ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского»

ОСНОВЫ ТЕОРИИ РЯДОВ

О.В. Сорокина

Учебное пособие
для студентов нематематических направлений подготовки

Саратов, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с Федеральным Государственным образовательным стандартом высшего образования и программой курса «Математика» для студентов Института химии СГУ.

Курс «Математика» является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной. Ее изучение предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач;
- овладение основными приемами работы с рядами;
- выработку умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

Цель пособия – помочь студентам Института химии СГУ освоить основные понятия теории рядов и получить практические навыки при решении типовых задач по данной теме.

В пособии рассматриваются основные вопросы теории рядов, а также некоторые приложения теории рядов. Подробное содержание приведено в оглавлении. В пособии кратко изложены необходимые теоретические сведения и формульные соотношения, основной материал иллюстрируют многочисленные примеры. Приведены задачи для самостоятельного решения. Самостоятельное решение этих задач позволит студентам освоить методику работы с рядами и будет способствовать лучшему пониманию пройденного материала. Ответы к задачам помогут проконтролировать правильность их решения.

Пособие может быть полезно при изучении данной темы студентами нематематических направлений подготовки, изучающих высшую математику.

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Определение числового ряда и его сходимости

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$ где $a_n = f(n),$ – бесконечная числовая последовательность.

Символ вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1.1)$$

называется бесконечным *числовым рядом*.

Ряд (1.1) часто записывают в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами ряда*; $a_n = f(n)$ называется *общим членом* числового ряда.

Выражение (1.1) рассматривается как единое целое и само по себе никакого определенного смысла не имеет, поскольку действие сложения в своем непосредственном содержании имеет дело каждый раз лишь с конечным числом слагаемых. При определении смысла выражения (1.1) нужно, с одной стороны, чтобы «бесконечная сумма» была «похожа» на обычные суммы, а с другой, – описывала бы на языке математического анализа те или иные реальные факты и помогала бы решать задачи. Поэтому сумму в (1.1) можно понимать по-разному. Ограничимся рассмотрением только одной такой формулировки.

Выражения вида

$S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$; $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

называются *частичными суммами* ряда (1.1).

Частичные суммы $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ образуют последовательность частичных сумм.

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

то ряд называется *сходящимся*, а число S называется его *суммой*.

В противном случае (т.е. если предел частичных сумм бесконечен или не существует), ряд называется *расходящимся.*

Содержание теории числовых рядов состоит в установлении сходимости или расходимости тех или иных рядов и в вычислении сумм сходящихся рядов.

В принципе можно доказывать сходимость или расходимость каждого ряда, а также вычислять сумму сходящегося ряда, опираясь непосредственно на определения сходимости и суммы. Именно, в каждом случае можно попытаться составить аналитическое выражение для n-ой частичной суммы ряда и найти предел этого выражения при возрастании n.

Примеры.

1. Исследовать ряд, составленный из членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = const$

$$aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n + \ldots (a \neq 0). \qquad (1.2)$$

Решение.

Данный ряд является простейшим (и очень важным!) примером числового ряда.

Как известно, сумма n членов бесконечной геометрической прогрессии (частичная сумма ряда) имеет вид

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Для выяснения вопроса сходимости ряда (1.2), необходимо вычислить

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q} - \lim_{n\to\infty}\frac{aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n$$

Дальнейшее зависит от значения знаменателя q.

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$. Следовательно, в этом случае ряд (1.2) сходится, и его сумма S будет определяться формулой

$$S = \frac{a}{1-q}. \qquad (1.3)$$

Если $q \geq 1$, то, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ (в зависимости от знака a) и, следовательно, ряд (1.2) расходится.

В остальных случаях $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует и ряд (1.2) является расходящимся. ■

2. Исследовать ряд: $1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$.

Решение.

Для данного ряда n-ая частичная сумма

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2} = \infty$. Таким образом, ряд расходится и о его сумме говорить нельзя. ■

3. Исследовать ряд: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots$.

Решение.

Для данного ряда всякая частичная сумма S_n с четным номером n равна нулю, с нечетным номером – единице:

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0, \ldots$$

Последовательность частичных сумм ряда хотя и ограничена, но не имеет предела. Следовательно, данный ряд расходится и не имеет суммы. ■

4. Исследовать ряд

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots.$$

Решение.

Общий член ряда $a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ можно представить в следующем виде:

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Тогда

$$a_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right),\quad a_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right),\quad a_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right),\quad a_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right),$$

Следовательно, для данного ряда n-ая частичная сумма

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}$, то ряд сходится и его сумма $S=\dfrac{1}{2}$.■

Только что описанный путь часто оказывается неудобным из-за трудности явного вычисления частичных сумм ряда и нахождения предела их последовательности. Также при исследовании рядов значения частичных сумм не представляют интереса. Более того, иногда не нужна даже сумма ряда, а все исследования ведутся лишь ради установления самого факта сходимости или расходимости ряда. Поэтому интерес представляют методы анализа рядов, приводящие к их суммам непосредственно, минуя вычисление частичных сумм. Точно также оказываются полезными приемы, позволяющие констатировать сходимость ряда без нахождения его суммы.

Остаток ряда

Пусть дан ряд (1.1).

Ряд вида

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n+k} \tag{1.4}$$

называется n-м *остатком ряда*.

Если S_n и S_{n+m} – частичные суммы ряда (1.1), то, очевидно, $S_{n+m} - S_n$ будет являться m – ой частичной суммой ряда (1.4).

Кроме того, $S_{n+m} = S_n + (S_{n+m} - S_n)$, откуда, переходя к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\lim_{m\to\infty} S_{n+m} = S_n + \lim_{m\to\infty} (S_{n+m} - S_n). \qquad (1.5)$$

Предел слева определяет сумму S исходного ряда, а предел справа – сумму r_n его n-ого остатка. Ясно, что из существования предела в левой части равенства (1.5) следует существование предела в правой его части и наоборот.

Отсюда можно сформулировать несколько свойств ряда.

1◦. Если сходится ряд (1.1), то сходится ряд (1.4).

2◦. Если сходится ряд (1.4), то сходится ряд (1.1).

3◦. Если ряд (1.1) сходится, то сумма r_n его n-ого остатка с ростом n стремится к нулю, то есть $\lim\limits_{n\to 0} r_n = 0$.

Основные теоремы о числовых рядах

ТЕОРЕМА (критерий сходимости Коши). Для того, чтобы ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

обладала следующим свойством: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое n, что при любом $m \geq 0$

$$\left| S_{n+m} - S_n \right| < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

сходится, то при $n \to \infty$ предел общего члена сходящегося ряда равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Этот признак не является достаточным, то есть если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ это еще не значит, что ряд будет сходиться. Однако, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \ldots + \frac{2^{n-1} + 1}{2^n} + \ldots$$

Решение.

Для данного ряда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to 0} \frac{2^{n-1}+1}{2^n} = \lim_{n\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2} > 0.$$

Таким образом, не выполняется необходимый признак сходимости, следовательно, ряд расходится. ■

ТЕОРЕМА (ассоциативный закон для сходящихся рядов). Если в сходящемся ряде

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

произвольно объединить соседние члены в группы, не нарушая порядка членов

$$(a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3}) + \ldots$$

и найти суммы $v_1, v_2, v_3, \ldots$ членов, входящих в каждую из групп, то составленный из этих сумм ряд

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

будет сходиться и иметь туже сумму, что и первоначальный ряд.

<u>Следствие</u>. Если в результате, составленный из сумм групп, ряд расходится, то и первоначально взятый ряд будет расходиться.

Пример. Исследовать ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \tag{1.6}$$

Решение.

Очевидно, что для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \tag{1.7}$$

Очевидно, для этого ряда

$S_1 = 1,$

$S_2 = S_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$

$S_3 = S_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$

$S_4 = S_3 + a_4 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$

……………………………

Вообще для четного $n = 2k$: $S_{2k} = 1 - \frac{1}{k+1}$, а для нечетного $n = 2k+1$: $S_{2k+1} = 1.$

Тогда $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, так что ряд (1.7) сходится. Но тогда сходится ряд (1.6), получаемый попарным объединением членов ряда (1.7) и сумма этого ряда также равна единице. ■

ТЕОРЕМА (дистрибутивный закон для сходящихся рядов). Пусть

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

– некоторый ряд, а c – произвольное число, отличное от нуля. Тогда ряд

$$ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots + ca_n + \ldots$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится исходный ряд. Если суммой исходного ряда является число S, то сумма последнего ряда равна cS.

ТЕОРЕМА (о сложении рядов). Если сходятся ряды

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots; \qquad b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots,$$

имеющие соответственно суммы S и Ω, то сходится и ряд

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots,$$

причем сумма последнего ряда равна $S + \Omega$.

Теорема означает, что сходящиеся ряды можно почленно складывать и при этом складываются их суммы.

