Саратовский государственный национальный исследовательский
университет имени Н.Г.Чернышевского

Харламов А.В.

Элементы комбинаторики

Учебно-методическое пособие

Саратов
2016

УДК 519

Харламов А.В.

Элементы комбинаторики: учебно-методическое пособие для студентов механико-математического факультета / А.В.Харламов. 2016.

В пособии приведены необходимые теоретические сведения и формулы для решения комбинаторных задач школьного уровня. Пособие составлено для магистрантов по направлению подготовки 44.04.01 - педагогическое образование, профиль подготовки – математическое образование (заочное отделение). Пособие также может быть полезно молодым учителям математики и информатики, а также всем, кто начал интересоваться решением комбинаторных задач.

Рекомендует к печати:

Кафедра основ математики и информатики

Введение

Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей стали неотъемлемой частью школьной программы. Данные вопросы в той или иной степени изучаются с пятого по одиннадцатый класс. Представленное пособие призвано улучшить качество подготовки магистров, обучающихся по программам «Элементы статистики, комбинаторики и теории вероятностей для школьников» и «Стохастическая линия в современном образовании» направления подготовки 44.04.01 - педагогическое образование, профиль подготовки – математическое образование.

В пособии рассматриваются базовые вопросы комбинаторного анализа, представлена элементарная теория, структурированная по разделам и сопровождаемая соответствующими примерами и задачами (с решениями и без решений) по данному разделу. В конце приводятся задачи для самостоятельного решения на различные методы и их комбинации.

Материалы пособия (теория и ряд задач) опираются на уже классические труды Н.Я. Виленкина «Комбинаторика» [1] и «Популярная комбинаторика» [2].

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

При прочих равных условиях математик все делает лучше.

Закон Штейнгауза

Как следует из названия курса, предметом комбинаторики являются различные комбинации предметов, способы их отыскания и пересчет.

Все задачи комбинаторики можно условно классифицировать следующим образом.

1. Отыскание конфигураций, обладающих заданными свойствами. Например, как расположить 10 точек и 5 прямых таким образом, чтобы на каждой прямой лежало четыре точки?

2. Доказательство существования или отсутствия конфигурации с заданными свойствами. Хорошо известна задача (головоломка) о конверте или домике, который надо нарисовать, не отрывая руки и не проводя дважды одну линию. При правильном подходе это можно сделать, а вот обойти кенигсбергские мосты (еще одна задача-головоломка), не проходя дважды по одному, уже нельзя.

3. Нахождение общего числа конфигураций с заданными свойствами. Например, в примере к первой задаче можно подсчитать, сколько существует различных ее решений, т.е. различных комбинаций, удовлетворяющих сформулированным условиям.

4. Отыскание всех способов решения данной задачи и построение алгоритмов решения. Например, чтобы нарисовать конверт требуемым образом, надо выйти из левого (правого) нижнего угла и совершить обход в любом направлении так, чтобы, последней точкой стала правая (левая) нижняя.

5. Отыскание оптимального решения из всех по тем или иным критериям. Например, отыскание кратчайшего пути из всех имеющихся.

В данном пособии рассматривается третья задача.

Вначале рассмотрим пример с «*Магическим квадратом*». Опустим красивую легенду [2] и сформулируем саму задачу.

Требуется расположить 9 цифр (от 1 до 9) в квадрате три на три таким образом, чтобы сумма цифр по строкам, столбцам и диагоналям была одинаковая.

Проведем анализ предложенной задачи. Сумма всех цифр от 1 до 9 равна 45. Таким образом, сумма цифр в каждой строке (столбце и на диагоналях) должна быть равна 45:3 = 15. Выпишем все тройки чисел, которые в сумме дают 15:

(1 5 9), (1 6 8), (2 4 9), (2 5 8), (2 6 7), (3 4 8), (3 5 7), (4 5 6).

Заметим, что число полученных наборов равно числу требуемых. В противном случае мы не смогли бы решить задачу. Цифра 5 входит в четыре набора, значит, она может располагаться только в середине квадрата. Цифры 1, 2, 6, 8 входят в три набора, То есть, их необходимо расположить в углах. После этого положение оставшихся цифр определяется уже однозначно. Например:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

На следующем шаге можно пересчитать все магические квадраты.

Как было отмечено, произвол при построении, а, следовательно, и различия будут определяться положением угловых цифр. Перебрав все варианты, мы получим все квадраты. То есть еще семь:

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Таким образом, мы показали возможность решения задачи и нашли все комбинации, обладающие заданным свойством. То есть мы решили типичную комбинаторную задачу.

Для решения комбинаторных задач в рамках математической модели, необходимо определить требуемые понятия и ввести соответствующие обозначения.

Понятие множества не имеет строгого определения (как понятие точки или прямой в геометрии). Под *множеством* будем понимать совокупность некоторых объектов или элементов. Множество парт в классе, множество учеников, множество вершин треугольника, множество точек отрезка. В нашем случае будем рассматривать только конечные множества. Все элементы множества будем обозначать цифрами или буквами с индексами и без индексов, сами множества обозначим латинскими заглавными буквами $A, B, C, \ldots$

Вот примеры некоторых множеств:

$A=\{a, b, c\}$ – множество А состоит из элементов a, b, c.

$A=\{a_1, a_2, a_3\}$ - множество А состоит из элементов a_1, a_2, a_3.

$A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ - множество А состоит из n элементов. Вместо последней записи можно использовать следующую: $A=\{a_i\}_1^n$.

Определим следующие операции над множествами.

Пусть даны два множества: $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{c, d, e, f\}$, состоящие из трех и четырех элементов соответственно.

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество C, состоящее из совпадающих элементов для множеств A и B и обозначается $C=A\cap B=A\cdot B=\{c, d\}$.

Объединением (суммой) множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов множеств A и B и обозначается $C=A\cup B=A+B=\{a, b, c, d, e, f\}$.

Разностью множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов множества A, не входящих во множество B и обозначается $C=A-B=A\setminus B=\{a, b\}$.

Заметим, что в отличие от операций над числами для операций над множествами будут справедливы соотношения: $A+A=A$; $A\cdot A=A$; $A-A=\varnothing$.

Операции над множествами подчиняются коммутативному, ассоциативному и дистрибутивному законам.

Коммутативный закон: $A+B=B+A$; $A\cdot B=B\cdot A$.

Ассоциативный закон: $A+(B+C)=(A+B)+C$; $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$.

Дистрибутивный закон: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$.

Рассмотрим ряд задач, где надо определить число элементов, входящих в объединение двух и более множеств. В этом случае нам поможет следующая

Теорема сложения.

Пусть даны два множества: множество $A=\{a_i\}_1^n$ и множество $B=\{b_j\}_1^m$. Тогда число элементов, входящих в объединение множеств A и B, будет вычисляться по формуле

$$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B),$$

где $N(\cdot)$ – обозначение числа элементов, входящих в соответствующее множество.

Доказательство.

Рассмотрим объединение двух произвольных множеств A и B. Согласно определению, это множество, состоящее из элементов как множества A, так и множества B. Тогда при сложении числа элементов множеств A и B, мы дважды суммируем одинаковые элементы (элементы пересечения этих множеств). Таким образом, для получения нужного числа из суммы элементов множеств необходимо вычесть то, что посчитано дважды, то есть число элементов пересечения множеств.

Доказательство завершено.•

Рассмотрим иллюстрационный

Пример №1.

Пусть даны: множество $A=\{a,b,c,d\}$, $N(A)=4$ и множество $B=\{c,d,e,f,k\}$, $N(B)=5$. Пересечение множеств (произведение) будет иметь вид $A\cap B=\{c,d\}$ и $N(A\cap B)=2$, тогда число элементов объединения будет равно $N(A\cup B)=4+5-2=7$. В чем убеждаемся, непосредственно пересчитав элементы объединения $N(A\cup B)=N(\{a,b,c,d,e,f,k\})=7$.

Следствие.

Выведем формулу для числа элементов объединения 3-х и более множеств. Число элементов объединения трех множеств получим непосредственным вычислением, используя операции над множествами:

$$\begin{aligned} &N(A+B+C)=N(A+(B+C))=N(A)+N(B+C)-N(A(B+C))= \\ &=N(A)+N(B)+N(C)-N(BC)-N(AB+AC)= \\ &=N(A)+N(B)+N(C)-N(BC)-(N(AB)+N(AC)-N(AB\cdot AC))= \\ &=N(A)+N(B)+N(C)-N(BC)-N(AB)-N(AC)+N(ABC) \end{aligned}$$

Таким образом, можно записать

$$N(A+B+C)=N(A)+N(B)+N(C)-N(AB)-N(AC)-N(BC)+N(ABC).$$

Здесь для удобства записи знак объединения был заменен знаком суммы, а знак пересечения – знаком произведения.

