Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г.Чернышевского»

Кафедра математической экономики

И.Ю. Выгодчикова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ ФИНАНСОВЫХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

для студентов, обучающихся по направлениям подготовки:

38.03.01 – «Экономика» (бакалаврская программа «Экономика предпринимательства»),
38.03.02 – «Менеджмент» (бакалаврская программа «Корпоративное управление»),
38.04.01 – «Экономика» (магистерская программа «Экономика предпринимательства»),
38.04.01 – «Экономика» (магистерская программа «Финансовый инжиниринг»),
38.04.02 – «Менеджмент» (магистерская программа «Корпоративное управление»),
09.03.03 – «Прикладная информатика» (бакалаврская программа»),
38.03.05 – «Бизнес-информатика» (бакалаврская программа»)

Саратов
2016

УДК 330.4

Выгодчикова И.Ю.

Математические методы оптимальных финансовых решений: учебное пособие для студентов направлений подготовки «Экономика», «Менеджмент», «Прикладная информатика», «Бизнес-информатика», руководителей, аналитиков, научных работников. – Саратов, 2016. – 97 с.

Учебное пособие «Математические методы оптимальных финансовых решений» позволяет повысить качество обучения студентов методике и практике использования финансово-экономических решений при анализе процессов, связанных с движением финансовых ресурсов. В нём содержатся теоретические и практические материалы, наглядно демонстрирующие схему количественного анализа финансовых и кредитных операций, оценивания эффективности финансовых инвестиции, обоснованные рекомендации по учёту фактора риска и неопределённости.

Рассмотрены математические модели принятия решений по оптимизации финансовых операций, проанализированы специфические особенности учёта риска и неопределённости решений, связанных с инвестициями. Более глубоко изучена специфика портфельных инвестиций.

Включены вопросы для самопроверки, задачи и варианты контрольных работ.

Учебное пособие предназначено для бакалавров, магистрантов, аспирантов экономического и механико-математического факультетов ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», а также для руководителей и аналитиков финансово-кредитных организаций, научных работников.

Рекомендуют к размещению в электронной библиотеке СГУ:

научно-методическая комиссия экономического факультета Саратовского государственного университета протокол № 10 от 21 июня 2016 г.,

Кафедра математической экономики, протокол № от 29 июня 2016 г.,

Декан экономического факультета СГУ, к.э.н., доцент О.С. Балаш

ВВЕДЕНИЕ

Время играет ведущую роль в финансовых отношениях, поэтому очень важна процентная ставка, под которую инвестор готов предоставить свои денежные средства для их рационального прибыльного использования в производстве, сфере услуг, на рынке ценных бумаг и в кредитно-финансовой сфере. Процентная ставка, которую предлагают банки, должна не только покрывать инфляционное обесценение денег, но и позволять получать дополнительный доход от их использования.

В связи с гиперинфляционными процессами в 1990-х г. российские граждане весьма осторожно подходят к вложению своих средств и не доверяют банкам и инвестиционным фондам, которые предлагают явно завышенные процентные ставки. Однако финансовые пирамиды постепенно отходят в прошлое, поскольку «работать» могут лишь деньги, вложенные в реальное производство. А вот насколько удачными окажутся вложения, зависит от компетентности финансовых менеджеров, которые должны тщательно проанализировать все финансовые стороны процесса и составить грамотный бизнес-план, который заинтересует инвесторов. Ни один инвестор не вложит деньги в неизвестность, поэтому важно уметь оценить рисковую составляющую проекта.

В пособии излагаются основные приемы применения математического аппарата при анализе финансовых операций и некоторые аспекты инвестиционного моделирования. Приводятся задачи для самостоятельного решения к каждой главе, контрольная работа и задание для итогового контроля по всему курсу.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ
И МЕТОДЫ ФИНАНСОВЫХ РЕШЕНИЙ

1.1. Простые и сложные проценты. Эффективная ставка

Основными параметрами финансовой сделки являются: $S(0)$ – начальная сумма денег, предоставляемая в долг на время T; $S(T)$ – возвращаемая сумма денег через период T и срок сделки T, обычно измеряемый в годах.

Доходность – это количественная мера позитивного эффекта финансовых операций, связанных с вложением денег. Негативной стороной таких операций является риск, связанный с возможностью финансовых потерь. Анализ позитивных и негативных факторов позволяет говорить об эффективности финансовой операции. Начнём с рассмотрения способов расчёта показателей доходности.

При расчете доходности любой операции производится анализ затрат и результатов.

Основные виды доходности.

1. Доходность сделки за период, или *инвестиционный доход*:

$$I = S(T) - S(0),$$

где $S(T)$ – возвращаемая сумма денег через период T; $S(0)$ – начальная сумма денег, подлежащая инвестированию на время T.

2. Коэффициент прироста капитала, называемый также *относительным ростом* или *процентной ставкой*:

$$r_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(0)},$$

измеряется в долях или в процентах в зависимости от цели анализа.

3. Коэффициент дисконтирования, или *относительная скидка*:

$$d_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(T)}.$$

Указанные величины связаны соотношением $1 + r_T = \dfrac{1}{1 - d_T}$.

4. Эффективная (нормированная) доходность (внутренняя норма доходности). Суть этого показателя – годовой эквивалент доходности.

Если проценты по вкладам начисляются раз в год, то в контракте фигурирует годовая процентная ставка r, или годовой дисконт d, и тогда

$$1 + r = \frac{1}{1 - d}. \quad (1.1)$$

С течением времени начальная сумма вклада $S(0)$ возрастает под влиянием годовой процентной ставки r.

Наращение – это вычисление будущей стоимости $S(T)$ текущей денежной суммы $S(0)$. Для расчетов используются следующие схемы:

а) *схема простых процентов*:

$$S(T) = S(0) \cdot (1 + T \cdot r); \quad (1.2)$$

б) *схема сложных процентов*:

$$S(T) = S(0) \cdot (1+r)^T \; - \qquad (1.3)$$

при начислении сложных процентов ежегодно;

$$S(T) = S(0)\left(1+\frac{r}{m}\right)^{T \cdot m} - \qquad (1.4)$$

при начислении сложных процентов m раз в году.

Множителем наращения (мультиплицирующим множителем) M_m называют величину, на которую умножается начальная сумма $S(0)$ для получения конечной суммы $S(T)$. В формулах (1.2) – (1.4) это, соответственно, $(1+T \cdot r)$, $(1+r)^T$ и $\left(1+\frac{r}{m}\right)^{T \cdot m}$.

При простых процентах конечная сумма $S(T)$ является линейной функцией времени, а при сложных процентах – показательной. Скорость роста степенной функции по сравнению со скоростью роста линейной функции зависит от значения аргумента. При $T > 1$ начальная сумма увеличивается быстрее по схеме (1.3), чем по схеме (1.2), а при $T < 1$ наоборот.

При непрерывном начислении сложных процентов, выполним в (1.4) предельный переход, устремляя $m \to \infty$:

$$S(T) = S(0)\exp(Tr).$$

Мультиплицирующий множитель $\exp(Tr)$ часто называют *силой роста.*

В банковской практике часто применяется ежемесячное, ежеквартальное и полугодовое начисление процентов по вкладам. Чтобы оценить накопленную сумму, нужно применять формулу (1.4) с величиной m равной 12, 4 и 2, соответственно, причем показательный рост суммы оправдан уже при $T \cdot m > 1$. На самом деле формула (1.4) ничего нового для расчётов не вносит, просто можно применять формулу (1.3), считая, что T – число периодов, а r – процентная ставка за период.

Если срок сделки больше одного года, но не является целой величиной, то целесообразно комбинировать схемы простых и сложных процентов. При ежегодном начислении сложных процентов формула комбинированной схемы следующая:

$$S(T) = S(0)(1+r)^{[T]}(1+r \cdot \{T\}), \quad \{T\} = T - [T], \qquad (1.5)$$

где через $[T]$ обозначена целая часть числа лет. Если сложные проценты начисляются m раз в году, эта формула принимает вид:

$$S(T) = S(0)\left(1+\frac{r}{m}\right)^{[T]\cdot m + [\{T\}\cdot m]}\left(1+\frac{r}{m}\cdot\{T\}_m\right), \quad \{T\}_m = \{T\}\cdot m - [\{T\}\cdot m]. \qquad (1.6)$$

Заметим, что в зависимости от обстоятельств, ставки могут измеряться в долях (округляем до четырёх знаков после запятой) или в процентах (округляем до двух знаков после запятой), хотя в расчетах всегда используются доли. Для выполнения расчетов можно пользоваться стандартными финансовыми функциями электронных таблиц.

Если процентная ставка меняется, то при долгосрочных операциях применяют формулу начисления процентов с учетом *реинвестирования* средств:

$$S(T) = S(0)\prod_{j=1}^{n}(1+r_j).$$

Мультиплицирующим множителем будет $\prod_{j=1}^{n}(1+r_j)$.

Пример 1.1. Что выгоднее покупателю «бесконечно» делимого товара: получить скидку 10% или «довесок» 10% при сохранении цены?

Решение. Скидку получить выгоднее, поскольку во втором случае скидка составит лишь $\frac{0,1}{1+0,1} \approx 0,0909$ (9,1 %).

Пример 1.2. Банк предоставил ссуду в размере 5 000 дол. на 39 месяцев под 20% годовых на условиях начисления сложных процентов *m* раз в году. Рассчитайте возвращаемую сумму при различных схемах начисления процентов: а) схема сложных процентов; б) комбинированная схема, если *m*=1, *m*=2, *m*=6.

Решение.

1. Пусть *m*=1. Выразим 39 мес. в годах, считая, что в году 360 дней, в месяце 30 дней: $T = \frac{39 \cdot 30}{360} = \frac{13}{4} = 3,25$ и воспользуемся формулами (1.3), (1.5):

а) $S(3,25) = 5000 \cdot (1+0,2)^{3,25} = 9042,93$ дол.;

б) $S(3,25) = 5000 \cdot (1+0,2)^{3} \cdot (1+0,2 \cdot 0,25) = 9072$ дол.

2. При *m*=2 воспользуемся формулами (1.4), (1.6), поскольку $[\{T\} \cdot m] = [0,5] = 0$, то формула (1.6) сводится к (1.5):

а) $S(3,25) = 5000 \cdot \left(1+\frac{0,2}{2}\right)^{3,25 \cdot 2} = 9290$ дол.;

б) $S(3,25) = 5000 \cdot \left(1+\frac{0,2}{2}\right)^{6} \cdot (1+0,2 \cdot 0,25) = 9300,7$ дол.

3. При *m*=6 воспользуемся формулами (1.4), (1.6):

а) $S(3,25) = 5000 \cdot \left(1+\frac{0,2}{6}\right)^{3,25 \cdot 6} = 9476,73$ дол.;

б) $S(3,25) = 5000 \cdot \left(1+\frac{0,2}{6}\right)^{18+1} \cdot (1+\frac{0,2}{6} \cdot 0,5) = 9477,9$ дол.

Процентная ставка, которая объявлена в договоре и используется в расчетах, называется *номинальной*.

Эффективной называется годовая ставка по сложным процентам, которая позволяет за указанную в договоре сумму $S(0)$ через T лет получить сумму $S(T)$ независимо от указанной схемы начисления и номинальной процентной ставки. Значение эффективной ставки

$$r_{ef} = \left(\frac{S(T)}{S(0)} \right)^{\frac{1}{T}} - 1 \tag{1.7}$$

позволяет сравнивать между собой сделки, построенные по различным схемам. Чем выше эффективная ставка, тем (при прочих равных условиях) выгоднее сделка для кредитора.

Пример 1.3. Оценить по уровню процентной ставки и скидки вексель номиналом 300 тыс. руб. с датой погашения 15 мая 2010г., купленный 15 ноября 2009г. за 275 тыс. руб. (при использовании схем банковского и математического дисконтирования). Рассчитать эффективную ставку.

Решение.

1. Заметим, что $T = 0{,}5$, $S(0) = S = 275$, $S(T) = N = 300$.

2. Рассчитаем сначала процентную ставку при простых процентах: $S(0) = S(T) \cdot \dfrac{1}{1 + T \cdot r} \Rightarrow r = \dfrac{1}{T}\left(\dfrac{S(T)}{S(0)} - 1 \right) = \dfrac{1}{0{,}5}\left(\dfrac{300}{275} - 1 \right) = 0{,}1818$.

3. Если использовать банковскую формулу дисконтирования, получим:

$$d = \frac{1}{T} - \frac{1}{T}\frac{S}{N} = \frac{1}{0{,}5} - \frac{1}{0{,}5}\frac{275}{300} = 0{,}1667.$$

4. Можно сделать вывод, что различие в используемых схемах расчетов может привести к затруднению анализа. Для этого в процентных расчетах вводится эталон сравнения – эффективная ставка. Вычислим эффективную ставку:

$$r_{ef} = \left(\frac{300}{275} \right)^{\frac{1}{0{,}5}} - 1 = 0{,}1901 \ (19{,}01\ \%).$$

Отсюда получаем учетную ставку, эквивалентную найденной эффективной: $d = 0{,}1901/1{,}1901 = 0{,}1597$ (15,97 %).

Если начисление ведется по схеме сложных процентов m раз в году, то

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{m} - 1, \tag{1.8}$$

в частности, при $m = 1$ и $r_{ef} = r$.

Если сложные проценты начисляются непрерывно, то $S(T) = S(0)\exp(Tr)$, $r_{ef} = \exp(r) - 1$.

Пример 1.4. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку:

а) процентная ставка составляет 28% годовых, сложные проценты начисляются ежеквартально;

б) процентная ставка составляет 29% годовых, сложные проценты начисляются раз в полгода;

в) процентная ставка составляет 27,5% годовых, сложные проценты начисляются непрерывно.

Решение. В случае а), $r = 0{,}28$, $m = 4$. По формуле (1.11):

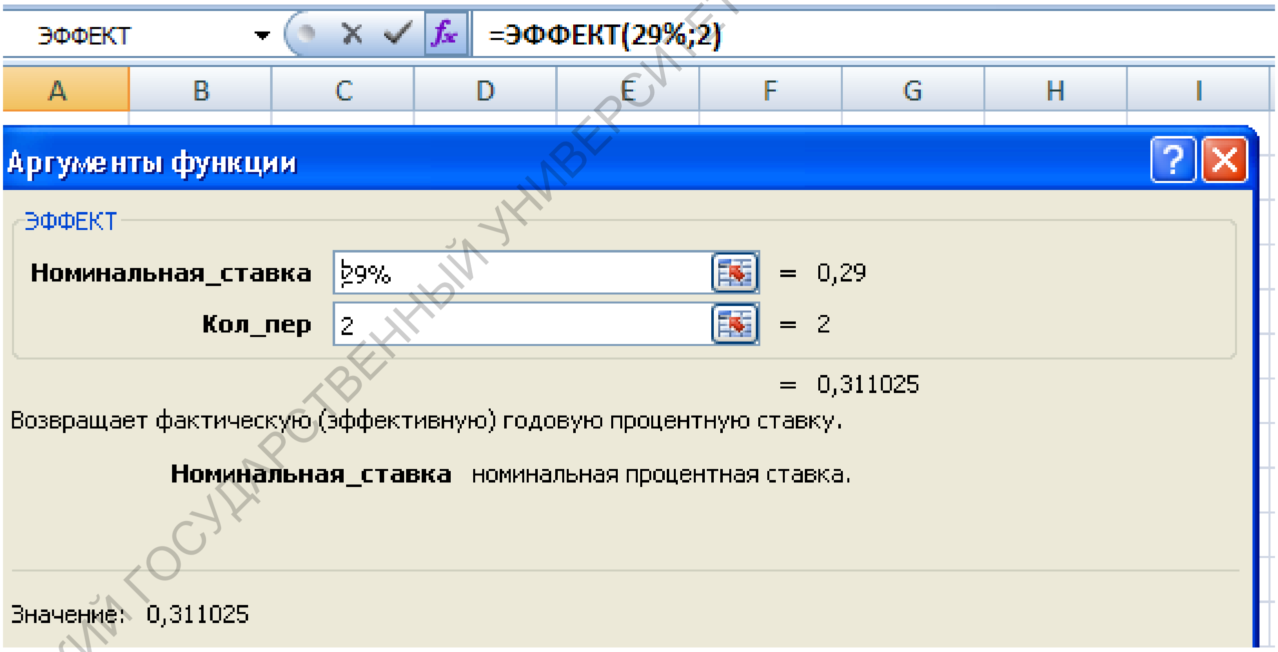
$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0{,}28}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}31 \ [31\%].$$

В случае б), $r = 0{,}29$, $m = 2$. Находим $r_{ef} = \left(1 + \frac{0{,}29}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}311 \ [31{,}1\%]$.

Сравнивая эффективные ставки для случаев а) и б), делаем вывод о том, что банку более выгоден вариант б).

В случае в), r_{ef} =EXP(0,275)-1=0,3165 (31,65 %). Значит последний вариант является наилучшим.

Замечание. В MSExcel (а также в OpenOfficeCalc и других электронных таблицах) существует удобный инструмент вычисления эффективной ставки. В Excel это функция ЭФФЕКТ():



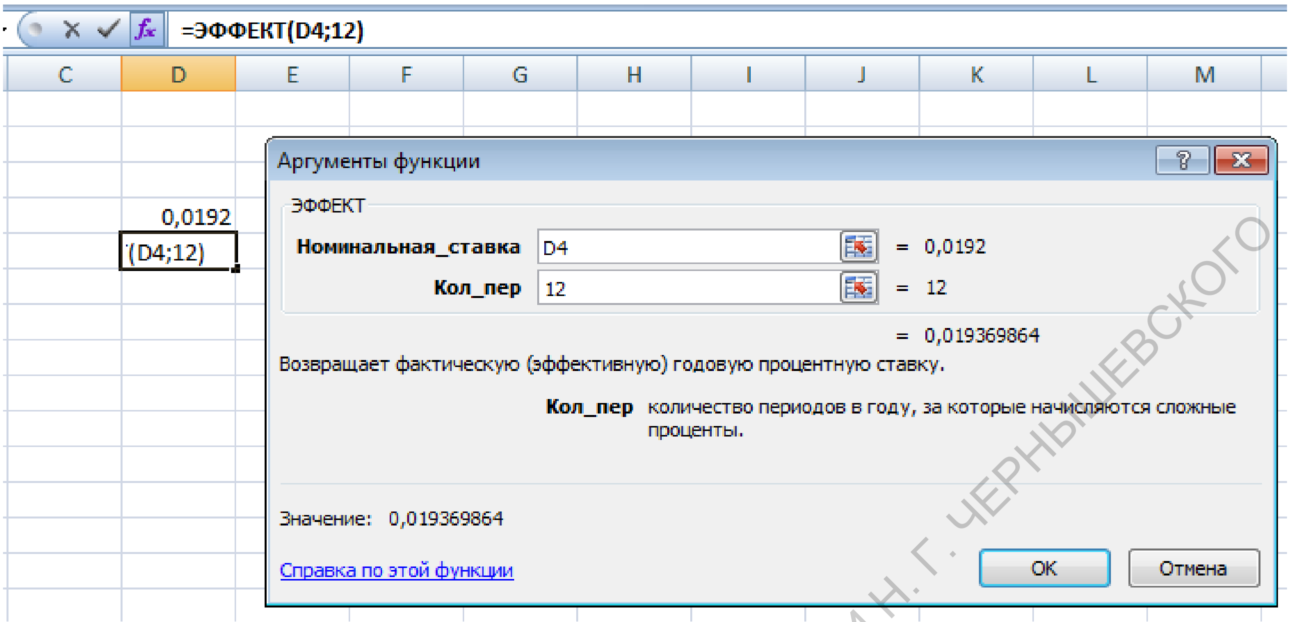
Пример 1.5. В одном банке за использование денег клиента по пластиковой карте ежегодно начисляют сложные 2%, а в другом банке – ежемесячно сложные $0{,}16\%$. В каком банке держать деньги?

Решение. Выгоднее первый вариант, поскольку эффективная ставка в этом случае выше: $0{,}02 > (1 + 0{,}0016)^{12} - 1 = 0{,}019$.

В данном случае для использования финансовой функции ЭФФЕКТ() нужно рассчитать сначала годовую ставку:

=0,16%*12
=ЭФФЕКТ(D4;12)

Результат:



1.2. Банковское и математическое дисконтирование

Дисконтирование – вычисление текущей стоимости $S(0)$ будущего денежного поступления $S(T)$.

Банковское дисконтирование применяется для учета банком краткосрочных векселей. Клиент может обратиться в банк с просьбой погасить вексель досрочно. Банк может согласиться выплатить ему сумму, однако ее размер будет меньше, чем указано в векселе:

$$S = N(1 - T \cdot d), \tag{1.9}$$

где S – сумма выплаты по векселю, N – номинал векселя, T – доля года, равная отношению числа дней до срока платежа к длительности года, d – годовая ставка дисконтирования, определяемая банком. Дисконт по данной операции составит:

$$D = \frac{N - S}{N} = Td, \tag{1.10}$$

и именно такой доход получит банк от этой сделки [1]. Обычно размер годовой ставки дисконтирования значительно выше средней банковской ставки по кредитованию ввиду того, что число T значительно меньше единицы, и при меньшей ставке такая операция для банка потеряет смысл.

Используя принятые обозначения, формулу (1.9) можно переписать в виде:

$$S(T) = \frac{S(0)}{(1 - T \cdot d)}.$$

Математическое дисконтирование:

при простых процентах:

$$S(0) = S(T) \cdot \frac{1}{1 + T \cdot r}, \tag{1.11}$$

при сложных процентах с начислением m раз в году:

$$S(0) = S(T) \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{T \cdot m}}, \tag{1.12}$$

в частности, при $m = 1$

$$S(0) = S(T) \cdot \frac{1}{(1+r)^T}. \tag{1.13}$$

Дисконтирующим множителем D_m называют величину, на которую умножается конечная сумма $S(T)$ для получения начальной суммы $S(0)$. В формулах (1.11) – (1.13) это, соответственно, $(1+T \cdot r)^{-1}$, $(1+r)^{-T}$ и $\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-T \cdot m}$. Связь между мультиплицирующим и дисконтирующим множителе: $M_m = 1/D_m$.

Пример 1.6. Векселедержатель предъявил для учета вексель на сумму 5 000 000 руб. со сроком погашения 28.09.2007 г. Вексель предъявлен 13.09.2007 г. Банк согласился учесть вексель с дисконтом в 75% годовых. Какую сумму получит векселедержатель?

Решение. Считая, что в году 360 дней, находим $T = \frac{28-13}{360} = \frac{1}{24}$, и применяем формулу (1.5) при N = 5 000 000 млн. руб., d = 0,75:

$$S(13.09.2007) = 5\,000\,000 \cdot \left(1 - \frac{1}{24} \cdot 0{,}75\right) \text{ руб.} = 4\ 84\ 750 \text{ руб.}$$

Найдём эффективную процентную ставку по формуле (1.7):

$$r_{ef} = \left(\frac{5}{4{,}844}\right)^{24} - 1 \approx 114\%.$$

Эквивалентными называются ставки, при которых условия сделки $S(0)$ и $S(T)$ для заданного периода T одни и те же.

Часто процентные ставки, привязанные к конкретной схеме начисления процентов, помечают индексами (s – “simplex” – “простой”, c – “complex” – “сложный”). Пусть r_s и r_c – годовые ставки простых и сложных процентов, соответственно. Приравнивая множители наращения: $(1+T \cdot r_s) = (1+r_c)^T$, находим:

$$r_s = \frac{(1+r_c)^T - 1}{T}; \ r_c = (1+T \cdot r_s)^{\frac{1}{T}} - 1. \tag{1.14}$$

Пример 1.7. Г-н X вложил в банк 100 тыс. руб. на 2 года под 25% годовых с условием начисления простых процентов на всю сумму вклада в конце второго года. В целях унификации схем расчетов банк решил начислять сложные проценты ежегодно. Какую минимальную ставку банк должен предложить, чтобы не потерять клиента?

Решение. Чтобы клиент получил предусмотренную договором сумму в конце второго года, банк должен предложить ставку по сложным процентам, эквивалентную ставке по простым процентам, зафиксированной в сделке. Из формул (1.14) непосредственно получаем:

$$r_c = (1 + 2 \cdot 0{,}25)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}225 \quad [22{,}5\%].$$

Эквивалентные сложная процентная ставка r_c и учетная ставка по сложным процентам d_c связаны уже знакомым соотношением:

$$r_c = \frac{d_c}{1 - d_c}; \qquad d_c = \frac{r_c}{1 + r_c}.$$

Банковский дисконт – это учётная ставка при использовании схемы простых процентов. Несложно установить связь учётной ставки при простых процентах (d_s) с *процентной ставкой при простых процентах* (r_s)*:*

$$1 + Tr_s = \frac{1}{1 - Td_s}, \; r_s = \frac{d_s}{1 - Td_s}.$$

Найдём процентную ставку для примера 1.6, считая, что используется схема простых процентов:

$$r_s = \frac{d_s}{1 - Td_s} = \frac{0{,}75}{1 - 0{,}75/24} \approx 77{,}42\%.$$

Эквивалентными называются платежи, которые, будучи «приведенными» к одному моменту времени, оказываются равными.

Операция «приведение к моменту T» денежной суммы, относящейся к моменту T_0, означает, что эта сумма наращивается по схеме простых или сложных процентов при $T_0 < T$, и дисконтируется, при $T_0 > T$ причем период операции составляет $|T - T_0|$.

Процентная ставка, вычисленная по формуле:

$$r_0 = \left(\frac{S_2(T_2)}{S_1(T_1)} \right)^{\frac{1}{T_2 - T_1}} - 1, \tag{1.15}$$

где $S_1(T_1)$ и $S_2(T_2)$ — денежные суммы, получаемые через время T_1 и T_2, соответственно, называется *критической (барьерной).*

Если в расчетах использовать схему сложных процентов и барьерную ставку, то указанные суммы $S_1(T_1)$ и $S_2(T_2)$ будут эквивалентными. С этой точки зрения барьерная ставка является обобщением понятия эффективной ставки. Действительно, сравним два долгосрочных обязательства: выплатить сумму $S_1(T_1)$ через время T_1 и сумму $S_2(T_2)$ через время T_2, причем

$S_1(T_1) < S_2(T_2)$, $T_1 < T_2$. Поскольку обязательства долгосрочные, наращение происходит по схеме сложных процентов. Эти обязательства будут эквивалентными, если, к примеру, сумма $S_1(T_1)$, наращенная на $T_2 - T_1$ лет, будет равна сумме $S_2(T_2)$:

$$S_1(T_1)\cdot(1+r_0)^{T_2-T_1} = S_2(T_2),$$

откуда вытекает (1.13). Заметим, что формула (1.13) имеет смысл только если $S_1(T_1) < S_2(T_2)$, $T_1 < T_2$ или $S_1(T_1) \ge S_2(T_2)$, $T_1 \ge T_2$.

Аналогично получается формула для расчета барьерной ставки при использовании в расчетах схемы простых процентов.

Если процентная ставка ниже критической, предпочтительнее получить сумму, которая относится к более позднему моменту времени, а если процентная ставка выше критической ставки, то предпочтительнее более ранняя сумма.

Пример 1.8. Какую сумму предпочтительнее получить при сложной ставке 9% годовых: 1 000 дол. сегодня или 2 000 дол. через 8 лет? При каком значении процентной ставки выбор безразличен?