ТЕОРЕМА. Если в ряд вписать на любых местах конечное число новых членов, или отбросить конечное число его членов, то сходимость ряда не изменится, то есть сходящийся ряд останется сходящимся, а расходящийся – расходящимся. Если первоначальный ряд был сходящимся, то сумма нового ряда получится из суммы старого увеличением ее на сумму вписанных членов, или уменьшением ее на сумму отброшенных членов.

Таким образом, сходимость ряда не зависит от любого конечного числа членов ряда. Поэтому для установления сходимости (или расходимости) ряда не обязательно учитывать все его члены. Достаточно ограничиться членами, «начиная с некоторого номера n».

Задачи для самостоятельного решения.

Найти сумму ряда:

1. $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$

2. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots$

3. $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} + \ldots$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Исследовать сходимость рядов, проверив выполнение необходимого условия сходимости:

5. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+..+\frac{n}{3n-1}+\ldots$

6. $0{,}6+0{,}51+0{,}501+..+\left[0{,}5+(0{,}1)^n\right]+\ldots$

7. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+..+\frac{2n-1}{2n}+\ldots$

Ответы.

1. $\frac{4}{3}$. 2. $\frac{1}{4}$. 3. $\frac{1}{12}$. 4. 1. 5. Расходится. 6. Расходится. 7. Расходится.

1.2. РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Все приемы, позволяющие устанавливать сходимость или расходимость рядов, называются *признаками сходимости.* В настоящее время известно большое число различных признаков сходимости. К числу признаков сходимости можно отнести всякого рода теоремы, позволяющие сводить вопрос о сходимости некоторого данного ряда к аналогичному вопросу о другом ряде, который имеет более простую структуру. Эти теоремы обычно состоят в сравнении членов исследуемого ряда с членами другого ряда, поведение которого уже выяснено. Поэтому они называются *признаками сравнения.*

Будем рассматривать только ряды с положительными членами, или *знакоположительные ряды*, не оговаривая каждый раз это обстоятельство.

Пусть

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \tag{1.8}$$

$$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n+\ldots \tag{1.9}$$

–два знакоположительных ряда.

ТЕОРЕМА (первый признак сравнения). Если члены ряда (1.8), начиная с некоторого номера, не превосходят соответствующих членов ряда (1.9)

$$a_n \le b_n, \qquad n=k,\, k+1,\ldots \tag{1.10}$$

то из сходимости ряда (1.9) следует сходимость (1.8), а из расходимости (1.8) следует расходимость (1.9).

Примеры.

1. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{1.11}$$

Данный ряд называется рядом *обратных квадратов*.

Решение.

Отбросив первый член этого ряда, что, как известно не сказывается на его сходимости, сравним его с рядом

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,$$

сходимость которого была уже установлена. Очевидно, что

$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}.$$

следовательно, ряд (1.11) сходится. ■

2. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \tag{1.12}$$

Данный ряд называется *гармоническим рядом*.

Решение.

Заменим в гармоническом ряде третий и четвертый члены на $\frac{1}{4}$ каждый, следующие четыре члена – на $\frac{1}{8}$ каждый, следующие восемь членов – на $\frac{1}{16}$ и т.д. В результате получим ряд

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\underbrace{\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}}_{8 членов}+\underbrace{\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}}_{16 членов}+\ldots \tag{1.13}$$

Члены этого ряда не превосходят соответствующих членов гармонического ряда, поэтому для доказательства расходимости гармонического ряда достаточно установить расходимость ряда (1.13). Для этого объединим группы одинаковых членов ряда (1.13) в один член нового ряда. Так как каждая k-я группа насчитывает 2^{k-2} члена, а каждый член равен $\frac{1}{2k-1}$, то сумма членов в каждой группе равна $\frac{1}{2}$. Новый ряд будет иметь вид

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Этот ряд расходится, поскольку не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Следовательно, в силу следствия из ассоциативного закона для сходящихся рядов, будет расходиться и ряд (1.13), а потому и гармонический ряд.

Следует отметить, что гармонический ряд представляет ряд, для которого выполнено необходимое условие сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, но сам ряд является расходящимся.■

3. Исследовать сходимость ряда

$$\sin\frac{1}{1^2}+\sin\frac{1}{2^2}+\sin\frac{1}{3^2}+\ldots+\sin\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Решение.

Для сравнения рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Это ряд обратных квадратов, и он сходится. Очевидно, для любого n справедливо неравенство $\sin\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2}$. Следовательно, сходится и данный ряд. ■

4. Исследовать сходимость ряда

$$tg1+tg\frac{1}{2}+tg\frac{1}{3}+\ldots+tg\frac{1}{n}+\ldots$$

Решение.

Для сравнения рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, и он расходится. Очевидно, для любого n справедливо неравенство $tg\frac{1}{n}>\frac{1}{n}$. Следовательно, расходится и данный ряд. ■

ТЕОРЕМА (второй признак сравнения). Если существует конечный, отличный от нуля, предел отношения общего члена ряда (1.8) к общему члену ряда (1.9):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k>0, \tag{1.14}$$

то ряды (1.8), (1.9) сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\left(e^{\frac{1}{1}}-1\right)+\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)+\ldots+\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)+\ldots$$

Решение.

Возьмем в качестве вспомогательного ряда гармонический ряд, который расходится. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{1}{n}\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{правило Лопиталя}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}e^{\frac{1}{n}}}{\left(-\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1>0.$$

Следовательно, данный ряд, как и гармонический, является расходящимся. ■

ТЕОРЕМА (признак сходимости Даламбера). Если для ряда (1.8) существует предел отношения $(n+1)$-го члена к n-ому:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D, \tag{1.15}$$

то этот ряд сходится при $D<1$ и расходится при $D>1$.

Замечание. Теорема не дает ответа на вопрос о сходимости ряда в случае $D=1$. В данной ситуации требуются дополнительные исследования.

Примеры.

1. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{3\cdot 1!}+\frac{2^2}{3^2\cdot 2!}+\ldots+\frac{n^n}{3^n\cdot n!}+\ldots$$

Решение.

Применим признак Даламбера. Имеем

$$a_n=\frac{n^n}{3^n n!};\qquad a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}.$$

Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}:\frac{n^n}{3^n n!}=\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{3^n n!}{n^n}=\frac{(n+1)^n\cdot(n+1)}{3\cdot 3^n n!(n+1)}\cdot\frac{3^n n!}{n^n}=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{3}\cdot e.$$

Так как $e=2{,}718\ldots<3$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e}{3}<1$. Поэтому данный ряд сходится.■

2. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2^{10}}+\frac{2^3}{3^{10}}+\ldots+\frac{2^n}{n^{10}}+\ldots$$

Решение.

Применим признак Даламбера. Имеем

$$a_n = \frac{2^n}{n^{10}}; \qquad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}.$$

Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}} : \frac{2^n}{n^{10}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}} \cdot \frac{n^{10}}{2^n} = \frac{2^n \cdot 2}{(n+1)^{10}} \cdot \frac{n^{10}}{2^n} = 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{10}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}} = 2.$$

Так как $D = 2 > 1$, то данный ряд расходится. ■

ТЕОРЕМА (признак сходимости Коши). Если для ряда (1.8) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = D, \tag{1.16}$$

то этот ряд сходится при $D < 1$ и расходится при $D > 1$.

Замечание. Теорема не дает ответа на вопрос о сходимости ряда в случае $D = 1$. В данной ситуации требуются дополнительные исследования.

Примеры.

1. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n + \ldots$$

Решение.

Применим признак Коши. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Так как $D = \frac{1}{2} < 1$, то данный ряд сходится. ■

2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение.

Применим признак Коши. Имеем

$$a_n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}; \qquad \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}e.$$

Так как $D=\frac{e}{2}>1$, то данный ряд расходится. ■

ТЕОРЕМА (интегральный признак сходимости). Если $f(x)$ при $x\geq 1-$непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_n=f(n)$, сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится интеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$.

Примеры.

1. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots(p>0).$$

Данный ряд называется *обобщенным гармоническим рядом*.

Решение.

Применим интегральный признак. Имеем $a_n=\frac{1}{n^p}$. Функция $f(x)=\frac{1}{x^p}\ (p>0)$ при $x\geq 1-$непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция.

При $p\neq 1$

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^b=\frac{1}{1-p}\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-p}-1\right)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1,\\ \infty, & p<1.\end{cases}$$

При $p=1$

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=+\infty.$$

Объединяя результаты, в итоге получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$ (интеграл является конечной величиной) и расходится при $p\leq 1$.■

2. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots$$

Решение.

Применим интегральный признак.

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}, \quad f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}.$$

$$\int_1^\infty f(x)dx=\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx=\int_1^\infty \frac{\frac{dx}{(x+1)}}{\ln(x+1)}=\ln\ln(x+1)\Big|_1^\infty=\infty.$$

Интеграл расходится, поэтому расходится и данный ряд. ■

Исследование сходимости ряда при помощи какого-либо признака должна начинаться с проверки того, входит ли данный ряд в сферу применимости используемого признака.