Полученный результат естественным образом обобщается на объединение (сумму) произвольного числа множеств и можно записать:

$$N(A_1+A_2+\ldots+A_n)=N(A_1)+N(A_2)+\ldots+N(A_n)-N(A_1A_2)-N(A_1A_3)-\ldots-N(A_{n-1}A_n)+$$
$$+N(A_1A_2A_3)+N(A_1A_2A_4)+N(A_1A_2A_5)+\ldots.+N(A_{n-2}A_{n-1}A_n)+\ldots+(-1)^{n-1}N(A_1A_2\ldots A_n)$$

То есть, число элементов объединения n произвольных множеств равно сумме элементов всех множеств, минус число элементов пересечений всех пар множеств, плюс число элементов всех пересечений троек множеств и так далее. Если пересекается четное число множеств, то соответствующее число элементов берется со знаком минус, а для нечетного числа множеств берется знак плюс. Доказать последнюю формулу можно, например, применив метод математической индукции.

Доказательство завершено. •

Заметим, что ситуация значительно упрощается, если множества попарно не пересекаются. Пусть даны множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, причем выполняется $A_i\ A_j=\varnothing$, если $i\neq j$. Тогда число элементов объединения всех множеств будет равно сумме количества элементов в каждом множестве:

$$N(A_1+A_2+\ldots+A_n)=N(A_1)+N(A_2)+\ldots+N(A_n).$$

Рассмотрим ряд примеров на применения этой теоремы.

Пример №2.

Предположим, что в классе пятнадцать девочек и семнадцать мальчиков. Тогда всего учеников в классе тридцать два. Но так слишком просто. Обозначим через А множество всех мальчиков в классе, а через В – множество всех девочек в классе: $A=\{m_i\}_1^n$, $B=\{d_j\}_1^m$, где $n=17$, $m=15$. Тогда число всех учеников можно рассматривать, как число элементов объединения двух множеств. Так как множества не пересекаются, то можно записать $N(A\cup B)=N(A)+N(B)=17+15=32$.

Усложним ситуацию и будем полагать, что в классе каждый ученик либо девочка, либо блондин, либо любит математику. Причем, в классе двадцать девочек, из них 12 блондинок и одна девочка блондинка любит математику. Всего в классе 24 блондина. Из них любит математику 12 человек. Математиков в классе 17, из них 6 девочек. Сколько учеников в классе?

Введем в рассмотрение множества A={девочки}, B={блондины}, C={математики}. Тогда число человек в классе можно рассматривать как число элементов объединения трех множеств. Аккуратно сопоставив условие задачи с соответствующими пересечениями множеств, получим $N(A+B+C)=$ $= N(A)+N(B)+N(C)-N(AB)-N(AC)-N(BC)+N(ABC)= 20+24+17-12-12–6+1=32$.

Пример №3.

Из 100 студентов первого курса английский язык изучает 28 человек, немецкий – 30, французский – 42. Одновременно английский и немецкий изучают – 8 студентов, английский и французский – 10, а французский и немецкий – 5. Все три языка изучают три человека. Сколько на первом курсе «бездельников»?

Сначала подсчитаем число студентов, изучающих хотя бы один язык. Обозначаем студентов, изучающих соответствующий язык, как *A={«англичане»}*, *B={«французы»}*, *C={«немцы»}*, и $N(A+B+C)=$ $N(A)+N(B)+N(C)-N(AB)-N(AC)-N(BC)+N(ABC)=28+30+42-10-8–5+3=80$. Тогда «бездельников» целых 100-80=20 человек!

Теперь рассмотрим следующий

Пример №4.

Бросают два игральных кубика. Сколько различных пар чисел можно получить?

Результат эксперимента можно обозначить, как два числа – количество очков, выпавших на первом и втором кубиках. Выпишем все возможные варианты:

1 1	2 1	…	6 1
1 2	2 2	…	6 2
…	…	…	…
1 6	2 6	…	6 6

Таким образом, получили 36 различных пар. При подсчете количества пар можно было использовать следующие рассуждения. Для первого числа в паре имеется шесть вариантов выпадения очков и для второго числа в паре также имеется шесть вариантов. Тогда количество пар можно получить, перемножив возможные варианты для каждой позиции. То есть нами использована следующая

***Теорема умножения комбинаторики*.**

Пусть дано множество A, состоящее из n различных элементов: $A=\{a_i\}_1^n$ и множество B, состоящее из m различных элементов: $B=\{b_j\}_1^m$. Тогда число пар вида (a_i, b_j), где $a_i \in A$, $b_j \in B$, которые мы можем получить, будет равно $n \times m$.

Доказательство.

Возьмем первый элемент a_1 из множества A и составим все возможные пары, которые можно получить с этим элементом, приписывая справа поочередно все элементы из множества B. Получим m различных пар:

$$(a_1, b_1) \quad (a_1, b_2) \quad \dots \quad (a_1, b_m)$$

Число пар, которые можно получить, поступая аналогичным образом с элементом a_2 из множества A будет также равно m.

$$(a_2, b_1) \quad (a_2, b_2) \quad \dots \quad (a_2, b_m)$$

Проделав подобные преобразования со всеми элементами из множества A до элемента a_n, получим таблицу, состоящую из $n \times m$ пар элементов:

$$
\begin{array}{llll}
(a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \dots & (a_1, b_m) \\
(a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \dots & (a_2, b_m) \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
(a_m, b_1) & (a_m, b_2) & \dots & (a_m, b_m)
\end{array}
$$

Доказательство завершено. •

Применим доказанную теорему для решения

Примера №5.

В классе учатся 11 мальчиков и 12 девочек. Сколько существует вариантов, чтобы выбрать одну пару учеников из класса (мальчика и девочку) для участия в детском утреннике?

Обозначим через A множество всех мальчиков в классе, а через B – множество всех девочек в классе: $A = \{m_i\}_1^n$, $B = \{d_j\}_1^m$, где n=11, m =12. Тогда число возможных пар будет равно $n \times m = 11 \cdot 12 = 132$.

Теперь из того же класса выберем старосту и его заместителя.

В этом случае множество $A = \{y_i\}_1^n$ – множество всех учеников и n=23. Значит для выбора старосты существует n=23 варианта. Множество B, из которого следует выбрать заместителя старосты получается из множества A после сделанного выбора, то есть $B = A \backslash y_i$, и для выбора второго элемента остается m=22 варианта. Таким образом, всего возможно $n \cdot m = 23 \cdot 22 = 506$ вариантов.

А сейчас будем выбирать двух дежурных.

В отличие от предыдущего случая, здесь порядок элементов роли не играет, и пары, например, (Вася, Коля) и (Коля, Вася) считаются одинаковыми, так как представляют одну и ту же пару дежурных. В этом случае возможных вариантов будет в два раза меньше, чем в предыдущем: $n \cdot m/2 = 23 \cdot 22/2 = 506/2 = 253$.

Следствие.

Пусть даны множества $A_1=\{a_{i_1}\}_1^{n_1}, A_2=\{a_{i_2}\}_1^{n_2},\ldots,A_k=\{a_{i_k}\}_1^{n_k}$. Тогда число наборов вида $(a_{i_1},\ldots,a_{i_k})$, где a_{i_1} выбирается из множества A_1, …, a_{i_k} выбирается из множества $A_к$, будет равно $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$.

Справедливость утверждения следует из доказательства теоремы обобщением на *к* множеств. •

Применим следствие, чтобы решить

Пример №6.

Сколько можно составить слов переставляя буквы в слове «*лицей*» (смысл слов роли не играет)?

Рассмотрим слово как множество, состоящее из пяти элементов А = {л, и, ц, е, й}. Возможное слово представляет набор из пяти элементов ($а_1$, $а_2$, $а_3$, $а_4$, $а_5$). Тогда множества, из которых последовательно будем выбирать элементы на каждую следующую позицию получим из начального последовательным исключением выбранных элементов:

$$A_1=A=\{a_i\}_1^5,\quad n_1=5;$$
$$A_2=A_1\backslash a_1,\quad n_2=4;$$
$$A_3=A_2\backslash a_2,\quad n_3=3;$$
$$A_4=A_3\backslash a_3,\quad n_4=2;$$
$$A_5=A_4\backslash a_4,\quad n_5=1.$$

Тогда согласно следствию, количество различных «слов», которые можно получить перестановкой букв в исходном слове будет равно 5·4·3·2·1=120.

Обозначим произведение *n* последовательных чисел $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n = n!$ (*n-факториал*), примем $0!=1$.

Тогда для вычисленного примера число различных «слов» будет 1·2·3·4·5=5!

Заметим, что для задач, в которых множества содержат небольшое число элементов, все решения можно выписать в явном виде. Например, для множества, состоящего из трех элементов A={a,b,c} число перестановок будет равно 6 или 3! (по аналогии с предыдущим примером) и их легко выписать. Получаем следующие перестановки элементов: abc, bca, cab, bac, acb, cba. Для случая большого числа элементов явная запись становится затруднительной, что усложняет и само решение, и его проверку. Здесь, естественным образом, возникает методическая рекомендация. Решение задач с малым числом вариантов необходимо прописывать в явном виде и представлять в общей форме. Там, где явная запись всех вариантов затруднительна, можно ограничится только общим видом решения, причем в некоторых ситуациях решение можно не доводить до числового результата, а остановиться на «волшебной» формуле.

Прежде, чем перейти к рассмотрению дальнейшей теории, разберем несколько примеров, где теорема умножения используется в явном виде для решения простых задач и некоторых «продвинутых» задач, где комбинаторный подход применяется, как один из этапов решения более общей задачи.

Пример №7.

