Е.В.Гудошникова

ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Во многих областях математики большое значение имеют задачи о приближении сложных объектов менее сложными. Теория приближений имеет дело главным образом с приближением отдельных функций из некоторого класса при помощи функций из некоторого множества, являющихся более простыми, чем приближаемая функция. Чаще всего роль таких множеств играют алгебраические многочлены или тригонометрические полиномы заданного порядка. Примерами таких конструкций являются частные суммы ряда Тейлора или ряда Фурье, интерполяционные многочлены и др., то есть многочлены или полиномы порядка n, коэффициенты которых находятся по приближаемой функции. Все они являются линейными операторами, то есть оператор от линейной комбинации функций равен линейной комбинаций операторов тех же функций с теми же коэффициентами.

Большое применение в теории приближения находит особый вид линейных операторов – положительные операторы, то есть принимающие только положительные значения на положительных функциях. Так в 1885г. К.Вейерштрасс использовал линейные положительные операторы для доказательства теоремы о возможности равномерного приближения непрерывных функций полиномами. В 1912г. С.Н.Бернштейном была построена последовательность линейных положительных операторов равномерно сходящаяся на отрезке $[0;1]$ к функции $f \in C[0;1]$. Были построены и другие последовательности линейных положительных операторов.

Важный вопрос об условиях, при которых последовательность операторов сходится к тождественному и, следовательно, решает задачу аппроксимации функции, решается наиболее просто именно в случае линейных положительных операторов. Впервые эти условия для $f \in C[a;b]$ были сформулированы и доказаны П.П.Коровкиным после работ которого теория линейных положительных операторов получила особенно большое развитие.

В представленном курсе излагаются основные положения теории приближений и теории линейных положительных операторов.

ГЛАВА 1.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§1.1 ПОНЯТИЕ ЛИНЕЙНОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Опред. *Оператором называется правило, по которому функции f из некоторого множества F ставится в соответствие функция g из некоторого множества G: $L(f;x) = g(x)$.*

Опред. *Оператор L называется линейным, если он задан на линейном множестве и для любых функций f и g из этого множества и любых чисел a и b имеет место равенство:*

$$L(af + bg; x) = aL(f;x) + bL(g;x).$$

Опред. *Оператор L называется положительным на множестве J, если для всех функций из области определения оператора, для которых $f(t) \geq 0$, будет иметь место неравенство:*

$$L(f;x) \geq 0 \text{ для всех } x \in J.$$

Монотонность. Пусть L – линейный положительный оператор. Если $g(t) \geq f(t)$, то $L(g;x) \geq L(f;x)$.

Действительно,

$$g(t) \geq f(t) \implies g(t) - f(t) \geq 0 \implies L(g-f;x) \geq 0 \implies$$
$$L(g;x) - L(f;x) \geq 0 \implies L(g;x) \geq L(f;x)$$

Следствие: для $f \in C[a,b]$ или $C_{2\pi}$ $L(f;x) \leq L(\|f\|;x) \leq \|f\| L(1;x)$

Неравенство Коши-Буняковского. Если L – линейный положительный оператор, то

$$L(fg;x) \le \sqrt{L(f^2;x)}\sqrt{L(g^2;x)}.$$

Док-во: рассмотрим функцию $\phi(t) = (af(t) - g(t))^2$, где a – число. Так как $\phi(t) \ge 0$,

$$L((af(t) - g(t))^2;x) \ge 0 \implies a^2 L(f^2;x) - 2aL(fg;x) + L(g^2;x) \ge 0.$$

Получили квадратный трехчлен относительно a, который всегда ≥ 0, следовательно его дискриминант ≤ 0, то есть

$$L^2(fg;x) - L(f^2;x)L(g^2;x) \le 0 \implies L^2(fg;x) \le L(f^2;x)L(g^2;x),$$

откуда и следует доказываемое неравенство.

ПРИМЕРЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1^0. Операторы Бернштейна:

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

2^0. Операторы Саса-Миракьяна:

$$M_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}$$

3^0. Операторы Баскакова:

$$Б_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k}$$

4^0. Операторы Вейерштрасса:

$$W_n(f;x) = \frac{1}{J_n}\int_a^b f(t)e^{-n(t-x)^2}\,dt, \quad \text{где } J_n = \int_{a-b}^{b-a} e^{-nt^2}\,dt$$

5^0. Операторы Валле-Пуссена:

$$V_n(f;x) = \frac{1}{J_n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\,dt, \quad \text{где } J_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt$$

6^0. Операторы Ландау:

$$L_n(f;x) = \frac{1}{J_n}\int\limits_a^b f(t)\left(1-\left(\frac{t-x}{b-a}\right)^2\right)^n dt, \text{ где } J_n = \int\limits_a^b\left(1-\left(\frac{x}{b-a}\right)^2\right)^n dx$$

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть L – линейный положительный оператор на $C[a;b]$, такой, что $L(1;x)\equiv 1$. При каждом фиксированном x отображение $f\to L(f;x)$ можно рассматривать как линейный функционал и по теореме Рисса о форме линейного функционала в $C[a;b]$ оператор L для каждого $x\in[a;b]$ может быть представлен в виде

$$L(f;x) = \int\limits_a^b f(t)\,dF(x;t),$$

где $F(x;t)$ – функция ограниченной вариации. Будем считать, что $F(x;t)$ по t непрерывна слева.

Во-первых, очевидно, что в этом представлении $F(x;t)$ можно заменить на $F^*(x;t) = F(x;t) - F(x;a)$, поэтому без ограничения общности можно считать, что $F(x;a)=0$ и $F(x;t)=0$ при $t\le a$.

Во-вторых, так как $L(1;t)=1$, $\Rightarrow$

$$\int\limits_a^b dF(x;t) = F(x;b) = 1$$

и можно считать, что и при $t\ge b$ $F(x;t)=1$

В-третьих, функция $F(x;t)$ не убывает по t. Действительно, пусть $t_1 < t_2$. Рассмотрим функцию

$$\varphi = \begin{cases} 1, & \text{если } t_1\le t\le t_2, \\ 0, & \text{если } t\notin[t_1;t_2). \end{cases}$$

Так как $\varphi(t) \geq 0$, то и $L(\varphi; x) \geq 0$, но

$$L(\varphi; x) = \int\limits_{t_1}^{t_2} dF(x;t) = F(x;t_2) - F(x;t_1) \quad \Rightarrow \quad F(x;t_2) \geq F(x;t_1),$$

то есть, F не убывает по t.

С учетом вышесказанного, для любого фиксированного x $F(x;t)$ можно рассматривать как функцию распределения вероятности случайной величины $\xi(x)$, то есть $F(x;t) = P(\xi(x) < t)$ и представление (1) может быть переписано в виде

$$L(f;x) = M(f(\xi(x))).$$

Пример 1. Рассмотрим случайную величину $\nu(x)$, которая принимает значение 1 с вероятностью x и значение 0 с вероятностью $1 - x$. Проведем n испытаний и рассмотрим случайную величину $\xi_n(x) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \nu_k(x)$. Как известно из теории вероятностей, $\xi(x)$ принимает значения k/n с вероятностью

$$P\left(\xi_n(x) = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n, \text{ и}$$

$$M(f(\xi_n(x)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \text{ – операторы Бернштейна.}$$

Пример 2. Рассмотрим случайную величину $\nu(x)$, распределенную по закону Паскаля:

$$P(\nu(x) = k) = \frac{x^k}{(1+x)^{k+1}}.$$

Проведем n испытаний и рассмотрим случайную величину $\xi_n(x) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \nu_k(x)$. $\xi_n(x)$ принимает значения k/n и вероятность этих значений в соответствии с полиномиальной теоремой

$$P\left(\xi_n(x) = \frac{k}{n}\right) = \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}, \quad k = 0, 1, 2, ... \text{ и}$$

$$M(f(\xi(x)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \text{– операторы Баскакова.}$$

Пример 3. Рассмотрим случайную величину $\nu(x)$, распределенную по закону Пуассона:

$$P(\nu(x) = k) = \frac{x^k e^{-x}}{k!}.$$

Тогда случайная величина $\xi_n(x) = \dfrac{\nu(nx)}{n}$ принимает значения k/n с вероятностью

$$P\left(\xi_n(x) = \frac{k}{n}\right) = \frac{(nx)^k e^{-nx}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ... \text{ и}$$

$$M(f(\xi(x)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k e^{-nx}}{k!} \text{ – операторы Саса-Миракьяна.}$$

§1.2 ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Основным вопросом теории приближения является проблема построения алгебраического многочлена

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

или тригонометрического полинома

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ... + a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

которые приближали бы заданную функцию f.