Решение.

Подсчитаем наращенную величину с суммы 1 000дол. по ставке 9%:

$$S(8) = 1000 \cdot (1{,}09)^8 = 1992{,}6 < 2\,000 \text{ дол.}.$$

Следовательно, надо предпочесть сумму 2000 дол. через 8 лет.

Найдем барьерную ставку по формуле (1.13)

$$r_0 = \left(\frac{2000}{1000}\right)^{\frac{1}{8}} - 1 = 0{,}091 \ (9{,}1\%).$$

При $r = r_0$ выбор безразличен. При $r > r_0$ будет предпочтительнее сумма 1 000 дол. сегодня.

В предыдущем разделе рассматривалось понятие эффективной ставки. Это, по сути, цена кредита, выданного на год с условием возврата всей суммы в конце срока. При анализе финансовых платежей, имеющих характер потока, расчёт эффективной ставки производится на основании составления уравнения баланса, т.е. приравнивание дисконтированных или наращенных к выбранному моменту времени сумм, имеющих знак «-» (отток денег) к приведённым к тому же моменту суммам, имеющим знак «+» (приток денег). В качестве ставки дисконтирования используется эффективная ставка.

Например, в счёт оплаты за партию товара (стоимость 300 000 р.) выписано 2 векселя. Один (номинал 200 000р) погашается через 3 месяца, второй (номиналом 120 000р.) — ещё через 3 месяца.

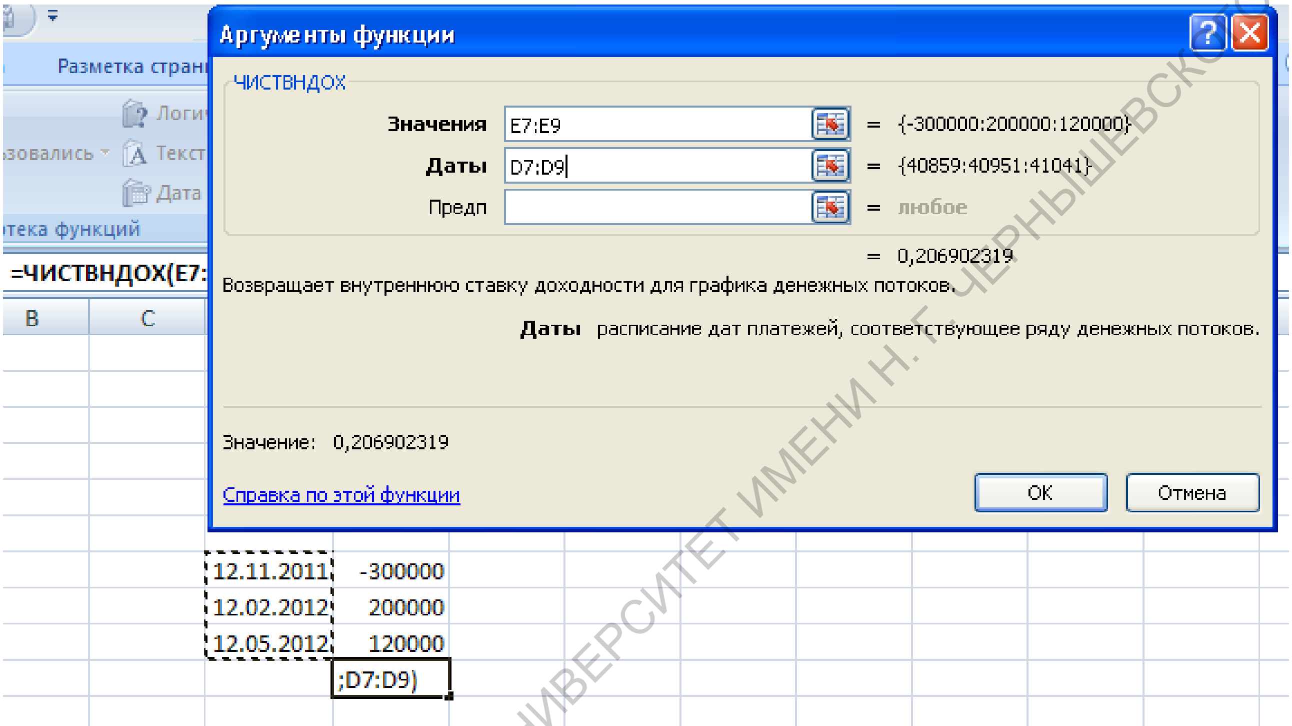
Составляем уравнение баланса для расчёта эффективной ставки, дисконтируя все суммы к моменту отгрузки товара:

$$300\,000 = \frac{200\,000}{(1+r_{ef})^{3/12}} + \frac{120\,000}{(1+r_{ef})^{6/12}}; \quad x = (1+r_{ef})^{3/12}; \quad 75x^2 - 50x - 30 = 0;$$

$$x \approx 1{,}048254 \Rightarrow r_{ef} = x^4 - 1 \approx 20{,}744\%.$$

Рекомендуется подобные расчёты выполнять в электронной таблице, используя ссылочную структуру вычислений, или в математической программе, например wxmaxima.

В MSExcel стандартная финансовая функция ЧИСТВНДОХ (в свободно распространяемых электронных таблицах эта функция часто называется иначе, например, в OpenOffice.Calk, XIRR):



Небольшие расхождения в расчётах объясняются различным количеством дней в месяцах года. Так, если сделка была заключена в мае, то в результате получаем 20,56%:

12.05.2012	-300000
12.08.2012	200000
12.11.2012	120000
	0,205586

Ясно, что в любой финансовой сделке фигурируют реальные даты, поэтому расчёт с использованием программных средств будет более точным.

Если заменить два векселя одним сроком погашения через 1 год, этот новый вексель должен быть выписан на 362 232рублей.

Более подробно расчёт эффективной ставки (кредитование) или внутренней нормы доходности (инвестирование) будет рассмотрен ниже.

2. ПРИЛОЖЕНИЯ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ С УЧЁТОМ ИНФЛЯЦИИ И НАЛОГООБЛОЖЕНИЯ

2.1. Учет инфляции

Инфляция – это снижение реальной покупательной способности денег.

Пусть $S(T)$ – наращенная сумма денег, измеряемая по номиналу, $C(T)$ – наращенная сумма денег с учетом их обесценения, h_t – годовой темп инфляции в году t, J_p – индекс цен за период T. Указанные величины связаны соотношением:

$$C(T) = \frac{S(T)}{J_p}, \tag{2.1}$$

где

$$J_p = \prod_{t=1}^{T}(1+h_t). \tag{2.2}$$

Пример 2.1. Через 3 года г-н X планирует получить страховку 100 тыс. руб. (страхование на дожитие). Согласно прогнозам, темпы инфляции за эти годы составят 15%, 20% и 18% соответственно. Оцените сумму к получению с учетом ее обесценения.

Решение. В нашем случае $T=3$, $S(T)=100$ тыс. руб., $h_1=0{,}15$, $h_2=0{,}2$, $h_3=0{,}18$. Применяя формулы (2.1), (2.2), считаем:

$$C(3) = \frac{100}{1{,}15\cdot 1{,}2\cdot 1{,}18} = \frac{100}{1{,}6284} \text{ тыс. руб.} = 61{,}4 \text{ тыс. руб.}$$

В условиях инфляции объявленная годовая процентная ставка должна учитывать компенсацию потерь, связанных с обесценением денег. Такая ставка носит название брутто-ставка.

Пусть темп инфляции в течение T лет постоянен: $h_t = h,\ t=\overline{1,T}$, r_b – брутто-ставка, r – реальная процентная ставка. При сложных процентах имеем $C(T)=S(0)(1+r)^T$, $S(T)=S(0)(1+r_b)^T$. Учитывая (1.14) и (1.15), получаем равенство $S(0)(1+r_b)^T = S(0)(1+r)^T\cdot(1+h)^T$, откуда находим:

$$r_b = r + h + r\cdot h. \tag{2.3}$$

Заметим, что брутто-ставка не просто является суммой реальной ставки и темпа инфляции, а еще их произведения:

$$r = \frac{1+r_b}{1+h} - 1. \tag{2.4}$$

Пример 2.2. Решено вложить 1 млн руб. в банк на 2 года под 30% годовых. Согласно прогнозу Минфина годовой темп инфляции сохранится на уровне 15%. Какова наращенная сумма с учетом ее обесценения? Определите реальную годовую процентную ставку (схема – сложные проценты).

Решение. В нашем случае $r_b = 0{,}3$, $h = 0{,}15$, $S(0)$ = 1 млн. руб. По формуле (1.17) находим реальную процентную ставку $r = \frac{1{,}3}{1{,}15} - 1 = 0{,}13$ [13%]. Тогда $C(2) = S(0) \cdot (1 + r)^2 = 1{,}278$ млн руб.

Пример 2.3. Для примера 2.1 рассчитать эквивалентный постоянный годовой темп инфляции и сравнить его со средним.

Решение. Из соотношения $J_p = (1 + h)^3 = 1{,}6284$ находим $h = 1{,}6284^{1/3} - 1 \approx 0{,}1765$[17,65%]. Средний темп инфляции составляет $\bar{h} = (0{,}15 + 0{,}18 + 0{,}2)/3 \approx 0{,}1767$[17,67%]. Таким образом, использование среднего арифметического темпов для вычисления индекса цен завысит его реальную величину.

2.2. Учет налогообложения процентных доходов

Сформулируем следующие вопросы:

- какие процентные доходы по депозитам физических лиц попадают под налогообложение?
- какова процентная ставка налога?
- как рассчитывается налог из процентных доходов по депозитам физических лиц?
- кто является налоговым агентом?
- как определяется налоговая база, если вкладчик имеет несколько депозитов, процентные доходы по которым попадают под налогообложение?

Следуя Налоговому кодексу (НК) РФ (ст. 214, 217, 224, 226), отметим следующие факты.

1.Под налогообложение процентных доходов попадают доходы:

- по рублевым депозитам – если процентная ставка по депозиту превышает ставку рефинансирования. Например, когда процентная ставка по депозиту – 12 %, а ставка рефинансирования – только 10,75% (размер ставки рефинансирования 10,75 % установлен Указанием Банка России от 07.08.2009 № 2270-У «О размере ставки рефинансирования Банка России» с 10 августа 2009г.);
- по валютным депозитам – если ставка по валютному депозиту превышает 9% «годовых».

2.Ставка налога на процентные доходы по вкладам составляет 35%.

3.Налог по депозитам физических лиц рассчитывается из процентных доходов, которые получаются сверх определенных законом норм.

4.Налоговыми агентами по исчислению, удержанию и перечислению в бюджет налога на доходы (проценты) физических лиц по депозитам являются банки.

5.Определение налоговой базы для исчисления налога на процентные доходы по рублевым и валютным вкладам производится по каждому вкладу отдельно и рассчитывается налоговыми агентами отдельно по каждой сумме дохода, начисленного налогоплательщику.

Устанавливаемые ранее в НК РФ льготы по налогообложению для пенсионеров в виде ставки налогообложения в размере 13% по пенсионным депозитам, вносимым на срок не менее 6 месяцев, теперь отменены.

2.3. Ставка рефинансирования

Ставка рефинансирования (*Federal funds rate*) – размер процентов в годовом исчислении, подлежащий уплате центральному банку (ЦБ) страны за кредиты, предоставленные кредитным организациям. Эти кредиты являются рефинансированием нехватки финансовых ресурсов. Через такие кредиты обеспечивается регулирование ликвидности банковской системы при недостатке у кредитных организаций средств для осуществления кредитования клиентов и выполнения принятых на себя обязательств. Обычно под ставкой рефинансирования подразумевают ставку кредитования на одну ночь («*овернайт*», предоставляется кредитной организации в конце дня в сумме непогашенного внутридневного кредита), размер которой наибольший по сравнению с установленными ставками кредитования на другие сроки.

В статье 40 Федерального закона № 86-ФЗ «О центральном банке Российской Федерации (Банке России)» от 10 июля 2002 г. определено, что под рефинансированием понимается кредитование Банком России кредитных организаций.

Ставка рефинансирования является инструментом денежно-кредитного регулирования, с помощью которого ЦБ воздействует на ставки межбанковского рынка, а также ставки по депозитам юридических и физических лиц и кредитам, предоставляемым им кредитными организациями.

В зарубежной практике часто используется термин **«Учетная ставка»**.

Другие определения ставки рефинансирования Центрального банка:

1)процентная ставка, применяемая Центральным банком в его операциях с коммерческими банками и другими кредитными институтами при покупке государственных краткосрочных обязательств и переучете частных коммерческих векселей (Современный экономический словарь);

2)размер платежа, производимого клиентами банка при погашении старой задолженности по кредитам путем их замены новыми кредитами (Новый экономический и юридический словарь);

3)ставка, под которую Центральный банк дает кредиты коммерческим банкам;

4)ставка рефинансирования является одной из процентных ставок, которые центральный банк использует при предоставлении кредитов банкам в порядке рефинансирования.

Особенности ставки рефинансирования в России

В России ставка рефинансирования помимо выполнения функции экономического регулятора, как в других экономиках, выступает в качестве фискальной меры (для расчета налоговых и других штрафов).

Применение ставки рефинансирования

Налогообложение:

- проценты по рублевым банковским вкладам, облагаемые НДФЛ. Налогом облагаются проценты в размере более ставки рефинансирования, действовавшей в течение периода, за который они начислены, плюс 5 процентных пунктов;
- пени за просрочку уплаты налога или сбора. Пени равны 1/300 действующей ставки рефинансирования за каждый день просрочки;
- расчет материальной ответственности работодателя в случае допущенных задержек при выплате заработной платы работникам предприятия. Работодатель несет материальную ответственность перед работником. При нарушении работодателем установленного срока выплаты заработной платы, оплаты отпуска, выплат при увольнении и других выплат, причитающихся работнику, работодатель обязан выплатить их с уплатой процентов (денежной компенсации) в размере не ниже одной трехсотой действующей в это время ставки рефинансирования Центрального банка Российской Федерации от невыплаченных в срок сумм за каждый день задержки начиная со следующего дня после установленного срока выплаты по день фактического расчета включительно. Размер выплачиваемой работнику денежной компенсации может быть повышен коллективным договором или трудовым договором. Обязанность выплаты указанной денежной компенсации возникает независимо от наличия вины работодателя (Ст. 236 ТК РФ);
- расчет налоговой базы при получении налогоплательщиком дохода в виде материальной выгоды от экономии на процентах за пользование заемными (кредитными) средствами. Налоговая база определяется как превышение суммы процентов, выраженной в рублях, исчисленной исходя из двух третей ставки рефинансирования, действующей на момент получения дохода, над суммой процентов, исчисленной исходя из условий договора;
- при отсутствии в *договоре займа* условий о размере процентов, их размер определяется ставкой банковского процента (ставкой рефинансирования) на день уплаты заемщиком суммы долга или его части.

Ставка рефинансирования существует во всех национальных мировых банках. В России до 2013 года именно она использовалась как процентная ставка, под которую Банк России выдавал кредиты коммерческим банкам. Однако укрепление рубля на фоне высокой цены на углеводороды в мире упрочило позиции Центрального банка, и позволило думать о возможности существенно удешевить кредиты для банков.

Ключевая ставка Банка России — это процентная ставка, по которой Центральный банк кредитует коммерческие банки, а также размещает средства коммерческих банков на депозиты. Она была введена как инструмент для унификации выделения и абсорбирования средств Центральным банком. По сути, это один из главных финансовых инструментов в области денежно-кредитной политики государства. Процентная ставка кредитования Центрального банка есть не только в России. Большинство главных банков развитых стран используют этот инструмент для регулировки финансовой системы и экономики. Ставки некоторых государств, в частности США, оказывают существенное влияние не только на экономику и курс валюты своей страны, но и на мировой финансовый рынок в целом.

Ключевая ставка — основной параметр, отличающий типы стран по экономической системе. Все страны мира в этом плане делятся на две группы: одна — страны с высокими ключевыми ставками и другая — с низкими. Группа стран с низкими ключевыми ставками — это порядка 40 стран: все европейские, США, Англия, Япония… Когда у вас в стране низкая ставка, в экономике оборачиваются, в основном, ваши национальные деньги. Вот возьмем Россию, вы — инвестор или, допустим, ведете бизнес в Калуге. Если вы строите на иностранные деньги, например, на европейские, у вас доступ к ним за четыре процента, если на российские — за 15-20 процентов. Естественно, вы не идиот и не пойдете в российскую банковскую систему за 20 процентов, а пойдете в иностранный банк.

С 1 января 2009 г. налоговая база в отношении процентных доходов, получаемых по вкладам в рублях, на основании новой редакции ст.214.2 НК РФ определяется как превышение суммы процентов, начисляемой в соответствии с условиями договора, над суммой процентов, рассчитанной исходя из ставки рефинансирования ЦБ РФ, увеличенной на пять процентных пунктов.

Пусть ставка налога составляет g процентов годовых, а $S(0)$ - сумма вклада, Т – срок вклада в годах, $\bar{r}$ – нормативная, необлагаемая налогом ставка (например, текущая ставка рефинансирования по рублевым вкладам плюс 5%). Если по вкладу начисляются простые проценты по годовой ставке r, то после уплаты налога у вкладчика останется денежная сумма $C(T)$, определяемая следующим образом:

$$C(T) = S(0)(1+Tr) - gS(0)(Tr - T\bar{r}) = S(0)\big(1 + T\big(r - (r-\bar{r})g\big)\big).$$

Таким образом, эта операция эквивалентна депонированию средств на тот же срок по простым процентам по ставке $r(1-g)+\bar{r}g$ годовых без налоговых платежей.

При долгосрочных и среднесрочных операциях обычно начисляются сложные проценты. Для упрощения рассмотрим вариант, когда сложные проценты начисляются ежегодно. Тогда налоги изымаются либо в конце срока сделки за весь период, либо ежегодно.

Рассмотрим случай, когда налоги изымаются в конце срока сделки за весь период. Сумма после уплата налога составит $C(T)$. Определим размер этой суммы:

$$C(T) = S(0)(1+r)^T - S(0)\left((1+r)^T - (1+\bar{r})^T\right)g = S(0)\left((1+r)^T(1-g) - (1+\bar{r})^T g\right).$$

Пример 2.4. Пусть ставка налога 30 %, ставка рефинансирования 8 %, ставка по вкладу 10 % годовых, условия начисления – в конце срока, срок вклада 1 год. Сумма вклада 100 000 р. Вычислить сумму налога и оставшуюся после уплата налога сумму.

Решение. Поскольку 8% + 5% = 13% > 10%, то процентные доходы по данному вкладу налогом не облагаются, у вкладчика к концу года будет сумма 110 000 р.

Пример 2.5. Пусть ставка налога 30 %, ставка рефинансирования 8 %, ставка по вкладу 14 % годовых, условия начисления – в конце срока, срок вклада 1 год. Сумма вклада 100 000 р. Вычислить сумму налога и оставшуюся после уплата налога сумму.

Решение. Поскольку 8% + 5% = 13% < 14%, то процентные доходы по данному вкладу облагаются налогом, вычислим сумму, выплаченную в качестве налога:

$$gS(0)(Tr - T\bar{r}) = 30\% \cdot 100000\ р. \cdot (14\% - 13\%) = 300\ р.$$

3. РАСЧЁТ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКОВ ПЛАТЕЖЕЙ

3.1. Понятие финансового потока. Временная диаграмма

С разовыми платежами человек имеет дело, если совершает покупки, оплачивает услуги или получает бонусы. В большинстве экономических процессов участники имеют дело с серией однородных платежей, образующих финансовый поток. Финансовые потоки возникают практически во всех сферах экономических отношений. Так, заработная плата, получаемая, как правило, достаточно регулярно, суммы оплаты коммунальных платежей, получение дивидендов по акциям, возвратные суммы по кредиту, инвестирование средств в производство с последующим получением прибыли, налоговые, арендные платежи и проч., – примеры финансовых потоков. Нужно иметь в виду, что положительные финансовые потоки как правило, связаны с получением денег, а отрицательные – оттоком, однако при смене стороны рассмотрения поток меняет знак. Часто финансовый поток включает как положительные, так и отрицательные платежи, однако если он связан с инвестированием средств, первая сумма имеет отрицательный знак, а последняя – положительный.

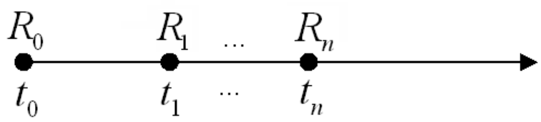
Каждый финансовый поток представляет собой совокупность однородных элементов – элементов финансового потока. Элемент финансового потока – это единичное перечисление (перераспределение) денежных средств, относящихся к соответствующему финансовому потоку. Элемент потока задается двумя основными параметрами – величиной (стоимостью) и временем. Абсолютная величина элемента финансового потока соответствует сумме перемещаемых денежных средств. Однако время в финансовых вычислениях влияет на величину потока.

Поток платежей – это последовательность *величин* самих *платежей* (со знаками) и моментов времени, когда они осуществлены.

Поток платежей можно отобразить в таблице:

t_k	t_0	t_1	…	t_n	…
R_k	R_0	R_1	…	R_n	…

или графически, в виде *временной диаграммы*:



Здесь R_k – величины платежей, а t_k – моменты совершения этих платежей.

Поток платежей можно представить как векторную последовательность $\{(R_k, t_k)\}$ платежей R_k и моментов времени t_k, к которым платежи относятся. В качестве начального момента времени часто удобно брать $t_0 = 0$.

Рассмотрим конечный поток платежей $\{(R_k, t_k)\}_{k=\overline{1,n}}$. Пусть, r_k, $k=\overline{1,n}$ – годовая ставка по сложным процентам для периода $[t_{k-1}; t_k]$ данного потока платежей.

Величиной потока в момент времени t_k называется сумма платежей потока, дисконтированных или наращенных к этому моменту времени. Если поток конечный и R_n – последний платеж, то величина потока подсчитывается по формуле:

$$S(t_k)=\sum_{i=0}^{k-1} R_i \prod_{j=i}^{k-1}(1+r_{j+1})^{t_{j+1}-t_j} + R_k + \sum_{i=k+1}^{n} R_i \prod_{j=k+1}^{i}(1+r_j)^{t_{j-1}-t_j} \qquad (3.1)$$

Если все ставки r_k, $k=\overline{1,n}$ одинаковы, то их общее значение r называется *ставкой приведения (ставкой дисконтирования)*. В таком случае формула (3.1) упрощается:

$$S(t_k)=\sum_{i=0}^{n} R_i (1+r)^{t_k-t_i}\,. \qquad (3.2)$$

Величина $S(t_0)$ называется *современной (начальной) величиной потока*, $S(t_n)$ — *конечной* (*наращенной*) *величиной потока*.

Будем использовать поток, для которого $t_k=k$, $k=\overline{1,n}$.

Пример 3.1. Подсчитать современную и конечную величины при r =10% для потока, заданного следующей таблицей.

t_k	0	1	2	3
R_k	—	– 2000	1000	2000

Решение. Воспользуемся формулой (3.2), тогда:

$S(0)=-2000\cdot(1+0{,}1)^{-1}+1000\cdot(1+0{,}1)^{-2}+2000\cdot(1+0{,}1)^{-3}=511$,

$S(3)=S(0)\cdot(1+r)^3=680$.

Пример 3.2. По схеме кредитования, рассчитанной на 5 лет, размер предоставляемой в долг суммы составлял 10, 20, 30, 40 и 50 тыс. руб. соответственно, причем процентная ставка за эти 5 лет изменялась следующим образом: 15%, 12%, 10%, 8%, 10 %. Сколько денег нужно вернуть через 5 лет?

Решение. Воспользуемся формулой (3.1):

$$S(5)=10\cdot 1{,}15\cdot 1{,}12\cdot 1{,}1\cdot 1{,}08\cdot 1{,}1+20\cdot 1{,}12\cdot 1{,}1\cdot 1{,}08\cdot 1{,}1+30\cdot 1{,}1\cdot 1{,}08\cdot 1{,}1+$$
$$+40\cdot 1{,}08\cdot 1{,}1+50\cdot 1{,}1=16{,}83+29{,}27+39{,}2+47{,}52+55=187{,}82 \text{ тыс.руб.}$$

3.2. Вычисление величины финансового потока, имеющего характер ренты

Поток положительных платежей с постоянными промежутками времени между ними называется *рентой*.

Рента с одинаковыми платежами в каждый период времени носит название *аннуитет*. Если платежи поступают в конце очередного промежутка, то аннуитет носит название *постнумерандо*, в начале – *пренумерандо*.

Рассмотрим аннуитет, считая, что процентная ставка r постоянна во времени. Отдельно рассматривать такие потоки платежей имеет смысл в виду возможности применения удобных компактных формул для расчета величин аннуитетных потоков в каждый момент времени. В данном разделе кроме традиционного простого аннуитета будет рассмотрен также дробный аннуитет и линейная рента.

Линейной рентой назовем ренту, платежи которой растут по линейному закону.

Простой аннуитет

Пусть денежные поступления в размере R происходят ежегодно в течение n лет, причем $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, …, $t_n = n$. Найдем современную и наращенную величины для аннуитета постнумерандо:

$$\bar{S}(0) = \frac{R}{1+r} + \frac{R}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+r)^n}; \quad \bar{S}(n) = \bar{S}(0)(1+r)^n. \qquad (3.3)$$

Пользуясь формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии с первым компонентом $R/(1+r)$ и знаменателем $1/(1+r)$, после элементарных преобразований получим:

$$\bar{S}(0) = \frac{R((1+r)^n - 1)}{r(1+r)^n}; \bar{S}(n) = \frac{R((1+r)^n - 1)}{r}. \qquad (3.4)$$

Часто применяют следующие обозначения:

$$a_{n;r} = \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}$$ (коэффициент приведения ренты)

и

$$s_{n;r} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$ (коэффициент наращения ренты).

Указанные обозначения достаточно позволяют представить формулы (3.4) в компактном виде:

$$\bar{S}(0) = Ra_{n;r}; \bar{S}(n) = Rs_{n;r}.$$

Аналогичные формулы для аннуитета пренумерандо можно получить из (3.4), учитывая, что:

$$\underline{S}(0) = \bar{S}(0)(1+r);\ \underline{S}(n) = \bar{S}(n)(1+r). \tag{3.5}$$

Тогда

$$\underline{S}(0) = \frac{R((1+r)^n - 1)}{r(1+r)^{n-1}};\ \underline{S}(n) = \frac{R((1+r)^n - 1)}{r}(1+r). \tag{3.6}$$

Замечание. Эти формулы могут применяться не только для оценки годовых рент, но и квартальных, полугодовых, ежемесячных и т.д., но тогда суммы и ставки должны соответствовать рассматриваемому периоду ренты.

Обобщением указанных формул является дробный аннуитет, рассмотренный ниже.

Для выполнения расчётов по этим формулам в MSExcel существуют функции ПС() и БС() с соответствующим набором аргументов.