Сколько существует четырехзначных чисел, первая цифра которых нечетная, а последняя – четная?

Поступим аналогично предыдущему примеру, но уже не будем в явном виде выписывать множества из которых выбираются элементы. Зная, что нужно подсчитать число наборов из четырех элементов (чисел), достаточно определить число возможных «кандидатов» на каждую позицию и воспользоваться теоремой (следствием). Будем этого подхода придерживаться и в дальнейшем.

Исходя из условия, на первую и последнюю позиции накладываются ограничения по числу возможных вариантов. На первом месте может стоять только нечетная цифра – пять вариантов, а на последнем только четная, тоже пять вариантов. На средние позиции ограничений нет, значит имеем по десять вариантов на каждую. Перемножая количество возможных вариантов для каждой позиции, получаем $5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 2500$.

Добавим к условию дополнительные ограничения, предположим, что четырехзначные числа состоят из различных цифр. Подсчитаем количество чисел для этого случая.

Для начала определим варианты на первое и последнее места. Так как выбираются числа различной четности, то они обязательно будут различны и число вариантов по сравнению с предыдущей ситуацией не изменится и останется равным пяти в каждом случае. Для второй позиции в числе получим уже восемь возможных вариантов и для третьей семь.

В этом случае будем иметь $5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 1400$ различных чисел.

Заметим, что здесь сначала были выбраны первая нечетная и последняя четная, а затем вторая и третья. Это вполне допустимо, так как порядок определения вариантов на каждую позицию не важен. Если мы поменяем вторую и четвертую позицию местами, то подсчет вариантов будет выглядеть «более правильным» и при этом количество чисел будет тем же самым.

Пример №8.

Даны пять карточек с цифрами от 1 до 5. Сколько можно составить различных четырехзначных чисел, используя каждую карточку только один раз?

Это уже стандартная задача и ее решение получаем сразу. Четырехзначных чисел будет $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

А теперь покажем, как, используя комбинаторный подход, можно вычислить их сумму, не выписывая сами числа.

Рассмотрим сначала разряд единиц (исключительно для определенности, согласно предыдущему замечанию можно начинать с любого разряда). Цифра 1 в разряде единиц будет встречаться $4\cdot3\cdot2=24$ раза (зафиксировали единицу на последней позиции и подсчитали число таких комбинаций), ее «вклад» в общую сумму чисел будет равен $1\cdot24=24$. Столько же раз в разряде единиц будут встречаться цифры 2, 3, 4 и 5 с соответствующим «вкладом» в общую сумму. Так, для «двойки» получим $2\cdot24=48$. Вклад разряда единиц в общую сумму всех чисел тогда составит величину равную $1\cdot24+2\cdot24+3\cdot24+4\cdot24+5\cdot24 = (1+2+3+4+5)\cdot24 = 15\cdot24 = 360$.

Очевидно, что разряд десятков даст столько же десятков в своем разряде, но соответствующий вклад в общую сумму даст число в 10 раз больше, чем разряд единиц, т.е. $360\cdot10=3600$. Для разряда сотен аналогично получим $360\cdot100=36000$ и для разряда тысяч соответственно $360\cdot1000=360000$. Окончательная сумма будет равна: $360+360\cdot10+360\cdot100+360\cdot1000=360\cdot(1+10+100+1000) = 360\cdot1111 = 399960$.

Пример №9.

Сколько в деревне может быть жителей, если у всех жителей различные инициалы?

Инициалы человека ФИО представляют буквенный набор из трех элементов. В этом случае число жителей будет равно числу различных наборов по три элемента. Предположим, что в составлении инициалов могут использоваться 28 букв русского алфавита (исключили: ё, й, ъ, ы, ь), то есть для каждой позиции в наборе имеется 28 вариантов и тогда, согласно следствию из теоремы умножения, число различных наборов (число жителей) будет равно $28\cdot28\cdot28=6272$. При других предположениях о числе букв, участвующих в написании инициалов, получим другой результат.

Пример №10.

На одной стороне треугольника взяли 10 (n) точек, а на другой 15 (m), которые соединили отрезками с противоположными вершинами. Сколько при этом получится точек пересечения этих отрезков?

Для получения одной точки пересечения надо иметь два отрезка, проведенных к разным сторонам. Число отрезков в свою очередь равно числу точек на сторонах. Таким образом, для получения одной точки пересечения нужно выбрать два отрезка (читай две точки) с разных сторон или одна точка пересечения определяется выбором пары точек. Значит число всех пересечений равно числу всех пар точек с разных сторон, а это $10 \cdot 15 = 150$ $(n \cdot m)$.

Вычислим, на сколько частей разбивают треугольник проведенные отрезки.

Десять отрезков к одной стороне разбивают треугольник на 11 частей, а 15 отрезков к другой разбивают каждую полученную часть еще на 16 частей. Таким образом, всего треугольник будет разбит на $11 \cdot 16 = 176$ частей $((n+1) \cdot (m+1))$.

Пример №11.

Посчитать число всевозможных подмножеств множества, состоящего из 3 (n) элементов.

Рассмотрим множество A={a, b, c}, состоящее из трех (n) элементов. Каждое подмножество множества A можно представить, как набор из трех (n) элементов, состоящий из нулей и единиц. Если элемент из A входит в подмножество, то в соответствующем наборе на позицию, которую он занимает в исходном множестве, ставят 1, в противном случае – 0. Запишем данное соответствие: (000) - {∅}, (001) - {c}, (010) - {b}, (100) - {a}, (011) - {b,c}, (101) - {a,c}, (110) - {a,b}, (111) - {a,b,c}. Тогда число подмножеств множества, состоящего из 3 (n) элементов, будет равно числу различных наборов, на каждую позицию в которых имеется два варианта, а это число согласно теореме умножения (следствие) равно 2·2·2=8 ($2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$).

Среди задач комбинаторики, решаемых с использованием теоремы умножения, часто встречаются типовые задачи, решения которых укладываются в некоторую стандартную схему. Рассмотрим такие схемы.

Перестановки без повторений.

Пусть дано множество $A = \{a_i\}_1^n$. Будем рассматривать всевозможные упорядоченные наборы (или векторы), которые можно получить, переставляя элементы множества *A* друг относительно друга. Такие наборы называются *перестановками без повторений из n элементов*.

Подсчитаем их число. Обозначим набор как ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.).

На первое место мы можем поставить любой из *n* элементов, на 2-е место – любой из оставшихся (*n-1*) элементов и т.д., на последнее место остается один элемент. Тогда, по следствию из теоремы умножения, получаем, что число таких наборов равно *n!* Обозначим число перестановок из *n* элементов как *P(n)*, тогда

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!. \bullet$$

Пример №12.

На девяти карточках написаны цифры от 1 до 9. Сколько можно составить различных девятизначных чисел, используя все эти карточки?

Это как раз и будет число перестановок из 9 элементов, тогда можно записать, что число различных девятизначных чисел будет равно P(9)=9!.

Мы уже сталкивались с такой типичной задачей (пример №6), также было отмечено, что при больших *n* нет необходимости доводить ответ до конечного числа и можно ограничиться «волшебной» формулой (момент настал), т.к. основная цель при решении комбинаторной задачи состоит в построении соответствующей конкретной ситуации верной математической модели, а не в арифметических действиях. Будем придерживаться этого тезиса и в дальнейшем.

Пример №13.

Сколько существует способов рассадить 8 гостей на одном диване? А за круглым столом?

Рассаживание гостей на диване – это перестановка из 8 элементов. Всего способов будет P(8)=8!. Ситуация со «столом» принципиально отличается от предыдущей тем, что у стола нет начала (и конца), то есть отсутствует точка начала отсчета. Тогда ее нужно выбрать самим, например, за начало отсчета можно взять одного из гостей, посадив его на любое место. Оставшихся 7 гостей будем рассаживать как на диване, то есть получаем P(7)=7! способов.

Размещения без повторений.

Пусть дано множество $A=\{a_i\}_1^n$. Будем рассматривать всевозможные упорядоченные наборы *к* элементов, которые можно получить, выбирая элементы множества *A* только один раз, $1\le k \le n$. Такие наборы называются *размещениями без повторений из n элементов по к*.

Подсчитаем число таких наборов. Обозначим набор $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)$. На первое место мы можем поставить любой из *n* элементов, на второе место – любой из оставшихся (*n-1*) элементов и т.д., на *к*-тое место остается (*n – (k - 1)*) вариант. По следствию из теоремы умножения получаем, что число различных наборов равно $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot(n-(k-1))$. Но такая форма записи не всегда удобна, поэтому это выражение можно преобразовать следующим образом:

$$n\cdot(n-1)...(n-(k-1))=\frac{\left[n\cdot(n-1)...(n-(k-1))\right]\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Обозначим число размещений без повторений из n элементов по k как A_n^k, тогда

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}. \bullet$$

Следствие.

Если $k=n$, то $A_n^n=P(n)$.

Это легко проверяется непосредственной подстановкой в формулу числа размещений параметра n вместо k

$$A_n^n=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!=P(n). \bullet$$

Пример №14.

Сколько можно составить различных пятизначных чисел с помощью девяти карточек с цифрами от 1 до 9?