То, что эта задача имеет решение, доказал К.Вейерштрасс (1885 г.):

Теорема 1. (Первая теорема Вейерштрасса) *Пусть $f \in C[a, b]$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен $P(x)$ такой, что для всех x $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.*

Теорема 2. (Вторая теорема Вейерштрасса) *Пусть $f \in C_{2\pi}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический полином $P(x)$ такой, что для всех x $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.*

Доказательство этих теорем заключается в том, что указывается конкретная последовательность многочленов или полиномов P_n, для которой $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$. Далее будет приведено несколько примеров таких последовательностей и доказана их сходимость (алгебраическая и тригонометрическая теоремы Коровкина и примеры к ним), что и будет доказывать теоремы 1 и 2.

СВЯЗЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Лемма. *Если $p_n(x)$ – алгебраический многочлен степени n, то $t_n(x) = p_n(\cos x)$ – четный тригонометрический полином порядка n.*

Док-во. Четность t_n очевидна:

$$t_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos^2 x + ... + a_n \cos^n x.$$

Покажем, что $\cos^m x$ –четный полином порядка m. Для $m = 1$ это очевидно. Пусть это верно для некоторого k:

$$\cos^m x = \sum_{k=0}^{m} \phi_k \cos kx$$

Тогда

$$\cos^{m+1} x = \cos x \sum_{k=0}^{m} \phi_k \cos kx = \sum_{k=0}^{m} \frac{\phi_k}{2}(\cos(kx - x) + \cos(kx + x))$$

это четный тригонометрический полином порядка $m + 1$. Следовательно t_n, как сумма четных тригонометрических полиномов, также четный тригонометрический полином.

Лемма. *Если $t_n(x)$ – четный тригонометрический полином порядка n, то тогда функция $p_n(x) = t_n(\arccos x)$ – алгебраический многочлен степени n.*

Док-во. Рассмотрим

$$\cos k\alpha = Re(\cos k\alpha + i \sin k\alpha) = Re\left((\cos\alpha + i\sin\alpha)^k\right) =$$
$$= Re\Big\{\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} i^m \sin^m \alpha \cos^{k-m} \alpha\Big\}.$$

Если m нечетное, то $i^m = \pm i$ и m-ое слагаемое не входит в действительную часть, если m четное, то $i^m = \pm 1$ и

$$\sin^m \alpha = (\sin^2 \alpha)^{m/2} = (1 - \cos^2 \alpha)^{m/2} = b_0 + b_1 \cos^2 \alpha + ... + b_m \cos^m \alpha$$

Следовательно

$$\cos k\alpha = \sum_{\substack{m=0\\ m \text{ четное}}}^{k} \binom{k}{m} (b_0 + b_1 \cos^2 \alpha + ... + b_m \cos^m \alpha) \cos^{k-m} \alpha =$$
$$= \sum_{\substack{m=0\\ m \text{ четное}}}^{k} \binom{k}{m} (b_0 \cos^{k-m} \alpha + b_1 \cos^{k-m+2} \alpha + ... + b_m \cos^k \alpha) =$$
$$= c_0 + c_1 \cos\alpha + c_2 \cos^2 \alpha + ... + c_k \cos^k \alpha.$$

Так как t_n четный полином, он имеет вид

$$t_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$$

Следовательно

$$\begin{aligned} t_n(\arccos x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k \arccos x) = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (c_{k,0} + c_{k,1}\cos(\arccos x) + c_{k,2}\cos^2(\arccos x) + \ldots \\ &\quad + c_{k,k}\cos^k(\arccos x)) = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (c_{k,0} + c_{k,1}x + c_{k,2}x^2 + \ldots + c_{k,k}x^k) \end{aligned}$$

это алгебраический многочлен степени n.

Как видно из этих лемм, теорема, доказанная для алгебраических многочленов, может быть перенесена на тригонометрические полиномы и наоборот.

§1.3 МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Опред. *Пусть функция* $f \in C[a,b]$. *Функция*

$$\omega(f,\delta) = \max_{\substack{|x_1-x_2|\le\delta \\ x_1,x_2\in[a,b]}} |f(x_1)-f(x_2)| = \max_{\substack{0\le h\le\delta \\ a\le x\le b-h}} |f(x+h)-f(x)|$$

называется модулем непрерывности функции f. *(Для неограниченного отрезка* $[a,b]$ *и ограниченной функции* f *в определении вместо* $\max$ *следует рассматривать* $\sup$*).*

СВОЙСТВА МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Будем рассматривать $\omega(f,\delta)$ как функцию аргумента δ. Справедливы следущие утверждения:

1^0. $\omega(0)=0$ (очевидно из определения).

2^0. $\omega(\delta_1)\le\omega(\delta_2)$ для $\delta_1\le\delta_2$ (так как чем больше δ, тем шире промежуток, по которому берется максимум).

3^0. $\omega(\delta_1+\delta_2)\le\omega(\delta_1)+\omega(\delta_2)$. Действительно:

$$\omega(\delta_1+\delta_2) = \max_{0\le h\le\delta_1+\delta_2}\max_x |f(x+h)-f(x)| =$$
$$= \max_{\substack{0\le h_1\le\delta_1 \\ 0\le h_2\le\delta_2}}\max_x |f(x+h_1+h_2)-f(x)| \le$$
$$\le \max_{\substack{0\le h_1\le\delta_1 \\ 0\le h_2\le\delta_2}}\max_x \{|f(x+h_1+h_2)-f(x+h_2)|+|f(x+h_2)-f(x)|\} \le$$
$$\le \max_{\substack{0\le h_1\le\delta_1 \\ 0\le h_2\le\delta_2}}\max_x |f(x+h_1+h_2)-f(x+h_2)| + \max_{\substack{0\le h_1\le\delta_1 \\ 0\le h_2\le\delta_2}}\max_x |f(x+h_2)-f(x)| \le$$
$$\le \max_{0\le h_2\le\delta_2}\omega(\delta_1) + \max_{0\le h_1\le\delta_1}\omega(\delta_2) = \omega(\delta_1)+\omega(\delta_2).$$

4^0. Если f равномерно непрерывная функция, то $\omega(\delta)$ – непрерывная функция, то есть $\lim_{\xi\to 0}\omega(\delta+\xi)=\omega(\delta)$. Действительно:

$$\omega(\delta)\le\omega(\delta+\xi)\le\omega(\delta)+\omega(\xi) \implies 0\le\omega(\delta+\xi)-\omega(\delta)\le\omega(\xi) =$$
$$= \max_{0\le h\le\xi}\max_x |f(x+h)-f(x)| \le$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Так как f равномерно непрерывная функция, найдется ρ такое, что для $h < \rho$ будет $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$. Пусть $\xi < \rho$, тогда

$$\leq \max_{0 \leq h \leq \xi} \varepsilon = \varepsilon,$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

