающей функции аффинной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ нельзя отбросить.

Действительно, если $\varphi(0) = 0$, то $\varphi_n(0) = 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Поэтому сосредоточенная в точке $0\in\mathbb{Z}_p$ мера

$$(f,\mu) = f(0)$$

ортогональна всем функциям аффинной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно, аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ не полна и фреймом быть не может.

Наконец, из доказанной теоремы 3.6 следует, что для любой функции $f \in C(\mathbb{Z}_p)$ найдется числовая последовательность $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, принадлежащая модельному пространству X и такая, что справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n.$$

Ряд в правой части последнего равенства абсолютно сходится (по пачкам) в пространстве $C(\mathbb{Z}_p)$, так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \sum_{n=p_k+1}^{p_{k+1}} x_n \varphi_n \right\|_C = \|\varphi\|_C \sum_{k=0}^{\infty} \max_{p_k+1 \leqslant n \leqslant p_{k+1}} |x_n| = \|\varphi\|_C \|x\|_X < \infty.$$

Полученные результаты об аффинных фреймах в пространстве $C(\mathbb{Z}_p)$ не имеют аналога для систем типа Фабера – Шаудера в пространстве $C[0,1]$. Представляющие свойства последних изучались в работе Чантурия [56].

Список литературы

1. *Duffin R. J., Schaeffer A. C.* A class of nonharmonic Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 72. P. 341–366.
2. *Бари Н. К.* О базисах в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1946. Т. 54. С. 383–386.
3. *Бари Н. К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Учен. зап. МГУ. Математика. 1951. Т. 4, № 148. С. 69–107.
4. *Наймарк М. А.* Спекральные функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, № 3. С. 277–318.
5. *Кашин Б. С., Куликова Т. Ю.* Замечание об описании фреймов общего вида // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 6. С. 941–945.
6. *Casazza P. G., Han D., Larson D. R.* Frames for Banach spaces // Contemp. Math. 1999. Vol. 247. P. 149–182.
7. *Young R. M.* An introduction to nonharmonic Fourier series. N. Y. : Academic Press, 1980.
8. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. Philadelphia : SIAM Press, 1992.
9. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
10. *Christensen O.* An introduction to frames and Riesz bases. Boston : Birkhäuser, 2003.
11. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М. : Физматлит, 2005.
12. *Gröchenig K.* Describing functions: atomic decompositions versus frames // Monatsh. Math. 1991. Vol. 112. P. 1–41.
13. *Han D., Larson D. R.* Frames, bases and group representations // Memoirs Amer. Math. Soc. 2000. Vol. 147, № 697. P. 1–91.
14. *Casazza P. G., Christensen O., Stoeva D. T.* Frame expansions in separable Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. 2005. Vol. 307. P. 710–723.
15. *Терехин П. А.* Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов // Изв. вузов. Математика. 1999. Т. 43, № 8. С. 74–81.
16. *Терехин П. А.* Сжатия и сдвиги функции с ненулевым интегралом // Математика. Механика. Математическая кибернетика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 67–68.
17. *Терехин П. А.* Фреймы в банаховом пространстве и их приложения к построению всплесков // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. С. 65–81.
18. *Терехин П. А.* Системы представления и проекции базисов // Матем. заметки. 2004. Т. 75, № 6. С. 944–947.
19. *Терехин П. А.* О компонентах суммируемых функций по элементам семейств функций-всплесков // Изв. вузов. Математика. 2008. Т. 52, № 2. С. 53–59.
20. *Терехин П. А.* Проекционные характеристики бесселевых систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 44–51.
21. *Терехин П. А.* Банаховы фреймы в задаче аффинного синтеза // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 9. С. 127–146.
22. *Терехин П. А.* Линейные алгоритмы аффинного синтеза в пространстве Лебега $L^1[0,1]$ // Изв. РАН. Сер. матем. 2010. Т. 74, № 5. С. 115–144.