После того, как убедились, что выбранный признак сходимости применим к интересующему нас ряду, следует подумать о том, как выглядит это применение на практике. Соображения удобства, простоты, а иногда и самой фактической возможности применения признаков сходимости обычно играют при этом важную роль.

Задачи для самостоятельного решения.

Исследовать сходимость рядов с помощью первого признака сравнения:

1. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{2^{n+1}}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{\ln(n+1)}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{2^n}{5^n+1}$.

Исследовать сходимость рядов с помощью второго признака сравнения:

4. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{4\cdot 2^n-3}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{2^n+1}{5^n+1}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$.

Исследовать сходимость рядов с помощью признака Даламбера:

7. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n}{\sqrt{3^n}}$; 8. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{10^n}{n!}$; 9. $\sum\limits_{n=1}^\infty \left(\frac{11}{10}\right)^n \frac{1}{n^5}$; 10. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{2^n+1}{3n^2}$.

Исследовать сходимость рядов с помощью признака Коши:

11. $\sum\limits_{n=1}^\infty \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; 12. $\sum\limits_{n=1}^\infty \left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$; 13. $\sum\limits_{n=1}^\infty \left[2+(0{,}1)^{n-1}\right]$.

Исследовать сходимость рядов с помощью интегрального признака:

14. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$; 15. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{(10n-1)\ln(10n-1)}$.

Ответы.
1. Сходится. 2. Расходится. 3. Сходится. 4. Сходится. 5. Сходится. 6. Расходится. 7. Сходится. 8. Сходится. 9. Расходится. 10. Сходится. 11. Сходится. 12. Сходится. 13. Расходится. 14. Сходится. 15. Расходится.

1.3. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Знакопеременным рядом называется ряд, членами которого являются вещественные числа произвольного знака.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – некоторый знакопеременный ряд. Некоторую информацию об этом ряде можно получить, рассматривая ряд, составленный из абсолютных величин его членов: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Этот ряд является рядом с положительными членами и потому его можно изучать на основании приемов, изложенных выше.

Знакопеременный ряд сходится, если сходится ряд из модулей его членов. В этом случае знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*.

Сходящийся знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если расходится ряд, составленный из модулей его членов.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots$$

Решение.

Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots$$

Этот ряд есть бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и, следовательно, сходится. Значит, и данный ряд сходится, причем абсолютно. ■

ТЕОРЕМА (Дирихле). Если в абсолютно сходящемся ряде произвольным образом переставить члены, то полученный ряд также будет абсолютно сходиться, а сумма его будет равна сумме исходного ряда.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ условно сходится, то при перестановке его членов сумма ряда может измениться. В частности, при соответствующей перестановке членов условно сходящегося ряда можно превратить его в расходящийся ряд.

Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать.

ТЕОРЕМА. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся и имеют соответственно суммы S_1 и S_2, то сходится абсолютно ряд

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + a_3b_{n-2} + \ldots + a_nb_1) + ..,$$

называемый *произведением рядов* (по Коши), и его сумма равна $S_1 \cdot S_2$.

Результат произведения можно записать в виде

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots. + w_n + \ldots, \qquad (1.17)$$

где

$w_1 = a_1b_1,$

$w_2 = a_1b_2 + a_2b_1,$

$w_3 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1,$

………………………………….,

$w_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + a_3b_{n-2} + \ldots + a_nb_1.$

Эта группировка соответствует умножению по схеме:

$$\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots. \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots. \\ \hline a_1b_1 + a_2b_1 + a_3b_1 + a_4b_1 + \ldots. \\ \qquad a_1b_2 + a_2b_2 + a_3b_2 + \ldots. \\ \qquad\qquad a_1b_3 + a_2b_3 + \ldots. \\ \qquad\qquad\qquad a_1b_4 + \ldots. \\ \hline w_1 + \; w_2 \; + \; w_3 \; + \; w_4 + \ldots \end{array}$$

П р и м е р . Найти произведение абсолютно сходящихся рядов

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots,$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \ldots,$$

Р е ш е н и е .

Перемножая ряды по приведенной выше схеме, получим

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\ldots\\
&+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\\
&-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\ldots\\
&+\frac{1}{16}+\ldots\\
\hline
&1+0+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{16}+\ldots
\end{aligned}
$$

Закон составления полученного ряда выражается формулами

$$w_{2n-1}=\frac{1}{2^{2n-1}},\quad w_{2n}=0.$$

Опуская нули, получаем абсолютно сходящийся ряд

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}+\ldots$$

Его сумма есть произведение сумм исходных рядов. Это легко проверить, так как сумма первого ряда, как сумма прогрессии, равна 2, а сумма второго исходного ряда равна $\frac{2}{3}$, а сумма результата есть $\frac{4}{3}$.■

Знакочередующиеся числовые ряды

Знакопеременный ряд называется *знакочередующимся*, если соседние его члены имеют различные знаки.

Примерами знакочередующихся рядов могут служить геометрические прогрессии с отрицательными знаменателями.

Для знакочередующихся рядов имеется достаточно общий и практический признак сходимости, принадлежащий Лейбницу.

ТЕОРЕМА (признак сходимости Лейбница). Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,\ \ (a_i>0,\ i=1,2,3,\ldots)\qquad(1.18)$$

образуют монотонно убывающую последовательность

$$a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n>\ldots,\qquad(1.19)$$

общий член которой стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\qquad(1.20)$$

то знакочередующийся ряд (1.18) сходится.

Рассмотрим n-ю частичную сумму сходящегося знакочередующегося ряда, для которого выполняется признак Лейбница:

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n$$

Введем в рассмотрение n-й остаток ряда R_n. Его можно записать как разность между суммой ряда S и n-й частичной суммой S_n: $R_n = S - S_n$. Нетрудно видеть, что

$$R_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \ldots).$$

Величина $|R_n|$ оценивается с помощью неравенства: $|R_n| < a_{n+1}$.

Примеры.

1. Исследовать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots$$

Решение.

Данный ряд знакочередующийся. Проверим выполнение условий признака Лейбница. Очевидно, что $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots\ldots$ Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Следовательно, на основании признака Лейбница, данный ряд сходится. При этом, так как ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, является гармоническим рядом и расходится, то данный ряд является условно сходящимся рядом. ■

2. Исследовать сходимость ряда

$$1{,}1 - 1{,}01 + 1{,}001 - \ldots + (-1)^{n-1}\left[1 + (0{,}1)^n\right] + \ldots$$

Решение.

Для данного знакочередующегося ряда проверим выполнение условий признака Лейбница. Первое условие признака Лейбница, очевидно, выполняется: $1{,}1 > 1{,}01 > 1{,}001 > \ldots$.

С другой стороны, $a_n = 1 + \frac{1}{10^n}$; $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{10^n}\right) = 1 \neq 0$.

Таким образом, не выполнено второе условие признака Лейбница, следовательно, исходный ряд расходится. ■

3. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} - \frac{4}{4^2+1} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1} + \ldots$$

Решение.

Применим признак Лейбница. Так как

$$\frac{2}{2^2+1}=\frac{1}{2+1/2};\ \frac{3}{3^2+1}=\frac{1}{3+1/3};\ \frac{4}{4^2+1}=\frac{1}{4+1/4},\ldots.$$

то $\frac{1}{2}>\frac{2}{2^2+1}>\frac{3}{3^2+1}>\frac{4}{4^2+1}>\ldots.$

Следовательно, выполнено первое условие признака Лейбница. Так как

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1/n}=0,$$

то выполнено и второе условие. Значит, данный ряд сходится. ■

Задачи для самостоятельного решения.

Исследовать сходимость знакочередующихся рядов и установить характер сходимости (абсолютная, условная).

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n-2}{3n-1}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{n}{10^n}\right)$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n+1}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{(n+1)^3+n}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.

Найти произведение абсолютно сходящихся рядов

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$.

Ответы.

1. Расходится. 2. Расходится. 3. Сходится условно. 4. Сходится условно. 5. Сходится абсолютно. 6. Расходится. 7. Сходится абсолютно. 8. Сходится условно. 9. $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+\ldots$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

2.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДАХ

Так как задание числового ряда состоит в задании каждого его члена, а член ряда есть число, то задание функционального ряда от некоторой переменной x состоит в задании ряда функций от этой переменной, являющихся членами функционального ряда.

Выражение

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \quad (2.1)$$

называется *функциональным рядом* относительно переменной x.

Если переменная x принимает только вещественные значения и значения функций, являющихся членами ряда (2.1), также все вещественные, то ряд (2.1) называется *вещественным рядом*.

Если же значения переменной x, как и значения функций $u_n(x)$, могут быть и комплексными, то ряд (2.1) называется *комплексным рядом*.

В дальнейшем будем иметь в виду только вещественные ряды.