5^0. Для $n \in \mathbb{N}$, $n\delta \in [0, b-a]$ будет $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$. Действительно, для $n = 1$ неравенство тривиально. Предполагая, что оно верно для некоторого n, легко получаем его для $n+1$:

$$\omega((n+1)\delta) \leq \omega(n\delta) + \omega(\delta) \leq n\omega(\delta) + \omega(\delta) = (n+1)\omega(\delta)$$

6^0. Для $\lambda > 0$, $(\lambda+1)\delta \in [0, b-a]$, будет $\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega(\delta)$. Действительно:

$$\omega(\lambda\delta) \leq \omega([\lambda+1]\delta) \leq [\lambda+1]\omega(\delta) \leq (\lambda+1)\omega(\delta)$$

7^0. Для $f \not\equiv$const, $\delta \in [0, b-a]$ будет $\dfrac{\omega(\delta)}{\delta} \geq \dfrac{\omega(b-a)}{2(b-a)}$ =const$\neq 0$. Действительно:

$$\omega(b-a) = \omega(\delta\frac{b-a}{\delta}) \leq (\frac{b-a}{\delta} + 1)\omega(\delta) =$$

$$= \frac{b-a}{\delta}(1 + \frac{\delta}{b-a})\omega(\delta) \leq \frac{b-a}{\delta} 2\omega(\delta) \implies$$

$$\frac{\omega(\delta)}{\delta} \geq \frac{\omega(b-a)}{2(b-a)}$$

Как следует из свойств 1^0 и 4^0 если $f \in C[a, b]$ или $C_{2\pi}$, то $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(f, \delta) = 0$, поэтому, чтобы показать, что для $f \in C[a, b]$ или $C_{2\pi}$ $L_n(f; x) \to f(x)$ достаточно показать, что

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \text{const}\ \omega(f, \delta_n),\ \text{где}\ \delta_n \to 0$$

Именно таким образом в дальнейшем и будет оцениваться погрешность приближения.

КЛАССЫ ЛИПШИЦА

Опред. *Пусть* $\alpha \in (0,1]$, $M > 0$. *Множество всех непрерывных функций* f *таких, что*

$$\omega(f,\delta) \le M\delta^{\alpha}$$

называется классом Липшица порядка α *и обозначается* $Lip_M\alpha$.

Замечание 1. (Почему $\alpha \le 1$)
По свойству 7^0 модуля непрерывности, если $f \neq$const, то

$$\frac{\omega(b-a)}{2(b-a)} \le \frac{\omega(f,\delta)}{\delta} \le \frac{M\delta^{\alpha}}{\delta} = M\delta^{\alpha-1}$$

и, если $\alpha > 1$, то $\dfrac{\omega(b-a)}{2(b-a)} \not\to 0$ при $\delta \to 0$, а $M\delta^{\alpha-1} \to 0$ при $\delta \to 0$.
Следовательно, если $\alpha > 1$, то $f \equiv$const.

Замечание 2. (О соотношении между классами)
Модуль непрерывности имеет смысл рассматривать при малых значениях δ. При таких δ для $\alpha < \beta$ будет $\delta^{\alpha} > \delta^{\beta}$, следовательно, если $\omega(f,\delta) \le M\delta^{\beta}$, то, тем более, $\omega(f,\delta) \le M\delta^{\alpha}$, откуда получаем для $\alpha < \beta \quad Lip_M\alpha \supset Lip_M\beta$.

Замечание 3. (Случай $\alpha = 1$)
Важный класс Липшица $Lip_M 1$. В него входят все функции, имеющие ограниченную производную (но не только они). Действительно, по формуле Лагранжа

$$f(x+h) - f(x) = f'(t)h, \text{ где } t \in [0,h]$$

Откуда

$$\omega(f,\delta) = \max_{\substack{0\le h\le\delta \\ a\le x\le b-h}} |f(x+h) - f(x)| = \max_{\substack{0\le h\le\delta \\ a\le x\le b-h}} |f'(t)|h \le \|f'\|\delta$$

Следовательно $f \in Lip_{\|f'\|}1$.

§1.4 НЕКОТОРЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ

Докажем некоторые вспомогательные формулы:
1^0. Для любых целых m и k

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mt\cos kt\,dt=\begin{cases}0, & \text{если } m\neq k\\ 1, & \text{если } m=k\end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mt\sin kt\,dt=\begin{cases}0, & \text{если } m\neq k\\ 1, & \text{если } m=k\end{cases}$$

$$\text{и}\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mt\sin kt\,dt=0$$

Эти формулы легко проверяются непосредственным интегрированием.

2^0. Имеет место равенство:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

Док-во:

$$\sin\frac{t}{2}\Big\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\Big\}=\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big\{-\frac{1}{2}\sin(k-\frac{1}{2})t+\frac{1}{2}\sin(k+\frac{1}{2})t\Big\}=$$
$$=\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{3t}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{3t}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{5t}{2}-\ldots$$
$$-\frac{1}{2}\sin(n-\frac{1}{2})t+\frac{1}{2}\sin(n+\frac{1}{2})t=\frac{1}{2}\sin(n+\frac{1}{2})t,$$

откуда и следует доказываемая формула.

3^0. Имеет место равенство:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k+\frac{1}{2})t = \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$$

Док-во:

$$\sin\frac{t}{2}\Big\{\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k+\frac{1}{2})t\Big\} = \sum_{k=0}^{n-1}\Big\{\frac{1}{2}\cos kt - \frac{1}{2}\cos(k+1)t\Big\} =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t + \ldots + \frac{1}{2}\cos(n-1)t - \frac{1}{2}\cos nt =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos nt = \sin^2\frac{nt}{2},$$

откуда и следует доказываемая формула.

ЧАСТНЫЕ СУММЫ РЯДА ФУРЬЕ

Из математического анализа в качестве аппарата приближения хорошо известны частные суммы ряда Фурье:

$$\Phi_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\text{где} \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$$

Запишем Φ_n в виде интеграла:

$$\Phi_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\Big\}\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\Big\}\,dt,$$

откуда, применяя вспомогательную формулу 2^0, получаем:

$$\Phi_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

Из этого представления видно, что Φ_n – линейный, но не положительный оператор.

Отметим очевидный факт: если t_n – тригонометрический полином порядка не выше n, то $\Phi_n(t_n;x) \equiv t_n(x)$.

Известно так же, что операторы Φ_n не годятся в качестве аппарата приближения для всех непрерывных функций, так как имеет место

Теорема (дю-Буа Реймонд). Существует такая непрерывная функция, для которой ее ряд Фурье расходится в точке $x = 0$.