23. *Терехин П. А.* Фреймы в банаховом пространстве // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44, № 3. С. 50–62.
24. *Терехин П. А.* О бесселевых системах в банаховом пространстве // Матем. заметки. 2012. Т. 91, № 2. С. 285–296.
25. *Терехин П. А.* Аффинные квантовые фреймы и их спектр // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 32–36.
26. *Pelczynski A.* Any separable Banach space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with a basis // Studia Math. 1971. Vol. 40. P. 239–242.
27. *Johnson W. B., Rosenthal H. P., Zippin M.* On bases, finite dimensional decompositions and weaker structure in Banach spaces // Israel J. Math. 1971. Vol. 9. P. 77–92.
28. *Feichtinger H. G., Gröchenig K.* Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions, I // J. Funct. Anal. 1989. Vol. 86. P. 305–340.
29. *Feichtinger H. G., Gröchenig K.* Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions, II // Monatsh. Math. 1989. Vol. 108. P. 129–148.
30. *Christensen O.* Atomic decomposition via projective group representations // Rocky Mountain J. of Math. 1996. Vol. 26, № 4. P. 1289–1312.
31. *Christensen O., Heil C.* Perturbations of Banach frames and atomic decompositions // Math. Nachr. 1997. Vol. 185. P. 33–47.
32. *Соболев С. Л.* Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М. : Наука, 1989.
33. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974.
34. *Ахиезер Н. И., И. М. Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М. : Наука, 1966.
35. *Filippov V. I., Oswald P.* Representation in L^p by series of translates and dilates of one function // J. Approx. Theory. 1995. Vol. 82, № 1. P. 15–29.
36. *Bruna J.* On translation and affine systems spanning L^1 // J. Fourier Anal. Appl. 2006. Vol. 12. P. 71–82.
37. *Bui H.-Q., Laugesen R. S.* Affine systems that span Lebesgue spaces // J. Fourier Anal. Appl. 2005. Vol. 11. P. 533–556.
38. *Bui H.-Q., Laugesen R. S.* Affine synthesis onto Lebesgue and Hardy spaces // Indiana Univ. Math. J. 2008. Vol. 57. P. 2203–2234.
39. *Сильниченко А. В.* О сходимости порядкосохраняющих слабых жадных алгоритмов // Матем. заметки. 2008. Т. 84, № 5. С. 795–800.
40. *Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Орторекурсивные разложения по подпространствам // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 2. С. 135–138.
41. *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О свойствах орторекурсивных разложений по подпространствам // Тр. МИАН. 2014. Т. 284. С. 138–141.
42. *Кудрявцев А. Ю.* О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 707–720.
43. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М. : Наука, 1985.
44. *Ленской Д. Н.* Функции в неархимедовски нормированных полях. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1962.

45. *Гвишиани А. Д., Агоян С. М., Трусов А. В.* Элементы неархимедова анализа. М. : Изд-во МГУ, 1979.
46. *Шафаревич И. Р.* Основные понятия алгебры. Ижевск : Ижевская республиканская типография, 1999.
47. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* p-адический анализ и математическая физика. М. : Наука, 1994.
48. *Halmos P. R.* On Ergodic Theory. N. Y. : Chelsea, 1958.
49. *Арнольд В. И., Авец А.* Эргодические проблемы классической механики. Ижевск : Ижевская республиканская типография, 1999.
50. *Koopman B. O.* Hamiltonian systems and transformations in Hilbert spaces // Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. 1931. Vol. 17. P. 315–318.
51. *Cuntz J.* Simple C^*-algebras generated by isometries // Comm. Math. Phys. 1977. Vol. 57. P. 173–185.
52. *Bratteli O., Jorgensen P. E. T.* Isometries, shifts, Cuntz algebras and multiresolution wavelet analysis of scale N // Integral Equations Operator Theory. 1997. Vol. 28. P. 382–443.
53. *Kozyrev S. V.* p-Adic representation of the Cuntz algebra and the free coherent states // `arXiv:math-ph/0205029`.
54. *Козырев С. В.* Теория всплесков как p-адический спекральный анализ // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66, № 2. С. 149–158.
55. *Козырев С. В.* p-адические псевдодифференциальные операторы и p-адические всплески // ТМФ. 2004. Т. 138, № 3. С. 383–394.
56. *Чантурия З. А.* О базисах пространства непрерывных функций // Матем. сб. 1972. Т. 88, № 4. С. 589–608.

Научное издание

Хромов Август Петрович,
Лукомский Сергей Федорович,
Сидоров Сергей Петрович,
Терехин Павел Александрович

НОВЫЕ МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ
В ЗАДАЧАХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА
И В СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Редактор *Е. А. Малютина*
Технический редактор *В. В. Володина*
Корректор *Е. Б. Крылова*
Оригинал-макет подготовила *В. А. Халова*

Подписано в печать 10.12.2015. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 17,67 (19,0). Тираж 100 экз. Заказ 217-Т.

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Саратовского университета.
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А.