Каждый из членов функционального ряда может быть, в частности, и постоянной. В этом случае функциональный ряд превращается в числовой. Таким образом, числовой ряд является частным случаем функционального ряда.

Придавая в выражении (2.1) переменной x некоторые значения x_0, x_1 и т.д., будем получать те или иные числовые ряды

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots,$$
$$u_1(x_1)+u_2(x_1)+u_3(x_1)+\ldots+u_n(x_1)+\ldots$$

и т.д.

В зависимости от значения переменной x полученный числовой ряд может оказаться сходящимся или расходящимся.

Совокупность всех значений переменной x, для которых функции $u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),..u_n(x),\ldots$ определены и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда (2.1).

Областью сходимости X функционального ряда чаще всего служит какой-нибудь промежуток оси Ox.

Каждому значению $x_0 \in \mathrm{X}$ соответствует определенное значение величины $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)=S(x_0)$, где $S_n(x_0)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x_0)$–частичная сумма ряда.

Величину $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, являющуюся функцией x и определенную в области сходимости, называют *суммой* функционального ряда.

Примеры.

1. Исследовать сходимость функционального ряда в точках $x=0$ и $x=1$.

$$\frac{4-x}{7x+2}+\frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n+\ldots$$

Решение.

В точке $x=0$ получаем следующий числовой ряд:

$$2+\frac{1}{3}2^2+\frac{1}{5}2^3+\ldots+\frac{1}{2n-1}2^n+\ldots$$

В нем $u_n=\dfrac{2^n}{2n-1}$; $u_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{2n+1}$. Применяя признак Даламбера, получим

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(2n-1)}{2^n(2n+1)}=2\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=2\lim_{n\to\infty}\frac{2-1/n}{2+1/n}=2>1.$$

Следовательно, в этой точке ряд расходится.

В точке $x=1$ получаем следующий числовой ряд:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{3^n}+\ldots$$

В нем $u_n=\dfrac{1}{(2n-1)3^n}$; $u_{n+1}=\dfrac{1}{(2n+1)3^{n+1}}$. Применяя признак Даламбера, получим $D=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n(2n-1)}{3^{n+1}(2n+1)}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}=\dfrac{1}{3}<1$, то есть ряд сходится. ■

2. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{4+x^2}+\frac{1}{9+x^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+x^2}+\ldots$$

Решение.

Члены данного ряда при любом значении x, очевидно, меньше соответствующих членов ряда «обратных квадратов»

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Так как последний ряд сходится, по признаку сравнения должен сходиться и исходный ряд при любом x. Таким образом, областью сходимости данного ряда является множество всех действительных чисел. ■

3. Исследовать на сходимость функциональный ряд

$$\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots$$

Решение.

При $x>1$ получим сходящиеся ряды, как частные случаи обобщенного гармонического ряда. При $x\le 1$, получающиеся числовые ряды, очевидно, расходятся. Следовательно, область сходимости исходного функционального ряда: $(1,+\infty)$. ■

4. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{2+\sin x}+\frac{1}{3+\sin x}+\frac{1}{4+\sin x}+\ldots+\frac{1}{n+1+\sin x}+\ldots$$

Решение.

Так как при любом значении x величина $|\sin x|\le 1$ и члены ряда не меньше соответствующих членов гармонического ряда, который, как известно, расходится. Следовательно, данный ряд не сходится ни при каком значении x. Можно сказать, что область сходимости этого ряда пуста. ■

5. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^4}+\frac{1}{1+x^6}+\ldots+\frac{1}{1+x^{2n}}+\ldots$$

Решение.

Если $|x|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=1\neq 0$. Следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости числового ряда и исходный функциональный ряд расходится.

Если $|x|=1$, то также получаем расходящийся ряд:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}+\ldots$$

Если $|x|>1$, то члены данного ряда меньше членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\ldots+\frac{1}{x^{2n}}+\ldots$$

Ряд, составленный из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии сходится, следовательно, исходный ряд в этом случае сходится.

Таким образом, область сходимости определяется неравенством $|x|>1$. Отсюда следует, что ряд сходится при $-\infty<x<1\cup 1<x<+\infty$. ■

Равномерная сходимость функционального ряда

Представим сумму ряда в виде

$$S(x)=S_n(x)+R_n(x),$$

где $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)$; $R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$

Выражение $R_n(x)$ называется *остатком* функционального ряда.

Сходящийся функциональный ряд называется *равномерно сходящимся* в некоторой области χ, если для каждого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число N, что при каждом $n \geq N$ выполняется неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in \chi$.

Примеры.

1. Показать, что ряд

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2+x^4} + \frac{1}{3+x^6} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^{2n}} + \ldots$$

сходится равномерно при всех значениях x $(-\infty < x < +\infty)$.

Решение.

Данный ряд при любом значении x сходится по признаку Лейбница, поэтому его остаток оценивается с помощью неравенства

$$|R_n(x)| < |u_{n+1}(x)| \Rightarrow |R_n(x)| < \frac{1}{x^{2n+2} + n + 1} \Rightarrow |R_n(x)| < \frac{1}{n+1}.$$

Так как неравенства $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$ и $n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$ равносильны, то взяв $n \geq N$, где $N -$ какое-нибудь целое положительное число, удовлетворяющее условию $N \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$, приходим к выполнению неравенства $|R_n(x)| < \varepsilon$. Следовательно, данный ряд сходится равномерно в промежутке $(-\infty, +\infty)$.■

2. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится неравномерно в интервале $(-1, 1)$.

Решение.

В указанном интервале ряд сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Для данного ряда $R_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} \ldots$, то есть $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Тогда

$$\lim_{x \to -1+0} |R_n(x)| = \lim_{x \to -1+0} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = \frac{1}{2}, \quad \text{а} \quad \lim_{x \to 1-0} |R_n(x)| = \lim_{x \to 1-0} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = \infty.$$

Следовательно, приняв $\varepsilon > \frac{1}{2}$, невозможно добиться выполнения неравенства $|R_n(x)| < \varepsilon$ при любом значении $x \in (-1, 1)$. Таким образом, исходный ряд сходится неравномерно. ■

Удобный признак равномерной сходимости был сформулирован Вейерштрассом.

ТЕОРЕМА (признак равномерной сходимости Вейерштрасса). Если члены функционального ряда $u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),..u_n(x),...$удовлетворяют в области χ неравенствам

$$|u_n(x)| \le a_n,\ \ n = 1,2,3,...,$$

где $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ −сходящийся числовой ряд, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно в области χ.

Пример. С помощью признака Вейерштрасса показать, что ряд

$$\sin x + \frac{1}{2^2}\sin^2 2x + \frac{1}{3^2}\sin^3 3x + ... + \frac{1}{n^2}\sin^n nx + ...$$

сходится равномерно в области $(-\infty, +\infty)$.

Решение.

Очевидно, что при любых значениях x выполняется неравенство $|u_n(x)| = \left|\frac{1}{n^2}\sin^n nx\right| \le \frac{1}{n^2}$. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ −сходится, следовательно, данный ряд сходится равномерно в области $(-\infty, +\infty)$. ■

ТЕОРЕМА (Коши). Если все члены $u_n(x)\ (n = 1,2,3,...)$ функционального ряда определены и непрерывны в области χ, и функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в этой области равномерно, то сумма $S(x)$ ряда есть непрерывная функция в области χ.

Пример. Показать, что сумма ряда

$$-\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + ... + (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + ...$$

является непрерывной функцией в области $(-\infty, +\infty)$.

Решение.

Члены данного ряда при любом x не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов положительного числового ряда

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$$

Но последний ряд, как было показано раньше, сходится. Следовательно, на основании признака Вейерштрасса, функциональный ряд равномерно сходится в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Все члены равномерно сходящегося ряда − непрерывные функции в области $(-\infty, +\infty)$. Тогда сумма данного ряда есть функция, непрерывная при любом значении x. ■

Сумма неравномерно сходящегося ряда непрерывных функции в одних случаях непрерывна, а в других – разрывна.

Действия с функциональными рядами

Для функциональных рядов можно сформулировать ряд полезных теорем.

ТЕОРЕМА (о почленном интегрировании рядов). Если функциональный ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),$$

где $u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),..u_n(x),\ldots$ – непрерывные функции в области χ, равномерно сходится в этой области и имеет сумму $S(x)$, то ряд

$$\int_a^x u_1(x)dx+\int_a^x u_2(x)dx+\int_a^x u_3(x)dx+\ldots+\int_a^x u_n(x)dx+\ldots$$

сходится и имеет сумму $\sigma(x)=\int_a^x S(x)dx \quad ([a,\ x]\subset\chi)$.

Пример. Рассмотреть вопрос о почленном интегрировании ряда

$$1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\ldots$$

Решение.