СУММЫ ФЕЙЕРА

Фейер предложил тригонометрический полином

$$F_n(f;x) = \frac{1}{n}\Big\{\Phi_0(f;x) + \Phi_1(f;x) + \ldots + \Phi_{n-1}(f;x)\Big\} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Phi_k(f;x),$$

где Φ_n – частная сумма ряда Фурье. Этот полином может быть записан в виде:

$$\begin{aligned} F_n(f;x) &= \frac{1}{n}\Big\{\frac{a_0}{2} + \Big(\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x\Big) + \\ &\quad + \Big(\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x\Big) + \ldots \\ &\quad + \Big(\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x\Big)\Big\} = \\ &= \frac{1}{n}\Big\{n\frac{a_0}{2} + (n-1)(a_1\cos x + b_1\sin x) + (n-2)(a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \ldots \\ &\quad + (a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\sin(n-1)x)\Big\} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \end{aligned}$$

То есть

$$F_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_{n,k}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad \text{где} \quad \rho_{n,k} = \frac{n-k}{n}$$

Последнее представление называют обобщенной суммой Фурье.
Запишем F_n в виде интеграла:

$$F_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\{(k+\frac{1}{2})(t-x)\}}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{2\sin\frac{t-x}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\{(k+\frac{1}{2})(t-x)\}\,dt = (\text{в силу } 3^0) =$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin^2\frac{n}{2}(t-x)}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\,dt,$$

откуда видно, что F_n – линейный положительный оператор.
Для частных сумм ряда Фурье имело место тождество $\Phi_n(t_n;x) \equiv t_n(x)$ (t_n – тригонометрический полином). Для F_n это свойство не сохраняется. Но зато, так как F_n линейный положительный оператор,

$$\|F_n(f;x)\| \le \|f\| F_n(1;x) = \|f\|,$$

то есть для непрерывной функции ряд Фейера

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n-k}{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

обязательно сходится и, в отличии от ряда Фурье, может использоваться для приближения всех непрерывных ограниченных функций. (В дальнейшем будет показано, что $F_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ для $f \in C_{2\pi}$.)

СУММЫ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

Валле-Пуссен ввел в рассмотрение тригонометрический полином

$$V_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Phi_k(f;x),$$

где Φ_k – частная сумма ряда Фурье. Оператор V_n можно записать в виде

$$V_n(f;x) = 2F_{2n}(f;x) - F_n(f;x),$$

где F_k –суммы Фейера, или в виде

$$V_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) + \\ + \sum_{k=n+1}^{2n-1}\frac{2n-k}{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

это тригонометрический полином порядка $2n-1$, который, как и полином Фейера, является обобщенной суммой Фурье.

Запишем V_n в виде интеграла:

$$V_n(f;x) = 2F_{2n}(f;x) - F_n(f;x) = \\ = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin^2 n(t-x)}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\,dt - \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin^2\frac{n}{2}(t-x)}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\,dt = \\ = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin^2 n(t-x) - \sin^2\frac{n}{2}(t-x)}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\,dt$$

Поскольку $\quad \sin^2 2\alpha - \sin^2\alpha = (\sin 2\alpha - \sin\alpha)(\sin 2\alpha + \sin\alpha) =$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha\sin 3\alpha,$$

Получаем, что

$$V_n(f;x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\frac{n}{2}(t-x)\cdot\sin\frac{3n}{2}(t-x)}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\,dt,$$

откуда видно, что V_n – линейный не положительный оператор. Пусть t_n – тригонометрический полином порядка не выше n. Тогда

$$V_n(t_n;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Phi_k(t_n;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}t_n(x) = \frac{1}{n}t_n(x)\sum_{k=n}^{2n-1}1 = t_n(x)$$

Таким образом, как и для сумм Фурье, $V_n(t_n;x) \equiv t_n(x)$. И, как и ряд Фейера, ряд Валле-Пуссена сходится, поскольку

$$\|V_n(f;x)\| = \|2F_{2n}(f;x) - F_n(f;x)\| \le 2\|F_{2n}(f;x)\| + \|F_n(f;x)\| \le 3\|f\|,$$

следовательно операторы V_n могут быть использованы для приближения всех непрерывных функций, как и операторы F_n, но, в отличии от последних, сохраняют тригонометрические полиномы.

ПОЛИНОМЫ A_n

Рассмотрим оператор

$$A_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)u_n(t-x)\,dt,$$

$$\text{где } u_n(t) = \frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n} c_k e^{ikt}\right|^2}{2\sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2}, \qquad c_k = \sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)$$

Очевидно, что A_n – линейный положительный оператор. Отметим его некоторые свойства.

Лемма 1. *u_n – тригонометрический полином порядка n.*

Док-во. $|z|^2 = z\bar{z}$, поэтому

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikt}\right|^2 = (c_0 + c_1e^{it} + c_2e^{2it} + \ldots + c_ne^{nit})\cdot$$
$$\cdot(c_0 + c_1e^{-it} + c_2e^{-2it} + \ldots + c_ne^{-nit}) =$$
$$= (c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_n^2) + (e^{it} + e^{-it})(c_0c_1 + c_1c_2 + \ldots + c_{n-1}c_n) +$$
$$+ (e^{2it} + e^{-2it})(c_0c_2 + c_1c_3 + \ldots + c_{n-2}c_n) + \ldots(e^{nit} + e^{-nit})c_0c_n =$$
$$= (c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_n^2) + 2\cos t(c_0c_1 + c_1c_2 + \ldots + c_{n-1}c_n) +$$
$$+ 2\cos 2t(c_0c_2 + c_1c_3 + \ldots + c_{n-2}c_n) + \ldots + 2\cos nt\, c_0c_n,$$

Откуда получаем, что $u_n(t)$ имеет вид:

$$u_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_{n,k} \cos kt,$$

где $\rho_{n,k}$ некоторые числа, причем

$$\rho_{n,1} = \frac{c_0 c_1 + c_1 c_2 + ... + c_{n-1} c_n}{c_0^2 + c_1^2 + ... + c_n^2}$$

То есть u_n является тригонометрическим полиномом порядка n.

Лемма 2. *A_n – обобщенная сумма Фурье.*

Док-во. Используем представление для функции u_n, полученное в лемме 1:

$$A_n(f;x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Big\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_{n,k} \cos k(t-x) \Big\} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_{n,k}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \rho_{n,k} \Big\{ \Big(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt \Big) \cos kx + \Big(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt \Big) \sin kx \Big\} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_{n,k} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где a_k и b_k – коэффициенты Фурье.

Следствие. Из последнего представления A_n и свойств коэффициентов Фурье получаем равенства:

1^0. $A_n(1;x) = 1$ (или $\displaystyle\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)\, dt = 1$)

2^0. $A_n(\cos t; x) = \rho_{n,1} \cos x$

3^0. $A_n(\sin t; x) = \rho_{n,1} \sin x$

Лемма 3. *Для оператора* A_n $\rho_{n,1} = \cos\frac{\pi}{n+2}$.
Док-во. Как было получено в лемме 1,

$$\rho_{n,1} = \frac{c_0 c_1 + c_1 c_2 + \ldots + c_{n-1}c_n}{c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_n^2},$$

где $c_k = \sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)$. Значит для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right) \sin\left(\frac{k+2}{n+2}\pi\right) = \cos\frac{\pi}{n+2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right).$$

Подсчитаем правую часть последнего равенства:

$$\cos\frac{\pi}{n+2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{\pi}{n+2} \sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right) \sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2}\sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi - \frac{\pi}{n+2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi + \frac{\pi}{n+2}\right) \right\} \sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n+2}\pi\right) \sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right) \sin\left(\frac{k+2}{n+2}\pi\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right) \sin\left(\frac{k+2}{n+2}\pi\right),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4. $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|u_n(t)\,dt \le \frac{\pi^2}{2n+4}$

Док-во. Так как для $0 \le t \le \pi/2$ $2t/\pi \le \sin t \le t$, применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|u_n(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\frac{t}{2}|u_n(t)\,dt \le \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin|\frac{t}{2}|u_n(t)\,dt \le$$

$$\le \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2|\frac{t}{2}|u_n(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}u_n(t)\,dt} =$$

$$= \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos t}{2}u_n(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}u_n(t)\,dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}A_n(1;0) - \frac{\pi}{2}A_n(\cos t;0)}\sqrt{\pi A_n(1;0)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}(1-\cos\frac{\pi}{n+2})}\,\sqrt{\pi} = \pi\,\sin\frac{\pi}{2(n+2)} \le \frac{\pi^2}{2(n+2)},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 5. Для $f \in C_{2\pi}$ $\|A_n(f;x) - f\| \le 6\omega(f, \frac{1}{n})$
Док-во.