Получаемое число есть упорядоченный набор из пяти элементов. Значит, их количество равно числу размещений без повторений из 9 по 5:

$$A_9^5=\frac{9!}{(9-5)!}=\frac{9!}{4!}=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=15120.$$

Пример №15.

Сколько надо составить словарей, чтобы переводить с 10 языков?

Если множество языков рассматривать, как множество из 10 различных элементов, то словарь можно представить, как упорядоченный набор из двух элементов (русско-английский и англо-русский это два различных словаря).

Тогда число всех словарей будет равно числу упорядоченных наборов из 10 элементов по два $A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!}$ =10·9=90.

Размещения с повторениями.

Пусть дано множество $A=\{a_i\}_1^n$. Будем рассматривать всевозможные упорядоченные наборы *k* элементов, которые можно получить, используя элементы множества *A*. Причем элементы в данном наборе могут повторяться. Такие наборы называются *размещениями с повторениями из n элементов по к*.

Обозначим число размещений с повторениями, как $\overline{A_n^k}$ и подсчитаем его. Обозначим набор ($\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$). На первое место можем поставить любой из *n* элементов исходного множества, на второе тоже любой из *n* элементов исходного множества и т. д. до последнего элемента. Тогда по теореме умножения (следствие) получаем, что

$$\overline{A_n^k} = n^k. \bullet$$

Заметим, что данную ситуацию лучше всего иллюстрируют обычные числа. Например, необходимо определить количество шестизначных чисел. Будем рассматривать шестизначные числа, как наборы из шести элементов начиная с набора (000 000) и заканчивая набором (999 999). Определяя по десять вариантов на каждую позицию, получаем, что шестизначных чисел будет $\overline{A_{10}^6} = 10^6 = 1000\,000$, а кто бы сомневался, что их столько! Данный пример (без номера), по мнению автора, наилучшим образом иллюстрирует не только размещения с повторениями, но и суть теоремы умножения.

Пример №16.

Бросают 4 игральных кубика, сколько различных вариантов их выпадения можно получить?

Исходом бросания будет упорядоченный набор из четырех чисел, каждое из которых выбирается из множества А={1,2,3,4,5,6} состоящего из шести элементов. Их количество будет равно $\overline{A_6^4}=6^4=1296$.

Сочетания без повторений.

Пусть дано множество $A=\{a_i\}_1^n$. Будем рассматривать всевозможные неупорядоченные наборы (подмножества) по *к* ($0\le k \le n$) элементов, которые можно получить, используя элементы множества *A* только один раз. Такие наборы называются *сочетаниями без повторений из n элементов по к.*

Обозначим число сочетаний без повторений из *n* элементов по *к* как C_n^k и подсчитаем его.

Прежде, чем вычислить число сочетаний в общем виде, рассмотрим следующий пример.

Пусть дано множество из четырех элементов, например, *A={a,b,c,d}, n=4*. Выпишем все упорядоченные наборы без повторений по три элемента, которые можно получить (*k=3)*. Их будет $A_4^3=\dfrac{4!}{(4-3)!}=\dfrac{4!}{1!}=4\cdot 3\cdot 2=24$.

Для наглядности выпишем их все:

abc	*abd*	*bcd*	*acd*
acb	*adb*	*bdc*	*adc*
bac	*bad*	*dcb*	*dac*
bca	*bda*	*dbc*	*dca*
cab	*dab*	*cbd*	*cad*
cba	*dba*	*cdb*	*cda*

Заметим, что наборы в каждом столбце получены перестановкой элементов набора из первой строки, то есть путем упорядочивания (перестановки) одних и тех же элементов. А число неупорядоченных наборов будет в 6 раз меньше и равно числу столбцов или 4. Таким образом, упорядоченные наборы можно получить перестановкой элементов неупорядоченных наборов. Каждый из четырех неупорядоченных наборов дает шесть (6=3!) упорядоченных, а всего упорядоченных получается 4·3!=24. Аналогичные рассуждения будем использовать при выводе общей формулы.

Подсчитаем число различных неупорядоченных наборов. Пусть их количество будет *X*. Один неупорядоченный набор из *к* элементов позволяет получить *к!* упорядоченных наборов (перестановка из *к* элементов). Тогда *X* неупорядоченных наборов позволят получить *X·к!* упорядоченных наборов. Но с другой стороны, мы знаем, что число упорядоченных наборов из *n* элементов по *к* равно числу размещений A_n^k. Таким образом, получаем уравнение: $X \cdot k! = A_n^k$, откуда $X = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, или окончательно получаем:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \bullet$$

Заметим, что при *к*=*n* получим $C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1.$

Пример №17.

В классе 23 человек. Кате разрешено пригласить на праздник только шестерых из них. Сколькими способами она это может сделать?

Так как порядок гостей не принципиален, а принципиален качественный состав, то гости - это сочетания без повторений из 23 по 6. Возможных вариантов будет $C_{23}^6 = \frac{23!}{(23-17)! \cdot 17!} = \frac{23!}{6! \cdot 17!} = 100974.$

Пример №18.

В классе 25 учеников. Из них необходимо выбрать четырех для туристической поездки. Сколькими способами это можно сделать, если надо поехать

a) в одну страну;

b) в четыре разных страны?

В обоих случаях мы выбираем по 4 элемента из 25. Только в случае a) порядок роли не играет, а для случая b) порядок принципиален. Соответствующее число способов будет: a) C_{25}^{4}, b) A_{25}^{4}.

В данном примере в качестве ответа мы уже оставляем формулы (конечно, «волшебные»), предоставляя возможность получить численный результат заинтересованным лицам.

Свойства сочетаний.

Свойство 1.

Для числа сочетаний справедливы соотношения: $C_n^k = C_n^{n-k}$, $0 \le k \le n$.

Доказательство.

Действительно:

$C_n^{\,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-l)!\,l!} = \frac{n!}{l!(n-l)!} = C_n^{\,l} = C_n^{\,n-k}$, где $n–k=l$, $k=n-l$. •

Пример №19.

На полку, имеющую 10 позиций, необходимо положить 7 красных и 3 зеленых шарика. Сколькими способами это можно сделать?

Для фиксирования расположения всех 10 шариков достаточно выбрать 3 места из 10 для зеленых, а красные займут оставшиеся позиции. Но точно также можно выбрать 7 мест из 10 для красных шариков, а зелеными заполнить оставшиеся позиции. То есть мы получим $C_{10}^{3} = C_{10}^{7} = \frac{10!}{3!\cdot 7!}$ =120.

Свойство 2.

Для числа сочетаний будет верно следующее соотношение:

$$C_n^{\,k} = C_{n-1}^{\,k-1} + C_{n-1}^{\,k},\ 1 \le k \le n-1.$$

Доказательство.

Вычислим сумму справа:

$$C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}=$$
$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k}\right)=$$
$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k.$$

Получили выражение слева, что и требовалось. •

Наглядной иллюстрацией второго свойства является «*Арифметический треугольник*» или как его еще называют «*Треугольник Паскаля*».

Построим треугольник следующим образом. На начальной (нулевой) строке поставим единицу, которая будет вершиной арифметического треугольника. Первая строка будет состоять из двух единичек, вторая из 1, 2 и 1. Третья будет иметь вид: 1, 3, 3, 1. И каждая последующая будет строиться из предыдущей следующим образом: крайние числа – это единицы, а внутренние получаются сложением двух соседних чисел в предыдущей строке. То есть, четвертая строка будет построена таким образом. Сначала поставим 1, затем сложим из предыдущей строки 1 и 3 получим 4, далее 3+3=6, 3+1=1 и последняя цифра опять 1.

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
	….................................

и так далее (можно продолжать до бесконечности).

Заметим, что числа в строке с номером $к$ являются числом сочетаний из $к$ по l, где l – номер числа в строке, если нумеровать с 0 до $к$. Тогда последнюю строку в представленном примере можно записать в виде:

$$C_6^0 \quad C_6^1 \quad C_6^2 \quad C_6^3 \quad C_6^4 \quad C_6^5 \quad C_6^6$$

Теперь видно, что при построении треугольника было использовано 2-е свойство сочетаний.

Выведем формулу «*Бинома Ньютона*».

Вспомним формулы сокращенного умножения и последовательно выпишем степени суммы двух переменных $(a+b)^n$. Для $n=1$ запишем $(a+b)^1=a+b$, для $n=2$ получим $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, для $n=3$ соответственно будем иметь $(a+b)^3=a^3+3a^2\ b+3a\ b^2+\ b^3$. Замечаем, что коэффициенты при переменных a и b совпадают с числами той строки в треугольнике, номер которой равен степени бинома. Используя треугольник можно записать разложения и для более высоких степеней. Так для пятой степени получим:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 =$$
$$= C_5^{\,5}a^5 + C_5^{\,4}a^4b^3 + C_5^{\,3}a^3b^2 + C_5^{\,2}a^2b^3 + C_5^{\,1}ab^4 + C_5^{\,0}b^5$$

Биномом Ньютона степени n будем называть выражение вида: $(a+b)^n$.