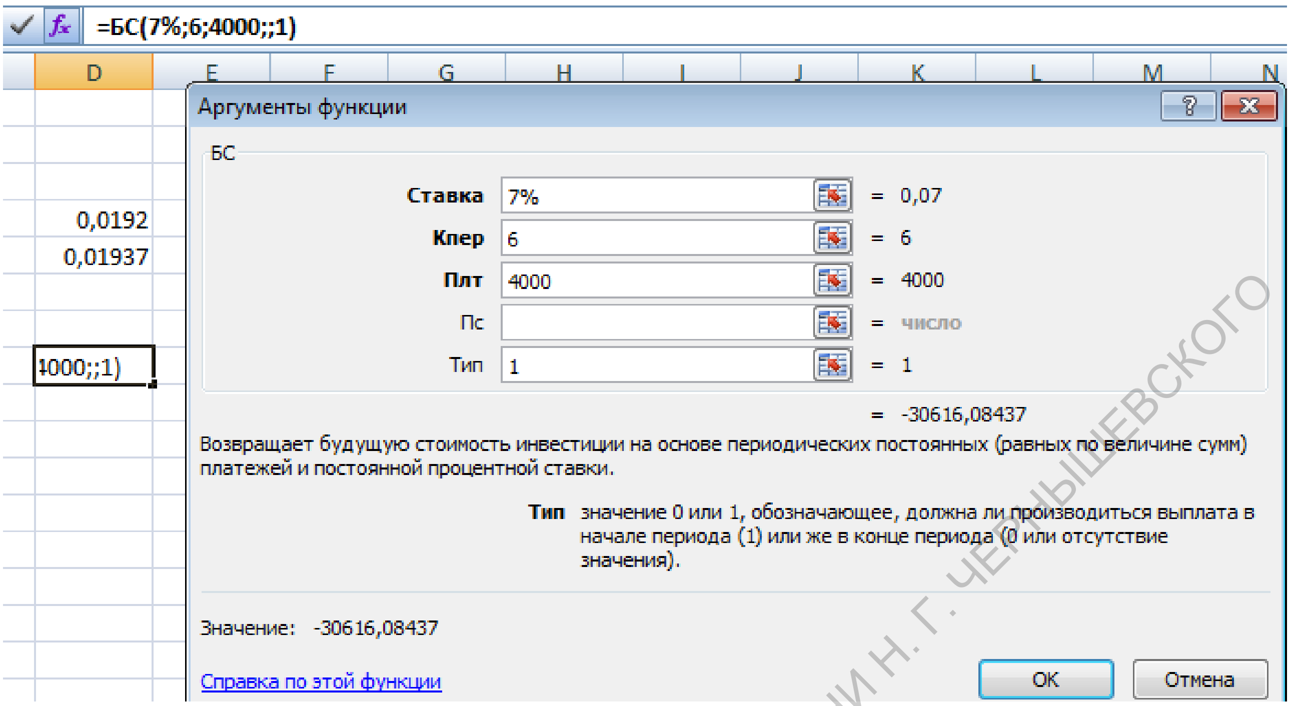
Применение аннуитета постнумерандо и пренумерандо целесообразно для упорядочения экономических отношений. Так, аннуитет пренумерандо обычно относится к процессам, связанным с вложением или расходованием денег по целевому назначению, к авансовым и арендным платежам, а аннуитет постнумерандо – к получению доходов, оплате коммунальных услуг, услуг связи, налогов, процентов и т.п.

Пример 3.3. Решено в течение 6 лет ежегодно вносить в банк 4 000 дол. по схеме пренумерандо с начислением сложных процентов 7% годовых. Чему равна сумма к получению в конце периода?

Решение. Воспользуемся формулами (3.6):

$$\underline{S}(6) = 4000 \cdot \frac{1{,}07^6 - 1}{0{,}07} \cdot 1{,}07 = 30\ 616 \text{ дол.}$$

Для вычисления будущей стоимости аннуитета в MSExcel существует финансовая функция БС(ставка;кпер;плт;пс;тип):



Результат: -30 616,08р., знак «-» говорит о полном возврате денег вкладчику, поскольку третий аргумент этой функции пропущен, а суммы возврата задолженности 4 000 дол. Имеют знаки «+».

Аналогично производятся вычисления приведённой стоимости аннуитета. Для вычисления приведённой стоимости аннуитета удобно использовать функцию MSExcel ПС(ставка;кпер;плт;пс;тип).

Замечание. В свободно распространяемых электронных таблицах (например, OpenOffice.Calc) аналогичные функции обычно имеют названия FV() («future value») и PV() («present value»).

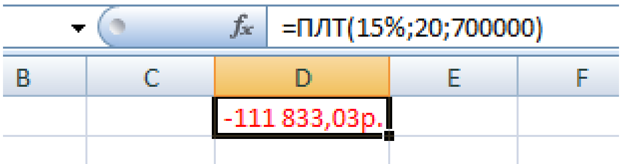
Рассмотрим на примере применение ещё одной удобной финансовой функции ПЛТ(ставка;кпер;пс;бс;тип).

Пример 3.4. Г-н Х инвестировал 700 000 дол. в пенсионный контракт. Страховая компания предложила условия, согласно которым определенная сумма будет выплачиваться ежегодно (в конце года) в течение 20 лет, исходя из годовой ставки по сложным процентам 15%. Какую сумму будет получать ежегодно г-н Х ?

Решение. В нашем случае $\bar{S}(0) = 700\,000$ дол., $r = 0{,}15$, $n = 20$. Из формулы (3.4) (слева) выразим ежегодную сумму выплаты R г-ну Х:

$$R = 700\ 000 \cdot \frac{0{,}15 \cdot 1{,}15^{20}}{1{,}15^{20} - 1} = 111\ 833\ \text{дол.}$$

Для вычисления данной суммы в MSExcel применяем финансовую функцию ПЛТ():



Знак «-» означает, что направления использования средств противоположно оплате 700 000 дол.

Дробный аннуитет

Рассмотрим поток платежей постнумерандо, которые равными суммами выплачиваются p раз в году через равные интервалы. Если суммарный годовой платеж равен R, то единичный платеж равен $R_p = \frac{R}{p}$. Гораздо чаще известен именно дробный платеж R_p, поэтому специально вычислять его не нужно. Предположим, что сложные проценты начисляются m раз в году, также через равные интервалы, годовая ставка (по сложным процентам) r. Подсчитаем наращенную сумму такого потока через n лет:

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n\cdot p} (R_p)\cdot\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\left(n-\frac{i}{p}\right)\cdot m} = R_p\cdot\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n\cdot m}\sum_{i=1}^{n\cdot p}\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{i\cdot m}{p}}}.$$

Используя формулу суммы первых $n\cdot p$ членов геометрической прогрессии с первым компонентом $1\Big/\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$, знаменателем $1\Big/\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$, после элементарных преобразований получим:

$$\bar{S}(n) = \frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n\cdot m}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}. \qquad (3.7)$$

Современную величину потока получаем из (3.7):

$$\bar{S}(0) = \frac{S(n)}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}} = \frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right)}. \qquad (3.8)$$

Как было замечено выше, при m=p эти формулы ничего нового по сравнению (3.4) по сути не дают. Именно данный случай чаще всего используется на практике.

Пример 3.5. Для мелиоративных работ государство перечисляет фермеру в конце каждого года 500 дол. Деньги поступают на специальный счет и на них каждые полгода начисляются сложные проценты, исходя из годовой ставки 4%. Сколько денег накопится на счете через 5 лет?

Решение. Данные для расчета таковы: p =1, m = 2, r = 0,04, R = 500 дол. Воспользуемся формулой (3.7):

$$\bar{S}(5) = \frac{500}{1} \cdot \frac{(1+0{,}04/2)^{10} - 1}{(1+0{,}04/2)^{2} - 1} \ .$$

Произведя вычисления, получим сумму, которая накопится на счете фермера через 5 лет: $\bar{S}(5) = 2\,710{,}3$ дол.

Пример 3.6. Ежемесячно в течение двух лет студенту перечисляется на пластиковую карту стипендия 600 руб. Деньги не снимаются. Затем один год студент стипендию не получает. Следующие два года перечисляется ежемесячно по 800 руб. Сколько денег накопится на карте через 5 лет, если годовая ставка по сложным процентам составляет 2%.

Решение. Расчет требуемой суммы ведется по формуле (3.7), p =12, $m = 1$:

$$600 \cdot \frac{1{,}02^{2} - 1}{1{,}02^{\frac{1}{12}} - 1} \cdot 1{,}02^{3} + 800 \cdot \frac{1{,}02^{2} - 1}{1{,}02^{\frac{1}{12}} - 1} = 35\,178 \text{ руб.}$$

Можно провести сравнение этой суммы с суммой, которая накопилась бы, если студент снимал стипендию и хранил наличными – 33 600 руб.

Пример 3.7. По договору о кредитной линии с банком предприниматель в начале каждого месяца получает по 10 тыс. руб. в течение полутора лет. В конце срока возвращается сумма долга и начисляются сложные проценты 1,1 % ежемесячно. Какая сумма подлежит возврату?

Решение. Условно считая месяц «годом», применяем формулу (2.6):

$$\underline{S}(18\ \textit{мес.}) = \frac{10 \cdot ((1{,}011)^{18} - 1)}{0{,}011} \cdot 1{,}011 \approx 200 \text{ тыс.руб.}$$

Задание. Для примеров 3.5-3.7 выполните расчёты с использованием электронной таблицы (если Вы применяете MSExcel, воспользуйтесь функциями ПС() и БС()).

Монотонная (линейная) рента

Рассмотрим ренту, платежи по которой поступают в конце каждого временного промежутка (постнумерандо), причём изменение величин платежей происходит во времени по закону $\mathrm{R} + \beta \cdot \mathrm{t}$, $t = \overline{0, n-1}$. Если ставка приведения постоянна на уровне r, то современная величина такой ренты рассчитывается по формуле:

$$S(0)=\frac{R}{1+r}+\frac{R+\beta}{(1+r)^2}+\frac{R+2\beta}{(1+r)^3}+\ldots+\frac{R+(n-1)\beta}{(1+r)^n}=$$

$$=\frac{R}{1+r}+\frac{R}{(1+r)^2}+\frac{R}{(1+r)^3}+\ldots+\frac{R}{(1+r)^n}+$$

$$+\frac{\beta}{(1+\mathrm{r})^n}\left((1+r)^{n-2}+2(1+r)^{n-3}+\ldots+(n-1)\right)=$$

$$=\frac{R\cdot((1+r)^n-1)}{r\cdot(1+r)^n}+ \tag{3.9}$$

$$+\frac{\beta}{(1+\mathrm{r})^n}\left(\left\{(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-3}+\ldots+1\right\}+\right.$$

$$\left.+\left\{(1+r)^{n-3}+(1+r)^{n-4}+\ldots+1\right\}+\left\{(1+r)+1\right\}+1\right).$$

Пользуясь формулой суммы конечного числа членов геометрической прогрессией, имеем:

$$(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-3}+\ldots+1=\frac{(1+\mathrm{r})^{n-1}-1}{r},$$

$$(1+r)^{n-3}+(1+r)^{n-4}+\ldots+1=\frac{(1+\mathrm{r})^{n-2}-1}{r},$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

$$(1+r)+1=\frac{(1+\mathrm{r})^2-1}{r},$$

$$1=\frac{(1+r)-1}{r}.$$

Подставим полученные выражения в (3.9):

$$S(0)=\frac{R((1+r)^n-1)}{r(1+r)^n}+$$

$$+\frac{\beta}{r(1+\mathrm{r})^n}\left(\left\{(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\ldots+(1+r)^2+(1+r)\right\}-(n-1)\right)=$$

$$=\frac{R((1+r)^n-1)}{r(1+r)^n}+\frac{\beta}{r(1+\mathrm{r})^n}\left(\frac{(1+r)\left((1+r)^{n-1}-1\right)}{r}-(n-1)\right).$$

Окончательно получаем:

$$S(0)=\frac{R((1+r)^n-1)}{r(1+r)^n}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-1\right)}{r^2(1+\mathrm{r})^n}+\frac{\beta\left((1+r)^{n-1}-n\right)}{r(1+\mathrm{r})^n}. \tag{3.10}$$

Отсюда находим наращенную величину:

$$S(n) = \frac{R((1+r)^n - 1)}{r} + \frac{\beta\left((1+r)^{n-1} - 1\right)}{r^2} + \frac{\beta\left((1+r)^{n-1} - n\right)}{r}. \tag{3.11}$$

Если линейная рента имеет форму пренумерандо, то получаем:

$$S(0) = \frac{R((1+r)^n - 1)}{r(1+r)^{n-1}} + \frac{\beta\left((1+r)^{n-1} - 1\right)}{r^2(1+r)^{n-1}} + \frac{\beta\left((1+r)^{n-1} - n\right)}{r(1+r)^{n-1}}. \tag{3.12}$$

Отсюда находим наращенную величину:

$$S(n) = \left(\frac{R((1+r)^n - 1)}{r} + \frac{\beta\left((1+r)^{n-1} - 1\right)}{r^2} + \frac{\beta\left((1+r)^{n-1} - n\right)}{r}\right)(1+r). \tag{3.13}$$

Вечная рента

Под «вечной» годовой рентой понимается рента, последовательность платежей которой неограниченна. Наращенная величина такой ренты бесконечна, а современная величина, например для аннуитета постнумерандо, составляет:

$$S^{\infty}(0) = \frac{R}{r}. \tag{3.14}$$

Формула (3.14) получена из (3.4) путем предельного перехода при $n \to \infty$.

Пример 3.8. Бизнесмен арендовал виллу за 10 000 дол. в год. Какова выкупная цена аренды при годовой ставке сложных процентов 5%?

Решение. Выкупная цена виллы есть современная величина всех будущих арендных платежей:

$$S^{\infty}(0) = R/r = 10000/0{,}05 = 200000 \text{ дол.}$$

Несложно вычислить современную стоимость других видов ренты. Например, переходя к пределу при $n \to \infty$ в формуле (3.10), получим современную стоимость «линейного вечного» аннуитета постнумерандо:

$$S^{\infty}(0) = \frac{R}{r} + \frac{\beta}{r^2(1+r)} + \frac{\beta}{r(1+r)} = \frac{R}{r} + \frac{\beta(1+r)}{r^2(1+r)},$$ откуда получаем:

$$S^{\infty}(0) = \frac{R}{r} + \frac{\beta}{r^2}. \tag{3.15}$$

4. ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ФИНАНСОВО-КРЕДИТНОЙ СФЕРЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОЦЕНТНОГО АНАЛИЗА

4.1. Кредитные расчеты

Все три термина: «заем», «кредит», «ссуда» означают предоставление денег или товаров в долг на условиях возвратности, платности, срочности. Тот, кто выдает деньги или товары в кредит, называется *кредитором*, кто берет – *заемщиком (дебитором)*. Условия выдачи и погашения кредитов (займов, ссуд) весьма разнообразны. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть кредит в размере D выдан на n лет под g сложных годовых процентов (эффективная ставка). Изменение обозначения процентной ставки несет смысловое значение, например, для банков, которые привлекают вклады, предлагая процентную ставку r, и кредитуют население по ставке g, причем обычно $r < g$. Ясно, что такое понимание кредитно-депозитных операций банка очень узко, но позволяет сформировать представление о так называемой банковской марже, которая в таком случае составит $g - r$ процентов.

4.2. Погашение долга одним платежом в конце срока

К концу n-го года наращенная сумма с величины D станет $D(1+g)^n$. Если предполагается погасить кредит одним платежом, то это и есть размер данного платежа.

Пример 4.1. Занято 2 000 дол. на 8 лет под 10% годовых по сложным процентам. Если отдать этот заем одним платежом, каков размер этого платежа?

Решение. В нашем случае $D = 2\ 000$ дол., $g = 0{,}1$, $n = 8$; тогда искомая сумма к погашению составит $2\ 000 \cdot 1{,}1^8 = 4\ 288$ дол.

4.3. Погашение долга в рассрочку дифференцированными и аннуитетными платежами

Схемы погашения долга частями, с одной стороны, позволяют заемщику легче планировать свои расходы по обслуживанию долга, а с другой – предоставляют кредитору возможность отслеживать регулярность возврата заемщиком причитающихся сумм и при добросовестном исполнении заемщиком платежей снизить риск невозврата кредита. Размер самого кредита называется *основным долгом*, а наращиваемый добавок – *процентными деньгами*. Указанные платежи дробятся. Обозначим через d_t расходы на погашение основного долга в конце года t, D_t – остаток основного долга на начало года t, Y_t – общие расходы по обслуживанию долга в конце года t. Тогда:

$$Y_t = D_t g + d_t, \tag{4.1}$$

где $D_t g$ – процентные деньги;

$$D = d_1 + d_2 + ... + d_n. \tag{4.2}$$

Для погашения основного долга частями используются, например, следующие схемы.

Схема А. Схема амортизации долга: дифференцированные погасительные платежи

Долг погашается последовательными равными суммами в конце каждого года, с ежегодной выплатой процентов на остаток долга. В этом случае:

$$d_t = d = const, d = D/n, \tag{4.3}$$

$$D_t = D - (t-1)d, \tag{4.4}$$

$$Y_t = (D - (t-1)d)g + d. \tag{4.5}$$

Планом погашения задолженности называется совокупность данных по обслуживанию основной суммы долга, о процентных выплатах и остатках задолженности за каждый период (год) до момента его полного погашения. Наиболее удобный способ составления плана – таблица.

Пример 4.2. Выпущена облигация (долговая ценная бумага) номиналом 100 руб. с условием погашения последовательными равными суммами в течение 4 лет. Ежегодно выплачиваются также 20% годовых на остаток долга каждый. Составляем план погашения.

Решение. В нашем случае $n=4$, $D=100$ руб., процентная ставка $g=0{,}2$. Вычисляем размер ежегодной выплаты по основному долгу, пользуясь формулой (4.3): $d = 100/4 = 25$ руб. План погашения составим в виде таблицы. Сразу ставим $D_1 = 100$ руб. и заполняем колонку (2). Строка $t+1$ колонки (1) получается вычитанием из строки t колонки (1) соответствующей строки колонки (2): $D_{t+1} = D_t - d$. Колонка (3) получается из колонки (1) умножением на 0,2. Колонка (4) – это сумма колонок (2) и (3).

Время, год	Остаток основного долга на начало года	Погашение основного долга в конце года t	Проценты к выплате в конце года t	Годовые расходы по обслуживанию долга на конец года t
t	D_t	$d_t = d$	$D_t g$	$Y_t = d + D_t g$
1	100	25	20	45
2	75	25	15	40
3	50	25	10	35
4	25	25	5	30
	(1)	(2)	(3)	(4)

Данная схема погашения долга имеет существенный недостаток: расходы по обслуживанию долга вначале выше, что часто является нежелательным для дебитора.

Дифференцированные платежи сначала большие, а к концу срока погашения кредита постепенно уменьшаются или наоборот.

Схема В. Схема амортизации долга: аннуитетные погасительные платежи

Погашение кредита равными срочными уплатами вместе с начисленными сложными процентами на непогашенный остаток.

Аннуитетными платежами называются равные платежи каждый период (месяц, год и т.п.). Независимо от того, в начале срока погашения кредита вы находитесь или в его конце, ежемесячно вы будете выплачивать одинаковую сумму.

Эта схема явно не указывает на размер погашаемой части основной суммы долга. В этом случае общие годовые расходы должника по обслуживанию долга (срочные уплаты) постоянны в течение всего срока погашения:

$$Y_t = Y = const\,. \tag{4.6}$$

Текущая величина всех выплат должна быть равна размеру кредита D:

$$D = \frac{Y}{1+g} + \frac{Y}{(1+g)^2} + \ldots + \frac{Y}{(1+g)^{n-1}} + \frac{Y}{(1+g)^n}\,. \tag{4.7}$$

Заметим, что возврат платежей происходит по схеме аннуитета постнумерандо, причем D – современная величина этого потока. Тогда:

$$D = \frac{Y((1+g)^n - 1)}{g(1+g)^n}, \quad \text{откуда имеем:}$$

$$Y = \frac{Dg(1+g)^n}{(1+g)^n - 1}\,. \tag{4.8}$$

Платежи по основному долгу связаны следующими соотношениями:

$$d_1 = Y - Dg\,,$$

$$d_2 = Y - (D - d_1)g = d_1(1+g)\,, \tag{4.9}$$

…………

$$d_t = d_{t-1}(1+g) = d_1(1+g)^{t-1}.$$

Обозначим общую сумму процентных денег через:

$$DD := D_1 \cdot g + D_2 \cdot g + ... + D_n \cdot g.$$

Воспользуемся соотношением (4.1):

$$DD = (Y - d_1) + (Y - d_2) + ... + (Y - d_n) = n \cdot Y - (d_1 + d_2 + ... + d_n).$$

Применяя формулу (4.2), получаем следующее выражение для расчёта суммы выплаченных за период процентов:

$$DD = n \cdot Y - \mathrm{D}. \qquad (4.10)$$

Пример 4.3. Вы заняли на 5 лет $12\,000$ дол. под 12% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Составьте план погашения. Определите, какая часть основной суммы займа будет погашена за первые 2 года.

Решение. Данные для расчета: $n = 5$; $D = 12\,000$ дол.; $g = 12\%$. Находим сумму ежегодного платежа по обслуживанию займа по формуле (4.8):

$$Y = \frac{12000 \cdot 0{,}12 \cdot 1{,}12^5}{1{,}12^5 - 1} = 3\,328{,}9 \text{ дол.}$$

Остаток задолженности на начало 1-го года известно изначально: $D_1 = D$. Вычисляем остаток основного долга через 1 год: $d_1 = Y - D_1 g = 1\,888{,}9$ дол., подсчитываем проценты, начисленные на 12 000 дол. за 1 год: $Dg = 1\,440$ дол. и заполняем первую строку таблицы. Далее вычисляем $D_2 = D_1 - d_1 = 10\,111{,}1$ дол. и находим $D_2 g = 1\,213{,}3$ дол., а затем $d_2 = Y - D_2 g = 2\,115{,}6$ дол. и заполняем строку t = 2. Процесс продолжаем до тех пор, пока долг не будет погашен (5 лет).

Время, год	Остаток основного долга на начало года	Погашение основного долга в конце года t	Проценты к выплате в конце года t	Общие расходы по обслуживанию долга в конце года t
t	D_t	$d_t = Y - D_t g$	$D_t g$	$Y_t = Y$
1	12 000,0	1 888,9	1 440,0	3 328,9
2	10 111,1	2 115,6	1 213,3	3 328,9
3	7 995,5	2 369,5	959,5	3 328,9
4	5 626,0	2 653,8	675,1	3 328,9
5	2 972,2	2 972,2	356,7	3 328,9

За первые 2 года будет выплачено по основному займу $d_1 + d_2 = 4004{,}5$ дол., что составляет от основной суммы долга:

$$\frac{d_1 + d_2}{D} = 0{,}334 \quad [33{,}4\%].$$

Заметим, что платежи по погашению основного долга из года в год увеличиваются, а процентные выплаты сокращаются, хотя в сумме их величина постоянна.

Пример 4.4. Вы заняли на 5 лет 10 000 дол. под 8% годовых. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года с учетом начисленных сложных процентов на непогашенный остаток. Определите общую сумму процентов к выплате.

Решение. Данные для расчета: $D = 10\,000$ дол.; $n = 5$; $g = 8\%$. По формуле (3.8) находим ежегодный платеж по займу:

$$Y = \frac{10\ 000 \cdot 0{,}08 \cdot 1{,}08^5}{1{,}08^5 - 1} = 2\ 504 \text{ дол.}$$

По формуле (4.10) вычисляем общую сумму процентных денег:

$$DD = 5Y - D = 2520 \text{ дол.}$$

4.4. Краткосрочные схемы кредитования. Расчет эффективной ставки

В соответствии с Положением № 254-П от 26 марта 2004г. Центрального банка Российской Федерации о порядке формирования кредитными организациями резервов на возможные потери по ссудам (банковском кредитном риске), по ссудной и приравненной к ним задолженности производится расчет эффективной ставки по формуле:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{CF_i}{(1 + IRR)^{t_i}} = 0, \quad t_i = \frac{(d_i - d_0)}{356}.$$

где d_i – дата i-го денежного потока; d_0 – дата начального денежного потока, который совпадает с датой перечисления денежных средств заемщику (потребителю); n – количество денежных потоков; CF_i – сумма i-го денежного потока по договору о размещении денежных средств, среди этих величин обязательно должны быть хотя бы две противоположные по знаку; *IRR* (*EFF*) – годовая эффективная процентная ставка, выраженная в виде десятичной дроби.

Разнонаправленные денежные потоки (приток и отток денежных средств) включаются в расчет с противоположными математическими знаками: предоставление заемщику ссуды на дату ее выдачи включается в расчет со знаком «минус», возврат заемщиком ссуды, уплата процентов по ссуде включаются в расчет со знаком «плюс».

Продемонстрируем на примере целесообразность применения финансовой функции ЧИСТВНДОХ((значения;даты;предп) прикладной программы Microsoft Office Excel (версии 2003 и выше). Рассмотрим финансовые операции с использованием кредитной карты. Согласно договору с банком, клиент ежемесячно (в начала каждого месяца, срок 1 год) может снимать по 100 00 р., что он и делает регулярно, при этом уплачивая предусмотренную тем же договором комиссию в размере 2% от снятой суммы. В конце года долг возвращается (годовая процентная ставка за использование заёмных средств составляет 20 %). Вычислить накопленную сумму долга (через 1 год) и эффективную ставку.

Воспользуемся финансовыми функциями MSExcel БС(), реализующей расчёт по правой части формулы (3.6) за счёт последнего параметра – «1», указывающего на характер аннуитета – «пренумерандо», и ЧИСТВНДОХ().

В результате расчётов получаем, что сумма накопленной задолженности оказалась равной 133 824,56 р. (ясно, что на эту сумму размер при снятии денег комиссии не влияет), а эффективная ставка составила 26,28% (здесь уже оказали своё влияние комиссионные платежи, повысив ставку):

-133 828,56р.		0,016667
12.11.2011	9800	
12.12.2011	9800	
12.01.2012	9800	
12.02.2012	9800	
12.03.2012	9800	
12.04.2012	9800	
12.05.2012	9800	
12.06.2012	9800	
12.07.2012	9800	
12.08.2012	9800	
12.09.2012	9800	
12.10.2012	9800	
12.11.2012	-133 828,56р.	
	26,28%	

Составим уравнение баланса для вычисления эффективной ставки в рассмотренном примере:

$$\sum_{i=1}^{12} \frac{9\,800}{(1+r_{ef})^{(i-1)/12}} - \frac{133\,826{,}56}{(1+r_{ef})} = 0 \Rightarrow r_{ef} \approx 0{,}2628 \;.$$

Самостоятельное задание. Согласно договору с банком, клиент ежемесячно (в начала каждого месяца, срок 1 год) может снимать по 100 00 р., что он и делает регулярно, при этом уплачивая предусмотренную тем же договором комиссию в размере 0,5% от снятой суммы. В конце года долг возвращается (годовая процентная ставка за использование заёмных средств составляет 20 %). Вычислить накопленную сумму долга (через 1 год) и эффективную ставку, сопоставить полученный результат с результатом приведённого выше примера и сделать выводы.

Схема ***потребительского кредитования*** является самой дорогой, поскольку рассмотренные в п.4.1 деньги $D(1+g)^n$ выплачиваются в полном объёме и даже раньше. Обычно этот метод применяется для схем кредитования сроком не более 1 года. При этом основная сумма чаще всего разбивается поровну для каждого погасительного периода, а проценты $D(1+g)^n - D$ выплачиваются согласно предусмотренному в договоре графику. Для кредитов, выданных на 1 год и возвращаемых ежемесячными платежами часто применяется «метод 78-х». Рассмотрим его на примере.