$$|A_n(f;x) - f(x)| = \Big|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)u_n(t-x)\,dt - f(x)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(t-x)\,dt\Big| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f(x)|u_n(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} |f(y+x) - f(x)|u_n(y)\,dy =$$

(так как подинтегральная функция имеет период 2π)

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y+x) - f(x)|u_n(y)\,dy \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \omega(f, |y|)\,u_n(y)\,dy \le$$

$$\le \omega(f, \frac{1}{n})\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (n|y|+1)\,u_n(y)\,dy \le$$

$$\le \omega(f, \frac{1}{n})\left(\frac{n\pi^2}{2n+4} + 1\right) \le \omega(f, \frac{1}{n})\left(\frac{\pi^2}{2} + 1\right) \le 6\omega(f, \frac{1}{n}),$$

что и требовалось доказать.

§1.5 НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

По теоремам Вейерштрасса любую непрерывную функцию можно приблизить алгебраическим многочленом или тригонометрическим полиномом с любой точностью, однако при этом порядок полинома может оказаться очень высоким. Таким образом возникает вопрос: какой точности можно добиться, используя полиномы порядка не выше некоторого, наперед заданного, n?

Введем обозначения:

$\mathbb{P}_n$ –множество всех алгебраических многочленов порядка не выше n;

$\mathbb{T}_n$ –множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n;

$\|f - h_n\|$ – уклонение h_n от f;

$E_n^A(f) = \inf_{h_n \in \mathbb{P}_n} \|f - h_n\|$ и $E_n^T(f) = \inf_{h_n \in \mathbb{T}_n} \|f - h_n\|$ – наилучшее приближение f.

Многочлен (полином), на котором достигается $\inf$, будем называть многочленом (полиномом) наилучшего приближения для f.

Отметим, что в силу теорем Вейерштрасса

$$E_0^{A,T}(f) \geq E_1^{A,T}(f) \geq E_2^{A,T}(f) \geq ... \text{ и } \lim_{n\to\infty} E_n^{A,T}(f) = 0.$$

Теорема 3. (Первая теорема Джексона) *Если $f \in C_{2\pi}$, то*

$$E_n^T(f) \leq 6\omega(f, \frac{1}{n}).$$

Доказательство следует из того, что для оператора A_n, рассмотренного в §1.4, $E_n^T(f) \leq \|A_n(f;x) - f\| \leq 6\omega(f, \dfrac{1}{n})$.

Следствие. Если $f \in C_{2\pi} \cap Lip_M \alpha$, то $E_n^T(f) \leq 6\omega(f, \dfrac{1}{n}) \leq \dfrac{6M}{n^\alpha}$. В частности, если $f \in C_{2\pi}^1$, то $E_n^T(f) \leq \dfrac{6\|f'\|}{n}$.

Теорема 4. (Вторая теорема Джексона) *Если* $f \in C^p_{2\pi}$, *то*

$$E_n^T(f) \leq \frac{6^{p+1}}{n^p}\omega(f^{(p)}, \frac{1}{n}).$$

Док-во. Введем обозначения:
$\mathbb{T}_n$ – как и выше, множество тригонометрических полиномов порядка не выше n;
$\mathbb{T}_n^0$ – множество тригонометрических полиномов порядка не выше n без свободного члена;
$t_n(f;x)$ – многочлен наилучшего приближения для f из $\mathbb{T}_n$;
$t_n^0(f;x)$ – многочлен наилучшего приближения для f из $\mathbb{T}_n^0$;
$e_n(f) = \|f - t_n^0(f;x)\|$.
Доказательство разобьем на леммы. Будем использовать оператор A_n из §1.4.

Лемма 1. $E_n^T(f) \leq \frac{6}{n}e_n(f')$.
Док-во. Положим $\phi(x) = f(x) - \int t_n^0(f';x)\,dx$. Тогда с одной стороны

$$\|A_n(\phi;x) - \phi\| \leq 6\omega(\phi, \frac{1}{n}) \leq \frac{6}{n}\|\phi'\| = \frac{6}{n}\|f' - t_n^0(f';x)\| = \frac{6}{n}e_n(f'),$$

с другой стороны

$$\|A_n(\phi;x) - \phi\| \geq E_n^T(\phi) = \|\phi - t_n(\phi;x)\| =$$
$$= \|\Big(f(x) - \int t_n^0(f';x)\,dx\Big) - t_n(\phi;x)\| =$$
$$= \|f(x) - \Big(\int t_n^0(f';x)\,dx + t_n(\phi;x)\Big)\| \geq E_n^T(f)$$

Таким образом $E_n^T(f) \leq \frac{6}{n}e_n(f')$, и лемма доказана.

Лемма 2. *Если функция f имеет 2π-периодическую первообразную, то* $A_n(f;x) \in \mathbb{T}_n^0$.
Действительно, если первообразная функции f 2π-периодическая функция F, то свободный член полинома A_n

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}(F(\pi) - F(-\pi)) = 0.$$

Лемма 3. *Если* $g \in C^2_{2\pi}$, *то* $e_n(g') \leq \frac{6}{n}e_n(g'')$.

Док-во. Положим $\psi = g'(x) - \int t_n^0(g'';x)\,dx$. Первообразная функции ψ 2π-периодическая функция, следовательно по лемме 2 $A_n(\psi;x) \in \mathbb{T}_n^0$, откуда

$$e_n(\psi) \le \|A_n(\psi;x) - \psi\| \le 6\omega(\psi, \frac{1}{n}) \le \frac{6}{n}\|\psi'\| = \\ = \frac{6}{n}\|g'' - t_n^0(g'';x)\| = \frac{6}{n}e_n(g'').$$

С другой стороны

$$e_n(\psi) = \|\psi - t_n^0(\psi;x)\| = \|\Big(g' - \int t_n^0(g'';x)\,dx\Big) - t_n^0(\psi;x)\| = \\ = \|g' - \Big(\int t_n^0(g'';x)\,dx + t_n^0(\psi;x)\Big)\| \ge e_n(g').$$

Таким образом $e_n(g') \le \frac{6}{n}e_n(g'')$ и лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы:

$$E_n^T(f) \le \frac{6}{n}e_n(f') \le \frac{6}{n}\frac{6}{n}e_n(f'') \le \frac{6}{n}\frac{6}{n}\frac{6}{n}e_n(f''') \le ... \\ \le \left(\frac{6}{n}\right)^p e_n(f^{(p)}) \le \left(\frac{6}{n}\right)^p \|A_n(f^{(p)};x) - f^{(p)}\| \le \frac{6^{p+1}}{n^p}\omega(f^{(p)};\frac{1}{n}),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. (Третья теорема Джексона) *Если* $f \in C[a,b]$, *то* $E_n^A(f) \le 6\omega(f;\frac{b-a}{2n})$.

Доказательство разобьем на леммы.

Лемма 1. *Если* $f \in C[-\pi,\pi]$ *– четная, то существует четный полином* $t_n \in \mathbb{T}_n$, *такой, что* $E_n^T = \|f - t_n\|$.