Разложим бином n-ой степени в ряд в общем виде. Запишем n-ую степень, как произведение n сомножителей:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n\ раз}$$

Раскрывая скобки, получим сумму одночленов вида $a^k \cdot b^{n-k}$, где k принимает все значения от 0 до n (этот факт можно обозначить как $k=\overline{0,n}$). Подсчитаем число подобных одночленов. Одночлен вида $a^k \cdot b^{n-k}$ получается, когда из k скобок выбирается элемент a, а из оставшихся n-k скобок выбирается элемент b. Число таких одночленов будет равно числу способов выбора k скобок из имеющихся n (порядок не важен), а это есть число сочетаний из n элементов по k. Значит, подобных одночленов будет $C_n^{\,k}$ для каждого значения $к$. Окончательно получаем:

$$(a+b)^n = C_n{}^0 a^0 b^n + C_n{}^1 a^1 b^{n-1} + ... + C_n{}^{n-1} a^{n-1} b + C_n{}^n a^n b^0.$$

Также разложение бинома Ньютона n-й степени в ряд можно представить в виде:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n{}^k a^k b^{n-k}.$$

Здесь для суммы использовано следующее обозначение:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Повторимся, что n-я строка арифметического треугольника состоит из коэффициентов разложения бинома Ньютона в ряд, то есть из величин C_n^k, где $k=\overline{0,n}$.

Свойство 3.

Для числа сочетаний справедливо равенство:

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Справедливость данного равенства сразу следует из разложения бинома Ньютона n-й степени, если a и b равны единице. •

Пример №20.

Сколько существует различных подмножеств множества из n элементов?

Для решения данной задачи воспользуемся третьим свойством. Пересчитаем подмножества следующим образом. Сначала пересчитаем одноэлементные подмножества, затем двухэлементные и так далее. Число подмножеств по одному элементу равно C_n^1, число подмножеств по два элемента - C_n^2 и т. д., число подмножеств по *n-1* элементу равно C_n^{n-1}.

Добавив пустое множество ($C_n^0=1$) и все множество ($C_n^n=1$), получаем, что число всевозможных подмножеств равно: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Заметим, что эту задачу мы решали раньше, но другим способом.

Перестановки с повторениями.

Пусть дано множество $A=\{a_i\}_1^n$. Будем рассматривать множество B состоящее из k_1 элементов вида a_1, k_2 элементов вида a_2 ,..., k_n элементов вида a_n . А всего в множество B будет входить $m=k_1+k_2+\ldots+k_n$ элементов (все k_i, $i=\overline{1,n}$ - неотрицательные). Рассмотрим наборы, получаемые перестановкой элементов множества B друг относительно друга. В отличие от рассмотренной ранее перестановки элементов, в данном случае среди переставляемых элементов есть одинаковые и их перестановка между собой не дает нового набора. Получаемые наборы называются *перестановками с повторениями из m элементов*. Их число обозначают P_m $(k_1,k_2,\ldots k_n)$. Вычислим его.

Пусть число таких наборов равно X. Если бы все элементы были различны, то переставляя между собой $к_1$ элементов вида a_1 можно было бы получить $k_1!$ новых наборов, переставляя между собой $к_2$ элементов вида a_2 получили бы $k_2!$ новых наборов, и так далее. За счет перестановки элементов вида a_n - $k_n!$. Таким образом, если бы все элементы были различны, один набор перестановок с повторениями позволил бы создать $k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!$ наборов перестановок без повторений, а X наборов перестановок с повторениями создадут в X раз больше, то есть: $X\cdot k_1!, k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!$. С другой стороны, число перестановок из m различных элементов равно $m!$ Таким образом получаем $X\cdot k_1!, k_2!\cdot\ldots\cdot k_n! = m!$, откуда следует, что $X=\dfrac{m!}{k_1!, k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$, то есть можно записать

$$P_m(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{m!}{k_1!\cdot k_2!\cdot ...\cdot k_n!}. \bullet$$

Пример №21.

Сколько можно получить слов, переставляя буквы в слове "колокол"?

Слово состоит из 7 элементов, причем два из них повторяются дважды, а один – три раза. То есть, мы имеем дело с перестановками с повторениями, и их число будет равно $P_7(2,2,3) = \frac{8!}{3!2!2!}$ =1680.

Пример №22.

Сколькими способами можно расставить на первой линии шахматной доски шахматные фигуры?

Данная задача также решается с использованием перестановок с повторениями. С учетом имеющихся одинаковых фигур (две ладьи, два коня, два слона), количество перестановок будет равно $P_8(1,1,2,2,2) = \frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$ =5040.

Следствие.

Если у нас имеются лишь две группы повторяющихся элементов, то число перестановок с повторениями будет равно числу сочетаний, а именно:

$$P_n(k_1, k_2) = C_n^{k_1} = C_n^{k_2}$$

Доказательство.

Пусть множество состоит из двух групп элементов, то есть $n = k_1 + k_2$. Тогда будет справедливо соотношение

$$P_n(k_1, k_2) = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!} = \frac{n!}{k_1!\cdot (n-k_1)!} = \frac{n!}{k_2!\cdot (n-k_1)!} = C_n^{k_1} = C_n^{k_2},$$

что доказывает справедливость утверждения. •

Пример №23.

У отца есть 3 яблока и 2 груши; он выдает любимому ребенку только по одному фрукту в день в течение 5 дней. Сколькими способами он может распределить выдачу фруктов по дням?

Решение, очевидно, будет иметь вид: $P_5(2,3) = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = C_5^{\ 3} = C_5^{\ 2} = 10.$

Пример №24.

Имеется 25 (n) абонентов телефонной сети. Сколькими способами можно одновременно соединить 3 пары абонентов?

Сначала заметим, что технологии телефонного общения меняются достаточно быстро, поэтому задача может и не иметь практического смысла для ситуации с телефонами. Тем не менее рассмотрим следующий способ решения задачи.

Получим первую пару, для этого выбираем двух человек из 25 (n). Число возможных вариантов при этом равно C_{25}^2 (C_n^2). Следующих двоих будем выбирать уже из 23 (n-2) возможных кандидатов, число способов выбора при этом равно C_{23}^2 (C_{n-2}^2). Аналогично для последней пары возможных вариантов будет C_{21}^2 (C_{n-4}^2). Количество всех соединений, согласно теореме умножения, равно произведению вариантов для каждой пары. То есть получаем величину $C_{25}^2 \cdot C_{23}^2 \cdot C_{21}^2$ ($C_n^2 \cdot C_{n-1}^2 \cdot C_{n-2}^2$). Если при этом порядок выбора пар при соединении нас не интересует, то следует исключить порядки соединений, разделив результат на 3! (число упорядочивания трех элементов). Окончательно получаем:

$$\frac{C_{25}^{\ 2} \cdot C_{23}^{\ 2} \cdot C_{21}^{\ 2}}{3!} \quad \left(\frac{C_n^{\ 2} \cdot C_{n-2}^2 \cdot C_{n-4}^2}{3!}\right).$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\frac{C_{25}^{\ 2} \cdot C_{23}^{\ 2} \cdot C_{21}^{\ 2}}{3!} = \frac{25!}{2! \cdot (25-2)!} \cdot \frac{23!}{2! \cdot (23-2)!} \cdot \frac{21!}{2! \cdot (21-2)!} \cdot \frac{1}{3!} =$$

$$= \frac{25! \cdot 23! \cdot 21!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 23! \cdot 21! \cdot 19!} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{25!}{19! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{3!} = P_{25}(19, 2, 2, 2) \cdot \frac{1}{3!}$$

Для произвольного числа абонентов можно записать:

$$\frac{C_n^{\ 2} \cdot C_{n-2}^2 \cdot C_{n-4}^2}{3!} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} \cdot \frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!} \cdot \frac{(n-4)!}{2! \cdot (n-6)!} \cdot \frac{1}{3!} =$$

$$= \frac{n! \cdot (n-2)! \cdot (n-4)!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot (n-2)! \cdot (n-4)! \cdot (n-6)!} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{n!}{(n-6)! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{3!} =$$

$$= P_n(n-6, 2, 2, 2) \cdot \frac{1}{3!}$$

Правая часть есть результат вычисления перестановок с повторениями, и может быть объяснена следующим образом. Выпишем всех абонентов в один ряд и будем их переставлять друг относительно друга. Всего получим 25! (n!) различных исходов. В пары будем соединять тех, кто окажется на 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6 местах. Тогда для получения новой пары абонентов необходимо менять местами людей из этих пар с остальными. Перестановки же элементов внутри пар, а это 2!·2!·2!, перестановка элементов оставшейся части между собой – 19! ((n-6)!) и пар между собой – 3! на результат соединения не влияет, и их необходимо сократить. Второй подход в объяснении результата представляет описание *разбиения множества* на группы.

Данный пример показывает, что при решении комбинаторных задач возможно построение различных моделей для подсчета числа комбинаций.

Сочетания с повторениями.

Пусть дано множество $A = \{a_i\}_1^{\ n}$. Будем рассматривать неупорядоченные наборы (подмножества) по m элементов, в которые элементы множества A могут входить неоднократно. Такие наборы называются *сочетаниями с повторениями из n элементов по m*. Подсчитаем их количество. Пусть в рассматриваемый набор элемент a_1 входит k_1 раз, элемент a_2 - k_2 раз, …, элемент a_n – k_n раз. Все $k_i \geq 0,\ i = \overline{1,n},\quad \sum_{i=1}^{n} k_i = m$.