При $|x|<1$ ряд равномерно сходится (является геометрической прогрессией), сумма его равна $\dfrac{1}{1+x^2}$. Следовательно, почленным интегрированием исходного ряда до $x<1$ ряд

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

также равномерно сходится при $|x|<1$, и его сумма равна

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^x=arctgx\,.\ \blacksquare$$

Если функциональный ряд сходится неравномерно, то почленное интегрирование в одних случаях допустимо, а в других нет.

ТЕОРЕМА (о почленном дифференцировании рядов). Если функциональный ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

сходится в области χ, функции $u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),..u_n(x),\ldots$ имеют непрерывные производные в области χ, ряд

$$u_1'(x)+u_2'(x)+u_3'(x)+u_n'(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$$

равномерно сходится в этой области и имеет сумму $\sigma(x)$, то исходный ряд сходится равномерно в области χ и его сумма $S(x)$ связана с $\sigma(x)$ соотношением: $\sigma(x)=\dfrac{dS(x)}{dx}$.

Для почленного дифференцирования в некоторой точке x сходящегося ряда достаточно сходимости ряда его непрерывных производных не в каком-либо заранее предписанном отрезке, но в сколь угодно малом (важно лишь, чтобы он содержал точку x).

Пример. Рассмотреть вопрос о почленном дифференцировании ряда

$$arctgx+arctg\frac{x}{2\sqrt{2}}+arctg\frac{x}{3\sqrt{3}}+\ldots+arctg\frac{x}{n\sqrt{n}}+\ldots$$

Решение.

Сравним данный ряд со сходящимся рядом

$$x+\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{x}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{x}{n\sqrt{n}}+\ldots$$

(при любом фиксированном x). Тогда $u_n=arctg\dfrac{x}{n\sqrt{n}}$, $v_n=\dfrac{x}{n\sqrt{n}}$. Так как $arctg\alpha$ и α – эквивалентные бесконечно малые, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(x)}{v_n(x)}=1$$

и, согласно признаку сравнения, данный ряд сходится.

Найдем производную общего члена данного ряда

$$u_n'(x)=\left(arctg\frac{x}{n\sqrt{n}}\right)'=\frac{n\sqrt{n}}{x^2+n^3}.$$

Ряд, составленный из производных, имеет вид

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{2\sqrt{2}}{x^2+2^3}+\frac{3\sqrt{3}}{x^2+3^3}+\ldots+\frac{n\sqrt{n}}{x^2+n^3}+\ldots$$

Заметим, что члены последнего ряда меньше соответствующих членов сходящегося ряда

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots.$$

Поэтому на основании признака Вейерштрасса ряд, составленный из производных, равномерно сходится в промежутке $(-\infty,+\infty)$. Следовательно, к данному ряду можно применить теорему о дифференцировании рядов. ■

Задачи для самостоятельного решения.

1. Исследовать сходимость функционального ряда в точках $a)$ $x=1$, $b)$ $x=2$ и $c)$ $x=3$

$$\frac{3x+1}{x^2+x+1}+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^2+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^3+\ldots+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^n+\ldots$$

2. Найти область сходимости ряда

$$1+e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-(n-1)x}+\ldots$$

3. Показать, что ряд

$$\frac{2x+1}{x+2}+\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2+\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n+\ldots$$

сходится равномерно в области $[-1, 1]$.

4. Рассмотреть вопрос о почленном дифференцировании ряда

$$\sin x+\frac{1}{2^2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{3^2}\sin\frac{x}{3}+\ldots+\frac{1}{n^2}\sin\frac{x}{n}+\ldots$$

5. Рассмотреть вопрос о почленном интегрировании ряда

$$1+\frac{\cos x}{1!}+\frac{\cos^2 x}{2!}+\ldots+\frac{\cos^{n-1} x}{(n-1)!}+\ldots$$

на любом конечном отрезке $[a, b]$.

Ответы.

1. $a)$ расходится, $b)$ расходится, $c)$ сходится. 2. $(1, +\infty)$.

2.2. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Функциональный ряд вида

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\ldots a_n(x-a)^n+\ldots, \qquad (2.2)$$

где $a-$ постоянная величина, $a_0, a_1, a_2, a_3,\ldots,a_n,\ldots-$ действительные числа, называется *степенным рядом*.

Числа $a_0, a_1, a_2, a_3,\ldots,a_n,\ldots$ называются *коэффициентами* степенного ряда.

Степенной ряд может быть представлен в виде

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots a_nx^n+\ldots \qquad (2.3)$$

Область сходимости степенного ряда

Основное свойство степенного ряда устанавливает следующая теорема.

ТЕОРЕМА (Абеля). Если степенной ряд (2.2) сходится при некотором $x=x_0$, то он сходится абсолютно при всех значениях x, для которых выполняется неравенство $|x-a|<|x_0-a|$. Наоборот, если ряд (2.2) расходится при $x=a$, то он расходится и при всех значениях x, для которых выполняется неравенство $|x-a|>|x_0-a|$.

Одним из следствий теоремы Абеля является факт существования для всякого степенного ряда *интервала сходимости* $|x-a|<r$, или $a-r<x<a+r$ с центром в точке a, внутри которого степенной ряд абсолютно сходится, а вне – расходится. На концах интервала сходимости (в точках $x=a\pm r$) различные степенные ряды ведут себя по-разному. Эти точки требуют отдельного исследования.

Число r называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Если степенной ряд (2.2) сходится лишь при $x=a$, то считают $r=0$. Если степенной ряд сходится на всей числовой прямой, то $r=\infty$.

Радиус сходимости степенного ряда можно определить несколькими способами.

1. Если среди коэффициентов степенного ряда $a_0, a_1, a_2, a_3,\ldots,a_n,\ldots$нет равных нулю, то есть ряд содержит все целые положительные степени разности $x-a$, то

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{2.4}$$

при условии, что этот предел (конечный, или бесконечный) существует.

2. Если среди коэффициентов степенного ряда $a_0, a_1, a_2, a_3,\ldots,a_n,\ldots$есть равные нулю и последовательность оставшихся в ряде показателей степеней разности $x-a$ любая, то

$$r=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{2.5}$$

где используются только $a_n\neq 0$.

Радиус сходимости степенного ряда (2.3) также определяется по формулам (2.4) и (2.5). Интервал сходимости в этом случае определяется соотношением $-r<x<+r$.

П р и м е р ы.

1. Исследовать сходимость степенного ряда

$$(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+\ldots+\frac{1}{n^2}(x-2)^n+\ldots$$

Р е ш е н и е.

Здесь $a_n=\dfrac{1}{n^2}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)^2}$. Тогда по формуле (2.4)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1.$$

Следовательно, радиус сходимости $r=1$ и ряд сходится при $-1<x-2<1$, то есть $1<x<3$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

Если $x=1$, то получаем числовой ряд

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Этот знакочередующийся ряд сходится, и притом абсолютно, так как сходится ряд из абсолютных величин его членов.

Если $x=1$, то получаем числовой ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Этот ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с $p=2>1$.

Таким образом, ряд сходится для значений $1\le x\le 3$. ■

2. Исследовать сходимость степенного ряда

$$1!(x-5)+2!(x-5)^2+3!(x-5)^3+\ldots+n!(x-5)^n+\ldots$$

Решение.

В данном примере $a_n=n!$, $a_{n+1}=(n+1)!$. По формуле (2.4) найдем радиус сходимости степенного ряда

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Следовательно, радиус сходимости $r=0$ и ряд сходится только при $x-5=0$, то есть в одной точке $x=5$. ■

3. Исследовать сходимость степенного ряда

$$\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Решение.

Данный ряд вида (2.3). Для него $a_n=\dfrac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!}$. Тогда по формуле (2.4)

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Следовательно, ряд сходится при любом значении x. ■

4. Исследовать сходимость степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n(x-2)^{2n}$.

Решение.

Данный ряд будет иметь вид

$$\frac{2}{3}(x-2)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2(x-2)^4+\left(\frac{4}{7}\right)^3(x-2)^6+\ldots$$

Здесь $a_n = 0$, при $n = 2k - 1$ и $a_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$, при $n = 2k$. Для определения радиуса сходимости воспользуемся формулой (2.5)

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{2k+1}{k+1}} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, радиус сходимости $R = \sqrt{2}$ и ряд сходится при $-\sqrt{2} < x - 2 < \sqrt{2}$, то есть $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

Если $x - 2 = \sqrt{2}$, то получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^n.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^n = \sqrt{e} \neq 0$. Общий член числового ряда не стремится к нулю и ряд расходится. То же самое имеет место при $x - 2 = -\sqrt{2}$. Таким образом, область сходимости числового ряда: $(2 - \sqrt{2},\ 2 + \sqrt{2})$. ■

Действия со степенными рядами

Пусть даны два степенных ряда

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots a_n x^n + \ldots,$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots b_n x^n + \ldots,$$

имеющие радиусы сходимости соответственно r_1 и r_2, причем $r_1 \le r_2$, и суммы $\sigma(x)$, $S(x)$. Степенные ряды можно почленно складывать, вычитать и перемножать (по правилу умножения многочлена на многочлен). При этом получим новые ряды, радиусы сходимости которых в худшем случае равны r_1, а могут и превосходить r_1. Суммы результирующих рядов будут определяться в соответствие с производимыми действиями: $\sigma(x) + S(x)$, $\sigma(x) - S(x)$; $\sigma(x) \cdot S(x)$.