Док-во. Обозначим $h_n \in \mathbb{T}_n$ – полином, наименее уклоняющийся от f на $[-\pi,\pi]$ (не обязательно четный). То есть

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - h_n(x)| = E_n^T(f)$$

Отметим, что

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - h_n(x)| = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(-x) - h_n(-x)| = \\ = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - h_n(-x)| = E_n^T(f)$$

Положим $t_n(x) = \frac{1}{2}(h_n(x) + h_n(-x))$. Это четный тригонометрический полином, поэтому

$$E_n^T(f) \le \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - t_n(x)| =$$
$$= \max_{x\in[-\pi,\pi]} |\frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}h_n(x) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}h_n(-x)| \le$$
$$\le \max_{x\in[-\pi,\pi]} \frac{1}{2}|f(x) - h_n(x)| + \max_{x\in[-\pi,\pi]} \frac{1}{2}|f(x) - h_n(-x)| = E_n^T(f)$$
$$\Longrightarrow \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - t_n(x)| = E_n^T(f),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Если* $f \in C[-1,1]$ *то* $E_n^A(f) \le 6\omega(f, \frac{1}{n})$

Док-во. Положим $y = \arccos x$, тогда если $x \in [-1,1]$, то $y \in [-\pi,\pi]$. Рассмотрим $g(y) = f(\cos y)$ – четная функция, следовательно существует четный тригонометрический полином $t_n(y)$ такой, что

$$\|g - t_n\| = E_n^T(g) \le 6\omega(g, \frac{1}{n})$$

По свойству многочленов (§1.1) $t_n(\arccos x)$ – алгебраический многочлен степени n, откуда

$$E_n^A(f) \le \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - t_n(\arccos x)| = \max_{y\in[-\pi,\pi]} |f(\cos y) - t_n(y)| =$$
$$= \max_{y\in[-\pi,\pi]} |g(y) - t_n(y)| = E_n^T(g).$$

Таким образом $E_n^A(f) \le E_n^T(g)$. По формуле Лагранжа $f(x_1) - f(x_2) = f'(t)(x_1 - x_2)$, где $t \in [x_1, x_2]$, поэтому

$$|x_1 - x_2| = |\cos y_1 - \cos y_2| = |\sin t||y_1 - y_2| \le |y_1 - y_2|,$$

откуда

$$\omega(g,\delta) = \max_{|y_1-y_2|\le\delta} |g(y_1) - g(y_2)| = \max_{|y_1-y_2|\le\delta} |f(\cos y_1) - f(\cos y_2)| \le$$
$$\le \max_{|x_1-x_2|\le\delta} |f(x_1) - f(x_2)| = \omega(f,\delta),$$

то есть $\omega(g,\delta) \le \omega(f,\delta)$. Из всего вышесказанного получаем:

$$E_n^A(f) \le E_n^T(g) \le 6\omega(g, \frac{1}{n}) \le 6\omega(f, \frac{1}{n}),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5. Пусть $f \in C[a,b]$. Положим $y = \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}$. Тогда $x = \frac{b-a}{2}y + \frac{b+a}{2}$ и если $x \in [a,b]$, то $y \in [-1,1]$. Рассмотрим $g(y) = f\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{b+a}{2}\right) = f(x)$. Пусть $t_n(y)$ –многочлен наилучшего приближения степени n для $g(y)$, тогда $t_n\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right)$ –многочлен по x степени n, откуда

$$E_n^A(f) \le \max_{x\in[a,b]}\left|f(x) - t_n\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right)\right| =$$

$$= \max_{y\in[-1,1]}\left|f\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right) - t_n(y)\right| =$$

$$= \max_{y\in[-1,1]}|g(y) - t_n(y)| = E_n^A(g) \le 6\omega(g, \frac{1}{n}),$$

так как $g \in C[-1,1]$ и можно применить лемму 2.

Поскольку

$$|y(x_1) - y(x_2)| = \left|\frac{2}{b-a}x_1 - \frac{b+a}{b-a} - \frac{2}{b-a}x_2 + \frac{b+a}{b-a}\right| = \frac{2}{b-a}|x_1 - x_2|,$$

Получаем:

$$\omega(g,\delta) = \max_{|y_1-y_2|\le\delta}|g(y_1) - g(y_2)| \max_{\frac{2}{b-a}|x_1-x_2|\le\delta}|f(y(x_1)) - f(y(x_2))| =$$

$$= \max_{|x_1-x_2|\le\frac{b-a}{2}\delta}|f(x_1) - f(x_2)| = \omega(f, \frac{b-a}{2}\delta).$$

Объединяя все полученные неравенства, получаем утверждение теоремы.

Следствие. Если $f \in Lip_M\alpha$, то $E_n^A(f) \le 6\left(\frac{b-a}{2}\right)^\alpha \frac{M}{n}$. В частности, если $f \in \mathrm{C}^1[a,b]$, то $E_n^A(f) \le \frac{3(b-a)\|f'\|}{n}$.

Теорема 6. (Четвертая теорема Джексона) *Если* $f \in C^p[a,b]$, *то для* $n > p$

$$E_n^A(f) \le \frac{2\,3^{p+1}(b-a)^p}{n(n-1)...(n-p+1)}\omega(f^{(p)}, \frac{b-a}{2(n-p)}).$$

Лемма. *Если* $f \in C^1[a,b]$, *то* $E_n^A(f) \le \frac{6(b-a)}{n}E_{n-1}^A(f')$

Док-во. пусть $p_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$, наименее уклоняющийся от f'. Обозначим $g(x) = f(x) - \int_0^x p_{n-1}(t)\,dt$.

Пусть $h_n(x)$ – многочлен степени n, наименее уклоняющийся от g. Тогда с одной стороны

$$E_n^A(g) = \max_{x\in[a,b]} |g(x) - h_n(x)| =$$

$$= \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \int_0^x p_{n-1}(t)\,dt - h_n(x)| \geq E_n^A(f),$$

с другой стороны по следствию из третей теоремы Джексона

$$E_n^A(g) \leq \frac{3(b-a)}{n}\|g'\| = \frac{3(b-a)}{n}\|f' - p_{n-1}\| = \frac{3(b-a)}{n}E_{n-1}^A(f').$$

Таким образом $E_n^A(f) \leq E_n^A(g) \leq \frac{3(b-a)}{n}E_{n-1}^A(f')$ и лемма доказана.

Доказательство теоремы 6. Последовательное применение леммы дает

$$E_n^A(f) \leq \frac{3(b-a)}{n}E_{n-1}^A(f') \leq \frac{3(b-a)}{n}\frac{3(b-a)}{n-1}E_{n-2}^A(f'') \leq \dots$$

$$\leq \frac{3^p(b-a)^p}{n(n-1)\dots(n-p+1)}E_{n-p}^A(f^{(p)}) \leq$$

$$\leq \frac{3^p(b-a)^p}{n(n-1)\dots(n-p+1)}6\omega(f^{(p)}, \frac{b-a}{2(n-p)}),$$

что и требовалось доказать.

По сути, основным содержанием теорем Джексона является утверждение, что если функция p раз дифференцируема, то ее можно приблизить алгебраическим или тригонометрическим полиномом порядка n с точностью $\dfrac{1}{n^p}$.

ГЛАВА 2.