Например, $A = \{a,b,c,d\}$, $n = 4$, выпишем подмножество состоящее из девяти (m=9) элементов $\{a,a,a,b,b,d,d,d,d\}$. Здесь $k_1 = 3,\ k_2 = 2,\ k_3 = 0,\ k_4 = 4$.

Так как рассматриваемые подмножества неупорядоченные, то присутствие каждого элемента каждого вида будем фиксировать нулем, а границы между видами элементов – единицами. То есть, каждое подмножество из m элементов можно однозначно описать набором из m нулей и $(n\text{-}1)$ единиц. Для приведенного примера выписанное подмножество будет представлено набором (0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0).

Тогда число всевозможных различных подмножеств будет равно числу всевозможных перестановок из m нулей и (n-1) единицы, а это есть: C_{n-1+m}^{m}. Обозначим число сочетаний с повторениями из n элементов по m как $\overline{C_n^m}$ и окончательно запишем

$$\overline{C_n^m} = C_{n-1+m}^{m}.$$

Пример №25.

В магазине имеется 4 вида пирожных (заварное, эклер, безе и ягодное). Кате надо купить для пришедших гостей 9 пирожных. Сколькими способами она может это сделать?

Набор пирожных является сочетанием с повторениями, и их число будет равно: $\overline{C_4^9} = C_{4-1+9}^{9} = C_{12}^{9} = \dfrac{12!}{9!\cdot 3!}$=220.

Пример №26.

Три охотника стреляют по пяти уткам. Сколько существует вариантов выбора целей?

В условии данной задачи существует некоторый произвол. Мы можем интерпретировать уток как занумерованные ящики, а охотников – как неразличимые одинаковые шарики (какая разница утке, кто в нее целится!). Тогда число способов выбора цели будет равно числу способов распределения трех одинаковых шариков по пяти ящикам. Это есть число сочетаний с повторениями из пяти по три: $\overline{C_5^3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!}$=35.

Но мы также можем считать охотников различимыми. Тогда вариант выбора цели можно описать как упорядоченный набор из трех чисел. Где *i*-ая (*i=1,2,3*) координата будет указывать номер утки, выбранной *i*-ым охотником. При этом подходе число способов выбора цели равно числу размещений с повторениями из пяти по три: $\overline{A_5^3}$ =5^3=125.

Попробуем подытожить и систематизировать представленное выше. Для этого рассмотрим две модели.

Урновая модель.

Дана урна, в которой находятся *n* одинаковых занумерованных шаров (от *1* до *n*), и из этой урны произвольным образом извлекается *k* шаров. Наборы по *k* шаров могут быть *упорядоченными* или *неупорядоченными*. А выборки шаров могут быть *с возвращением* или *без возвращения*. В зависимости от этого при подсчете числа вариантов получаемых наборов будут использоваться различные формулы. В случае упорядоченных наборов мы имеем дело с размещениями, в случае неупорядоченных - с сочетаниями. Выборка без возвращения - наборы без повторений, выборка с возвращениями - наборы с повторениями. Общий итог можно представить таблицей:

	с возвращениями	без возвращений
упорядоченные	$\overline{A_n^k}$	A_n^k
неупорядоченные	$\overline{C_n^k}$	C_n^k

Иногда при решении задач удобно интерпретировать ситуацию, как распределение шариков по ящикам.

Распределение шариков по ящикам.

Пусть имеется n ящиков и k шариков. Будем распределять шарики по ящикам. Шарики могут быть *различимыми* и *не различимыми*, а распределения могут быть *с запретом* и *без запрета*. В случае с запретом предполагается, что в один ящик можно положить не более одного шарика. В случае без запрета – в один ящик можно положить сколько угодно шариков. Если шарики не различимы и распределение с запретом, число различных распределений (раскладок) шариков по ящикам равно числу сочетаний без повторений, а в случае распределения без запрета - числу сочетаний с повторениями из n элементов по k. В случае различимых шариков с запретом получаем число размещений без повторений, а в случае без запрета – число размещений с повторениями из n элементов по k. Общий итог можно представить таблицей:

	без запрета	с запретом
различимые	$\overline{A_n^k}$	A_n^k
не различимые	$\overline{C_n^k}$	C_n^k

Рассмотрим ряд задач с решениями. Отметим, что ситуации, когда используется только одна из полученных комбинаторных формул, встречаются редко. Часто их приходится комбинировать, а иногда, при вольной интерпретации условия, возможны различные решения.

Задачи с решениями.

Задача №1.

Сколько существует четырехзначных чисел, составленных из различных цифр?

Четырехзначные числа будем рассматривать как упорядоченные наборы из четырех элементов: 0000, …, 9999. Тогда количество вариантов для чисел, составленных из различных цифр будет вычисляться как число размещений без повторений из десяти элементов по четыре: $A_{10}^{4}=\dfrac{10!}{(10-4)!}$=10·9·8·7=5040.

Задача №2.

Даны семь карточек с цифрами от 1 до 7. Сколько с их помощью можно составить различных семизначных чисел, используя каждую карточку один раз, так, чтобы цифры 2 и 5 стояли на втором и пятом местах?

Так как вторая и пятая позиции однозначно определены, то по оставшимся пяти позициям надо распределить пять оставшихся цифр, а это будет число перестановок из пяти элементов без повторений: P(5)=5!=120.

Задача №3.

Подсчитать количество симметричных шестизначных номеров, если номера начинаются с 000000 и заканчиваются 999999.

Три первые цифры в номере можно выбрать произвольным образом. Три последние цифры однозначно определяются тремя первыми. Перемножая варианты для всех позиций (теорема умножения), получим: 10·10·10·1·1·1=1000.

Задача №4.

В турнире принимает участие 12 (n) шахматистов. Сколько было сыграно партий, если все встретились по одному разу?

Одна партия определяется парой шахматистов. Тогда число различных партий равно числу всех возможных пар, которые можно составить из имеющихся участников, а это в свою очередь равно числу сочетаний без повторений из двенадцати (n) по два: C_{12}^2 (C_n^2).

Задача №5.

У отца 5 вкусных яблок. Он раздает их своим 8 сыновьям. Каждый получит либо одно яблоко, либо ни одного. Сколько у отца способов порадовать детей?

Отец должен выбрать из 8 сыновей только пятерых. Если яблоки одного размера, то число способов будет равно C_8^5 (порядок неважен), а если разного (здесь важен порядок, ведь обидно получить маленькое яблоко, когда есть большое), то решением будет A_8^5.

Задача №6.

Переплетчику надо переплести 12 книг в красный, желтый и зеленый переплеты. Сколькими способами он может это сделать?

Очевидно, что мы имеем дело с сочетаниями с повторениями из 3 элементов по 12. Получаем: $\overline{C_3^{12}} = C_{3+12-1}^{12} = C_{14}^{12}$.

Задача №7.

Сколько существует способов переплета 12 книг в переплеты 3 имеющихся цветов, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

Рассмотрим следующую модель. Мы раскладываем 12 шариков (книги) по трем ящикам (цвета) так, чтобы ни один ящик не был пустым. Положим в каждый по шарику, тогда нам останется распределить 9 оставшихся шаров по 3 ящикам произвольным образом, количество вариантов при этом будет равно $\overline{C_3^9}$.

Задача №8.

Сколько существует шестизначных чисел, в которых на четных местах стоят четные цифры, а на нечетных – нечетные? Рассмотреть случаи с повторяющимися и неповторяющимися цифрами.

Расставим нечетные цифры на нечетные места. Получим $\overline{A_5^3}=5^3$ вариантов. Для четных цифр получим столько же вариантов $\overline{A_5^3}=5^3$. Тогда всего чисел, согласно теореме умножения, будет: $\overline{A_5^3}\cdot\overline{A_5^3}=5^3\cdot 5^3=5^6=15625$. Для неповторяющихся цифр результат будет: $A_5^3\cdot A_5^3=\frac{5!}{3!}\cdot\frac{5!}{3!}=400$.

Задача №9.

В киоске имеется 10 различных видов открыток. Сколько существует способов выбрать:

а) 8 открыток,

б) 8 различных открыток?

В случае а) получаем число сочетаний с повторениями: $\overline{C_{10}^8}$, а в случае б) – число сочетания без повторений: C_{10}^8.

Задача №10.

Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4 можно составить из цифр 1,2,3,4, если цифры в числе:

а) повторяющиеся,

б) неповторяющиеся?

Рассмотрим пункт а). Чтобы составленное четырехзначное число делилось на 4, необходимо, чтобы оно оканчивалось или на 12, или на 24, или на 32, или на 44. Чисел, оканчивающихся на 12, на 24, на 32 и на 44 будет по $\overline{A_4^2}=4^2$ в каждом случае (зафиксировали две последние и выбрали две первые). Тогда всего получим $4\cdot 4^2=64$ различных числа.

Для пункта б) соответственно получаем окончания чисел: 12, 24, 32 и тогда всего 3·2!=6 различных чисел ($A_2^2 = 2!$).

Задача №11.

Бросают 5 игральных кубиков. Сколько существует вариантов выпадения ровно трех одинаковых цифр?