Пример. Даны два ряда с интервалом сходимости $(-1,\ +1)$

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$
$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1} x^n + \ldots$$

Найти их сумму, разность и произведение.

Решение.

Складывая почленно, получим

$$2 + 2x^2 + 2x^4 + \ldots + 2x^{2n-2} + \ldots$$

Так как суммы исходных рядов: $\sigma(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $S(x)=\dfrac{1}{1+x}$, то сумма результирующего ряда: $\sigma(x)+S(x)=\dfrac{2}{1-x^2}$.

Вычитая почленно второй из первого, получаем

$$2x+2x^3+2x^5+\ldots+2x^{2n-1}+\ldots$$

Сумма данного ряда будет иметь вид $\sigma(x)-S(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$.

Результат умножения исходных рядов будет иметь вид

$$1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2}+\ldots$$

Сумма последнего ряда равна $\sigma(x)\cdot S(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$. ■

Степенные ряды, как функциональные, можно почленно интегрировать и дифференцировать, поскольку внутри своего интервала сходимости степенной ряд сходится равномерно. При этом ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда, имеют тот же интервал сходимости и их сумма внутри интервала сходимости равна соответственно производной и интегралу от суммы первоначального ряда.

Примеры.

1. Найти сумму $S(x)$ ряда $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots\ |x|<1$.

Решение.

Данный ряд получается дифференцированием ряда

$$x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots\ |x|<1,$$

сумма которого определяется формулой суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\sigma(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Остается продифференцировать $\sigma(x)$, чтобы получить сумму исходного ряда

$$S(x)=\sigma'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}.\ ■$$

2. Найти сумму $S(x)$ ряда $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots+\dfrac{x^n}{n}+\ldots\ |x|<1$.

Решение.

Продифференцируем почленно данный ряд

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots\ |x|<1.$$

Сумма данного ряда $\sigma(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Чтобы найти сумму исходного ряда, надо затем проинтегрировать $\sigma(x)$ в пределах от 0 до x.

$$S(x)=\int_0^x \sigma(x)dx=\int_0^x \frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)\,. \blacksquare$$

Разложение функции в ряд Тейлора

Сумма всякого сходящегося степенного ряда является функцией, определенной в области сходимости этого ряда. В связи с этим возникает две задачи:

1) по заданному ряду искать ту функцию, которой равна его сумма в области сходимости ряда;

2) по заданной функции искать сходящийся ряд того или иного типа, сумма которого в области сходимости равнялась бы заданной функции. Эта задача называется *разложением функции в ряд*.

Рассмотрим вопрос разложения функции в степенной ряд.

Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в интервале $|x-a|<r$, то она может быть представлена в этом интервале в виде степенного ряда

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \quad (2.6)$$

Если $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ – частичная сумма ряда (2.6), то $f(x)-S_n(x)=R_n(x)$ является остаточным членом ряда.

При условии, что

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \quad (2.7)$$

ряд (2.6) сходится, и его суммой будет функция $f(x)$.

Представление функции в виде

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \quad (2.8)$$

при выполнении (2.7) называется *разложением этой функции в ряд Тейлора*.

В частности, при $a=0$, разложение в ряд Тейлора называется *разложением в ряд Маклорена* и имеет вид:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (2.9)$$

Функция $f(x)$, разлагающаяся в ряд Тейлора, называется *аналитической* и ее разложение (2.8) единственно.

Остаточный член разложения (2.8) может быть представлен в различных формах. Практически важными являются две формы представления остаточного члена ряда Тейлора:

в форме Лагранжа

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\quad \text{где}\quad 0<\theta<1, \quad (2.10)$$

в форме Коши

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1},\quad \text{где}\quad 0<\theta<1, \qquad (2.11)$$

Пример. Разложить функцию $f(x)=e^x$ в ряд Маклорена.

Решение.

Функция e^x бесконечно дифференцируема при любом значении x и ее производные определяются функциями

$$(e^x)'=e^x; \qquad (e^x)''=e^x; \qquad (e^x)'''=e^x;\ldots$$

Тогда

$$f(0)=e^0=1; \qquad f'(0)=e^0=1; \qquad f''(0)=e^0=1; \qquad f'''(0)=e^0=1;\ldots$$

Остаточный член в форме Лагранжа будет иметь вид $R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$.

Обозначим $\xi_n=\theta x$. Так как $0<\theta<1$, то $0\le\xi_n\le x$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\le\lim_{n\to\infty}\frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}=e^x\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0.$$

Тогда разложение функции e^x в ряд Маклорена будет иметь вид

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\blacksquare$$

Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$	$-\infty<x<+\infty$	(2.12)
$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$	$-\infty<x<+\infty$	(2.13)
$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$	$-\infty<x<+\infty$	(2.14)
$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$	$-1<x\le+1$	(2.15)
$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}+\ldots$	$-1\le x\le+1$	(2.16)

П р и м е р . Разложить функцию $y=\cos 2x$ в ряд Маклорена.

Р е ш е н и е .

В разложении (2.14) заменим x на $2x$, получаем

$$\cos 2x = 1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$$

и окончательно

$$\cos 2x = 1-\frac{2^2}{2!}x^2+\frac{2^4}{4!}x^4-\frac{2^6}{6!}x^6+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-2}}{(2n-2)!}x^{2n-2}+\ldots\blacksquare$$

Пусть дана функция

$$f(x)=(1+x)^m. \tag{2.17}$$

Для функции (2.17) разложение в степенной ряд будет иметь вид

$$1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{n!}x^n+\ldots$$

Если m –целое и положительное, то в m-м и во всех последующих коэффициентах появится равный нулю сомножитель. Эти коэффициенты, а, следовательно, и сами члены, обращаются в нуль и ряд превращается в конечную сумму.

Если же число m –нецелое или целое, но отрицательное, то ни один из коэффициентов ряда в нуль не обратится и будем иметь дело с бесконечным рядом. В этих случаях ряд называется *биномиальным*, а его коэффициенты – *биномиальными*.

Степенной ряд будет сходится к функции (2.17) при определенных значениях m и x.

Разложение функции (2.17) в ряд Маклорена

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{n!}x^n+\ldots \tag{2.18}$$

будет иметь место:

при $m\ge 0$, если $-1\le x\le +1$;
при $-1<m<0$, если $-1<x\le +1$;
при $m\le -1$, если $-1<x<+1$.

П р и м е р . Разложить функцию $y=\sqrt[3]{1+x}$ в ряд Маклорена.

Р е ш е н и е .

Воспользуемся разложением (2.18), учитывая, что $m=\frac{1}{3}>0$ и при $-1\le x\le 1$, получим

$$(1+x)^{1/3}=1+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3^2\cdot 2!}x^2+\frac{2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!}x^4+\ldots\blacksquare$$

Приближенное вычисление значений функций с помощью ряда Маклорена

С помощью разложения функций в степенные ряды можно быстро и довольно точно вычислять значения функций. Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ в ее разложении в степенной ряд сохраняют первые n членов, а остальные отбрасывают. Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $|R_n| \le u_{n+1}$, где u_{n+1} – первый из отброшенных членов ряда.

Оценим погрешность приближенного равенства

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},\ 0 < x < n+1. \tag{2.19}$$

Эта погрешность определяется суммой членов, следующих за $\frac{x^n}{n!}$ в разложении e^x:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} + \ldots$$

или

$$R_n = \frac{x^n}{n!}\left[\frac{x}{(n+1)} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right] <$$

$$< \frac{x^n}{n!}\left[\frac{x}{(n+1)} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{x^3}{(n+1)^3} + \ldots\right] = = \frac{x^n}{n!}\left[\frac{x}{n+1} + \left(\frac{x}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{n+1}\right)^3 + \ldots\right].$$

В квадратных скобках имеем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, просуммировав которую, получим неравенство

$$R_n < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x/(n+1)}{1 - x/(n+1)} = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}.$$

Окончательно имеем следующую оценку приближенного равенства (2.19)

$$R_n < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}. \tag{2.20}$$

Примеры.

1. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью $0{,}00001$.

Решение.