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§2.1 УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Теорема 7. (Алгебраическая теорема Коровкина) *Пусть* $\{L_n(f;x)\}$ – *последовательность линейных положительных операторов,* f – *непрерывная функция. Если*

$$L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x), \text{ где } \alpha_n(x) \to 0 \tag{7.1}$$

$$L_n(t;x) = x + \beta_n(x), \text{ где } \beta_n(x) \to 0 \tag{7.2}$$

$$L_n(t^2;x) = x^2 + \gamma_n(x), \text{ где } \gamma_n(x) \to 0 \tag{7.3}$$

то $L_n(f;x) \to f(x)$, *причем имеет место неравенство:*

$$|L_n(f;x) - f(x)| \le (2 + \alpha_n(x))\omega(f,\delta_n) + \|f\|\,|\alpha_n(x)|, \text{ где}$$

$\delta_n = \delta_n(x) = \sqrt{x^2\alpha_n(x) - 2x\beta_n(x) + \gamma_n(x)}$

Док-во. Если $|t-x| \le \delta$, то

$$|f(t) - f(x)| \le \omega(f;|t-x|) \le \omega(f;\delta) \le (1 + \frac{(t-x)^2}{\delta^2})\omega(f;\delta)$$

Если $|t-x| > \delta$, то

$$|f(t) - f(x)| \le \omega(f;|t-x|) \le \omega(f;\frac{|t-x|}{\delta}\delta) \le$$

$$\le (1 + \frac{|t-x|}{\delta})\omega(f;\delta) \le (1 + \frac{(t-x)^2}{\delta^2})\omega(f;\delta)$$

Таким образом, в любом случае

$$|f(t) - f(x)| \leq (1 + \frac{(t-x)^2}{\delta^2})\omega(f;\delta),$$

откуда

$$L_n(|f(t) - f(x)|;x) \leq$$
$$\leq \omega(f;\delta)\Big\{L_n(1;x) + \frac{1}{\delta^2}\Big(L_n((t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x)\Big)\Big\} =$$
$$= \omega(f;\delta)\Big\{1 + \alpha_n(x) + \frac{1}{\delta^2}(x^2 + \gamma_n(x) - 2x(x+\beta_n(x)) + x^2(1+\alpha_n(x))\Big\} =$$
$$= \omega(f;\delta)\Big\{1 + \alpha_n(x) + \frac{1}{\delta^2}(\gamma_n(x) - 2x\beta_n(x) + x^2\alpha_n(x))\Big\} =$$
$$= (2 + \alpha_n(x))\omega(f;\delta),$$

откуда

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq |L_n(f(t);x) - L_n(f(x);x)| + |L_n(f(x);x) - f(x)| \leq$$
$$\leq L_n(|f(t) - f(x)|;x) + |f(x)||L_n(1;x) - 1| \leq$$
$$\leq (2 + \alpha_n(x))\omega(f,\delta_n) + \|f\|\,|\alpha_n(x)|,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть $\{L_n(f;x)\}$ – последовательность линейных положительных операторов, $f \in C[0,1]$. Если выполнены соотношения (7.1), (7.2), (7.3), то

$$\|L_n(f;x) - f(x)\| \leq \mathrm{const}\,\omega(f,\delta_n^*)$$

где $\delta_n^* = \sqrt{|\alpha_n(x)| + 2|\beta_n(x)| + |\gamma_n(x)|}$.

Док-во. Очевидно, что $\delta_n \leq \delta_n^*$ и $|\alpha_n(x)| \leq \delta_n^*$, поэтому утверждение теоремы 7 перепишется в виде:

$$\|L_n(f;x) - f(x)\| \leq \mathrm{const}\,\omega(f,\delta_n) + \|f\||\alpha_n(x)| \leq$$
$$\leq \mathrm{const}\,\omega(f,\delta_n^*) + \|f\|\delta_n^* = \omega(f,\delta_n^*)\left(\mathrm{const} + \frac{\|f\|\delta_n^*}{\omega(f,\delta_n^*)}\right)$$

По свойству модуля непрерывности $\dfrac{\delta_n^*}{\omega(f,\delta_n^*)} \leq \dfrac{2}{\omega(f,1)} = \mathrm{const}$ и следствие доказано.

Замечание 1. Если $\alpha_n(x) \rightrightarrows 0$, $\beta_n(x) \rightrightarrows 0$, $\gamma_n(x) \rightrightarrows 0$, то для $f \in C[0,1]$ $L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$.

Замечание 2. Как видно из доказательства теоремы, условия (7.2) и (7.3) можно заменить условием $L_n((t-x)^2;x) \to 0$.

Пример к теореме 7. (Сходимость последовательности операторов Саса-Миракьяна). Рассмотрим

$$M_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}.$$

Подсчитаем:

$$M_n(1;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx} = e^{nx} e^{-nx} = 1$$

$$M_n(t;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx} = \sum_{k=1}^{\infty} x \frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-nx} =$$

$$= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx} = x\, e^{nx} e^{-nx} = x$$

$$M_n(t^2;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx} = \sum_{k=1}^{\infty} x \frac{k}{n} \frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-nx} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} x \frac{k-1}{n} \frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-nx} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{n} \frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-nx} =$$

$$= x^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(nx)^{k-2}}{(k-2)!} e^{-nx} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx} = x^2 + \frac{x}{n}$$

Таким образом $\alpha_n(x) \equiv 0$, $\beta_n(x) \equiv 0$, $\gamma_n(x) = \dfrac{x}{n}$, поэтому $\delta_n(x) = \sqrt{\dfrac{x}{n}}$ и по теореме 7

$$|M_n(f;x) - f(x)| \le 2\omega(f, \sqrt{\frac{x}{n}}).$$

Пример к теореме 7. (Сходимость последовательности операторов Бернштейна). Рассмотрим

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

Подсчитаем:

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$$

$$B_n(t;x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k))!} x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^k(1-x)^{n-1-k}x = x(x+1-x)^{n-1} = x$$

$$B_n(t^2;x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k(1-x)^{n-k} +$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n-1}{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} x^k(1-x)^{n-k} +$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^k(1-x)^{n-1-k}x =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n-1}{n} \frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} x^k (1-x)^{n-2-k} x^2 + \frac{x}{n}(x+1-x)^{n-1} =$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 (x+1-x)^{n-2} + \frac{x}{n} = (1-\frac{1}{n})x^2 + \frac{x}{n} = x^2 + \frac{x}{n} - \frac{x^2}{n} =$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

Таким образом $\alpha_n(x) \equiv 0$, $\beta_n(x) \equiv 0$, $\gamma_n(x) = \dfrac{x(1-x)}{n}$.

Поэтому $\delta_n(x) = \sqrt{\dfrac{x(1-x)}{n}}$ и по теореме 7

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq 2\omega(f, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}).$$

Кроме того, так как $x \in [0,1]$, $\delta_n(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

$$\|B_n(f;x) - f\| \leq 2\,\omega(f, \frac{1}{2\sqrt{n}}).$$

Операторы Бернштейна могут служить для доказательства теоремы Вейерштрасса.

Пример к теореме 7. (Сходимость последовательности операторов Баскакова). Рассмотрим

$$\text{Б}_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k}.$$

Разложим функцию $\phi(t) = (1-t)^{-n}$ в ряд Тейлора:

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n+1)...(n+k-1)}{k!} t^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k = (1-t)^{-n}.$$

Положим $t = \dfrac{x}{1+x}$, тогда

$$\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{k} \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{k} \Longrightarrow$$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-n-k} = Б_n(1;x)$$

Подсчитаем:

$$Б_n(t;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}x^k(1+x)^{-n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!}x^k(1+x)^{-n-k} = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{k!n!}x^k(1+x)^{-n-k-1} =$$

$$= xБ_{n+1}(1;x) = x$$

Подсчитаем:

$$Б_n(t^2;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!}x^k(1+x)^{-n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{n+1}\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!}x^k(1+x)^{-n-k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+n}{n(n+1)}\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!}x^k(1+x)^{-n-k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(k-2)!(n+1)!} x^k (1+x)^{-n-k} +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k)!}{(k-1)!(n+1)!} x^k (1+x)^{-n-k} =$$

$$= x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)!} x^k (1+x)^{-(n+2)-k} +$$

$$+ \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)!} x^k (1+x)^{-n-1-k} =$$

$$= x^2 \text{Б}_{n+2}(1;x) + \frac{x(1+x)}{n} \text{Б}_{n+2}(1;x) = x^2 + \frac{x(1+x)}{n}$$

Таким образом $\alpha_n(x) \equiv 0$, $\beta_n(x) \equiv 0$, $\gamma_n(x) = \dfrac{x(1+x)}{n}$ и по теореме 7

$$|\text{Б}_n(f;x) - f(x)| \le 2\omega\Big(f, \sqrt{\frac{x(1+x)}{n}}\Big).$$

Операторы Баскакова так же могут служить для доказательства теоремы Вейерштрасса.