Сначала выбираем три кубика из пяти, на которых выпадут одинаковые цифры. Число возможных вариантов будет равно C_5^3, затем поставим на них одинаковые цифры, для чего имеем 6 вариантов. На две оставшиеся позиции имеем по 5 вариантов ($\overline{A_5^2} = 5^2$) (все, кроме выбранных одинаковых). По теореме умножения окончательно получим: $C_5{}^3 \cdot 6 \cdot \overline{A_5^2}$.

Заметим, что, при условии отсутствия совпадения, в двух оставшихся цифрах получим: $C_5^3 \cdot 6 \cdot A_5^2$

Задача №12.

Ученики 6 «Б» (23 человека) пошли в кино. Сколькими способами они могут рассесться на последнем ряду кинотеатра (23 места) так, чтобы между Олей и Сашей сидели ровно 7 человек (поссорились, наверное)?

Посадим Олю с левого края, а Сашу через семь мест или наоборот (2 варианта). Остальные ученики могут рассаживаться произвольно на оставшиеся 21 место (P(21)=21! вариантов). Затем будем передвигать Олю вправо, пока Саша не окажется на правом краю (15 позиций). Перемножив все варианты и позиции, получим, что число способов рассадки равно 2·21!·15.

Задача №13.

В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого 8-угольника (n-угольника), если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

Для получения одной точки пересечения необходимы две диагонали, для двух диагоналей нужны четыре различные вершины. Таким образом, одна точка задается четырьмя вершинами и, соответственно, число точек пересечения диагоналей будет равно числу всех возможных неупорядоченных наборов по четыре элемента из 8, то есть C_8^4 (C_n^4).

Задача №14.

Сколько существует различных шестизначных чисел, в которых каждая следующая цифра меньше предыдущей цифры (не обязательно на единицу)?

Очевидно, что подобные числа состоят из различных цифр. Любой набор различных цифр можно расположить в порядке убывания, причем единственным образом. Тогда количество чисел, цифры которых расположены в порядке убывания будет рано количеству чисел, состоящих из различных цифр, а это есть C_{10}^6.

Задача №15.

На школьной конференции по истории должно прозвучать12 докладов. Сколько существует способов выступления докладчиков, так чтобы доклад Васи следовал после доклада Пети:

а) сразу,

б) просто «после»?

а) Поставим Петю сразу перед Васей и будем рассматривать эту пару, как одно целое. Тогда вариантов распределения докладчиков, в каждом из которых Петя выступит сразу перед Васей, будет P(11)=11! (выступление Пети однозначно определяет порядок выступления Васи).

б) Всего способов выступлений будет P(12)=12!. Ровно в половине случаев Петя будет выступать раньше Васи, (а в другой половине случаев Вася будет выступать раньше Пети). Таким образом, получаем $\frac{12!}{2}$ различных вариантов.

Задача №16**.**

Из 15 мальчиков и 12 девочек необходимо составить четыре пары для представительства в четырех различных местах. Сколькими способами это можно сделать?

Одно из решений будет следующим. Выберем четырех «упорядоченных» мальчиков (номер мальчика зафиксирует пару), получим A_{15}^4 вариантов. Затем выберем для них «неупорядоченных» девочек, получим C_{12}^4 вариантов. Число вариантов для четырех пар будет равно произведению: $A_{15}^4 \cdot C_{12}^4$.

Задача №17.

В купе вагона 2 дивана по 5 мест на каждом. Сколько существует способов размещения 10 пассажиров, если 4 хотят сидеть по ходу, 3-против, а остальным - все равно?

Выбираем места для четырех пассажиров - A_5^4 вариантов, затем для трех пассажиров - A_5^3 вариантов, рассаживаем трех оставшихся – P(3) вариантов. Вспоминаем теорему умножения и получаем: $A_5^4 \cdot A_5^3 \cdot P(3)$.

Задача №18**.**

Из 7 мальчиков и 4 девочек надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 девочек. Каково возможное число вариантов?

Перебираем все возможные варианты по числу девочек. Это две девочки и четыре мальчика, всего $C_4^2 \cdot C_7^4$ вариантов; три девочки и три мальчика, всего $C_4^3 \cdot C_7^3$ вариантов; четыре девочки и четыре мальчика, всего $C_4^4 \cdot C_7^2$ вариантов. По теореме сложения получим:

$$C_4^2 \cdot C_7^4 + C_4^3 \cdot C_7^3 + C_4^4 \cdot C_7^2.$$

Задача №19.

Из 12 учеников необходимо выбрать 6 таким образом, чтобы Петя и Вася не оказались вместе. Подсчитать возможные варианты.

Поставим Петю и Васю в угол и выберем из оставшихся десятерых учеников пятерых, получим C_{10}^{5} вариантов. А затем определим Петю и Васю в каждую из групп, это два варианта. Окончательно получим $2C_{10}^{5}$.

Задача №20.

Сколько существует раздач карт при игре в преферанс (три игрока получают по десять карт и две карты откладывают в «прикуп»)?

Игроки различимые. Первому выберем 10 карт C_{32}^{10} способами, второму - C_{22}^{10} способами, третьему - C_{12}^{10} способами. А в прикуп две карты определятся однозначно ($C_2^2 = 1$). Тогда различных раздач будет $C_{32}^{10} \cdot C_{22}^{10} \cdot C_{12}^{10}$.

Задача №21.

На дискотеке танцуют 7 мальчиков и 10 девочек. Сколько имеется вариантов участия девочек в парном танце, в котором танцуют все мальчики? Сколько имеется вариантов, если считать неприглашенных девочек? А если 2 девочки обязательно танцуют?

В первом случае мальчики выбирают семь из десяти девочек, получим A_{10}^{7} вариантов (девочкам очень важно, кто именно их приглашает, порядок принципиален!).

Во втором случае подсчитаем варианты для неприглашенных, их будет C_{10}^{3} (здесь без разницы, в смысле порядка, но, все равно, обидно).

Если двух девочек всегда приглашают (везет же!), то остается выбрать пятерых из восьми оставшихся - C_8^5 вариантов и распределить всех девочек среди мальчиков - Р(7) вариантов. Таким образом, получим $C_8^5 \cdot 7!$ вариантов.

Задача №22.

В скольких десятизначных числах сумма цифр равна 3?

Возможные десятизначные числа могут начинаться с 1, 2 или 3. Пусть число начинается с единицы. Тогда среди оставшихся девяти мест два могут занимать единицы, это C_9^2 различных чисел, или одно место займет двойка, это C_9^1 различных чисел (остальные места в числе заполняются нулями). Если число начинается с двойки, то кроме восьми нулей в числе будет одна единица, а это также C_9^1 различных чисел. И одно число может начинаться с тройки. Таким образом, получаем: $C_9^2 + 2 \cdot C_9^1 + 1$.

Задача №23.

Сколькими способами можно распределить 15 бильярдных шаров по 6 лузам, если

а) шары не различимые,

б) шары различимые?

Вспоминая раскладки шариков по ящикам, сразу пишем решение для а) $\overline{C_6^{15}}$, и для б) $\overline{A_6^{15}}$.

Задача №24.

Сколькими способами можно распределить 15 неразличимых бильярдных шаров по лузам так, чтобы в каждой лузе был хотя бы один шар.

Положив в каждую лузу по одному шару, для оставшихся девяти шаров получим $\overline{C_6^9}$ вариантов.

Задача №25.

В скольких шестизначных числах нет 2-х стоящих рядом одинаковых цифр?

Будем считать, что шестизначные числа — это наборы 000000, 000001, …, 999999. Тогда на первую позицию выбираем любую из 10 цифр. На вторую любую, но не первую – 9 вариантов, для третей – все, кроме второй, тоже 9 вариантов и т.д. Получим: $10 \cdot 9^5$.

Задача №26.

Сколькими способами можно разделить 60 грибов на 4 связки по 15 штук?

Это типичная задача на разбиение. Решается с использованием формулы перестановок с повторениями. Выложим грибы в ряд и будем перекладывать друг относительно друга. Получим 60! вариантов. Первые 15 грибов составят первую связку, вторые – вторую и т.д. Перекладка грибов внутри связки ситуации не меняет и перекладка самих связок тоже (порядок связок роли не играет). Получаем: $\frac{60!}{15! \cdot 15! \cdot 15! \cdot 15! \cdot 4!}$.

Задача №27.

Имеется 5 различных сигнальных мачт и 8 различных флагов. Сколькими способами можно развесить все флаги?

Выберем мачты для флагов. Так как никаких ограничений нет, то получим $\overline{C_5^8}$ вариантов. Перемещая флаги друг относительно друга увеличиваем число вариантов в $P(8)$ раз. Таким образом, получим $\overline{C_5^8} \cdot P(8)$ способов.

Задача №28.

У Васи есть 7 книг по фантастике, у Оли 9 романов. Сколькими способами они могут обменять 3 книги одного на три книги у другого?

Выберем три книги у Васи, это - C_7^3 вариантов, и три книги у Оли - C_9^3 вариантов. А теперь обменяем их $C_7^3 \cdot C_9^3$ способами.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача № 1.

Имеются 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

Задача № 2.

Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»? А из слова «камзол»?

Задача № 3.