Используя разложение (2.12) для $x=\frac{1}{2}$, получаем

$$\sqrt{e}=e^{1/2}=1+\frac{1}{1!\cdot 2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\frac{1}{3!\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n!\cdot 2^n}+\ldots$$

Определим число n так, чтобы погрешность приближенного равенства

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{1!\cdot 2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\frac{1}{3!\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n!\cdot 2^n}$$

не превышала $0{,}00001$. Воспользуемся оценкой (2.20) для $x=\frac{1}{2}$, из которой определим при каком значении n будет выполняться неравенство $R_n=\frac{1}{n!\cdot 2^n}\cdot\frac{1}{2n+1}<0{,}00001$. Путем подбора определяем, что это будет при $n=6$. Тогда

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{1!\cdot 2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\frac{1}{3!\cdot 2^3}+\frac{1}{4!\cdot 2^4}+\frac{1}{5!\cdot 2^5}+\frac{1}{6!\cdot 2^6}.$$

Вычислив каждое слагаемое с точностью до $0{,}000001$, чтобы при суммировании не получить погрешности, превышающей заданную, получим $\sqrt{e}\approx 1{,}648719$. ■

2. Вычислить $\cos 18^\circ$ с точностью $0{,}0001$.

Решение.

Используя разложение (2.14) для $x=18^\circ=\frac{\pi}{10}\approx 0{,}31416$, получаем

$$\cos 18^\circ=\cos\frac{\pi}{10}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4-\frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6+\ldots$$

Так как $\frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6<0{,}0001$ достаточно взять три члена ряда. Тогда

$$\cos 18^\circ\approx 1-\frac{0{,}09870}{2}+\frac{0{,}00974}{24};\qquad \cos 18^\circ\approx 0{,}9511.\ ■$$

3. Вычислить $\sqrt[5]{35}$ с точностью $0{,}0001$.

Решение.

Чтобы воспользоваться разложением (2.18) для $m=\frac{1}{5}>0$ и $-1\le x\le 1$ представим $35=2^5+3$, тогда

$$\sqrt[5]{35}=\sqrt[5]{2^5+3}=2\sqrt[5]{1+\frac{3}{32}}=2\left(1+\frac{3}{32}\right)^{1/5}\approx 2\left[1+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{32}-\frac{4}{2!\cdot 5^2}\cdot\frac{3^2}{32^2}\right]=$$

$$=2+\frac{3}{80}-\frac{9}{6400}\approx 2{,}0361.$$

Здесь взяты первые три члена ряда, так как следующий член будет

$$\frac{4\cdot 9}{3!\cdot 5^3}\cdot\frac{3^3}{32^3}\le\frac{1}{25000}=0{,}00004.$$

Следовательно, $\sqrt[5]{35}\approx 2{,}0361$. ■

4. Вычислить $\ln 1{,}04$ с точностью $0{,}0001$.

Р е ш е н и е.

Воспользуемся разложением (2.15)

$$\ln 1{,}04=\ln(1+0{,}04)=0{,}04-\frac{(0{,}04)^2}{2}+\frac{(0{,}04)^3}{3}-\frac{(0{,}04)^4}{4}+\frac{(0{,}04)^5}{5}-\ldots\approx$$

$$\approx 0{,}04-0{,}0008+0{,}000021-0{,}00000064+\ldots$$

Следовательно, $\ln 1{,}04\approx 0{,}0392$. ■

Применение степенных рядов к вычислению определенных интегралов

Многие интегралы, не выражающиеся через элементарные функции в конечном виде, представляются быстро сходящимися бесконечными рядами. Есть смысл разлагать в ряды даже такие интегралы, которые можно представить конечными выражениями, если эти выражения сложны.

Вычисление интегралов при помощи рядов можно комбинировать с обычными приемами интегрального исчисления.

П р и м е р ы.

1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx$ с точностью до $0{,}5\cdot 10^{-3}$.

Р е ш е н и е.

Неопределенный интеграл $\int\frac{\sin x}{x}dx$ не берется в конечном виде. Разлагая $\sin x$ в ряд и деля почленно на x, получаем ряд

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots,$$

сходящийся при любом значении x. Интегрируя, имеем:

$$\int\frac{\sin x}{x}dx=x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\ldots$$

Тогда

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3\cdot 3!}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{1}{5\cdot 5!}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^5-\frac{1}{7\cdot 7!}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^7+\ldots$$

Первый отброшенный член $\frac{1}{9\cdot 9!}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^9<0{,}5\cdot 10^{-2}$. Учитывая, что $\frac{\pi}{2}\approx 1{,}5708$ и, выполнив вычисления, получим

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx=1{,}5708-0{,}2153+0{,}0159-0{,}0007\approx 1{,}371. \blacksquare$$

2. Вычислить $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до $0{,}5\cdot 10^{-4}$.

Р е ш е н и е.

Заменив в разложении (2.12) x на $-x^2$, получим сходящийся ряд

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots$$

Интегрируя, получим

$$\int e^{-x^2}dx=x-\frac{x^3}{3\cdot 1!}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+.\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}+\ldots$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx=1-\frac{1}{3\cdot 1!}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+.\frac{1}{9\cdot 4!}-\frac{1}{11\cdot 5!}+\ldots$$

Член $\frac{1}{11\cdot 5!}=\frac{1}{75600}<0{,}5\cdot 10^{-4}$, поэтому его и все последующие отбрасываем. Вычисления проводим на пять-шесть знаков. Получаем

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx\approx 0{,}7468. \blacksquare$$

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

Найти область сходимости степенного ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-0{,}1)^n x^n}{n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n^2+1}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nx)^n$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{n!}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$. 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

Найти сумму рядов:

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^n}$, $|x|<a$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)a^n}$, $-a\le x<a$.

Разложить функцию $f(x)$ в ряд по степеням x:

10. $f(x)=2^x$. 11. $f(x)=e^{-x^2}$. 11. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Вычислить значение функций с точностью $0{,}0001$:

12. $\sin 9^\circ$. 13. $\sqrt[3]{1{,}06}$. 14. $\ln 0{,}98$

Вычислить интеграл с точностью до $0{,}001$:

15. $\int\limits_0^{0,1}\frac{e^x-1}{x}dx$. 16. $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

Ответы.

1. $(-10,\ 10)$. 2. $[-1,\ 1)$. 3. $[3,\ 5)$. 4. $x=0$. 5. $(-\infty,+\infty)$. 6. $(-3,+3)$. 7. $[-1,+1]$. 8. $\frac{a}{(a-x)^2}$. 9. $\frac{a\ln a}{(a-x)}-x$. 12. 0,1564. 13. 1,0196. 14. $-0{,}0202$. 15. 0,102. 16. 0,098.

2.3. РЯДЫ ФУРЬЕ

Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *ортогональными* в промежутке (a,b), если

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\cdot\psi(x)dx=0. \qquad (2.21)$$

Пример. Проверить ортогональность функций $\varphi(x)=\sin 5x$ и $\psi(x)=\cos 2x$ в промежутке $(-\pi,\pi)$.

Решение.

Вычислим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin 5x\cdot\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\sin 7x+\sin 3)x dx=\left(-\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Следовательно, заданные функции ортогональны. ■

Любые две различные функции, взятые из системы функций

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x,\ldots,\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ldots, \qquad (2.22)$$

ортогональны в промежутке $(-\pi,\pi)$, то есть

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos mx dx=0\ (m\ne 0), \qquad \int\limits_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin mx dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nxdx=0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nxdx=0 \ (m\neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nxdx=0$$

(m, n – любые натуральные числа).

Если вместо двух различных функций системы (2.22) взять две одинаковые, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot 1dx=2\pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mxdx=\pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mxdx=\pi\ ,$$

где $m=1,2,3,\ldots$.

Полученные для системы (2.22) формулы сохраняют силу для любого интервала длиной 2π.

Если в какой-нибудь системе функций каждые две функции ортогональны, то и сама система называется *ортогональной*.

Таким образом, система (2.22) является ортогональной в любом промежутке длиной 2π.

Тригонометрическим рядом называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\ldots+b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+\ldots$$

или

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx), \tag{2.23}$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3,.b_1, b_2, b_3,\ldots$ – постоянные, называемые *коэффициентами ряда*.

ТЕОРЕМА (Эйлера-Фурье). Если тригонометрический ряд (2.23) сходится для всех значений x к некоторой функции $f(x)$, периодической с периодом 2π, для которой существует собственный или несобственный интеграл $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx$, то для коэффициентов ряда (2.23) имеют место формулы *Эйлера-Фурье*:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, \tag{2.24}$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx\ ;\ b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mxdx,\quad m=1,2,3,\ldots \tag{2.25}$$

На практике важна следующая обратная задача: дана функция $f(x)$ с периодом 2π; требуется найти всюду сходящийся тригонометрический ряд (2.23), имеющий сумму $f(x)$. Если эта задача имеет решение, то оно единственно, и коэффициенты ряда (2.23) находятся по формулам Эйлера-Фурье. Полученный ряд называется *рядом Фурье*.