Пример 4.6. Сумма 12 000 дол. выдана в долг на год на условиях расчетов по схеме потребительского кредитования под 30% годовых (основная сумма выплачивается в рассрочку равными платежами ежемесячно, а процентный годовой платеж начисляется сразу и также погашается ежемесячно). Рассматриваем схемы с ускоренным и замедленным списанием процентов по методу 78-х: 1/78+2/78+…+12/78=1. Требуется вычислить эффективную ставку r_{ef}.

Решение. Поскольку проценты начисляются сразу на всю сумму (потребительские условия кредитования), то за год они составляют: 3 600=12 000$\times$30%. Рассмотрим следующие варианты возврата процентной части долга (ежемесячно):

1) в долях 12/78, …, 1/78;

2) в долях 1/78, …, 12/78.

В первом случае для поиска эффективной ставки решается уравнение:

$$\frac{1\,553{,}846}{\left(1+r_{ef}\right)^{\frac{1}{12}}}+\frac{1\,507{,}692}{\left(1+r_{ef}\right)^{\frac{2}{12}}}+\ldots+\frac{1\,046{,}154}{\left(1+r_{ef}\right)^{1}}=12\,000,$$

Выполняем расчеты с использованием инструмента «Подбор параметра» MSExcel (для пакетов MSOffice с сокращённым набором функций) или пользуемся финансовой функцией ЧИСТВНДОХ():

=ЧИСТВНДОХ(G11:G23;C11:C23)

C	D	E	F	G
месяц	долг		процент	общая сумм
01.янв				-12000
01.фев	12000	1000	553,8462	1553,846
01.мар	11000	1000	507,6923	1507,692
01.апр	10000	1000	461,5385	1461,538
01.май	9000	1000	415,3846	1415,385
01.июн	8000	1000	369,2308	1369,231
01.июл	7000	1000	323,0769	1323,077
01.авг	6000	1000	276,9231	1276,923
01.сен	5000	1000	230,7692	1230,769
01.окт	4000	1000	184,6154	1184,615
01.ноя	3000	1000	138,4615	1138,462
01.дек	2000	1000	92,30769	1092,308
01.янв	1000	1000	46,15385	1046,154
				0,72
	=ЧИСТВНДОХ(G11:G23;C11:C23)			

Аналогичные действия выполняем для второго случая. В первом случае эффективная ставка составила приблизительно 72%, во втором – 60%.

4.5. Создание погасительного фонда

Если по условиям займа должник обязуется вернуть сумму долга в конце срока в виде разового платежа, то он должен предпринять меры для его обеспечения. Обычная мера при значительной сумме долга заключается в создании погасительного фонда. Иногда это оговаривается в договоре выдачи займа в качестве гарантии его погашения. Погасительный фонд создается из последовательных взносов должника (например на специальный счет в банке), на которые начисляются проценты. Сумма этих взносов равна сумме долга. Взносы могут быть как постоянными, так и переменными. Ограничимся рассмотрением первого случая.

Предположим, что для погашения взятой суммы D на n лет под g годовых сложных процентов дебитор открывает в банке счет, ежегодно внося на этот счет сумму w под r сложных процентов годовых. Если сделка не относится к разряду спекулятивных, то $r < g$.

Пользуясь формулой (4.4), рассчитываем накопленную через n лет сумму (ее должно хватить для возврата задолженности с процентами):

$$D(1+g)^n = \frac{w\left((1+r)^n - 1\right)}{r}, \qquad (4.11)$$

откуда можно выразить минимальную сумму, которую нужно вносить ежегодно в погасительный фонд, чтобы к концу срока иметь возможность рассчитаться за кредит:

$$w = \frac{D\mathrm{r}(1+g)^n}{\left((1+\mathrm{r})^n - 1\right)}. \tag{4.12}$$

Если $r = g$, то создание погасительного фонда реализует схему В возврата задолженности частями.

5. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНВЕСТИЦИЙ

5.1. Понятие инвестиционного анализа

Инвестиционный процесс – это финансовый поток, включающий платежи двух видов – инвестиционные затраты и инвестиционные доходы, причём платежи, связанные с вложением капитала (инвестированием), условно считаются отрицательными, а платежи, связанные с последующим получением дохода, считаются положительными.

Инвестиционный анализ — это комплекс методических и практических приемов и методов разработки, обоснования и оценки целесообразности осуществления инвестиций с целью принятия инвестором эффективного решения.

Инновация — использование результатов научных исследований и разработок для улучшения многих сфер общества, таких как социальные сферы, культурные, экономические и т.п. Также необходимо создание благоприятных условий для осуществления подобных инноваций.

Инновационный анализ – это единая информационная система качественных и количественных показателей, критериев и методов, предназначенная для оценки потребности, возможности, целесообразности и эффективности внедрения и использования инноваций в деятельности хозяйствующего субъекта без угрозы его дальнейшему функционированию.

Инновационные инвестиции — это, как правило, инвестиции в нематериальные активы, которые обеспечивают внедрение научных и технических разработок в производство и социальную сферу, т.е. это инвестиции капитала в новые изобретения, приводящие к значительным улучшениям производственной деятельности.

Поскольку капиталом считаются деньги, находящиеся в обороте и способные к «самовозрастанию», инвестиционные затраты часто называют капитальными вложениями, однако термин «инвестиционные затраты» немного шире, чем «капитальные вложения».

Согласно Федеральному закону «Об инвестиционной деятельности, осуществляемой в форме капитальных вложений», под капитальными вложениями понимаются инвестиции в основной капитал (основные средства), в том числе затраты на новое строительство, расширение, реконструкцию и техническое перевооружение действующих предприятий, приобретение машин, оборудования, инструмента, инвентаря, проектно-изыскательские работы и другие затраты.

Инвестиционные затраты - это затраты, возникающие при реализации инвестиционных проектов, связанных с расширением действующего или созданием нового бизнеса. Вообще говоря, инвестиционные затраты возникают не только при организации бизнеса «с нуля». Они могут быть связаны с расширением действующего бизнеса, а также с привнесением в него некоторых качественных изменений.

Иногда в контексте понятно, о чём идёт речь, и термин «инвестиционные затраты» может быть заменён термином «инвестиции».

Таким образом, капитальные вложения есть частный случай инвестиций, диверсифицированный по объекту их вложения.

Началом процесса инвестиций $t=0$ будем считать момент первого вложения капитала. Пусть K – начальные капиталовложения (относящиеся к моменту $t=0$). Считаем, что длительность инвестиционного проекта равна n периодов (лет); $t=n$ – год последнего поступления чистого дохода от инвестиций. Между первым вложением средств и первым поступлением доходов должно пройти некоторое время (считаем, не менее года).

Под *чистым доходом* будем понимать разность между доходом от проекта и размером инвестиций за год t. Пусть чистые доходы за 1, 2,…, n годы составляют, соответственно, $R_1, R_2, ..., R_n$.

Ясно, что чистые доходы могут быть отрицательными, в случае если за год t требуются дополнительные вложения капитала, которые не покрываются доходами за этот год, нулевыми, если в году t вложено средств столько же, сколько получено доходов, или положительными, если доходы выше капиталовложений, но $R_n > 0$.

При анализе инвестиционных проектов важно сопоставить затраты с результатами с учётом влияния времени. Операцию наращения денег во времени или операцию дисконтирования будем называть операцией «приведения» денег.

Для «приведения» денежных потоков к начальному моменту используется ставка r, которая называется *ставкой приведения*. При выборе r обычно ориентируется на текущий или ожидаемый уровень ссудного процента. Один и тот же инвестиционный проект может рассматриваться на различных этапах его существования, поэтому ставка приведения может меняться.

5.2.Показатели эффективности инвестиций

К основным показателям эффективности инвестиций относятся:

1. *Чистый приведенный доход* (Net Present Value).

Чистым приведенным доходом называется разность дисконтированных показателей чистого дохода и инвестиционных затрат. Фактически это современная величина инвестиционной прибыли. Расчет указанного показателя производится по формуле:

$$NPV = -K + \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+r)^t}. \qquad (5.1)$$

Если $R_t = R = const$, $t = \overline{1,n}$, то

$$NPV = -K + R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}. \quad (5.2)$$

Если $NPV < 0$, то инвестиционный проект следует отклонить, если $NPV \geq 0$, то проект принимается к рассмотрению.

Для акций и облигаций чистый приведенный доход равен разнице между внутренней стоимостью $P_{ВН}$ и текущей рыночной ценой P: $NPV = P_{ВН} - P$.

2. *Индекс доходности* (Profitability Index).

Индексом доходности называется отношение современной стоимости чистых доходов от инвестиций к современной стоимости осуществляемых капиталовложений.

Этот показатель, в отличие от предыдущего, является относительным, и измеряется в долях или в процентах (аналог рентабельности). Индекс доходности связан с чистым приведенным доходом следующим соотношением:

$$PI = \frac{NPV + K}{K} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+r)^t}. \quad (5.3)$$

Если $R_t = R = const$, $t = \overline{1,n}$, то

$$PI = \frac{R\left((1+r)^n - 1\right)}{Kr(1+r)^n}. \quad (5.4)$$

Если $PI < 1$, то проект следует отклонить, если $PI \geq 1$, то проект принимается к рассмотрению.

3. *Внутренняя норма доходности* (Internal Rate of Return, или *IRR*).

Внутренней нормой доходности инвестиционного процесса называется процентная ставка, при которой чистый приведенный доход по проекту равен нулю. Этот показатель находится из алгебраического уравнения:

$$K = \frac{R_1}{(1+IRR)} + \ldots + \frac{R_n}{(1+IRR)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+IRR)^t}. \quad (5.5)$$

Противоречивость этого показателя заключается в том, что алгебраическое уравнение степени *n* может иметь *n* действительных положительных корней. В таком случае выбор нужной величины может быть затруднителен. Но если, величины $K, R_1, \ldots, R_n$ положительны, то уравнение (5.5) имеет только один положительный корень $x = 1 + IRR$. Если к тому же выполняется неравенство:

$$K < R_1 + \ldots + R_n, \quad (5.6)$$

то $IRR > 0$ ($x > 1$). Действительно, при $IRR = 0$ имеем $K = R_1 + \ldots + R_n$, при дальнейшем увеличении IRR правая часть (5.5) строго убывает. Ввиду (5.6), получается только один корень.

Однако часто проект не приносит положительных чистых доходов в течение всего срока, случаются и убытки, поэтому расчет этого показателя не очень удобен. С другой стороны, внутренняя норма доходности имеет и весьма существенное преимущество: для ее расчета не нужно знать ставку приведения, а лишь величины финансовых потоков по проекту. В частности, если $R_t = R = const$, для всех $t = \overline{1,n}$, то уравнение (5.5) принимает вид:

$$\frac{R}{K} = \frac{IRR(1+IRR)^n}{(1+IRR)^n - 1}.$$

Проект может быть принят к рассмотрению, только если $IRR \ge r_H$, где r_H – минимально привлекательная для инвестора ставка процента.

Пусть $n = 2$, $K > 0$, $R_1 \ge 0$, $R_2 > 0$. В таком случае уравнение (5.5) можно переписать в виде:

$$\frac{R_1}{(1+IRR)^1} + \frac{R_2}{(1+IRR)^2} - K = 0, \text{ или } \frac{K(1+IRR)^2 - R_1(1+IRR) - R_2}{(1+IRR)^2} = 0.$$

Отбрасывая положительный знаменатель и обозначая $x = 1 + IRR$, получаем квадратное уравнение:

$$Kx^2 - R_1 x - R_2 = 0. \tag{5.7}$$

Корни уравнения (5.8) легко отыскать по формуле:

$$\frac{R_1 \pm \sqrt{R_1^{\,2} + 4K R_2}}{2K}.$$

Поскольку $K > 0$, $R_1 \ge 0$, $R_2 > 0$, то $\sqrt{R_1^{\,2} + 4K R_2} > R_1$, следовательно, $\frac{R_1 - \sqrt{R_1^{\,2} + 4K R_2}}{2K} < 0$, поэтому может подойти лишь корень

$$x = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^{\,2} + 4K R_2}}{2K}.$$

Потребуем, чтобы $\frac{R_1 + \sqrt{R_1^{\,2} + 4K R_2}}{2K} > 1$. Преобразуем последнее неравенство к виду:

$$\frac{\sqrt{R_1^{\,2} + 4K R_2}}{2K} > \frac{2K - R_1}{2K}.$$

Обе части этого неравенства, также как и знаменатель, положительны. Отбросим знаменатель и возведём в квадрат:

${R_1}^2 + 4K R_2 > 4K^2 - 4K R_1 + {R_1}^2$, или $4K(R_1 + R_2) > 4K^2$, откуда получаем необходимое условие эффективности инвестиционного проекта $R_1 + R_2 > K$.

Итак, при $n = 2$, $K > 0$, $R_1 \ge 0$, $R_2 > 0$, $R_1 + R_2 > K$, внутренняя норма доходности инвестиционного проекта вычисляется следующим образом:

$$IRR = \frac{R_1 + \sqrt{{R_1}^2 + 4K R_2}}{2K} - 1. \qquad (5.8)$$

4. *Дисконтный срок окупаемости* (Payback Period) – это минимальный срок, при котором сумма приведенных к начальному моменту чистых доходов становится не ниже суммы приведенных капитальных вложений. В зависимости от поставленной цели, дисконтный срок окупаемости можно вычислять с различной точностью.

Пример 5.1. Найти дисконтный срок окупаемости в целых годах для следующего инвестиционного проекта, если ставка приведения 20% в год:

t	0	1	2	3
$-K$	–100			
R_t		50	100	100

Решение. В случае $n = 1$, $NPV = \dfrac{50}{1{,}2} - 100 = -58$. При $n = 2$, $NPV = -58 + \dfrac{100}{1{,}2^2} = +11$. Следовательно, через 2 года проект окупится.

Пример 5.2. Проект, требующий инвестиционных затрат в размере $160\,000$ дол., предполагает получение годового дохода в размере $30\,000$ дол. на протяжении 15 лет. Оценить целесообразность осуществления инвестиционного проекта, если ставка приведения 15%.

Решение. Данные для расчета: $K = 160\,000$ дол., $R = 30\,000$ дол., $n = 15$, $r = 0{,}15$. Чтобы оценить целесообразность инвестиций, достаточно подсчитать один из показателей: *NPV* или *PI*. Мы подсчитаем оба.

$$NPV = \left(-160\,000 + 30\,000\frac{1{,}15^{15} - 1}{0{,}15 \cdot 1{,}15^{15}}\right) = 15\,421 \text{ дол.}$$

$$PI = \frac{NPV + 160\,000}{160\,000} = 1{,}096 \quad [109{,}6\%].$$

Вывод: поскольку $NPV > 0$ $[PI > 1]$, то инвестиции целесообразны.

Пример 5.3. Для каждого из проектов (A, B, C) рассчитайте чистый приведенный доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности, если ставка приведения 20%. Сделайте вывод о целесообразности капиталовложения:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	– 370	–	–	–	–	1000			
B	– 100	50	80						
C	– 50	–	–	–	60	–	–	–	100

Решение.

A. Имеем $K = 370$, $R_5 = 1000$, $n = 5$, $r = 0{,}2$. Применяем формулы (5.1), (5.3). Находим:

$$NPV = -370 + \frac{1000}{1{,}2^5} = 32; \quad PI = \frac{32 + 370}{370} = 1{,}09.$$

Поскольку $NPV > 0$ ($PI > 1$), то инвестиции в случае ***A*** целесообразны. Для нахождения внутренней нормы доходности составляем уравнение (5.5), полагая $K = 370$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 0$, $R_5 = 1\,000$:

$$370 = \frac{1\,000}{(1 + IRR)^5},$$

откуда находим внутреннюю норму доходности $IRR = 0{,}22$ [22%]. Заметим, что $IRR > r$.

B. Имеем $K = 100$, $R_1 = 50$, $R_2 = 80$, $n = 2$.

$$NPV = -100 + \frac{50}{1{,}2} + \frac{80}{1{,}2^2} = -2{,}8 < 0; \; PI = 0{,}972 < 1.$$

Капиталовложения нецелесообразны. Убедимся, что $IRR < 0{,}2$. По формуле (5.8) получаем $IRR \approx 0{,}1787$ [17,87%].

C. Имеем $K = 50$, $R_4 = 60$, $R_8 = 100$, $n = 8$.

$$NPV = -50 + \frac{60}{1{,}2^4} + \frac{100}{1{,}2^8} = 2 > 0; \; PI = 1{,}04 > 1.$$

Проект принимается к рассмотрению. Для нахождения IRR преобразуем уравнение (5.5):

$$50 = \frac{60}{(1 + IRR)^4} + \frac{100}{(1 + IRR)^8},$$

к квадратному уравнению:

$$50x^2 - 60x - 100 = 0,$$

обозначив через $x = (1 + IRR)^4$.

Это уравнение имеет только один положительный корень $x \approx 2{,}13623$, следовательно, $IRR \approx 0{,}209$ [20,9%].

Если инвестиционный процесс бесконечен: $R_t = R$, $t = 1, 2, \ldots$, то для подсчета NPV используются формулы

$$NPV = -K + \frac{R}{r}, \; PI = \frac{R}{K \cdot r}, \; IRR = \frac{R}{K}. \tag{5.9}$$

Пример 5.4. На строительство магазина нужно затратить сразу 10 000 дол., а затем он неограниченно долго будет давать доход 2 000 дол. в год. Ставка приведения 8%. Определить оценочные характеристики данного проекта (NPV, PI, IRR).

Решение. В нашем случае $K = 10\,000$ дол., $R = 2000$ дол., $r = 0{,}08$. Применяя формулы (5.9), находим:

$$NPV = \left(-10\,000 + \frac{2000}{0{,}08}\right) = 15\,000 \text{ дол.}; \; PI = 2{,}5 \; [250\%],$$

$$IRR = \frac{2000}{10000} = 0{,}2\,[20\%].$$

Можно сделать вывод, что инвестиции целесообразны, поскольку $NPV > 0$, $PI > 1$.

При сравнении различных возможностей инвестирования будем ориентироваться на индекс доходности PI (или NPV), поскольку внутренняя норма доходности часто определяется неоднозначно и не может служить надежным критерием.

Таким образом, чем выше индекс доходности (или чистый приведенный доход), тем, при прочих равных условиях, проект привлекательнее для инвестирования.

Пример 5.5. Какой из альтернативных проектов капиталовложений ***A*** или ***B*** предпочтительнее, если ставка приведения 8% годовых:

t	0	1	2	3	4
A	– 300	110	140	120	
B	– 300	100	100	100	100

Решение. Используя формулы (5.3) и (5.4), считаем в обоих случаях индекс доходности:

$$PI_A = \frac{1}{300} \cdot \left(\frac{110}{1{,}08} + \frac{140}{1{,}08^2} + \frac{120}{1{,}08^3}\right) = 1{,}057,$$

$$PI_B = \frac{100}{300} \cdot \frac{1{,}08^4 - 1}{0{,}08 \cdot 1{,}08^4} = 1{,}10,$$

Поскольку $PI_A < PI_B$, то выбираем проект *B*.

6. ФИНАНСОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ С УЧЁТОМ РИСКА

6.1. Риски по облигациям

Кроме таких показателей риска, как среднеквадратическое отклонение доходности, дисперсия и коэффициент вариации, по инструментам с фиксированным сроком рассчитывают показатель, характеризующий «медленность» возврата денег. Рассмотрим его.

Понятие «дюрация» (англ. duration – длительность) впервые было введено американским ученым Фредериком Маколи (F. Macaulay) в 1938 г. Этот показатель играет важную роль при анализе долгосрочных ценных бумаг с фиксированным доходом. Дюрация применяется в качестве одного из косвенных подходов к количественной оценке риска долговых инструментов. В целях упрощения предположим, что купонный платеж осуществляется 1 раз в год. Обозначим $d_{куп,t}$ – величина платежа по купону за t-й период, руб., n – число лет (срок) погашения, r – процентная ставка, равная доходности к погашению или рыночной процентной ставке, $v = (1+r)^{-1}$ - дисконтирующий множитель при данной процентной ставке, $P_{ВН}$ – текущая (внутренняя) стоимость потока доходов и поступлений по облигации:

$$P_{вн} = \sum_{t=1}^{n} d_{куп,t} v^t + P_H v^n,$$

P_H – номинальная цена облигации, S_t – доход по облигации в конце года t:

$$S_t = d_{куп,t}, \quad t = 1, ..., n-1; \quad S_n = d_{куп,n} + P_H.$$

Тогда дюрацию Маколи (D_M) с учетом процентной ставки r определяют следующим образом:

$$D_M = \frac{\sum_{t=1}^{n} t d_{куп,t} v^t}{P_{вн}} + \frac{n P_H v^n}{P_{вн}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t d_{куп,t} v^t}{\sum_{t=1}^{n} d_{куп,t} v^t + P_H v^n} + \frac{n P_H v^n}{\sum_{t=1}^{n} d_{куп,t} v^t + P_H v^n},$$

или

$$D_M = \frac{\sum_{t=1}^{n} t S_t v^t}{\sum_{t=1}^{n} S_t v^t} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t S_t v^t}{P_{вн}}.$$

При расчете дюрации часто используют условие равенства текущей рыночной цены облигации (P) и её внутренней стоимости, т.е. в качестве процентной ставки рассматривают внутреннюю норму доходности по облигации. Тогда формула дюрации примет вид:

$$D_M = \frac{\sum_{t=1}^{n} t S_t v^t}{P}.$$

Пример 6.1. Облигация номиналом 1 000 руб. и ставкой купонного дохода 7%, выплачиваемого 1 раз в год, имеет срок обращения 3 года. Определим дюрацию данного обязательства, принимая рыночную процентную ставку (доходность к погашению), равной 10%. Для расчета составим таблицу:

t	$d_{куп\ t}$, руб.	P_H	S_t	$\nu = (1+r)^{-1}$	ν^t	$S_t\ \nu^t$	$t\ S_t\ \nu^t$
1	70		70	0,90909	0,90909	63,6364	63,6364
2	70		70	0,90909	0,82645	57,8512	115,702
3	70	1000	1070	0,90909	0,75131	803,907	2411,72
						925,394	2591,06

Дюрация = 2591,06/925,394 = 2,79995.

Для расчёта дюрации в MSExcel используется функция ДЛИТ().

6.2. Модель оценивания финансовых активов

Модель Capital Asset Pricing Model (CAPM) была предложена Уильямом Шарпом в 1964 году. Эту модель иногда называют SLM-моделью (Sharpe, Lintner, Mossin), поскольку считается, что она была независимо от Шарпа получена Джоном Линтнером (1965 г.) и Яном Моссином (1966 г.).

Рассматривается абстрактный рыночный инвестиционный портфель, включающий все котируемые на рынке ценные бумаги, причем пропорция вложения в конкретную бумагу равна ее доле в общей капитализации рынка. Модель CAPM является однофакторной регрессионной моделью, в которой в качестве единственного универсального фактора выбрана доходность рыночного портфеля.

Мерой риска служит коэффициент «бета» (β), определяющий соотношение доходности рассматриваемого актива или портфеля с уровнем доходности рыночного инвестиционного портфеля. Предполагается также, что по всем ценным бумагам имеются исторические данные о доходностях, на основании которых могут быть получены оценки математических ожиданий и дисперсий.

Формальная запись итогового уравнения данной модели выглядит следующим образом:

$$m_i = \alpha_i + \beta_i m_r + \varepsilon_i,$$

где $m_i = E(R_i)$ – ожидаемый доход (математическое ожидание случайной величины доходности R_i на конкретную, *i*-ю, ценную бумагу) при условии равновесия рынка; β_i– «бета-коэффициент» *i*-ой ценной бумаги – мера рыночного риска акции (измеряет степень изменчивости доходности ценной бумаги рассматриваемого вида по отношению к доходности среднерыночного портфеля); $m_r = E(R_r)$ – средняя рыночная доходность.

С точки зрения предельного анализа, коэффициент β_i равен производной $m_i = m_i(m_r)$ по m_r. Он приближенно показывает, насколько изменится ожидаемая доходность *i*-й ценной бумаги при изменении рыночной доходности на единицу, и является коэффициентом наклона характеристической линии акции, представляющей собой графическое изображение уравнения регрессии, построенного по статистическим данным о доходности *i*-й акции и среднерыночной доходности.

Оценка параметров регрессионной модели осуществляется с помощью метода наименьших квадратов:

$$\hat{\beta}_i = \frac{\operatorname{cov}(R_i, R_r)}{\sigma_r^2}; \alpha_i = \overline{m}_i - \hat{\beta}_i \overline{m}_r,$$

где $\operatorname{cov}(R_i, R_r)$ – ковариация между доходностью акции *i*-й бумаги и доходностью рыночного портфеля; ${\sigma_r}^2$ – дисперсия доходности рыночного портфеля; β – коэффициент для рынка в целом всегда равен единице.

Для получения оценок уравнения регрессии можно воспользоваться прикладными программами («Регрессия» пакета анализа MSExcel, инструментарием программы Gretl, статистическими функциями любых электронных таблиц).

Пример. Определить коэффициенты – бета и дополнительные статистические параметры, характеризующие надежность уравнения регрессии в целом, и стандартные ошибки коэффициентов регрессии двух акций (А и В).

Данные о динамике ежемесячных показателей текущей доходности этих акций и доходности некоторого базового портфеля акций (рыночной доходности) приведены в таблице:

Ежемесячные характеристики доходностей акций

Месяцы	Доходность акций		
	А	В	Рыночная
1	2	2,8	2,5
2	0,8	1,8	1
3	2,3	3,2	3
4	3,5	4,5	4,1
5	3,2	4,2	3,7
6	4,2	2,5	4
Итого	16	19	18,3
Средняя доходность	2,67	3,17	3,05

Решение. На основе приведенных в таблице данных с помощью функций MSExcel (ОТРЕЗОК, НАКЛОН) строим уравнения регрессий для акций А и В соответственно (в качестве независимой переменной выбираем рыночную доходность):

$$\hat{m}_A = -0{,}36 + 0{,}99 m_r, \ \hat{m}_B = 1{,}21 + 0{,}64 m_r.$$

Для вычисления коэффициента детерминации нужно возвести в квадрат коэффициент корреляции Пирсона, полученный применением формулы КОРРЕЛ, или же воспользоваться функцией КВПИРСОН, для расчета волатильности можно взять корень квадратный из числа, полученного с помощью функции ДИСП – дисперсии, или воспользоваться функцией СТАНДОТКЛОН.

Для вычисления ошибок коэффициентов пользуемся формулами:

Стандартное отклонение коэффициента отрезка $(\alpha)^2 =$
= (Сумма квадратов значений зависимой переменной ×
× Квадрат стандартной ошибки регрессии) /
/ (Число наблюдений× Сумма квадратов отклонений от среднего);

(Стандартное отклонение коэффициента наклона $(\beta))^2 =$
= (Квадрат стандартной ошибки регрессии) /
/ (Число наблюдений × Сумма квадратов отклонений от среднего);

Функции СТОШYX, СУММКВ, КВАДРОТКЛ – стандартные статистические функции MSExcel.