На вершину горы ведут 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься с неё? Решите ту же задачу при дополнительном условии, что спуск и подъём происходят по разным дорогам.

Задача № 4.

Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата – белый и черный? Решите ту же задачу, если нет ограничений на цвет квадратов, а также, если надо выбрать два белых квадрата.

Задача № 5.

Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и черный квадраты, не лежащие на одной горизонтали или одной вертикали?

Задача № 6.

Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего нужно выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

Задача № 7.

Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт, содержащей 52 карты, по одной карте каждой масти так, чтобы карты красных мастей и карты черных мастей образовывали пары (например, девятки пик и треф и валеты бубен и червей)? Решите эту же задачу, если требуется, чтобы из выбранных карт можно было составить две пары, состоящие из черной и красной карт одного и того же названия (например, валеты пик и червей и дамы треф и бубен).

Задача № 8.

Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя 6 различных цветов? Та же задача, если один из цветов должен быть красным.

Задача № 9.

Сколькими способами можно выбрать из полной колоды в 52 карты по одной карте каждой масти? Решите ту же задачу при дополнительном условии, что среди выбранных карт нет ни одной пары карт, отличающихся лишь мастью, то есть, двух королей, двух десяток.

Задача № 10.

Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трех курьеров, и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

Задача № 11.

Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

Задача № 12.

Сколькими способами можно выбрать 3 краски из имеющихся 5 различных красок?

Задача № 13.

Пять девушек и три юноши играют в городки. Сколькими способами их можно разделить на 2 команды по 4 человека? А если в каждую команду входит хотя бы один юноша?

Задача № 14.

В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения этого государства (во рту человека может быть не более 32 зубов)?

Задача № 15.

Автомобильные номера состоят из трех букв и пяти цифр. Найдите число таких номеров, если используются 32 буквы.

Задача № 16.

Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «метаматематика»? А слова «ингредиент»?

Задача № 17

Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами это можно сделать? А сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете 100+200+400+800?

Задача № 18.

Сколькими способами могут выпасть 3 игральные кости? В скольких случаях хотя бы одна кость откроется на 6 очках? В скольких случаях ровно одна кость откроется на 6 очках? В скольких случаях одна кость откроется на 6 очках, а одна – на 3 очках?

Задача № 19.

Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?

Задача № 20.

Найдите сумму всех пятизначных чисел, которые можно записать цифрами 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Задача № 21.

В скольких шестизначных числах есть 3 четные и 3 нечетные цифры? Решите ту же задачу, если допускаются и «шестизначные» числа, начинающиеся с нуля.

Задача № 22.

Во скольких десятизначных числах все цифры различны?

Задача № 23.

Человек имеет 6 друзей и приглашает к себе в гости троих из них так, что компания ни разу не повторяется. Сколько дней подряд он может это сделать?

Задача № 24.

Сколькими способами можно выбрать из 15 человек группу людей для работы, если группа должна состоять не менее чем из 5 человек?

Задача № 25.

Сколько существует пятизначных чисел? В скольких из них все цифры четны? В скольких все цифры нечетны? Во сколько не входят цифры, меньшие шести? В скольких нет цифр, больших трех? Сколько из них содержат все цифры 1,2,3,4,5? Сколько содержат все цифры 0,2,4,6,8?

Задача № 26.

Сколькими способами можно переставить буква слова «кофеварка» так, чтобы гласные и согласные чередовались? Решите ту же задачу для слова «самовар».

Задача № 27.

Сколькими способами можно переставлять буквы слова «пастухи» так, чтобы и гласные и согласные шли в алфавитном порядке?

Задача № 28.

Сколькими способами можно распределить 30 рабочих на 3 бригады по 10 человек в каждой бригаде? А на 10 групп по 3 человека в каждой группе?

Задача № 29.

Сколькими способами можно разложить 10 книг на 5 бандеролей по 2 книги в каждой (порядок бандеролей не принимается во внимание)?

Задача № 30.

Сколькими способами 12 монет можно разложить по пяти различным пакетам, если ни один пакет не должен быть пустым?

Задача № 31.

Сколькими способами можно раздать 52 карты 4 игрокам так, чтобы каждый получил по 3 карты трех мастей и 4 карты четвертой масти?

Задача № 32.

Сколько существует пятизначных чисел в которых на четных местах стоят четные числа?

Задача № 33.

Сколько существует пятизначных чисел, в которых на первом и последнем местах стоят нечетные цифры и каждая цифра встречается только один раз?

Задача № 34.

Сколько существует различных шестизначных чисел, в которых каждая следующая цифра больше предыдущей цифры (не обязательно на единицу)?

Задача № 35.

Сколькими способами можно выбрать из колоды карт в 54 листа по одной карте каждой масти?

Задача № 36.

Сколько различных браслетов можно сделать из 5 изумрудов, 6 рубинов, 7 сапфиров?

Задача № 37.

Сколькими способами можно распределить 7 синих, 3 белых и 5 красных шаров по 6 лузам?

Задача № 38.

Сколькими способами можно развесить 3 красных, 3 зеленых и 2 синих флага на 8 различных мачтах?

Задача № 39.

В гарнизоне находятся 3 офицера, 6 сержантов и 60 рядовых. Необходимо сформировать отряд из 1 офицера, 2 сержантов, 20 рядовых. Сколько существует вариантов?

Задача № 40.

У мужа 12 знакомых - 5 женщин и 7 мужчин, у жены - 7 женщин и 5 мужчин. Сколько существует способов составить новогоднюю компанию из 6 мужчин и 6 женщин так, чтобы 6 человек пригласил муж и 6 – жена?

Задача № 41.

Подсчитать сколько и каких цифр используется в записи шестизначных чисел.

Задача № 42.

Сколько существует способов извлечения из 52 карт пяти карт так, чтобы они были одной масти? Шли подряд по убыванию? Были одной масти и шли подряд?

Задача № 43.

Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с тремя полосками, если имеется 6 цветов и один обязательно должен быть красный?

Задача № 44.

Из колоды в 52 листа вынули 10 карт. В скольких случаях среди них будет хотя бы 1 туз, не меньше 2 тузов, ровно 2 туза?

Задача № 45.

В классе 25 человек. Из них 14 посещают факультатив по комбинаторике, 17 – по информатике и 20 - по французскому языку. Причем 9 одновременно посещают факультатив по комбинаторике и информатике, 12 - по информатике и французскому языку, 10 – по французскому языку и комбинаторике. Шесть человек посещают все три факультатива. Нет ли здесь ошибки?

Задача № 46.

В классе 15 футболистов, 17 хоккеистов, 12 баскетболистов и 9 волейболистов. При чем 10 учеников играют и в футбол и в хоккей, 7 – в футбол и баскетбол, 6 – в футбол и волейбол, 8 – в хоккей и баскетбол, 7 - в хоккей и волейбол, 5 – в баскетбол и волейбол. Футболистов-хоккеистов-баскетболистов – 5 человек, футболистов-хоккеистов-волейболистов – 4 человека, футболистов-баскетболистов-волейболистов - 3 человека, хоккеистов-баскетболистов-волейболистов – 3 человека. Один ученик играет во все виды спорта. Сколько человек в классе?

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Я. Виленкин. Комбинаторика. - М.: Наука, 1969.
2. Н. Я. Виленкин. Популярная комбинаторика. - М.: Наука, 1975
3. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учеб. Для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.И.Нешков, И.Е.Феоктистов. – 12-е изд. Стер. – М.:Мнемозина, 2013.
4. Феоктистов И.К. Алгебра. 9 класс.Дидактические материалы / И.Е.Феоктистов. – М.: Мнемозина, 2014.
5. Элементы комбинаторики в основной школе. Электронный ресурс http://www.hintfox.com/article/elementi-kombinatoriki-v-osnovnoj-shkole.html
6. Бунимович Е.А., Булычев В.А. Вероятность и статистика. 5-9 кл.: пособие для общеобразоват. учреждений. – 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2009.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. Изд. 6-е, доп. – М.: Высш. шк., 2008.
8. Гнеденко Б.В. Очерк по истории теории вероятностей: М.: Эдиториал УРСС, 2001.
9. Зубарева И.И., Мордкович А.Г. Математика. 5 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2009.
10. Зубарева И.И., Мордкович А.Г. Математика. 6 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2009.
11. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей: учеб. Пособие для учащихся 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / Под ред. С.А. Теляковского. – 3-е изд. – м.: Просвещение, 2009.
12. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 кл.: В двух частях. Ч. 1: Учеб. для общеобразоват. учреждений. – 7-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2009.
13. Мордкович А.Г., Мишустина Т.Н., Тульчинская Е.Е. Алгебра. 9 кл.: В двух частях. Ч. 1: Задачник для общеобразоват. учреждений. – 7-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2005.
14. Мордкович А.Г., Семенов П.В. События. Вероятности. Статистическая обработка данных: Доп. параграфы к курсу алгебры 7-9 кл. общеобразоват. учреждений. – 3-е изд. – М.: Мнемозина, 2005.
15. А. Я. Халамайзер. Коминаторика и бином Ньютона. - М.: Просвещение, 1980.
16. Элементы теории вероятностей.// Газета «Математика», №41, 1999 г.
17. Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. Алгебра и математический анализ. 11 класс. – М.: Просвещение. 1992-1997.