ТЕОРЕМА (Дирихле). Пусть функция $f(x)$ в замкнутом промежутке $[-\pi,\pi]$ имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва I рода (то есть удовлетворяет *условиям Дирихле*). Тогда ряд Фурье для этой функции сходится в каждой точке отрезка $[-\pi,\pi]$. Сумма $S(x)$ этого ряда определяется следующим образом:

1) $S(x)=f(x)$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, лежащих внутри отрезка $[-\pi,\pi]$;

2) $S(x_0)=\dfrac{1}{2}\left[f(x_0-0)+f(x_0+0)\right]$, где x_0 – точка разрыва I рода функции $f(x)$;

3) $S(\pi)=S(-\pi)=\dfrac{1}{2}\left[f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right]$ на концах промежутка, то есть при $x=\pm\pi$.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$ заданную на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Решение.

Так как функция $f(x)=x$ внутри отрезка $[-\pi,\pi]$ непрерывна и монотонна, она удовлетворяет условиям Дирихле. Заметим, что говорить о непрерывности функции на концах отрезка, пока не можем, так как для непрерывности функции в граничных точках надо знать предельное поведение при подходе к отрезку извне. Используя формулы (2.24)-(2.25), получим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos mx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(x\cdot\frac{1}{m}\cdot\sin mx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx\right)=0,$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin mx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(x\cdot\frac{1}{m}\cdot\sin mx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx\right)=(-1)^{m+1}\frac{2}{m}.$$

Таким образом, тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)=x$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ будет ряд

$$2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots+(-1)^{m+1}\frac{1}{m}\sin mx+\ldots\right).$$

Обозначим сумму данного ряда $S(x)$. Эта функция во всех точках непрерывности $f(x)=x$ должна с ней совпадать. Значит внутри отрезка $[-\pi, \pi]$ $S(x)=f(x)=x$.

На концах отрезка, при $x=\pm\pi$, все синусы обращаются в нуль:

$$\sin m\pi = 0.$$

Следовательно, $S(\pm\pi)=0$.

Функция $S(x)$ должна быть периодической с периодом $T=2\pi$. Поэтому аналитически эту функцию можно задать следующим образом:

$$S(x)=\begin{cases} x-\left[\dfrac{x}{2\pi}\right]2\pi, & x\neq \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots \\ 0, & x=\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots \end{cases}$$

Если продолжим функцию $f(x)=x$ с отрезка $[-\pi, \pi]$ на всю вещественную прямую, согласно ее аналитическому виду, то вне отрезка $[-\pi, \pi]$ получим нечто совершенно отличное от функции $S(x)$.

Однако продолжение $f(x)=x$ с отрезка $[-\pi, \pi]$ периодической функцией с периодом $T=2\pi$, если положить

$$f(\pm\pi)=f(\pm 3\pi)=f(\pm 5\pi)=\ldots=0,$$

будет совпадать с функцией $S(x)$. ■

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l, l]$, где l – произвольное число, то при выполнении на этом отрезке условий Дирихле указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{l}+b_m \sin\frac{m\pi x}{l}\right), \tag{2.26}$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \tag{2.27}$$

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx; \qquad b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx, \quad m=1,2,3,\ldots. \tag{2.28}$$

В случае, когда $f(x)$ – четная функция, ее ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi x}{l},$$

где $a_m=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx$, $m=0,1,2,3,\ldots$.

В случае, когда $f(x)$ – нечетная функция, ее ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{m\pi x}{l},$$

где $b_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx$, $m = 1,2,3,\dots$.

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, l]$, то для разложения в ряд Фурье ее достаточно доопределить на отрезке $[-l, 0]$ произвольным образом, а затем разложить в ряд Фурье, считая ее заданной на отрезке $[-l, l]$. Наиболее целесообразно функцию доопределить так, чтобы ее значения в точках отрезка $[-l, 0]$ находились из условия $f(x) = f(-x)$ или $f(x) = -f(-x)$. В первом случае на отрезке $[-l, l]$ функция $f(x)$ будет четной, а во втором–нечетной. При этом коэффициенты разложения будут определяться по вышеприведенным формулам.

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T = 2$, заданную на отрезке $[-1, 1]$ уравнением $f(x) = x^2$.

Решение.

Рассматриваемая функция является четной. Так как $l = 1$, то коэффициенты разложения будут иметь вид

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

$$a_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx = 2\int_0^1 x^2\cos m\pi x dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} u = x^2; \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = \cos m\pi x dx; \Rightarrow v = \frac{1}{m\pi}\sin m\pi x \end{array}\right\} = \frac{2x^2}{m\pi}\sin m\pi x\Big|_0^1 - \frac{4}{m\pi}\int_0^1 x\sin m\pi x dx =$$

$$= -\frac{4}{m\pi}\int_0^1 x\sin m\pi x dx = \left\{\begin{array}{l} u = x; \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin m\pi x dx; \Rightarrow v = -\frac{1}{m\pi}\cos m\pi x \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{4x}{m^2\pi^2}\cos m\pi x\Big|_0^1 - \frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^1 \cos m\pi x dx = (-1)^m\frac{4}{m^2\pi^2}, \quad m = 1,2,3,\dots.$$

Для четной функции коэффициенты разложения $b_m = 0$, следовательно, ряд Фурье будет иметь вид

$$\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} - \frac{\cos 4\pi x}{4^2} + \dots\right). \qquad (2.29)$$

Функция $f(x) = x^2$ удовлетворяет условию теоремы Дирихле, значит, ряд (2.29) сходится всюду. Сумма его равна x^2 для всякого значения $x \in (-1, 1)$. Более того, поскольку функция четная, сумма ее ряда Фурье равна x^2 и на концах отрезка, то есть при $x = \pm 1$.

Таким образом, на промежутке $[-1,1]$ имеем:

$$x^2 = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} - \frac{\cos 4\pi x}{4^2} + \ldots\right) \blacksquare.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, определенную в промежутке $(-\pi, \pi)$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, \text{ при } -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{\pi}{4}, \text{ при } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Решение.

Эта функция разрывна при $x = 0$, где у нее скачок. Действительно, имеем

$$f(-0) = -\frac{\pi}{4}, \qquad f(+0) = \frac{\pi}{4}.$$

Функция $f(x)$, периодически продолженная за пределы промежутка $(-\pi, \pi)$ изображена на рис. 1.

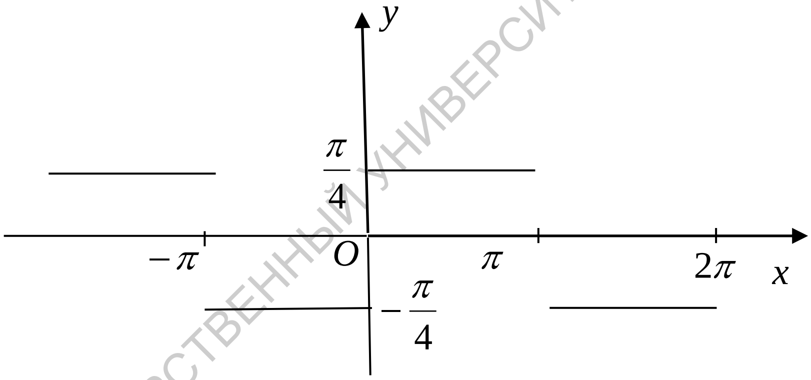

Рис. 1

Функция $f(x)$ – нечетная, следовательно, ряд Фурье будет содержать только синусы и коэффициенты ряда будут иметь вид:

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin mx dx = \frac{1}{2m}\left[1 - (-1)^m\right], \quad m = 1,2,3,\ldots.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} b_{2\kappa-1} &= \frac{1}{2л - 1}, \\ b_{2k} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (k = 1,2,3,\ldots.)$$

Во всех внутренних точках промежутка $(-\pi, \pi)$, кроме точки разрыва $x = 0$ сумма ряда Фурье равна $f(x)$, то есть при $-\pi < x < 0$ имеем:

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1} + \ldots = -\frac{\pi}{4},$$

а при $0 < x < \pi$ имеем:

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

В точке разрыва $x = 0$ сумма ряда Фурье равна

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

На концах промежутка, то есть при $x = \pm\pi$ сумма ряда Фурье также равна

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T, заданную на указанном отрезке:

1. $f(x) = |x|$; $T = 2$; $[-1, 1]$.
2. $f(x) = e^x$; $T = 2\pi$; $[-\pi, \pi]$.
3. $f(x) = \begin{cases} -h, & при\ -\pi \le x \le 0, \\ h, & при\ 0 < x \le \pi; \end{cases}$ $T = 2\pi$

Ответы.

1. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2}$.
2. $f(x) = \frac{2}{\pi} sh\pi \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2+1}(\cos mx - m\sin mx)\right]$.
3. $f(x) = \frac{4h}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}$.

Список рекомендованной литературы

Воробьев Н.Н. Теория рядов. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979.

Данко П.Е. , Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. В 2 ч.: Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.

Демидович В.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие. М.: Астрель, 2005.

Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3-е изд., испр. и доп. М.: Айрис-пресс, 2004.

Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. М.: Физ.-мат. лит., 2006.

Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Дмитрий Письменный. – 8-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009.

Щипачев В.С. Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов / Под ред. акад. А. Н. Тихонова. М.: Высшая школа, 1985.