Полученные результаты представим в таблице:

РЕГРЕССИОННАЯ СТАТИСТИКА:			
Показатель	**А относительно рынка**	**В относительно рынка**	
ОТРЕЗОК(α)	-0,363542418	1,21396299	
НАКЛОН (β)	0,993511175	0,640230714	
Уравнение регрессии	$\hat{m}_A = -0{,}36 + 0{,}99 m_r$	$\hat{m}_B = 1{,}21 + 0{,}64 m_r$	
Коэффициент корреляции	0,962223248	0,732816292	
Коэффициент детерминации	0,925873579	0,537019717	
Волатильность ($\sqrt{\sigma^2}$)	1,216004386	1,028915286	1,177709642
Станд.ош.регр.(СТОШYX)	0,37014907	0,782737019	
Квадрат ошибки	0,137010334	0,612677241	
Сумма квадратов значений зависимой переменной-рыночной дох.			62,75
Сумма кв.отклонений от ср.значений зависимой переменной			6,935
Квадрат ошибки коэф. α	0,206618564	0,923948495	
Ошибка коэффициента α	0,454553148	0,961222396	
Квадрат ошибки коэф. β	0,019756357	0,088345673	
Ошибка коэффициента β	0,140557308	0,29723	

6.3. Задача минимизации риска инвестиционного портфеля

Рассмотрим математическую формализацию задачи формирования оптимального портфеля, которую предложил американский экономист Г. Марковиц (H. Markovitz) в 1952 году.

Пусть в портфель планируется включить n видов активов. Обозначим доли активов в портфеле через $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$. Ясно, что $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$. Кроме того, считаем $\theta_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}$.

Пусть R_i – случайная величина, характеризующая доходность i-го актива при условии, что все средства вложены только в него. Математическое ожидание доходности i-го актива обозначим m_i

($m_i = E(R_i)$). Доходность портфеля – это случайная величина $R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i \theta_i$ с математическим ожиданием $m_p = \sum_{i=1}^{n} m_i \theta_i$ и дисперсией $D(R_p) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \theta_i \theta_j$. Мерой риска может служить корень квадратный из дисперсии.

Минимизируем квадрат риска (дисперсию портфеля):

$$F(\theta) := D(R_p) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \theta_i \theta_j,$$

где $b_{ij} = \operatorname{cov}(R_i, R_j)$.

Если в портфель включены статистически независимые друг от друга активы, то ковариационная матрица $B = \left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$ является диагональной, по диагонали стоят выборочные дисперсии активов.

Предположим, что требуемый уровень доходности портфеля задан и составляет m_p.

В результате получаем оптимизационную задачу:

$$F(\theta) := \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \theta_i \theta_j \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1, \ \sum_{i=1}^{n} m_i \theta_i = m_p, \ \ \theta_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,n},$$

для решения которой можно применить один из известных методов, например, метод множителей Лагранжа, графический метод или метод исключения переменных, а также можно воспользоваться одной из стандартных математических программ или электронных таблиц, включающих инструментарий численных методов решения задач квадратичного программирования.

Двойственной к задаче Марковица минимального риска является задача максимальной эффективности (F^* – минимальное значение целевой функции задачи):

$$Ef(\theta) := \sum_{i=1}^{n} m_i \theta_i \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1, \ \ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \theta_i \theta_j = F^*, \ \ \theta_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,n}.$$

7. РИСКИ И ПОРТФЕЛЬ РИСКОВЫХ ЦЕННЫХ БУМАГ

7.1. Риск и его измерение

В финансовом анализе мы неизбежно сталкиваемся с неопределенностью, неоднозначностью показателей затрат и отдачи. В связи с этим возникает проблема измерения риска и его влияния на результаты инвестиций.

Термин «риск» понимается неоднозначно. Его содержание определяется той конкретной задачей, где этот термин используется. Существуют понятия кредитного, валютного, страхового, инвестиционного, политического, технологического риска, риска ликвидности активов и т. д.

Первое в экономике научное определение риска дал Ф. Найт (1921), который предложил различать риск и неопределенность. Риск имеет место тогда, когда некоторое действие может привести к нескольким взаимоисключающим исходам с известным распределением их вероятностей. Если же распределение неизвестно, то ситуация рассматривается как неопределенность.

В экономической практике часто не делают различий между риском и неопределенностью и под риском понимают некоторую возможную потерю, вызванную наступлением случайных неблагоприятных событий.

В инвестиционном анализе и страховом деле риск часто измеряется с помощью дисперсии и среднего квадратичного отклонения случайной величины показателя эффективности принимаемого решения. Действительно, чем меньше разброс (дисперсия) результата решения, тем более он предсказуем, т. е. риск меньше.

Рассмотрим в качестве иллюстрации выбор некоторым лицом одного из двух вариантов инвестиций в условиях риска. Пусть имеются два проекта A и B, в которые указанное лицо может вложить средства. Проект A в определенный момент в будущем обеспечивает случайную величину прибыли R_A. Предположим, что её среднее ожидаемое значение (математическое ожидание) равно

$$m_A = E(R_A),$$

с дисперсией

$$V_A = E((R_A - m_A)^2).$$

Для проекта B числовые характеристики прибыли R_B как случайной величины соответственно

$$m_B = E(R_B),\ V_B = E((R_B - m_B)^2).$$

Средние квадратичные отклонения случайных величин R_A и R_B равны соответственно

$$\delta_A = \sqrt{V_A},\ \delta_B = \sqrt{V_B}.$$

Если оказалось, что выполняется один из случаев

1) $m_A = m_B$, $\delta_A > \delta_B$,

2) $m_A < m_B$, $\delta_A \ge \delta_B$,

то следует выбрать проект *B*.

Пример 7.1. Пусть имеются два инвестиционных проекта *A* и *B*. Проект *A* с вероятностью 0.6 обеспечивает прибыль 15 млн руб., однако с вероятностью 0.4 можно потерять 5.5 млн руб. Для проекта *B* с вероятностью 0.8 можно получить прибыль 10 млн руб. и с вероятностью 0.2 потерять 6 млн. руб. Какой проект выбрать?

Решение. Оба проекта имеют одинаковую среднюю прибыльность, равную

$$m_A = 0.6 \cdot 15 + 0.4(-5.5) = 6.8 \text{ млн руб.},$$

$$m_B = 0.8 \cdot 10 + 0.2(-6) = 6.8 \text{ млн руб.}$$

Однако среднее квадратичное отклонение для проекта *A*

$$\delta_A = \left[0.6(15-6.8)^2 + 0.4(-5.5-6.8)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 10.04 \text{ млн руб.},$$

а для проекта *B*

$$\delta_B = \left[0.8(10-6.8)^2 + 0.2(-6-6.8)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 6.4 \text{ млн руб.}$$

Поэтому более предпочтителен второй проект.

Если же $m_A < m_B$ и $\delta_A < \delta_B$ или $m_A > m_B$ и $\delta_A > \delta_B$, то решение о выборе проекта зависит от отношения к риску лица, принимающего решение. В последнем случае проект *A* обеспечивает более высокую среднюю прибыль, однако он более рискован. В предыдущем случае для проекта *A* риск меньше, но и ожидаемая прибыль меньше. Субъективное отношение к риску учитывается с помощью функции полезности Неймана — Моргенштерна в п. 6.6.

В некоторых областях деятельности риск понимается как вероятность наступления неблагоприятного события. Чем выше эта вероятность, тем больше риск. Такое понимание риска оправдано в тех случаях, когда событие может наступить или не наступить (банкротство, крушение и т. д.).

7.2. Снижение рисков

Естественной реакцией на наличие рисков в финансовой деятельности человека является стремление компенсировать их с помощью так называемых рисковых премий, которые представляют собой различного рода надбавки (к цене, уровню процентной ставки, тарифу и т.д.), выступающие в виде «платы за риск».

Второй путь снижения риска заключается в управлении риском.

Последнее осуществляется на основе различных приемов хеджирования, например, с помощью заключения форвардных контрактов, покупки валютных или процентных опционов, страхования.

Одним из приемов сокращения риска, применяемым в инвестиционных решениях, является диверсификация. Под ней понимается распределение общей инвестиционной суммы между несколькими объектами. Диверсификация — общепринятое средство сокращения любого вида риска. Остановимся подробнее на этом приеме, рассматривая ситуацию с портфелем рисковых ценных бумаг.

Итак, инвестор может вложить свои деньги не в один вид ценных бумаг, а в несколько видов, сформировав портфель ценных бумаг. Произведем соответствующий анализ. Пусть x_j — доля общего вложения, приходящаяся на *j*-й вид ценных бумаг, $j = \overline{1,n}$. Так что

$$x_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$

Эффективность портфеля R_p, очевидно, равна

$$R_p = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j,$$

если эффективность *j*-го вида бумаг будет равна R_j. Все R_j, $j = \overline{1,n}$ и R_p являются случайными величинами. Согласно правилам теории вероятностей ожидаемый эффект от портфеля (математическое ожидание прибыли от портфеля) равен

$$m_p = E(R_p) = \sum_{j=1}^{n} x_j E(R_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j, \quad (7.1)$$

где m_j — ожидаемый эффект от *j*-го вида бумаг, если бы в них были вложены все деньги инвестора.

Отклонение эффективности портфеля от ожидаемого значения есть случайная величина, и она равна

$$R_p - m_p = \sum_{j=1}^{n} x_j (R_j - m_j).$$

Математическое ожидание квадрата этого отклонения есть дисперсия эффекта портфеля:

$$\begin{aligned} V_p = E\left((R_p - m_p)^2\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j E\left((R_i - m_i)(R_j - m_j)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где величины

$$V_{ij} = E\big((R_i - m_i)(R_j - m_j)\big)$$

являются ковариациями соответствующих случайных величин.
Очевидно, что

$$V_{jj} = E\big((R_j - m_j)^2\big) = \delta_j^2,$$

т.е. V_{jj} являются дисперсиями случайных величин R_j.

1. Предположим сначала, что случайные эффекты от различных видов ценных бумаг, включенных в портфель, взаимно независимы (некоррелированы), т.е. $V_{ij} = 0,\ i \neq j$. Тогда

$$V_p = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \delta_j^2,$$

а среднеквадратичное отклонение δ_p равно

$$\delta_p = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \delta_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Эта величина характеризует риск, связанный с вложением в портфель ценных бумаг. Её часто называют — «риском портфеля».

Допустим, что инвестор вложил свои деньги равными долями во все ценные бумаги. Тогда $x_j = \dfrac{1}{n}$ и инвестор получит средний ожидаемый эффект

$$m_p = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} m_j,$$

причем риск портфеля равен

$$\delta_p = \left(\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \delta_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $\overline{\delta} = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \delta_j$. Тогда

$$\delta_p \le \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\delta}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \overline{\delta}.$$

Вывод: при росте числа видов ценных бумаг, включенных в портфель, риск портфеля ограничен и стремится к нулю при $n \to \infty$. В теории финансового риска этот результат известен как эффект диверсификации портфеля.

Пример 7.2. Ожидаемые значения эффективностей и их среднеквадратичные отклонения (СКО) приведены в таблице:

j	1	2	3	4	5	6
m_j	11	10	9	8	7	6
δ_j	4	3	1	0.8	0.7	0.7

Если инвестор вложит свой капитал поровну в ценные бумаги только первых двух видов, то ожидаемая эффективность портфеля

$$m_p = \frac{1}{2}(10 + 11) = 10.5,$$

но зато СКО портфеля окажется меньшим, чем у наименее рискового из них

$$\delta_p = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 3^2} = 2.5.$$

В следующей таблице показаны ожидаемые эффективности и СКО портфелей, составленных поровну из первых двух, трех и т. д. ценных бумаг, с m_j и δ_j из первой таблицы:

n	2	3	4	5	6
m_p	10.5	10	9.5	9	8.5
δ_p	2.5	1.7	1.23	1.04	0.87

Диверсификация позволила еще снизить риск почти втрое при потере ожидаемой эффективности всего на 20%.

2. Влияние корреляции. В экономике все взаимосвязано: например, при снижении деятельности автомобилестроительных фирм уменьшаются закупки металла у металлургов, которые в свою очередь сокращают закупки сырья и энергии и т. д. Как же отражается корреляция эффективностей различного вида ценных бумаг на характеристики всего портфеля?

Очевидно она не влияет на ожидаемую эффективность портфеля m_p, однако напомним, формула дисперсии портфеля имеет вид

$$V_p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij}.$$

Введём в рассмотрение величины

$$\rho_{ij} = \frac{1}{\delta_i \delta_j} V_{ij},$$

которые называются коэффициентами корреляции. Тогда

$$V_p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\delta_i x_i)(\delta_j x_j)\rho_{ij}.$$

Чтобы понять влияние корреляции, рассмотрим простейшие случаи.

Пусть все $\rho_{ij} = 1$, это так называемый случай прямой корреляции. Тогда

$$V_p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\delta_i x_i)(\delta_j x_j) = \left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_j x_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i\right)^2.$$

Попробуем произвести простую диверсификацию, вложив деньги в равных долях, т.е. $x_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1,n}$.

Тогда

$$V_p = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right)^2, \quad \delta_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i .$$

Если

$$\overline{\delta} = \max_{i=\overline{1,n}}\delta_i, \quad \underline{\delta} = \min_{i=\overline{1,n}}\delta_i,$$

то при любом n

$$\underline{\delta} \le \delta_p \le \overline{\delta}.$$

То есть при полной корреляции диверсификация не дает положительного эффекта: риск портфеля оказывается просто равен среднему риску от отдельных вложений и не уменьшается с увеличением числа видов ценных бумаг до 0 при $n \to \infty$.

Например, цены акций электроэнергетической и нефтяных компаний изменяются пропорционально. Цены на нефть меняются непрогнозируемо, но при этом эффективности обоих видов акций меняются в одну и ту же сторону. Диверсификация путем покупки того и другого вида акций бесполезна: эффективность портфеля окажется столь же случайной, сколь случайна цена нефти.

Теперь рассмотрим ситуацию полной обратной корреляции, когда $\rho_{ij} = -1$, $i \ne j$.

Для понимания сути дела достаточно проанализировать портфель, состоящий всего из двух типов бумаг, $n = 2$. Тогда

$$V_p = \delta_1^2 x_1^2 + \delta_2^2 x_2^2 - 2\delta_1 x_1 \delta_2 x_2 = (\delta_1 x_1 - \delta_2 x_2)^2.$$

Если

$$x_2 = \frac{\delta_1}{\delta_2}x_1, \text{ то } V_p = 0.$$

Пример 7.3. Пусть эффективности двух ценных бумаг, имеющих одинаковую стоимость, находятся в полной обратной корреляции. СКО эффективности первой из них равно 2, а СКО второй равно 3. Тогда безрисковым окажется портфель, в котором на каждые три ценные бумаги первого вида приходится две второго вида.

Мы можем сделать интересный вывод: при полной обратной корреляции возможно такое распределение вложений, при котором риск полностью отсутствует.

7.3. Модель задачи оптимизации рискового портфеля

Любой вид ценных бумаг мы характеризуем ожидаемой эффективностью и риском, под которым договорились понимать СКО эффективности от ожидаемой.

Эти же величины, по приведенным в п. 6.2 формулам, можно вычислить для любого портфеля ценных бумаг, если известны ковариации между эффективностями.

Естественно, что ожидаемая эффективность и риск портфеля будут зависеть от его структуры, т.е. доли исходного капитала, вложенной в каждый вид ценных бумаг.

Инвестор всегда сталкивается с дилеммой: желанием иметь наибольшую эффективность портфеля и желанием обеспечить вложение с наименьшим риском. Поскольку «нельзя поймать двух зайцев сразу», необходимо сделать определенный выбор, который зависит от характера самого инвестора и его склонности к риску.

Предположим, что инвестор ориентируется на выбор структуры портфеля, которая обеспечивала бы заданное значение m_p ожидаемой эффективности портфеля и при этом риск портфеля был бы минимально возможным.

Математическая формализация этой задачи была впервые предложена в 1951г. Г. Марковицем, лауреатом Нобелевской премии по экономике.

Пусть, как и ранее, x_j — доля капитала, вложенного в ценные бумаги j-го вида, $j=\overline{1,n}$. Тогда вложение всего капитала в бумаги означает выполнение равенства $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 1$. Если m_j — ожидаемая эффективность бумаги j-го вида, то ожидаемая эффективность портфеля составляет, в соответствии с (7.1), $m_p = \sum\limits_{j=1}^{n} m_j x_j$. СКО ожидаемой эффективности портфеля $\delta_p = \sqrt{V_p}$, где дисперсия V_p, при заданной матрице ковариаций $V = (V_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ вычисляется по формуле (7.2).

Тогда задача сводится к отысканию вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, минимизирующего функцию

$$V_p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j \to \min, \quad (7.3)$$

при условии, что он удовлетворяет равенствам

$$\sum_{j=1}^{n} m_j x_j = m_p, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1. \quad (7.4)$$

Решение этой задачи обозначим $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^T$. Если $x_j^* > 0$, то это означает рекомендацию вложить долю x_j^* наличного капитала в ценные бумаги *j*-го вида. Если $x_j^* < 0$, то это означает рекомендацию взять в долг ценные бумаги этого вида в количестве x_j^* (чтобы продав их, использовать полученную сумму для закупки других видов ценных бумаг), т.е. участвовать в операции типа *short sale*. Если такое невозможно, то приходится вводить дополнительное требование $x_j \geq 0$.

Приведем решение задачи (7.3), (7.4) и сделаем соответствующие выводы.

Перепишем задачу (7.3), (7.4) в матричной форме

$$V_p = x^T V x \to \min, \text{ (7.5)}$$

$$m^T x = m_p, \quad I^T x = 1. \text{(7.6)}$$

Здесь V — матрица ковариаций, $m = (m_1, m_2, ..., m_n)^T$ — матрица-столбец ожидаемых эффективностей соответствующих ценных бумаг, I — матрица-столбец с элементами равными 1.

Введем функцию Лагранжа

$$L = x^T V x + \lambda_0 \left(I^T x - 1 \right) + \lambda_1 \left(m^T x - m_p \right).$$

По известной теореме Лагранжа о необходимом условии решения экстремальной задачи с ограничениями вида равенства, решение задачи должно удовлетворять соотношению

$$\frac{dL}{dx} = o_n.$$

Это эквивалентно уравнению

$$2Vx = -\lambda_0 I - \lambda_1 m,$$

откуда получаем (матрица V положительно определенная, а следовательно, не особая), что

$$x = -\frac{\lambda_0}{2} V^{-1} I - \frac{\lambda_1}{2} V^{-1} m. \text{(7.7)}$$

Подставляя (7.7) в (7.6), получаем уравнения для отыскания множителей λ_0 и λ_1:

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda_0}{2} I^T V^{-1} I - \frac{\lambda_1}{2} I^T V^{-1} m = 1, \\ -\frac{\lambda_0}{2} m^T V^{-1} I - \frac{\lambda_1}{2} m^T V^{-1} m = m_p. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Решив систему уравнений (7.8) и подставив найденные значения λ_0 и λ_1 в (7.7), находим явное представление для оптимальной структуры портфеля

$$x^* = V^{-1}\frac{m_p\left(IJ_{12} - mJ_1\right) + mJ_{12} - IJ_2}{J_{12}{}^2 - J_1 J_2}, (7.9)$$

где

$$J_1 = I^T V^{-1} I,\ J_2 = m^T V^{-1} m,\ J_{12} = I^T V^{-1} m.$$

Проанализируем решение.

1. Решение x^*, как это видно из (7.9), зависит от m_p линейно. Следовательно, $V_p^* = x^{*T} V x^*$ является выпуклой функцией по задаваемому значению m_p. Это же верно и для $\delta_p^* = \sqrt{V_p^*}$.

2. С увеличением ожидаемой эффективности m_p некоторые вклады x_j^* линейно растут (это относится к более эффективным, но и более рисковым бумагам), некоторые уменьшаются (менее эффективные и менее рисковые бумаги).

3. Риск оптимального портфеля возрастает с ростом требуемой ожидаемой эффективности m_p. При наличии капитала, взятого в долг, можно сформировать портфель с любой ожидаемой эффективностью, но при этом и риск будет неограниченно расти.

4. В силу положительной определённости матрицы ковариаций, целевая функция задачи $V_p = x^T V x$ является строго выпуклой. Поэтому для заданного m_p оптимальный портфель определяется единственным образом.

7.4. Портфель с безрисковой компонентой

Через несколько лет после публикации статьи Г. Марковица об оптимальном портфеле другой крупнейший экономист Д. Тобин (также впоследствии лауреат Нобелевской премии) заметил, что решение задачи приобретает новые особенности, если учесть простой факт: кроме рисковых ценных бумаг на рынке имеются и безрисковые (типа государственных обязательств с фиксированным доходом). Поэтому на практике часто ставится задача о правильном распределении капитала между рисковыми и безрисковыми вложениями.

Рассмотрим соответствующую задачу об оптимальном портфеле при наличии безрисковой ценной бумаги.

Пусть x_0 — доля вложения в безрисковые бумаги, эффективность которых равна r_0. Как и в п. 7.3, обозначим через x_j — доли вложения в рисковые бумаги, $j = \overline{1,n}$ и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, а $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)^T$ — вектор соответствующих эффективностей бумаг. Эффективность такого портфеля равна $m_p = x_0 r_0 + m^T x$, а дисперсия эффективности определяется только рискованной частью вклада и равна $V_p = x^T V x$. Таким образом, приходим к задаче

$x^T V x \to \min$, (7.10)

$m^T x + r_0 x_0 = m_p, \quad I^T x + x_0 = 1$.(7.11)

В данном случае функция Лагранжа имеет вид

$$L = x^T V x + \lambda_0 (I^T x + x_0 - 1) + \lambda_1 (m^T x + r_0 x_0 - m_p).$$

Поэтому вектор *x* и известная доля безрискового вложения x_0 удовлетворяют условиям

$$\frac{dL}{dx} = o_n, \quad \frac{\partial L}{\partial x_0} = 0.$$

Это приводит к системе линейных уравнений

$$2Vx + \lambda_0 I + \lambda_1 m = 0, \quad \lambda_0 + \lambda_1 r_0 = 0,$$

откуда

$\lambda_0 = -\lambda_1 r_0, \quad x = V^{-1}(I r_0 - m)\dfrac{\lambda_1}{2}$.(7.12)

С другой стороны, исключая x_0 из ограничений (6.11), получаем

$$1 - I^T x = \frac{1}{r_0}(m_p - m^T x),$$

или

$$(m - r_0 I)^T x = m_p - r_0.$$

Подстановка сюда x из (7.12) даёт уравнение для λ_1, из которого этот множитель определяется в явном виде

$$\lambda_1 = -\frac{2(m_p - r_0)}{(m - r_0 I)^T V^{-1}(m - r_0 I)}.$$

Отсюда и из (7.12) получаем явное выражение решения

$x^* = \dfrac{V^{-1}(m - r_0 I)}{(m - r_0 I)^T V^{-1}(m - r_0 I)}(m_p - r_0)$.(7.13)

Соответствующая минимальная дисперсия эффективности портфеля равна

$$V_p^* = x^{*T} V x^* = (m_p - r_0)^2 \alpha^{-2},$$

где $\alpha^2 = (m - r_0 I)^T V^{-1}(m - r_0 I)$.

Поэтому СКО эффективности портфеля есть

$\delta_p^* = \alpha^{-1}(m_p - r_0)$,(7.14) откуда

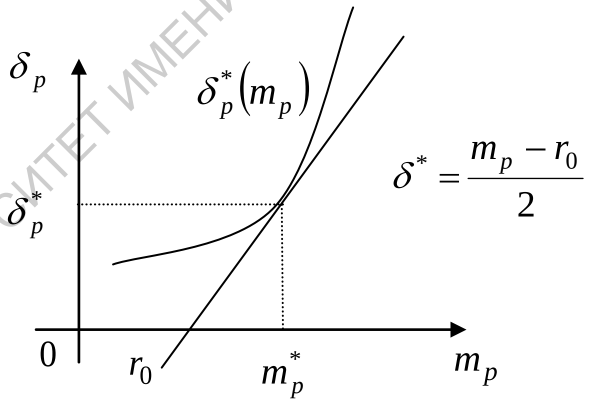
$$m_p = r_0 + \alpha\delta_p^*.(7.15)$$

Сделаем выводы.

1. Из (7.13) видно, что величина m_p входит только как скалярный множитель при x^*. Значит при изменении m_p пропорционально изменяются все доли рисковых вложений x_j^*, т.е. структура рисковых вложений не зависит от m_p.

2. Формула (7.15) говорит о линейной зависимости между ожидаемой эффективностью и риском портфеля.

3. Если при некотором заданном m_p в результате решения задачи (7.10)- (7.11) мы получили $x_0^* = 0$, то это означает, что оптимальный портфель состоит только из рисковых ценных бумаг. Следовательно, этот портфель является одновременно оптимальным среди портфелей только рисковых бумаг при данном m_p, т.е. вектор x^* из решения задачи является решением и соответствующий задачи Г. Марковица. Поэтому точка на прямой (7.15) должна лежать и на кривой $\delta_p^*(m_p)$, дающей зависимость СКО эффективности от задаваемой эффективности в задаче Г. Марковица. Более того, это — единственная общая точка этих прямой и кривой в силу единственности оптимального портфеля рисковых ценных бумаг. Поэтому прямая (7.15) должна касаться кривой $\delta_p^*(m_p)$ в этой точке.



7.5. Функция полезности Дж. фон Неймана – О. Моргенштерна

На практике каждый индивидуум осуществляет выбор между альтернативными решениями, связанными с риском, исходя из своего отношения к риску.

Рассмотрим пример.

У лица принимающего решение (ЛПР) есть две альтернативы:

1) получить 1000 долл.,

2) участвовать в лотерее, где возможен выигрыш 2010 долл. с вероятностью 0.5 и не получить ничего с вероятностью 0.5.

Очевидно, математическое ожидание выигрыша в лотерее составит 1005 долл.

Относительно такого среднего выигрыша указанные альтернативы практически эквивалентны и, если ЛПР не боится риска, то оно выберет вторую альтернативу. Однако подавляющее число людей к риску небезразлично, и выбор будет зависеть от их отношения к нему, которое, в частности может базироваться на их финансовом состоянии. Человек, имеющий скромный доход, предпочтет не рисковать и выберет первую альтернативу. Если же он обладает крупным капиталом, то предпочтёт рискнуть и выберет вторую. Рисковать также будут люди, патологически склонные к финансовым авантюрам.

Один из наиболее общих подходов к решению задач выбора альтернатив, связанных с риском, учитывающих индивидуальность ЛПР, предложили Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн.

Допустим, что при выборе альтернатив, предполагающих или не предполагающих риск,

1) ЛПР имеет стойкие предпочтения по альтернативам;
2) для каждой из альтернатив, не предполагающих риск, предпочтения могут быть выражены числовыми величинами, называемыми «полезностью альтернативы»;
3) цель ЛПР — выбрать альтернативу с наибольшей ожидаемой полезностью.

Пусть альтернативы обозначены как *A, B, C,* ... . Множество альтернатив, не предполагающих риск, обозначим через **A**, а множество альтернатив, предполагающих риск — **M**. Отношение предпочтения будем выражать с помощью знака $\succ$. Запись $A \succ B$ будет означать, что альтернатива *A* предпочтительнее альтернативы *B,* либо *A* и *B* безразличны.

Будем считать, что отношение предпочтения обладает следующими свойствами:

a) совершенность: ЛПР для любых двух альтернатив *A* и *B* может указать, которая ему более предпочтительна — $A \succ B$ или $B \succ A$, или же ему безразлично какую из них выбрать — $A \sim B$;

b) транзитивность: если $A \succ B$, а $B \succ C$, то $A \succ C$;

c) рефлексивность: любая альтернатива не предпочтительнее самой себя: $A \succ A$;

d) измеримость множества альтернатив относительно отношения предпочтения: для любых альтернатив *A, B* и С, если $A \succ B \succ C$, то найдется $\alpha \in [0,1]$ такое, что $\alpha A + (1-\alpha)C \sim B$.

Для количественной оценки предпочтения определим функцию $u(\cdot): \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ так, чтобы она сохраняла порядок, установленный на множестве альтернатив отношением предпочтения, т.е.
если $A \succ B$, то $u(A) \geq u(B)$,
и назовем ее полезностью альтернативы из **A**.

В наиболее часто встречающейся ситуации безрисковая альтернатива

$A \in \mathbf{A}$ трактуется как получение гарантированного дохода размером *A*. Функция $u(\cdot)$, в этом случае, называется функцией полезности дохода. Именно этот случай и будем иметь в виду для упрощения понимания.

Очевидно функция полезности обладает свойствами:

* она возрастает с ростом дохода;

* если $u(x)$ – функция полезности, то $v(x) = \alpha u(x) + \beta$, где $\alpha > 0$, также является функцией полезности. Таким образом, отношение предпочтения, выражаемое с помощью $v(x)$, также удовлетворяет свойствам *a*) — *d*), и оно эквивалентно тому, которое выражается с помощью функции $u(x)$.

Для альтернатив $X \in \mathbf{M}$, предполагающих риск, будем считать, что известно вероятное распределение возможных доходов. То есть, альтернатива *X* задается как

$$X = \begin{Bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ p_1, p_2, \ldots, p_n \end{Bmatrix}, \tag{7.16}$$

где x_i — доход, получаемый с вероятностью $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

С помощью введенной функции полезности дохода мы можем распространить отношение предпочтения и на множество альтернатив **M**, предполагающих риск. При этом количественной оценкой альтернативы $X \in \mathbf{M}$ назовем величину ожидаемой полезности

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i), \tag{7.17}$$

где $u(x_i)$ — полезность гарантированного дохода размером x_i. Поскольку альтернативу получения гарантированного дохода *A* мы можем формально представить в виде (7.16), где $x_i = A, \ i = \overline{i,n}$, то из (7.17) следует, что $V(A) = u(A)$. Таким образом, функция $V(\cdot)$ определена как на множестве рисковых альтернатив **M**, так и на множестве безрисковых альтернатив **A**. В соответствии с предположением 3) о поведении ЛПР, ставится задача оптимизации ожидаемой полезности альтернативы $V(X)$ на всем множестве альтернатив данного лица:

$$V(X) \to \max_{X \in \mathbf{A} \cup \mathbf{M}}. \tag{7.18}$$

Её решение, естественно, зависит от свойств функции полезности дохода $u(x)$.

Рассмотрим некоторые случаи поведения функции $u(x)$, характеризующие ЛПР.

Определение. Будем говорить, что функция $u(x)$ является выпуклой на отрезке $[a,b]$, если

$$u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2), \tag{7.19}$$

$$\forall \alpha \in [0,1]; \quad x_1,\, x_2 \in [a,b].$$

Если же в неравенстве (7.19) вместо знака $\le$ поставить знак $\ge$, то получим определение вогнутой функции.

Известно, что если $u(x)$ — выпуклая функция, то она удовлетворяет неравенству Иенсена:

$$u\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u(x_i),\ \forall\, i = \overline{1,m} \ \ \{x_i\} \subset [a,b],\ \alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1. \tag{6.20}$$

Для вогнутой функции знак $\le$ в (7.20) надо заменить на знак $\ge$.

Предположим, что функция полезности дохода $u(x)$ является выпуклой. Среднее ожидаемое значение дохода при выборе альтернативы X в соответствии с её заданием (7.16) есть величина $EX = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$. Полезность гарантированного дохода такой величины, с точки зрения ЛПР, есть $u(EX)$. С другой стороны, полезность альтернативы X оценивается, как $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$. В силу неравенства Иенсена (7.20) выполняется неравенство $V(EX) \le V(X)$. То есть выбор рисковой альтернативы X предпочтительнее получению гарантированного дохода равному среднему ожидаемому доходу от альтернативы X. Это говорит о склонности ЛПР к риску.

Если же функция $u(x)$ является вогнутой, то будет выполняться неравенство $V(EX) \ge V(X)$. Это говорит о том, что ЛПР предпочтет получить гарантированный доход равный EX, чем выбрать рисковую альтернативу X. То есть такое ЛПР не любит рисковать.

В случае линейности функции $u(x)$ будем получать равенства $V(EX) = V(X)$ для любой рисковой альтернативы, что свидетельствует о безразличии ЛПР к риску.

Для решения задачи (7.19) необходимо уметь считать значения функции $u(\cdot)$ для каждого конкретного дохода x.

Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн предложили следующую процедуру построения индивидуальной функции полезности, осуществляемую в два шага:

Шаг 1. Для наименьшего $x_{\min}$ и наибольшего $x_{\max}$ значения возможных доходов присваиваются произвольные значения функции полезности $u(x_{\min})$ и $u(x_{\max})$, причем $u(x_{\min}) < u(x_{\max})$.

Шаг 2. Для ЛПР предлагается выбор между двумя альтернативами. Первая альтернатива предполагает риск и устроена следующим образом: с вероятностью p ЛПР получает доход $x_{\min}$ и с вероятностью $(1-p)$ доход размером $u(x_{\max})$. Вторая альтернатива состоит в получении гарантированного дохода размером x. Будем менять p на отрезке $[0,1]$ до тех пор, пока обе альтернативы для ЛПР не станут безразличны. Пусть это стало возможным при $p(x) \in [0,1]$. Тогда присваиваем соответствующее значение функции полезности дохода равное

$$u(x) = p(x)u(x_{\min}) + (1 - p(x))u(x_{\max}).$$

ЗАДАЧИ ПО КУРСУ «Математические методы оптимальных финансовых решений»

А) Задачи, рекомендуемые для проведения практических занятий со студентами

1. Предприятие получило кредит на один год в размере 10 млн. руб. с условием вернуть 13 млн. руб. Рассчитайте процентную и учетную ставки.

2. На счете в банке 1,2 млн. руб. Банк платит 11,5 % годовых. Предлагается войти всем капиталом в совместное предприятие, при этом прогнозируется удвоение капитала через 5 лет. Принимать ли это предложение?

3. Если г-н X вложит сейчас некоторую сумму денег с условием непрерывного начисления сложных процентов с интенсивностью δ, он получит через 2 года 1 000 дол. Если он вложит половину этих денег на 4 года при той же интенсивности непрерывного начисления сложных процентов, то через 4 года получит 600 дол. Найдите исходную сумму вклада и интенсивность роста доходов δ.

4. Продавцом в уплату за товар, цена которого составляет 10 000 руб., выписано четыре векселя с погашением по полугодиям. Учётная ставка простых процентов d=10%. Определить процентные платежи и номинальные цены векселей с использованием банковской схемы.

5. Векселедержатель предъявил для учета вексель на сумму 5 млн. руб. со сроком погашения 21.01.2010 г. Вексель предъявлен 13.01.2010 г. Банк согласился учесть вексель с дисконтом в 50% годовых. Какую сумму получит векселедержатель? Рассмотрите банковское и математическое дисконтирование.

6. Предлагается внести (сегодня) 140 тыс. руб. для оснащения станции технического обслуживания автомобилей, а затем через 6 месяцев еще 90 тыс. руб. через 1 год планируется получить доходы 280 тыс. руб. Принимается ли это предложение, если ту же сумму (280 тыс. руб.) можно получить через 1 год, вложив в банк сегодня 220 тыс. руб.?

7. Вклад в сумме 2 млн руб. помещен на банковский депозит с ежемесячным начислением сложных процентов по ставке 1% в месяц. Требуется найти реальный ожидаемый доход вкладчика за год, если в печати опубликованы прогнозы трех организаций о месячном темпе инфляции, согласно которым в месяц h = 0,006; 0,01 и 0,008 соответственно. Вероятности этих прогнозов: 0,3; 0,5; 0,2, соответственно.

8. Вклад 100 000 руб. на 6 мес. (простые проценты), процентная ставка (*r*) 10% годовых, ставка налога на процентные доходы по вкладам составляет

35%, ставка рефинансирования: а) 10,75% б) 8,75%. Оценить накопленную сумму и сумму налога для а) и б).

9. Сбыт продукции будет увеличиваться в течение 2-х лет – каждый квартал на 25 млн. руб. Определить наращенную сумму к концу срока при условии, что поступление денег – постнумерандо. Накопительная ставка 10% годовых, начисление процентов ежеквартальное.

10. Долг в сумме 10 000 руб. необходимо погасить равными суммами в конце каждого года в течение 5 лет. В конце срока за использование денег нужно выплатить дополнительно 2 150 руб. Составить план амортизации займа, вычислить эффективную ставку.

11. Заем в сумме 300 тыс. руб. требуется погасить последовательными равными суммами в течение 6 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 20% годовых (схема погашения долга дифференцированными платежами). Составить план погашения.

12. Вы заняли на 4 года 10 000 дол. под 14% годовых. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашенный остаток (аннуитетная схема погашения). Составьте план погашения. Определить общую сумму процентов к выплате.

13. Сумма 12 000 выдана в долг на год на условиях расчетов по схеме потребительского кредитования под 16% годовых (основная сумма выплачивается в рассрочку равными платежами ежемесячно, а процентный годовой платеж начисляется сразу и также погашается ежемесячно). Рассмотреть схемы с ускоренным и замедленным списанием процентов по «методу 78-х»: а) вариант списания процентов в долях 1/78,2/78,…,12/78, соответственно, б) в долях 12/78,11/78,…,1/78. Рассчитать r_{ef}.

14. Для следующих задач условием является получение займа 15 тыс. дол. на 5 лет под 10 сложных процентов в год. Определить:

·размер ежегодного платежа по кредиту, если его возвращать равными суммами с учетом начисленных сложных процентов на непогашенный остаток,

·минимальный размер годового вклада на счет, если создать погасительный фонд со ставкой 8 % годовых по сложным процентам,

·минимальный размер ежемесячного вклада на счет, если создать погасительный фонд со ставкой 8 % годовых по сложным процентам, и начислять сложные проценты ежемесячно.

15. Найти дисконтный срок окупаемости в целых годах для следующего инвестиционного проекта, если ставка приведения 15%:

t	0	1	2	3	4
$-K$	– 200				
R_t		150	80	50	25

16. Проект, рассчитанный на 15 лет, требует инвестиций в размере 150000 дол. В первые 5 лет никаких поступлений не ожидается. Однако в последующие 10 лет чистый доход составит $50\,000$ дол. в год. Следует ли принять этот проект, если ставка приведения составляет 15%?

17. Величина требуемых инвестиций по проекту равна $18\,000$ дол. Предполагаемые доходы: в первый год – 1 500 дол., в последующие 8 лет – ежегодно по 3 600 дол. Оценить целесообразность принятия проекта, если ставка приведения 10%.

18. Для каждого из следующих проектов инвестиций рассчитать NPV, PI, IRR, если ставка приведения 25%. Сделать вывод о целесообразности инвестиций:

t	0	1	2	3	4	5
A	– 100	–	30	–	200	
B	– 350	–	–	–	–	1000
C	– 300	250	150			

19. Рассматриваются альтернативные инвестиционные проекты A и B. Сделать выбор при годовой ставке приведения: а) 8%; б) 15%:

t	0	1	2	3
A	– 100	90	45	9
B	– 100	10	50	100

20. Рассматриваются альтернативные инвестиционные проекты A и B. Сделать выбор, если ставка приведения 10% годовых:

t	0	1	2	3
A	– 100	50	70	
B	– 100	30	40	60

21. Инвестор, имеющий 300 тыс. руб., может вложить свой капитал в акции A, B, C. Дивидендные ставки по акциям являются независимыми случайными величинами с математическими ожиданиями 8, 10 и 12% и стандартными отклонениями (σ), 1, 2 и 4% соответственно. Как нужно скомбинировать покупку разных акций, чтобы за первый год получить в среднем 30 тыс. руб. дивидендов при минимальной дисперсии?

22. Куплена ценная бумага за 47 тыс. руб. Через год по ней стали поступать дивиденды, тенденцию изменения которых можно приближённо представить в виде линейного закона $\mathrm{R(t)} = 11 - \mathrm{t}$, $t = \overline{1, 10}$. Сразу после получения 1 тыс. руб. в виде дивидендов (через 10 лет) ценная бумага продана за 2 тыс. руб. Можно ли считать такую сделку удачной?

23. Работник получает 150 тыс. руб. в год и поступает в ВУЗ. Если он поступит учиться на заочное отделение, то следующие 5 лет заработная плата будет увеличиваться по закону $\mathrm{R(t)} = 150 + 18 \cdot \mathrm{t}$, $t = \overline{1, 5}$. Если он поступит на дневное отделение, то 5 лет работать не будет, предприятие сохранит за ним место, выплатив сразу 85% заработной платы за следующие 5 лет. После получения диплома заработная плата работника составит 300 тыс. руб. в год в любом случае. Какую форму обучения выбрать, если ставка приведения 8%?

Б) Задачи, рекомендуемые для итогового контроля

1. Г-н Х планирует внести на счёт некоторую сумму под 9 % годовых с ежемесячным начислением сложных процентов. Сейчас денег у г-на Х нет, но работодатель согласен выплатить сейчас ему всю заработную плату на 1 год вперёд, удержав при этом 8%. Оценить ситуацию, если допускается возможность довложения средств на банковский счёт. При этом считать, что размер ежемесячной заработной платы постоянный, и на счёт вносятся все деньги, получение заработной платы в конце месяца.

2. Фирме нужно накопить 200 тыс,дол. чтобы через 10 лет приобрести здание под офис. Наиболее безопасным способом накопления является приобретение безрисковых государственных ценных бумаг, генерирующих годовой доход по ставке 8% при полугодовом начислении сложных процентов. Сколько должен составлять первоначальный вклад фирмы?

3. Векселедержатель предъявил для учёта вексель на сумму 500000 руб. со сроком погашения 28.01.2012 г. Вексель предъявлен 13.12.2011 г. Банк согласился учесть вексель с дисконтом в 45% годовых. Какую сумму получит векселедержатель?

4. В качестве оплаты за каждую из трех партий товара предприятие А получило от предприятия В вексель с процентной ставкой 16% годовых, содержащий обязательство погасить сумму 1, 2 и 3 млн руб., соответственно через 3, 5 и 6 лет. Эти векселя заменяются одним и тем же дисконтом и сроком 5,5 лет. На какую сумму должен быть выписан новый вексель, если в расчетах используется схема сложных процентов?

5. В фонд защиты животных ежегодно вносится 100 тыс. руб. в течение 8 лет (в конце года). Средняя годовая ставка по сложным процентам за этот период составляет 8%. Определить современную и наращенную величины потока.

6. Каждые полгода на банковский счет писателя издательство перечисляет 2 000 руб., на которые банк начисляет каждые полгода сложные проценты из расчёта 7% годовых. Сколько денег будет на счёте через 4 года?

7. В формуле наращения по непрерывной схеме $S(\mathrm{T}) = S(0)\cdot\exp(\delta T)$ определить следующие величины: а) мультиплицирующий множитель, б) эффективную ставку. В ответе используйте параметры δ, T .

8. Предположим, что на процентные доходы введён налог по ставке g. Тогда несложно получить формулу для расчётов (простые проценты): $S(\mathrm{T}) = S(0)(1+T\cdot r\cdot(1-g))$. Определить мультиплицирующий множитель.

9. При оформлении вклада суммы S на 6 месяцев банк предлагает начислять ежемесячно сложные проценты – 8,5% годовых, при вкладе на срок 3 месяца начисляются простые проценты – 7,2% годовых. Вкладчик заключил договор на 6 месяцев, но через 3 месяца требует расторгнуть договор, сохранив 75% начисленных процентов. Удовлетворит ли банк его требования?

10. Один банк предлагает начислять по вкладам ежемесячно сложные проценты, 8,1% годовых, а другой ежеквартально 8,3% годовых, минимальный срок вклада 3 месяца. Вычислить эффективные ставки для обоих случаев. Какой вариант предпочтительнее вкладчику?

11. Банк предлагает начислять по вкладам ежемесячно сложные проценты, ставка 9% годовых. Вычислить эффективную ставку.

В) Задачи, рекомендуемые для самостоятельного решения

1. В банк вносится 10 тыс. руб., а затем ежемесячно взнос возрастает на 1 тыс. руб. По истечении 2-х лет вклад изымается вместе с начисленными сложными процентами 10% годовых (начисление процентов ежемесячное). Все эти деньги вкладываются в ценные бумаги, по которым бесконечно долго будет выплачиваться по 10 тыс. руб. в конце каждого года. Оценить целесообразность инвестирования. Рассчитать чистый приведенный доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности.

2. Инвестор Р имеет 10 тыс. евро и рассматривает 3 альтернативные возможности инвестирования денег при ставке приведения 10%:

- вложить деньги в освоение целинных земель, с которых через 1 год можно будет получать по 3 тыс.евро в конце каждого из последующих 5 лет;
- купить вексель за 10 тыс.евро номиналом 13,5 тыс.евро сроком погашения через 3 года;
- купить привилегированные акции стабильного предприятия, ежегодно приносящие дивиденды 1 тыс.евро неограниченно долго.

3. По трех месячному вкладу банк предлагает клиенту платить 8% годовых, используя схему простых процентов. Затем с банком заключается дополнительное соглашение, согласно которому вклад пролонгируется до востребования, причем расчеты будут производиться по схеме сложных процентов. Определить размер ставки по сложным процентам, которая позволит клиенту получить предусмотренную первоначальным договором сумму в случае, если он изъявит желание снять деньги через 3 месяца.

4. Оценить целесообразность инвестирования 15 000 евро в строительство жилого помещения, которое планируется сдавать в аренду 36 лет, при условии, что годовая рента составляет 1 550 евро и первый платеж поступит через 1 год, а ставка приведения 10% годовых. Измениться ли результат, если считать, что рента будет длиться бесконечно долго?

5. Г-н Х взял в банке льготный кредит на возведение здания под частную клинику – 10 млн руб. и заключил с банком договор, согласно которому в течение следующих 10 лет он будет получать ежегодно по 5 млн. руб. (в конце года) под 10% годовых по сложным процентам. Сразу после получения четвертого займа в 5 млн руб. (через 4 года) служба экономической безопасности при проверке состояние дел заемщика обнаружила, что на полученные от банка деньги был оснащен таксопарк, с которого г-н X получает весьма солидные доходы, ежегодно расширяя деятельность. За нецелевое использование средств банк решил расторгнуть договор, взыскав с заемщика всю сумму кредита и проценты на сегодняшний момент, а также все проценты, которые заемщик должен был уплатить за остальные 6 лет по договору. Определите причитающуюся к возврату сумму, а также сумму, которую должен был заплатить заемщик, если бы расторжение контракта произошло без наложения штрафных санкций.

6. На строительство жилого дома нужно затратить сразу 50 млн. евро Квартиры планируется сдавать в долгосрочную аренду. Чистый ежегодный доход от сдачи в аренду квартир оценивается в размере 6 млн. евро. Срок службы дома – 64 года. Оцените целесообразность капиталовложений, если ставка приведения 10%. Существенно ли изменятся показатели эффективности капиталовложений, если считать, что дом будет служить бесконечно долго?

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ (20 ВАРИАНТОВ)

ЗАДАНИЕ 1

1. На вклад в банке в размере **S** млн руб. сроком на **T** лет банк начисляет проценты по ставке **r**. Какая сумма накопится на счете к концу срока, если начисление процентов производится по схеме сложных процентов: а) ежегодно; б) каждые полгода:

	Вариант 1.1	Вариант 1.2	Вариант 1.3	Вариант 1.4	Вариант 1.5
S, млн руб.	2,25	1,75	1	5	2
T, лет	5	4	1	2	3
r, %	10	9,5	6,5	8,25	7,75

2. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку: а) **r1** процентов при начислении сложных процентов раз в год; б) **r2** процентов при начислении сложных процентов ежеквартально:

	Вариант 1.1	Вариант 1.2	Вариант 1.3	Вариант 1.4	Вариант 1.5
r1, %	15	20	35	30	18
r2, %	14	19	31	29	17

3. Оплата за выполненную работу производится: а) векселем с номиналом **S1** тыс. руб., сроком погашения через **T1** лет, б) векселем с номиналом **S2** тыс. руб., сроком погашения через **T2** лет? Какой вариант расчётов а) или б) предпочтительнее при сложной ставке **r** процентов? При каком значении процентной ставки выбор безразличен?

	Вариант 1.1	Вариант 1.2	Вариант 1.3	Вариант 1.4	Вариант 1.5
r, %	20	15	8	10	30
S1, тыс. руб.	100	250	180	500	300
T1, лет	1	2	3	2	2
S2, тыс. руб.	140	200	200	600	400
T2, лет	3	1	4	3	4

4. Долг в сумме **D** тыс. руб. требуется погасить последовательными равными суммами в течение **T** лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке **g**. Составить план погашения.

	Вариант 1.1	Вариант 1.2	Вариант 1.3	Вариант 1.4	Вариант 1.5
D, тыс.руб.	200	300	400	900	600
T, лет	3	4	4	3	3
g, %	22	25	26	24	25

5. Для следующего инвестиционного проекта:

	Вариант 1.1	Вариант 1.2	Вариант 1.3	Вариант 1.4	Вариант 1.5
***K*, денеж. ед.**	100	200	400	500	500
R1, денеж. ед.	20	130	130	200	100
R2, денеж. ед.	100	100	300	350	500

рассчитать чистый приведенный доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности, если ставка приведения составляет 20% годовых. Сделайте вывод о целесообразности инвестиций.

ЗАДАНИЕ 2

1.Векселедержатель предъявил для учета вексель на сумму 100 тыс. руб. с датой погашения этой суммы **T1**. Вексель предъявлен **T2**. Банк согласился учесть вексель с дисконтом **d** процентов годовых. Какую сумму получит векселедержатель?

	Вариант 2.1	Вариант 2.2	Вариант 2.3	Вариант 2.4	Вариант 2.5
T1	25.06.12	12.07.12	30.08.12	20.08.12	29.09.12
T2	11.06.12	01.07.12	20.08.12	30.07.12	05.09.12
d, %	70	67	69	71	68

2.В течении **T** лет ежегодно по схеме пренумерандо делается взнос в банк **R** тыс. дол. с начислением сложных процентов **r**. Чему равна сумма к получению в конце периода?

	Вариант 2.1	Вариант 2.2	Вариант 2.3	Вариант 2.4	Вариант 2.5
T, лет	10	14	15	18	12
R, тыс. дол.	20	30	15,5	10	15
r, %	8,5	9,5	10	10,5	9,5

3.Каков Ваш выбор: а) получение **S1** тыс. евро через 2 года или б) получение **S2** тыс. евро через 4 года, если годовой коэффициент дисконтирования (используется схема сложных процентов) равен **d** процентов. При каком значении коэффициента дисконтирования выбор безразличен?

	Вариант 2.1	Вариант 2.2	Вариант 2.3	Вариант 2.4	Вариант 2.5
S1, тыс. евро	36	24	24	7	9
S2, тыс. евро	40	30	30	8	11
d, %	10	11	12	10	9

4.Вы заняли 500 тыс. дол. на 4 года под **g** процентов. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашенный остаток долга. Определите величину годового платежа. Составьте план погашения долга.

	Вариант 2.1	Вариант 2.2	Вариант 2.3	Вариант 2.4	Вариант 2.5
g, %	12	15	18	20	10

5.Проект, требующий инвестиций в размере 100 тыс. дол., предполагает получение годового дохода в размере 20 тыс. дол. на протяжении 8 лет. Оценить целесообразность инвестиций, если ставка приведения равна **r** процентов.

	Вариант 2.1	Вариант 2.2	Вариант 2.3	Вариант 2.4	Вариант 2.5
r, %	10	15	8	12	11

ЗАДАНИЕ 3

1.Рассчитать наращенную сумму с исходной суммы в 2 млн руб. при размещении ее в банке на условиях начисления простых процентов, если годовая ставка составляет 15% годовых, а период наращения **t** дней.

	Вариант 3.1	Вариант 3.2	Вариант 3.3	Вариант 3.4	Вариант 3.5
t, дней	31	182	456	92	274

2.Господин X желает приобрести пенсионный контракт, по которому он мог бы получать в конце каждого года по 7 000 дол. в течение оставшейся жизни. Страховая компания, используя таблицы смертности, оценила, что клиент сможет прожить 16 лет, и установила процентную ставку **r** (используется схема сложных процентов). Сколько нужно заплатить за контракт?

	Вариант 3.1	Вариант 3.2	Вариант 3.3	Вариант 3.4	Вариант 3.5
r, %	6	8	10	12	14

3.Платежи в 2 млн руб., 4 млн руб. и 5 млн руб. со сроками уплаты этих сумм, соответственно, через **T1**, **T2** и **T3** лет, объединяются в один со сроком погашения через 3 года 6 месяцев с использованием сложной ставки 20% годовых. Найти сумму к погашению по консолидированному платежу.

	Вариант 3.1	Вариант 3.2	Вариант 3.3	Вариант 3.4	Вариант 3.5
T1, лет	2,5	1,5	2,5	2,5	1,5
T2, лет	3	3	3	4,5	4,5
T3, лет	4,5	4,5	5,5	5,5	5,5

4.Решено вложить в банк **S** млн руб. на срок 4 года. Сложные проценты начисляются по ставке **i**. Согласно прогнозу Министерства финансов РФ, годовой темп инфляции сохранится на уровне **h** процентов. Какова наращенная сумма с учетом ее обесценения? Определить реальную годовую процентную ставку.

	Вариант 3.1	Вариант 3.2	Вариант 3.3	Вариант 3.4	Вариант 3.5
S, млн руб.	4	5	6	3	8
i, %	23	18	14	13	12
h, %	10	12	8	9	9

5.Долг в сумме 800 тыс. руб. требуется погасить последовательными равными суммами в течение **T** лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке **g** процентов. Составить план погашения.

	Вариант 3.1	Вариант 3.2	Вариант 3.3	Вариант 3.4	Вариант 3.5
T, лет	5	6	4	7	8
g, %	10	20	15	12	8

ЗАДАНИЕ 4

1.Сумма 2 млн. руб. вложена в банк под **r** процентов. Сложные проценты начисляются ежегодно. Через период **T** владелец решил снять сумму. Сколько денег он получит, если начисление процентов ведется по комбинированной схеме?

	Вариант 4.1	Вариант 4.2	Вариант 4.3	Вариант 4.4	Вариант 4.5
r, %	10,5	9,5	10,75	8,75	9,25
T	2 года 3 мес.	2 года 1 мес.	2 года 5 мес.	1 год 3 мес.	1 год 6 мес.

2.Стоит ли покупать за 2 000 дол. ценную бумагу, генерирующую ежегодный доход в размере **R** дол. в течение 4 лет, если учётная ставка по сложным процентам составляет **d** процентов?

	Вариант 4.1	Вариант 4.2	Вариант 4.3	Вариант 4.4	Вариант 4.5
R, дол.	675	650	245	300	750
d, %	11,5	10,5	12,5	9,5	13,5

3.Г-н Х вносит на счет 10 000 руб., затем через 6 месяцев еще столько же, а ещё через **T** месяцев снимает сумму. Сколько накопится к концу срока, если банк начисляет ежемесячно сложные проценты из расчета **r** процентов годовых.

	Вариант 4.1	Вариант 4.2	Вариант 4.3	Вариант 4.4	Вариант 4.5
T, мес.	3	4	3	4	3
r, %	10	8	12	10	8

4.Вы заняли на 4 года дол. 6 000 под **g** процентов. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашенный остаток. Определить величину годового платежа. Составить план погашения.

	Вариант 4.1	Вариант 4.2	Вариант 4.3	Вариант 4.4	Вариант 4.5
g, %	15	17	23	19	16

5.Для следующего инвестиционного проекта:

	Вариант 4.1	Вариант 4.2	Вариант 4.3	Вариант 4.4	Вариант 4.5
***К*, ден. ед.**	100	200	300	400	500
R1, ден. ед.	20	100	–	–	110
R2, ден. ед.	100	160	250	200	600
R3, ден. ед.			–	–	
R4, ден. ед.			300	350	

рассчитать чистый приведенный доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности, если ставка приведения составляет 20% годовых. Сделать вывод о целесообразности инвестиций.

Указание. Для контрольной работы предлагается четыре задания, в каждом задании приводятся пять задач с параметрами, числовые значения параметров по пяти вариантам в каждом задании указаны в таблице. Нужно выполнить один вариант из предложенного задания.

Замечание. В задачах даны годовые процентные ставки.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 1

1. На вклад в банке в размере 200 тыс. р. сроком на 2 года банк начисляет 6,75 % годовых. Какая сумма накопится на счёте к концу срока, если начисление процентов производится по схеме сложных процентов: (а) ежемесячно; (б) ежеквартально.
2. Банк предоставил ссуду в размере 5 млн р. на 15 месяцев под 30 % годовых на условиях погашения ежеквартально основной задолженности (равными суммами), плюс процентов на остаток непогашенной задолженности за истекший квартал. Вычислите платежи по обслуживанию долга за каждый квартал вплоть до его полного погашения. Определите эффективную ставку данной операции.
3. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку: (а) 22 % годовых при начислении сложных процентов раз в год; (б) 21 % годовых при начислении сложных процентов ежемесячно.
4. Вложено 640000руб. на 4 месяца (переведено в рубли по курсу 32 руб. за 1 долл.) на валютный депозит под 8% годовых. Вычислите накопленную сумму в рублях, если курс валюты меняется ежемесячно на 7% в сторону увеличения. Определите эффективную ставку (ежегодный рост рублёвой суммы) данной операции.
5. Вложено 150 тыс. руб., чистые доходы (через 1 год и через 2 года, соответственно), 70 тыс.руб., 100 тыс.руб. Рассчитайте чистый приведённый доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности, если ставка приведения составляет 7 % годовых. Сделайте вывод о целесообразности инвестиций.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 2

1. Векселедержатель предъявил для учёта вексель на сумму 100 тыс. руб. с датой погашения этой суммы 12.09.11. Вексель предъявлен 22.08.11. Банк согласился учесть вексель с дисконтом 60 % годовых. Какую сумму получит векселедержатель? Составить уравнение баланса для расчёта эффективной ставки.
2. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку: (а) 22,25 % годовых при начислении сложных процентов раз в год; (б) 21,75 % годовых при начислении сложных процентов ежемесячно.
3. Дифференцированные платежи. Долг в сумме 200 тыс. р. требуется погасить последовательными равными суммами в течении 8 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 15 % годовых. Составить план погашения.
4. Банк принимает вклады под 28% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов. Годовой темп инфляции 18%. Определите реальную процентную ставку. Варианты ответа
1) 10,5% 2) 9,5% 3) 8,8% 4) 8,5%
5. Проект, требующий инвестиций в размере 100 тыс. долл., предполагает получение годового дохода в размере 20 тыс. долл. на протяжении 8 лет. Оценить целесообразность инвестиций, если ставка приведения равна 14 % годовых.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 3

1. Какую ставку должен назначить банк, чтобы при годовой инфляции 10% реальная годовая ставка по сложным процентам оказалась 6%?.

2. Что выгоднее продавцу товара сделать скидку 10 % или за ту же цену продавать на 10 % больше товара (довесок):

1) скидка, 2) довесок, 3) указанные действия равноценны как для продавца, так и для покупателя, 4) продавец никогда не должен идти на уступки покупателю.

3. Дифференцированные платежи. Долг в сумме 400 тыс. р. требуется погасить последовательными равными суммами в течении 4 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 18 % годовых. Составить план погашения.
4. Рассчитайте наращённую сумму с исходной суммы в 2 млн руб. при размещении её в банке на условиях начисления простых процентов, если годовая ставка составляет 15 % годовых, а период наращения 30 дней.
5. Куплена бескупонная облигация за 90 руб. Через 5 лет облигация погашена по номиналу. Определить внутреннюю норму доходности инвестиций в облигацию, если её номинал 140 руб. Целесообразно ли приобретать эту облигацию, если банк предлагает депонировать средства под 9% годовых и начислять сложные проценты ежеквартально? (Оба вида вложений имеют невысокий уровень риска потерь). Указание: по банковскому депозиту нужно вычислить эффективную ставку.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 4

1. Сумма 2 млн.руб. вложена в банк 13.04.07 под 7 % годовых, а 17.05.09 владелец решил снять сумму. Сколько денег он получит, если начисление ведётся по комбинированной схеме (сложные проценты начисляются ежеквартально)?
2. Банк предлагает начислять по вкладам ежемесячно сложные проценты, ставка 9 % годовых. Вычислить эффективную ставку.
3. На 5 лет взят кредит. В первый год процентная ставка по нему составляла 10 % годовых. На какую максимальную ставку по сложным процентам согласится заёмщик на следующие 4 года, если он может вернуть не более полутора начальных сумм в конце срока?
4. Возврат долга аннуитетными платежами. Вы заняли 500 тыс. долл. на 4 года под 16 % годовых. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашенный остаток долга. Определите величину годового платежа. Составьте план погашения долга.
5. Господин X желает приобрести пенсионный контракт, по которому он мог бы получать в конце каждого года по $ 7000 в течение оставшейся жизни. Страховая компания, используя таблицы смертности, оценила, что клиент сможет прожить 16 лет, и установила процентную ставку 16 % годовых по сложным процентам. Сколько нужно заплатить за контракт?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 5

1. На вклад в банке в размере 5 млн р. сроком на 5 лет банк начисляет 7 % годовых. Какая сумма накопится на счёте к концу срока, если начисление процентов производится по схеме сложных процентов: (а) каждые полгода; (б) ежеквартально.
2. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку:
α) 25% годовых, начисление сложных процентов полугодовое;
β) 27% годовых, начисление сложных процентов раз в год?
3. В банке предлагают кредит 13 % годовых, плюс ежемесячно начисляют комиссионные 2 %. Эффективная ставка составит?
4. Найти дисконтный срок окупаемости в целых годах для следующего инвестиционного проекта (объём вложений 200, через год получено 150, ещё через год 80, ещё через год 50, ещё через год 25), если ставка приведения 15%.
5. Вложено 150 тыс. руб., чистые доходы (через 1 год и через 2 года, соответственно), 80 тыс.руб., 100 тыс.руб. Рассчитайте чистый приведённый доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности, если ставка приведения составляет 5 % годовых. Сделайте вывод о целесообразности инвестиций.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 6

1. Векселедержатель предъявил для учёта вексель на сумму 100 тыс. руб. с датой погашения этой суммы 18.09.10. Вексель предъявлен 22.08.10. Банк согласился учесть вексель с дисконтом 60 % годовых. Какую сумму получит векселедержатель? Составить уравнение баланса для расчёта эффективной ставки.
2. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку: (а) 14 % годовых при начислении сложных процентов раз в год; (б) 13 % годовых при начислении сложных процентов ежемесячно.
3. Дифференцированные платежи. Долг в сумме 200 тыс. р. требуется погасить последовательными равными суммами в течении 5 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 15 % годовых. Составить план погашения.
4. Банк принимает вклады под 28% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов. Годовой темп инфляции 18%. Определите реальную процентную ставку.
5. Проект, требующий инвестиций в размере 100 тыс. долл., предполагает получение годового дохода в размере 20 тыс. долл. на протяжении 8 лет. Оценить целесообразность инвестиций, если ставка приведения равна 12 % годовых.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 7

1. Какую ставку должен назначить банк, чтобы при годовой инфляции 10% реальная годовая ставка по сложным процентам оказалась 6%?
2. Что выгоднее продавцу товара сделать скидку 10 % или за ту же цену продавать на 10 % больше товара (довесок)?
3. Дифференцированные платежи. Долг в сумме 200 тыс. р. требуется погасить последовательными равными суммами в течении 5 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 11 % годовых. Составить план погашения.
4. Рассчитайте наращённую сумму с исходной суммы в 3 млн руб. при размещении её в банке на условиях начисления простых процентов, если годовая ставка составляет 15 % годовых, а период наращения 180 дней.
5. Куплена бескупонная облигация за 90 руб. Через 5 лет облигация погашена по номиналу. Определить внутреннюю норму доходности инвестиций в облигацию, если её номинал 140 руб. Целесообразно ли приобретать эту облигацию, если банк предлагает депонировать средства под 9% годовых и начислять сложные проценты ежеквартально? (Оба вида вложений имеют невысокий уровень риска потерь).

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 8

1. Сумма 2 млн.руб. вложена в банк 15.03.07 под 10 % годовых, а 12.05.09 владелец решил снять сумму. Сколько денег он получит, если начисление ведётся по комбинированной схеме (сложные проценты начисляются ежеквартально)?
2. Банк предлагает начислять по вкладам ежеквартально сложные проценты, ставка 9 % годовых. Вычислить эффективную ставку.
3. Вложено 640000руб. на 3 месяца (переведено в рубли по курсу 32 руб. за 1 долл.) на валютный депозит под 3% годовых. Вычислите накопленную сумму в рублях, если курс валюты меняется ежемесячно на 4% в сторону увеличения. Определите эффективную ставку (ежегодный рост рублёвой суммы) данной операции.
4. Возврат долга аннуитетными платежами. Вы заняли 200 тыс. долл. на 3 года под 15 % годовых. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашенный остаток долга. Определите величину годового платежа. Составьте план погашения долга.

5. Господин Х желает приобрести пенсионный контракт, по которому он мог бы получать в конце каждого года по $ 5 000 в течение оставшейся жизни. Страховая компания, используя таблицы смертности, оценила, что клиент сможет прожить 20 лет, и установила процентную ставку 18 % годовых по сложным процентам. Сколько нужно заплатить за контракт?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 9

1. Сумма 8 млн.руб. вложена в банк под 10 % годовых. Сложные проценты начисляются ежегодно. Через 2 года 3 мес. владелец решил снять сумму. Сколько денег он получит, если начисление ведётся по комбинированной схеме?
2. Стоит ли покупать за $ 2 000 ценную бумагу, генерирующую ежегодный доход в размере $ 600 руб. в течение 4 лет, если эффективная ставка банковского вклада с тем же уровнем риска составляет 8 %?
3. Г-н Х вносит на счёт 10 000 руб., затем через 6 месяцев ещё столько же. Далее взносы продолжаются в конце каждого из 3 лет. Сколько накопится к концу срока (через 3 года 6 мес.), если банк начисляет ежемесячно сложные проценты из расчёта 10 % годовых.
4. Возврат долга аннуитетными платежами. Вы заняли на 4 года $ 6 000 под 12 % годовых,. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашённый остаток. Определите величину годового платежа. Составьте план погашения.
5. Куплена бескупонная облигация за 90 руб. Через 3 года облигация погашена по номиналу. Определить внутреннюю норму доходности инвестиций в облигацию, если её номинал 120 руб. Целесообразно ли приобретать эту облигацию, если банк предлагает депонировать средства под 10% годовых и начислять сложные проценты ежегодно? (Оба вида вложений имеют невысокий уровень риска потерь).

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 10

1. Рассчитайте наращённую сумму с исходной суммы в 50 тыс руб. при размещении её в банке на условиях начисления простых процентов, если годовая ставка составляет 5 %, а период наращения 60 дней.
2. Господин Х желает приобрести пенсионный контракт, по которому он мог бы получать в конце каждого года по $ 6000 в течение оставшейся жизни. Страховая компания, используя таблицы смертности, оценила, что клиент сможет прожить 10 лет, и установила процентную ставку 20 % годовых по сложным процентам. Сколько нужно заплатить за контракт?
3. Платежи в 2 млн руб., 4 млн руб. и 5 млн руб. со сроками уплаты этих сумм, соответственно, через 1 год 6 мес., 3 года 6 мес. и 5 лет, объединяются в один со сроком погашения через 3 года с использованием сложной ставки 10 % годовых. Найти сумму к погашению по консолидированному платежу.
4. Решено вложить в банк 40 тыс. руб. на срок 4 года. Сложные проценты начисляются по ставке 11 % в год. Согласно прогнозу Министерства финансов РФ, годовой темп инфляции сохранится на уровне 6 %. Какова наращённая сумма с учётом её обесценения? Определить реальную годовую процентную ставку.
5. Погашение долга дифференцированными платежами. Долг в сумме 800 тыс. руб. требуется погасить последовательными равными суммами в течение 5 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 10 % годовых. Составьте план погашения.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 11

1. На вклад в банке в размере 3 млн р. сроком на 6 лет банк начисляет 8 % годовых. Какая сумма накопится на счёте к концу срока, если начисление процентов производится по схеме сложных процентов: (а) ежегодно; (б) каждые полгода.

2. В формуле наращения по простым процентам $S(\text{T}) = S(0) + S(0) \cdot T \cdot r$ мультиплицирующим множителем является величина: 1) $1 + T \cdot r$; 2) $T \cdot r$; 3) $r + T \cdot r$;4) r.
3. Какая сумма предпочтительнее при сложной ставке 8 % годовых: 100 тыс. р., получаемые через 2 года или 160 тыс. р., получаемые через 8 лет? При каком значении процентной ставки выбор безразличен?
4. Погашение долга дифференцированными платежами. Долг в сумме 60 тыс. р. требуется погасить последовательными равными суммами в течении 3 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 18 % годовых. Составить план погашения.
5. Для следующего инвестиционного проекта: вложено 100 денежных единиц, через год получено 110 денежных единиц, ещё через год 110 денежных единиц, рассчитайте чистый приведённый доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности, если ставка приведения составляет 20 % годовых. Сделайте вывод о целесообразности инвестиций.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 12

1. Сумма 16 млн.руб. вложена в банк под 6 % годовых. Сложные проценты начисляются ежегодно. Через 2 года 2 мес. владелец решил снять сумму. Сколько денег он получит, если начисление ведётся по комбинированной схеме?
2. Стоит ли покупать за $ 1 800 ценную бумагу, генерирующую ежегодный доход в размере $ 600 руб. в течение 4 лет, если эффективная ставка банковского вклада с тем же уровнем риска составляет 8 %?
3. Г-н Х вносит на счёт 4 000 руб., затем через 6 месяцев ещё столько же. Далее взносы продолжаются в конце каждого из 4 лет. Сколько накопится к концу срока (через 3 года 6 мес.), если банк начисляет ежемесячно сложные проценты из расчёта 10 % годовых.
4. Возврат долга аннуитетными платежами. Вы заняли на 2 года $ 6 000 под 11 % годовых,. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашённый остаток. Определите величину годового платежа. Составьте план погашения.
5. Куплена бескупонная облигация за 90 руб. Через 3 года облигация погашена по номиналу. Определить внутреннюю норму доходности инвестиций в облигацию, если её номинал 120 руб. Целесообразно ли приобретать эту облигацию, если банк предлагает депонировать средства под 10% годовых и начислять сложные проценты ежегодно? (Оба вида вложений имеют невысокий уровень риска потерь).

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 13

1. Рассчитайте наращённую сумму с исходной суммы в 60 тыс руб. при размещении её в банке на условиях начисления простых процентов, если годовая ставка составляет 9 %, а период наращения 30 дней.
2. Господин Х желает приобрести пенсионный контракт, по которому он мог бы получать в конце каждого года по $ 16000 в течение оставшейся жизни. Страховая компания, используя таблицы смертности, оценила, что клиент сможет прожить 20 лет, и установила процентную ставку 10 % годовых по сложным процентам. Сколько нужно заплатить за контракт?
3. Платежи в 3 млн руб., 4 млн руб. и 5 млн руб. со сроками уплаты этих сумм, соответственно, через 2 года 6 мес., 3 года 6 мес. и 5 лет, объединяются в один со

сроком погашения через 3 года с использованием сложной ставки 12 % годовых. Найти сумму к погашению по консолидированному платежу.

4. Решено вложить в банк 80 тыс. руб. на срок 4 года. Сложные проценты начисляются по ставке 13 % в год. Согласно прогнозу Министерства финансов РФ, годовой темп инфляции сохранится на уровне 6 %. Какова наращённая сумма с учётом её обесценения? Определить реальную годовую процентную ставку.

5. Погашение долга дифференцированными платежами. Долг в сумме 200 тыс. руб. требуется погасить последовательными равными суммами в течение 4 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 12 % годовых. Составьте план погашения.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ   ВАРИАНТ № 14

1. Пусть сложные проценты по годовой ставке r начисляются ежемесячно. Планируется получить сумму S через n лет. Для вычисления начальной суммы вклада нужно воспользоваться формулой?

2. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку: (а) 11 % годовых при начислении сложных процентов раз в год; (б) 10 % годовых при начислении сложных процентов ежеквартально.

3. Какая сумма предпочтительнее при сложной ставке 14 % годовых: 100 тыс. р., получаемые через 1 год или 160 тыс. р., получаемые через 5 лет? При каком значении процентной ставки выбор безразличен?

4. Погашение долга дифференцированными платежами. Долг в сумме 90 тыс. р. требуется погасить последовательными равными суммами в течении 3 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 20 % годовых. Составить план погашения.

5. Куплена облигация за 100 руб. Через год по ней получен купон 40 руб., ещё через год получен купон в таком же размере и одновременно облигация погашена по номиналу. Определить внутреннюю норму доходности инвестиций в облигацию, если её номинал 45 руб.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ   ВАРИАНТ № 15

1. Сумма 20 тыс.руб. вложена в банк 10.03.10 под 10 % годовых, а 12.09.10 владелец решил снять сумму. Сколько денег он получит, если начисление ведётся по комбинированной схеме (сложные проценты начисляются ежемесячно)?

2. Стоит ли покупать за $ 4 000 ценную бумагу, генерирующую ежегодный доход в размере $ 1000 руб. в течение 5 лет, если эффективная ставка банковского вклада с тем же уровнем риска составляет 7 %?

3. Г-н Х вносит на счёт 4 000 руб., затем через 6 месяцев ещё столько же. Далее взносы продолжаются в конце каждого из 3 лет. Сколько накопится к концу срока (через 3 года 6 мес.), если банк начисляет ежемесячно сложные проценты из расчёта 10 % годовых.

4. Возврат долга аннуитетными платежами. Вы заняли на 4 года $ 8 000 под 4 % годовых,. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашённый остаток. Определите величину годового платежа. Составьте план погашения.

5. Куплена бескупонная облигация за 90 руб. Через 3 года облигация погашена по номиналу. Определить внутреннюю норму доходности инвестиций в облигацию, если её номинал 120 руб. Целесообразно ли приобретать эту облигацию, если банк предлагает депонировать средства под 10% годовых и начислять сложные проценты ежегодно? (Оба вида вложений имеют невысокий уровень риска потерь).

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 16

1. Рассчитайте наращённую сумму с исходной суммы в 50 тыс руб. при размещении её в банке на условиях начисления простых процентов, если годовая ставка составляет 5 %, а период наращения 90 дней.
2. Господин X желает приобрести пенсионный контракт, по которому он мог бы получать в конце каждого года по $ 3000 в течение оставшейся жизни. Страховая компания, используя таблицы смертности, оценила, что клиент сможет прожить 10 лет, и установила процентную ставку 20 % годовых по сложным процентам. Сколько нужно заплатить за контракт?
3. Платежи в 3 млн руб., 4 млн руб. и 5 млн руб. со сроками уплаты этих сумм, соответственно, через 1 год 6 мес., 3 года 6 мес. и 5 лет, объединяются в один со сроком погашения через 3 года с использованием сложной ставки 10 % годовых. Найти сумму к погашению по консолидированному платежу.
4. Решено вложить в банк 40 тыс. руб. на срок 4 года. Сложные проценты начисляются по ставке 11 % в год. Согласно прогнозу Министерства финансов РФ, годовой темп инфляции сохранится на уровне 7 %. Какова наращённая сумма с учётом её обесценения? Определить реальную годовую процентную ставку.
5. Погашение долга дифференцированными платежами. Долг в сумме 800 тыс. руб. требуется погасить последовательными равными суммами в течение 6 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 10 % годовых. Составьте план погашения.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 17

1. На вклад в банке в размере 6 млн р. сроком на 6 лет банк начисляет 8 % годовых. Какая сумма накопится на счёте к концу срока, если начисление процентов производится по схеме сложных процентов: (а) ежегодно; (б) каждые полгода.
2. В формуле наращения по простым процентам $S(\mathrm{T}) = S(0) + S(0) \cdot T \cdot r$ мультиплицирующим множителем является величина?
3. Какая сумма предпочтительнее при сложной ставке 8 % годовых: 100 тыс. р., получаемые через 2 года или 170 тыс. р., получаемые через 8 лет? При каком значении процентной ставки выбор безразличен?
4. Погашение долга дифференцированными платежами. Долг в сумме 90 тыс. р. требуется погасить последовательными равными суммами в течении 3 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 18 % годовых. Составить план погашения.
5. Для следующего инвестиционного проекта:

K, денеж.ед.	*100*
R1,денеж.ед.	**100**
R2,денеж.ед.	**100**

рассчитайте чистый приведённый доход, индекс доходности и внутреннюю норму доходности, если ставка приведения составляет 10 % годовых. Сделайте вывод о целесообразности инвестиций.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 18

1. Сумма 100 тыс.руб. вложена в банк под 6 % годовых. Сложные проценты начисляются ежегодно. Через 2 года 2 мес. владелец решил снять сумму. Сколько денег он получит, если начисление ведётся по комбинированной схеме?
2. Стоит ли покупать за $ 1 700 ценную бумагу, генерирующую ежегодный доход в размере $ 600 руб. в течение 4 лет, если эффективная ставка банковского вклада с тем же уровнем риска составляет 8 %?
3. Г-н Х вносит на счёт 2 000 руб., затем через 6 месяцев ещё столько же. Далее взносы продолжаются в конце каждого из 4 лет. Сколько накопится к концу срока (через 3 года 6 мес.), если банк начисляет ежемесячно сложные проценты из расчёта 10 % годовых.
4. Возврат долга аннуитетными платежами. Вы заняли на 2 года $ 8 000 под 14 % годовых,. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашённый остаток. Определите величину годового платежа. Составьте план погашения.
5. Куплена бескупонная облигация за 90 руб. Через 3 года облигация погашена по номиналу. Определить внутреннюю норму доходности инвестиций в облигацию, если её номинал 120 руб. Целесообразно ли приобретать эту облигацию, если банк предлагает депонировать средства под 10% годовых и начислять сложные проценты ежегодно? (Оба вида вложений имеют невысокий уровень риска потерь).

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 19

1. Рассчитайте наращённую сумму с исходной суммы в 60 тыс руб. при размещении её в банке на условиях начисления простых процентов, если годовая ставка составляет 12 %, а период наращения 30 дней.
2. Господин Х желает приобрести пенсионный контракт, по которому он мог бы получать в конце каждого года по $ 18000 в течение оставшейся жизни. Страховая компания, используя таблицы смертности, оценила, что клиент сможет прожить 20 лет, и установила процентную ставку 10 % годовых по сложным процентам. Сколько нужно заплатить за контракт?
3. Платежи в 3 млн руб., 4 млн руб. и 5 млн руб. со сроками уплаты этих сумм, соответственно, через 2 года 6 мес., 3 года 6 мес. и 5 лет, объединяются в один со сроком погашения через 3 года с использованием сложной ставки 12 % годовых. Найти сумму к погашению по консолидированному платежу.
4. Решено вложить в банк 80 тыс. руб. на срок 4 года. Сложные проценты начисляются по ставке 10 % в год. Согласно прогнозу Министерства финансов РФ, годовой темп инфляции сохранится на уровне 6 %. Какова наращённая сумма с учётом её обесценения? Определить реальную годовую процентную ставку.
5. Погашение долга дифференцированными платежами. Долг в сумме 100 тыс. руб. требуется погасить последовательными равными суммами в течение 4 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 12 % годовых. Составьте план погашения.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 20

1. Пусть сложные проценты по годовой ставке r начисляются ежемесячно. Планируется получить сумму S через n лет. Для вычисления начальной суммы вклада нужно воспользоваться формулой?
2. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку: (а) 11 % годовых при начислении сложных процентов раз в год; (б) 10,5 % годовых при начислении сложных процентов ежеквартально.
3. Какая сумма предпочтительнее при сложной ставке 11 % годовых: 100 тыс. р., получаемые через 1 год или 170 тыс. р., получаемые через 5 лет? При каком значении процентной ставки выбор безразличен?
4. Погашение долга дифференцированными платежами. Долг в сумме 90 тыс. р. требуется погасить последовательными равными суммами в течении 3 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 20 % годовых. Составить план погашения.
5. Куплена облигация за 100 руб. Через год по ней получен купон 40 руб., ещё через год получен купон в таком же размере и одновременно облигация погашена по номиналу. Определить внутреннюю норму доходности инвестиций в облигацию, если её номинал 45 руб.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 21

1. Сумма 30 тыс.руб. вложена в банк 10.03.10 под 10 % годовых, а 12.09.10 владелец решил снять сумму. Сколько денег он получит, если начисление ведётся по комбинированной схеме (сложные проценты начисляются ежемесячно)?
2. Стоит ли покупать за $ 3900 ценную бумагу, генерирующую ежегодный доход в размере $ 1000 руб. в течение 5 лет, если эффективная ставка банковского вклада с тем же уровнем риска составляет 8 %?
3. Г-н X вносит на счёт 7 000 руб., затем через 6 месяцев ещё столько же. Далее взносы продолжаются в конце каждого из 3 лет. Сколько накопится к концу срока (через 3 года 6 мес.), если банк начисляет ежемесячно сложные проценты из расчёта 10 % годовых.
4. Возврат долга аннуитетными платежами. Вы заняли на 4 года $ 6 000 под 14 % годовых,. Возвращать нужно равными срочными уплатами в конце каждого года, включающими начисленные сложные проценты на непогашённый остаток. Определите величину годового платежа. Составьте план погашения.
5. Куплена бескупонная облигация за 90 руб. Через 3 года облигация погашена по номиналу. Определить внутреннюю норму доходности инвестиций в облигацию, если её номинал 120 руб. Целесообразно ли приобретать эту облигацию, если банк предлагает депонировать средства под 10% годовых и начислять сложные проценты ежегодно? (Оба вида вложений имеют невысокий уровень риска потерь).

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВАРИАНТАМ ВАРИАНТ № 22

1. Векселедержатель предъявил для учёта вексель на сумму 100 тыс. руб. с датой погашения этой суммы 22.09.11. Вексель предъявлен 21.08.11. Банк согласился учесть вексель с дисконтом 60 % годовых. Какую сумму получит векселедержатель? Составить уравнение баланса для расчёта эффективной ставки.
2. Какие условия предоставления кредита более выгодны банку: (а) 29 % годовых при начислении сложных процентов раз в год; (б) 28 % годовых при начислении сложных процентов ежемесячно.
3. Дифференцированные платежи. Долг в сумме 140 тыс. р. требуется погасить последовательными равными суммами в течении 8 лет с ежегодной выплатой процентов на остаток долга по ставке 15 % годовых. Составить план погашения.
4. Банк принимает вклады под 12% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов. Годовой темп инфляции 8%. Определите реальную процентную ставку.
5. Проект, требующий инвестиций в размере 120 тыс. долл., предполагает получение годового дохода в размере 20 тыс. долл. на протяжении 8 лет. Оценить целесообразность инвестиций, если ставка приведения равна 14 % годовых.

ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Активная операция – операция по размещению средств, в частности, вложение денег в ценные бумаги (в учебном пособии термин «актив» означает «ценная бумага», хотя в бухгалтерском учете этот термин значительно шире).

Акционерное общество – коммерческая организация, уставный капитал которой разделен на определенное число акций, удостоверяющих обязательственные права участников общества (акционеров) по отношению к обществу.

Акция – именная ценная бумага, закрепляющая право ее владельца (акционера) на получение части прибыли акционерного общества (АО) в виде дивидендов, на участие в управлении акционерным обществом (если это обыкновенная акция) и на часть имущества, остающегося после ликвидации АО. Такой вид ценных бумаг наиболее распространен. По сути акция является свидетельством о внесении доли в акционерный капитал корпорации и представляет собой долю в собственности.

Акции подразделяются на привилегированные и обыкновенные. По своим характеристикам привилегированные акции во многом сходны с долговыми инструментами. Как правило, владельцы привилегированных акций имеют право на получение фиксированных дивидендов (аналогично процентам по облигациям) до того, как будут выплачены какие-либо дивиденды держателям обыкновенных акций. Регулярная выплата дивидендов по привилегированным акциям не является контрактным обязательством эмитента и производится по решению Совета директоров корпорации. Ситуация, когда дивиденды по привилегированным акциям не выплачиваются вовсе, бывает очень редко. Поэтому в определенной степени дивиденды по привилегированным акциям можно рассматривать как процентные платежи. Вместе с тем, в отличие от долговых ценных бумаг, привилегированные акции не имеют фиксированного срока. В случае банкротства корпорации держатели привилегированных акций имеют преимущество перед владельцами обыкновенных акций в оплате своих требований, однако уступают в очередности держателям долговых обязательств. Акционеры избирают директоров корпорации и тем самым контролируют в конечном счете распределение чистых прибылей корпорации, направляя всю чистую прибыль или ее часть на выплату дивидендов, либо соглашаясь с реинвестированием в расширение предприятия.

Вексель – документ, содержащий безусловное обязательство векселедателя выплатить векселедержателю определенную сумму денег к определенному моменту (обычно вексель выдается в качестве оплаты за поставленный товар).

Деньги – товар особого рода, являющийся всеобщим эквивалентом.

Депозитный сертификат – свидетельство банка о приеме денежных средств вкладчика, представляющее собой двустороннее обязательство: вкладчика – не изымать деньги некоторое время – и банка – уплатить через этот срок достаточно высокий процент по вкладу.

Диверсификация – распределение, рассредоточение вложений капитала.

Дивиденд – доход, который может получить акционер за счет части чистой прибыли текущего года акционерного общества, которая распределяется между держателями акций в виде определенной доли их номинальной цены. Дивиденды могут выплачиваться деньгами или, по усмотрению общества, другим имуществом (как правило, акциями дочерних предприятий или собственными акциями). Если дивиденд выплачивается собственными акциями, говорят о «капитализации дохода».

Доходность финансового актива – годовая процентная ставка, отражающая отдачу на капитал, вложенный в данный актив. В самом общем виде рассчитывается отношением годового дохода, генерируемого данным активом, к величине исходных инвестиций в него (начальной цене, по которой актив может быть куплен). Общая доходность равна сумме текущей (дивидендной, процентной) доходности и капитализированной доходности. Последняя возникает в результате изменения (роста) цены актива и находится отношением изменения цены к цене приобретения (начальной цене) актива. Текущая доходность равна отношению годового дохода (дивидендного или процентного) к цене приобретения (начальной цене) актива.

Доходность (обещанная, внутренняя) – ставка, при которой дисконтированные средства, вложенные в финансовый актив, полностью возвращаются владельцу.

Дробление акций – это процедура обмена (конвертации) одной акции на две или большее число акций той же категории с учетом кратного снижения номинальной цены новой акции. Процедура, обратная дроблению, называется консолидацией.

Инвестиции (экон.) – представленные в стоимостной оценке расходы, сделанные в ожидании будущих доходов. Инвестиции подразделяются на два вида – финансовые и реальные. Финансовые инвестиции представляют собой вложение капитала в долгосрочные финансовые активы – паи, акции, облигации. Вложением средств в набор финансовых активов осуществляется портфельное инвестирование. Реальные инвестиции – вложения капитала в развитие материально-технической базы предприятия, производственной и непроизводственной сфер.

Инвестиция (юрид.) – это денежные средства, ценные бумаги, иное имущество, в том числе имущественные права, иные права, имеющие денежную оценку, вкладываемые в объекты предпринимательской и (или) иной деятельности в целях получения прибыли и (или) достижения иного полезного эффекта.

Инвестиционная деятельность (юрид.) – вложение инвестиций и осуществление практических действий в целях получения прибыли и (или) достижение иного полезного эффекта.

Инвестиционный проект – план или программа мероприятий, связанных с осуществлением капиталовложений с целью их последующего возмещения и получения прибыли.

Инвестиционный процесс – это финансовый поток, включающий платежи двух видов – инвестиционные затраты и инвестиционные доходы, причём платежи, связанные с вложением капитала (инвестированием), условно считаются отрицательными, а платежи, связанные с последующим получением дохода, считаются положительными. Инвестиционный процесс – характеризуется потоком платежей, в котором инвестиции (капиталовложения) отрицательны, а доходы положительны.

Инвестиционный анализ — это комплекс методических и практических приемов и методов разработки, обоснования и оценки целесообразности осуществления инвестиций с целью принятия инвестором эффективного решения.

Инновация — использование результатов научных исследований и разработок для улучшения многих сфер общества, таких как социальные сферы, культурные, экономические и т.п. Также необходимо создание благоприятных условий для осуществления подобных инноваций.

Инновационный анализ – это единая информационная система качественных и количественных показателей, критериев и методов, предназначенная для оценки потребности, возможности, целесообразности и эффективности внедрения и использования инноваций в деятельности хозяйствующего субъекта без угрозы его дальнейшему функционированию.

Инновационные инвестиции — это, как правило, инвестиции в нематериальные активы, которые обеспечивают внедрение научных и технических разработок в производство и социальную сферу, т.е. это инвестиции капитала в новые изобретения, приводящие к значительным улучшениям производственной деятельности.

Инвестор – лицо, вкладывающее на долгосрочной основе в некоторый проект собственные средства, ожидая их возврата с прибылью.

Капитализация компании определяется как произведение текущей рыночной цены всех размещенных акций на их число.

Капитальные финансовые активы являются инструментами формирования капитала фирмы, одновременно и объектами, и способами как мобилизации (путем эмиссии), так и инвестирования средств. К таковым относятся акции и облигации.

Конъюнктура – текущее соотношение спроса и предложения на рынке.

Котировка ценных бумаг – определение курса их покупки и продажи на определенный момент времени, т. е. определение наивысшей цены, предлагаемой за ценную бумагу покупателем и наименьшей цены, по которой продавец готов ее уступить.

Купонная ставка – ставка дохода по облигации, выраженная в фиксированном проценте к ее номинальной стоимости.

Курс ценной бумаги – ее рыночная цена.

Ликвидность – способность предприятия в полной мере и в установленный срок выполнить свои обязательства.

Лица, принимающие решение – руководители, инвесторы, кредиторы и прочие юридические и физические лица, способные влиять на финансовое состояние предприятия и заинтересованные в этом.

Номинал акции – это то, что указано на ее лицевой стороне, поэтому иногда именуется нарицательной (лицевой) стоимостью. Из суммы всех номиналов акций, находящихся в обращении, складывается уставный капитал акционерного общества.

Облигация – одностороннее обязательство эмитента вернуть через определенный срок номинальную стоимость плюс проценты, это форма займа, не предполагающая движения товара, к которой приходится прибегать государству, органам местной власти и предприятиям при наличии временных финансовых трудностей.

Оборот – общее количество акций определенного вида, на которые заключены кассовые сделки купли-продажи в течение одной биржевой сессии.

Объем – общая стоимость заключенных кассовых сделок купли-продажи по одной акции в денежном выражении во время данной биржевой сессии.

Опцион (англ. option – выбор) – ценная бумага, оформленная в виде контракта, дающая владельцу право (но не обязательство) купить, если это опцион «колл» (англ. call – затребовать), или продать, если это опцион – «пут» (англ. put – выложить), определенное количество акций по определенной цене в течение определенного времени или на определенную дату. Опционный контракт имеет две стороны – продавец (выписыватель) и покупатель (подписчик) опциона. Покупатель опциона имеет право купить или продать определенное количество акций по определенной цене, и за это право он платит продавцу определенную премию (цену опциона). Продавец опциона несет перед покупателем соответствующее обязательство: например, если покупатель воспользуется опционом – «пут», то продавец опциона обязан купить у него указанное количество акций по указанной в опционе цене.

Портфель (инвестиционный, рыночный) – набор различных ценных бумаг одного владельца, которые выбраны на основе учета целей данного инвестора и результатов анализа.

Рынок – сфера купли-продажи товаров.

Рынок финансовый состоит из трех частей – рынка ценных бумаг, рынка банковских ссуд и валютного рынка. Рынок ценных бумаг часто называют также фондовым рынком.

Риск – возможность экономических потерь, возникающих при наступлении неблагоприятных событий, часто случайных. Для управления рисками можно пользоваться надстройкой @RISK for Microsoft Excel.

Средняя цена акции по итогам торгового периода – отношение объема торговли к обороту за этот период.

Ставка дисконтирования (Диско́нтная ставка, англ. *Discount Rate*) – процентная ставка, используемая для оценки текущей стоимости финансового потока, используемая для расчета дисконтированной стоимости будущих денежных потоков; доходность альтернативных способов инвестирования с такой же степенью риска, процентная ставка по кредитам, взимаемая Федеральной резервной системой при предоставлении кредита банку — члену этой системы.

Стоимость под риском – Value at Risk (VaR) – стоимостная мера риска, абсолютный максимальный размер потерь, которые можно ожидать при владении финансовым инструментом (или их портфелем) на протяжении некоторого фиксированного периода времени (временно́го горизонта) в нормальных рыночных условиях при заданном уровне доверительной вероятности.

Текущая доходность облигации – отношение годового купонного дохода к цене покупки облигации.

Технический анализ является способом анализа тенденций изменения цен и объемов торговли ценными бумагами в прошлом для предвидения изменения цен в будущем. Технический анализ главным образом применяется для анализа цен на рынке ценных бумаг – фондовом рынке. Однако точно так же он может применяться для анализа валютного рынка и рынка ссудных капиталов. В последнем случае аналогом цен акций будут курсы валют или динамика процентов за использование денег.

Товарный варрант (англ. warrant – полномочие, правомочие) – свидетельство, выдаваемое товарными складами, о приеме товара на хранение, этот документ дает владельцу право получить заем под залог указанного товара.

Трейдер – участник рынка ценных бумаг, осуществляющий их покупку и продажу, в том числе брокер, дилер, инвестор, доверительный управляющий ценными бумагами (англ. trade – торговля).

Трейдинг – проведение сделок купли и продажи с ценными бумагами.

Тренд – направление развития цен в виде линии.

Уравнение эквивалентности составляется для любого момента времени путем суммирования (положительных и отрицательных) сумм, дисконтированных или наращенных к этому моменту по эффективной ставке, и приравнивания этой величины к нулю.

Учет векселей представляет собой оплату банком собственного векселя до наступления срока платежа, т. е. векселедержатель передает (продает) вексель банку по индоссаменту до наступления срока платежа и получает за это вексельную сумму за вычетом определенного процента от этой суммы. Каждый банк, учитывая векселя, устанавливает размер дисконта избирательно в зависимости от векселедержателя, предъявившего вексель к учету.

Финансовые активы, согласно международным стандартам финансовой отчетности (МСФО), включают денежные средства, договорное право требования денежных средств или других финансовых активов (например дебиторская задолженность), прочие долговые обязательства перед субъектом (например купленные облигации), договорное право на обмен финансовых инструментов (например, опцион), долевой инструмент (например, акции).

Финансовый анализ – изучение основных параметров, коэффициентов и мультипликаторов, дающих объективную оценку финансового состояния предприятия, а также анализ курса акций предприятия с целью принятия решения о размещении капитала. Финансовый анализ – это часть экономического анализа.

Основные направления финансового анализа:

•анализ коэффициентов финансовой отчетности;

•анализ денежных потоков с учетом дисконтирования;

•эконометрическое моделирование финансовых взаимосвязей;

•оптимизационные модели.

Фондовая биржа – организатор торговли на рынке ценных бумаг, причем участниками торгов на фондовой бирже являются только брокеры, дилеры и управляющие.

Фундаментальный анализ рынка ценных бумаг (ФуА) представляет собой метод классификации компаний на основе экономических факторов. Важнейшей его целью является определение реальной стоимости акций. Если реальная стоимость акций компании оказывается ниже их текущей рыночной цены, то компания считается переоцененной, в противном случае – недооцененной. Для оценки реальной стоимости акций используются данные о финансовом состоянии компании, перспективах развития бизнеса и внешние факторы – влияние конкурентов, контрагентов и государства.

Цена – денежное выражение стоимости. С точки зрения фундаментального анализа цена отличается от стоимости актива: «цена – это то, что платят, а стоимость – это то, что получают».

Ценные бумаги – это особым образом оформленные документы или записи в системе ведения реестра ценных бумаг (при бездокументарной форме), свидетельствующие о правах их владельца на определенное имущество или денежную сумму.

Чарт – графическое представление динамики рыночных цен на фондовой бирже.

Чистый приведенный доход от инвестиций в акции равен разнице между внутренней стоимостью $P_{\text{вн}}$ и текущей рыночной ценой акции P: $\mathrm{NPV} = P_{\text{вн}} - P$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Модель частичной корректировки дивидендов

В моделях частичной корректировки предполагается, что поведенческое уравнение описывает не фактическое значение зависимой переменной *y*, а ее желаемое (целевое) значение:

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2). \tag{1}$$

Предполагается также, что фактическое значение зависимой переменной не выходит мгновенно за желаемый уровень, а изменяется только на долю λ в нужном направлении:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda\left(y_t^* - y_{t-1}\right),\ 0 \le \lambda \le 1. \tag{2}$$

Перепишем (2) в следующем виде:

$$y_t = \lambda y_t^* + (1-\lambda) y_{t-1}. \tag{3}$$

Из (3) видно, что y_t получается как взвешенное среднее (выпуклая комбинация) желаемого уровня и фактического значения этой переменной в предыдущем периоде с параметром λ.

Параметр λ называется *корректирующим коэффициентом*. Чем больше λ, тем быстрее происходит процесс корректировки. Если $\lambda = 1$, то $y_t = y_t^*$ и полная корректировка происходит за 1 период. Если $\lambda = 0$, то корректировка y_t не происходит совсем.

Подставляя правую часть формулы (1) в формулу (3), получаем

$$y_t = \alpha\lambda + \beta\lambda x_t + (1-\alpha) y_{t-1} + \lambda\varepsilon_t. \tag{4}$$

Применяем метод наименьших квадратов к оценке составных параметров уравнения.

Пример. Производственные компании распределяют прибыль *П*, оставшуюся после уплаты налогов: одну часть на выплату дивидендов *D*, другую – на финансирование инвестиций. Известны данные о деятельности производственных компаний за ряд предыдущих лет (усл. ед.):

T	*D*	П	*t*	*D*	П
1	100	400	6	800	1100
2	300	600	7	900	1300
3	450	700	8	1000	1400
4	550	800	9	1100	1500
5	700	1000	10	1200	1700

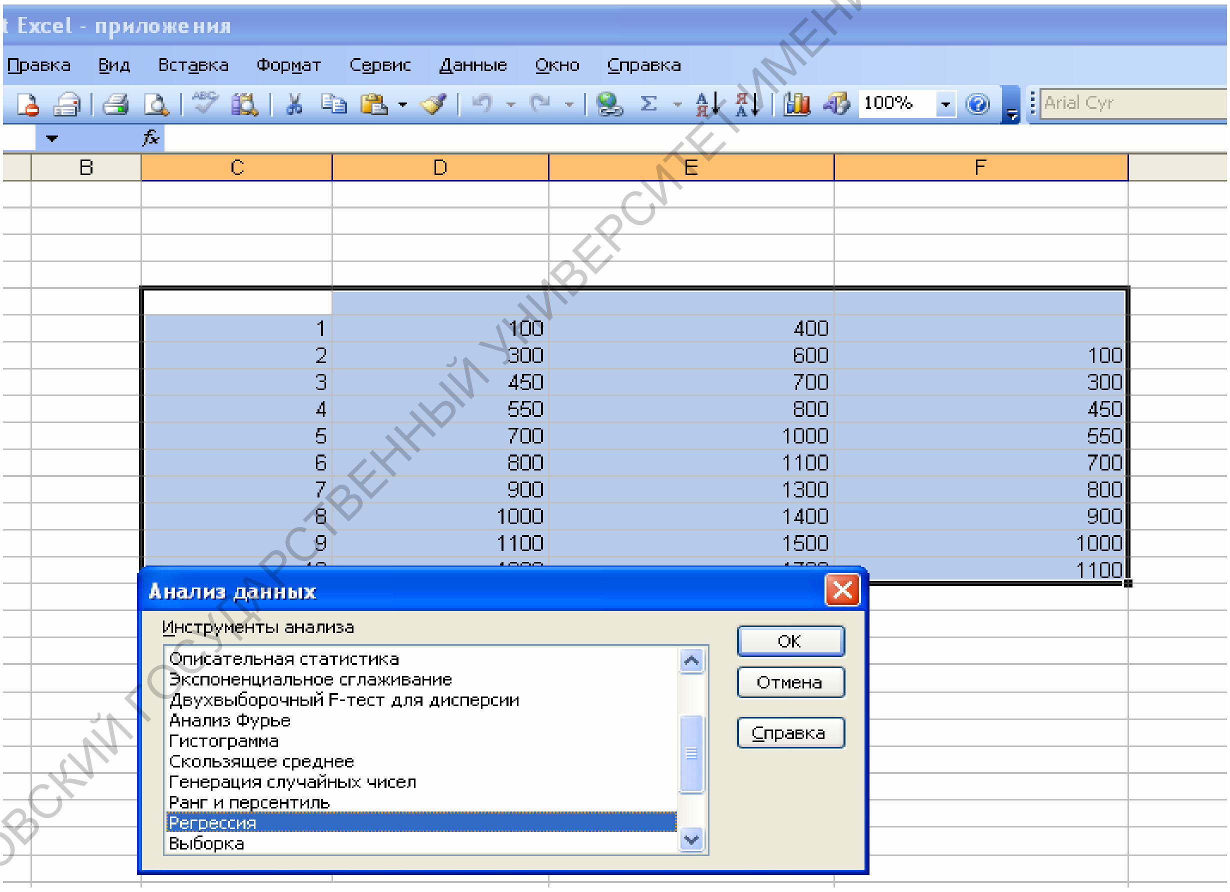
Предположим, что у фирмы имеется целевая долгосрочная доля выплат γ и желаемый объем дивидендов D_t^* соотносится с текущей прибылью Π_t как $D_t^* = \alpha + \gamma\Pi_t + \varepsilon_t$. Однако реальный объем дивидендов подвержен частичной корректировке:

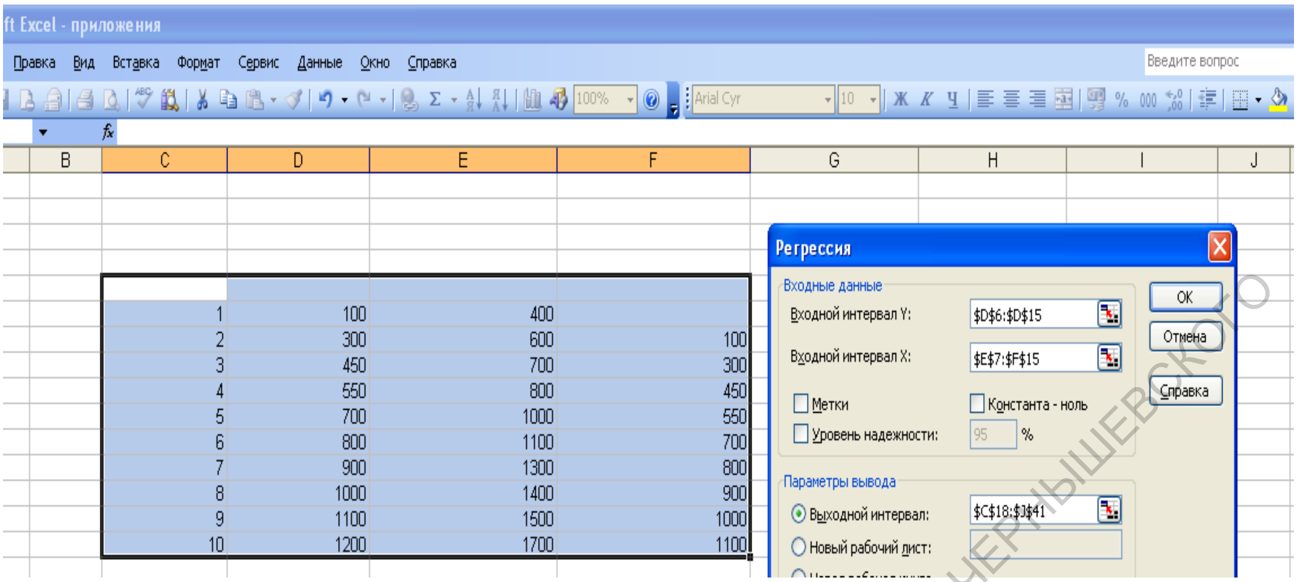
$$D_t - D_{t-1} = \lambda(D_t^* - D_{t-1}), \text{ или } D_t = \alpha\lambda + \gamma\lambda\Pi_t + (1-\lambda)D_{t-1} + \lambda\varepsilon_t,\ 0 \le \lambda \le 1.$$

На основе данных о деятельности производственной компании за ряд лет построим уравнение регрессии. Воспользуемся программой «Регрессия» MSExcel. Вводим исходные и вспомогательные данные с временным сдвигом на 1 год.

t	D	$П$	D_{t-1}
1	100	400	
2	300	600	100
3	450	700	300
4	550	800	450
5	700	1000	550
6	800	1100	700
7	900	1300	800
8	1000	1400	900
9	1100	1500	1000
10	1200	1700	1100

Затем применяем программу «Регрессия».





Получаем результат:

ВЫВОД ИТОГОВ	
Регрессионная статистика	
Множественный R	0,999366914
R-квадрат	0,998734229
Нормированный R-квадрат	0,998312306
Стандартная ошибка	12,49915686
Наблюдения	9

Дисперсионный анализ					
	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	2	739618,182	369809,091	2367,0975	2,02799E-09
Остаток	6	937,373533	156,2289222		
Итого	8	740555,5556			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*
Y-пересечение	**67,82679077**	28,94958901	2,342927588	0,057612817
Переменная X 1	**0,292796439**	0,0710529	4,120823222	0,006210511
Переменная X 2	**0,58174828**	0,081088826	7,174210128	0,000370492

Используя найденные коэффициенты, строим уравнение регрессии: $D_t = 68 + 0{,}29П_t + 0{,}58D_{t-1}$. Из соотношения $1-\lambda = 0{,}58$ определяется корректирующий коэффициент $1-\lambda = 0{,}42$, а из соотношения $\gamma\lambda = 0{,}29$ – оценка доли выплат $\gamma = 0{,}69$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1.*Дудов С.И.* Оптимальное портфельное инвестирование. Саратов, 2008.
2.*Дудов С.И., Сидоров С.П.* Курс математической экономики. Саратов, 2002.
3.*Колемаев В.А.*Математические методы и модели исследования операций. Учебник. М.:ЮНИТИ, 2008.
4.*Выгодчикова И.Ю.* Процентный анализ финансовых потоков. Саратов: Изд-во СГУ, 2008.
5.*Выгодчикова И.Ю.* Оценка доходности финансовых активов. Саратов: Изд-во СГУ, 2009.
6.*Выгодчикова И.Ю.* Основы финансовых вычислений (учебное пособие) // Саратов: Изд-во СГСЭУ, 2012 г. – 108 с.
7.Финансовая математика: математическое моделирование финансовых операций. Учеб. пособие/ под ред. В.А. Половникова, А.И. Пилипенко. М.: Вузовский учебник, 2007.
8.*В.В. Капитоненко*. Задачи и тесты по финансовой математике. М.: Финансы и статистика, 2007.
9.*П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов*. Финансовая математика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
10.К.В. Балдин, С.Н. Воробьев, В.Б. Уткин. Управленческие решения: Учебник. – 7-е изд. - М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и Ко», 2012.

Дополнительная литература

11.*Четыркин Е.М.* Финансовые риски. М.: «ДЕЛО», 2008.
12.. *Хохлов, А. Г. . Математические методы и компьютерные технологии в науке и образовании: учебное пособие/ А. Г. Хохлов; Тюм. гос. ун - т. - Тюмень: Изд - во ТюмГУ, 2013.*
13.*Гусева, Е.Н. Экономико - математическое моделирование [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е.Н. Гусева. - Электрон. текстовые дан. – 2 - е изд., стереотип. - М.: Флинта, 2011.*
14.*Шарп У.Ф., Александер Г.Д., Бейли Д.Б.* Инвестиции. М.: Инфра-М, 2007.
15.*Sharpe W.F., Alexander G.J.* Investments, 4-Th ed. Prentice-Hall International, Inc., 1990.
16. *Колесов Е.В.* Математические методы финансового анализа: Учебное пособие. – Кострома: Изд-во Костром. ун-та, 2007.
17.*Малыхин В.И.* Финансовая математика. М., 2000.
18.*Четыркин Е.М.* Финансовая математика. М.: Дело, 2001.

Оглавление

Учебное издание

Выгодчикова Ирина Юрьевна

Математические методы оптимальных финансовых решений

Учебное пособие

для студентов, обучающихся по направлениям подготовки:

38.03.01 – «Экономика» (бакалаврская программа «Экономика предпринимательства»),
38.03.02 – «Менеджмент» (бакалаврская программа «Корпоративное управление»),
38.04.01 – «Экономика» (магистерская программа «Экономика предпринимательства»),
38.04.01 – «Экономика» (магистерская программа «Финансовый инжиниринг»),
38.04.02 – «Менеджмент» (магистерская программа «Корпоративное управление»),
09.03.03 – «Прикладная информатика» (бакалаврская программа»),
38.03.05 – «Бизнес-информатика» (бакалаврская программа»)