§2.2 УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Теорема 8. (Тригонометрическая теорема Коровкина)

Пусть $\{L_n(f;x)\}$ – последовательность линейных положительных операторов, f – непрерывная 2π-периодическая функция. Если

$$L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x), \text{ где } \alpha_n(x) \to 0 \tag{8.1}$$

$$L_n(\sin t;x) = \sin x + \beta_n(x), \text{ где } \beta_n(x) \to 0 \tag{8.2}$$

$$L_n(\cos t;x) = \cos x + \gamma_n(x), \text{ где } \gamma_n(x) \to 0 \tag{8.3}$$

то $L_n(f;x) \to f(x)$, причем имеет место неравенство:

$$\|L_n(f;x) - f(x)\| \le const\, \omega(f,\delta_n) + \|f\|\,|\alpha_n(x)|, \text{ где}$$

$\delta_n = \delta_n(x) = \sqrt{\alpha_n(x) - \sin x\beta_n(x) - \cos x\gamma_n(x)}$.

Док-во. Так как $L_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$, не уменьшая общности можно считать, что $|t-x| \le \pi$, откуда $|t-x| \le \pi \sin\dfrac{|t-x|}{2}$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned}|L_n(f;x) - f(x)| &\le |L_n(f(t);x) - L_n(f(x);x)| + |L_n(f(x);x) - f(x)| \le \\ &\le L_n(|f(t)-f(x)|;x) + |f(x)|\,|L_n(1;x) - 1| \le \\ &\le L_n(\omega(f,|t-x|);x) + \|f\|\,|\alpha_n(x)|\end{aligned}$$

Если $|t-x| \le \delta_n(x)$, то

$$\omega(f,|t-x|) \le \omega(f,\delta_n) \le \omega(f,\delta_n)\Big(1 + \Big(\frac{t-x}{\delta_n}\Big)^2\Big).$$

Если $|t-x| > \delta_n(x)$, то

$$\omega(f,|t-x|) = \omega(f,\frac{|t-x|}{\delta_n}\delta_n) \le \omega(f,\delta_n)\Big(1 + \frac{|t-x|}{\delta_n}\Big) \le$$

$$\le \omega(f,\delta_n)\Big(1 + \Big(\frac{t-x}{\delta_n}\Big)^2\Big).$$

Таким образом, в любом случае

$$\omega(f,|t-x|) \le \omega(f,\delta_n)\Big(1+\Big(\frac{t-x}{\delta_n}\Big)^2\Big) \le \omega(f,\delta_n)\Big(1+\frac{\pi^2}{\delta_n^2}\sin^2\frac{|t-x|}{2}\Big) =$$

$$= \omega(f,\delta_n)\Big(1+\frac{\pi^2}{2\delta_n^2}(1-\cos(t-x))\Big) =$$

$$= \omega(f,\delta_n)\Big(1+\frac{\pi^2}{2\delta_n^2}(1-\cos t\cos x - \sin t\sin x)\Big)$$

Откуда

$$|L_n(f;x)-f(x)| \le \omega(f,\delta_n)\Big\{L_n(1;x)+$$

$$+\frac{\pi^2}{2\delta_n^2}\Big(L_n(1;x)-\cos x L_n(\cos t;x)-\sin x L_n(\sin t;x)\Big)\Big\}+\|f\|\,|\alpha_n(x)| =$$

$$= \omega(f,\delta_n)\Big\{1+\alpha_n(x)+\frac{\pi^2}{2\delta_n^2}\Big(1+\alpha_n(x)-\cos x(\cos x+\gamma_n(x))-$$

$$-\sin x(\sin x+\beta_n(x))\Big)\Big\}+\|f\|\,|\alpha_n(x)| =$$

$$= \omega(f,\delta_n)\Big\{1+\alpha_n(x)+\frac{\pi^2}{2\delta_n^2}\Big(\alpha_n(x)-\cos x\gamma_n(x)-\sin x\beta_n(x)\Big)\Big\}+$$

$$+\|f\|\,|\alpha_n(x)| = \omega(f,\delta_n)\Big\{1+\alpha_n(x)+\frac{\pi^2}{2}\Big\}+\|f\|\,|\alpha_n(x)|,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Очевидно, что если $\alpha_n(x) \rightrightarrows 0$, $\beta_n(x) \rightrightarrows 0$, $\gamma_n(x) \rightrightarrows 0$, то для $f \in C_{2\pi}$ $L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$.

Замечание 2. Как видно из доказательства теоремы, условия (8.2) и (8.3) можно заменить условием $L_n(\sin^2\frac{t-x}{2};x) \to 0$.

Теорема 9. (Сходимость обобщенных рядов Фурье – пример к теореме 8.)

Пусть $\{\rho_{n,k}\}_{n=1,k=1}^{\infty\ \ n}$ – некоторая матрица чисел. Рассмотрим операторы

$$\Phi_n^*(f;x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\rho_{n,k}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

где $a_k,\ b_k$ – коэффициенты Фурье:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$$

Если

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\rho_{n,1} = 1 \qquad \text{и} \qquad (b)\ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\rho_{n,k}\cos kt \geq 0$$

то для $f \in C_{2\pi}$ $\Phi_n^*(f;\cdot) \rightrightarrows f$.

Док-во. Линейность оператора очевидна.Преобразуем оператор Φ_n^*:

$$\Phi_n^*(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\rho_{n,k}\Big\{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\cos kx\,dt +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\sin kx\,dt\Big\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\rho_{n,k}\cos k(t-x)\Big\}\,dt,$$

откуда, с учетом условия (b), следует положительность оператора. Используя соотношения 1^0, полученные в §1.4, получаем:

для $f(x) = 1$ $a_0 = 2,\ a_k = 0$ и $b_k = 0$ при $k = 1, 2, \ldots$
для $f(x) = \cos t$ $a_1 = 1,\ a_k = 0$ при $k = 0, 2, 3, \ldots$
и $b_k = 0$ при $k = 1, 2, \ldots$
для $f(x) = \sin t$ $a_k = 0$ при $k = 0, 1, \ldots$
и $b_1 = 1,\ b_k = 0$ при $k = 2, 3, \ldots$

Поэтому

$$\Phi_n^*(1;x) = 1,$$
$$\Phi_n^*(\cos t;x) = \rho_{n,1}\cos x \to \cos x,$$
$$\Phi_n^*(\sin t;x) = \rho_{n,1}\sin x \to \sin x,$$

следовательно выполнены условия 1-3 теоремы 8 и $\Phi_n^*(f;\cdot) \rightrightarrows f$

Замечание 1. Для ряда Фурье условие (a) теоремы 9, очевидно, выполняется, а условие (b) не выполняется и сходимости, как это следует из теоремы дю-Буа Реймонда, для всех непрерывных функций нет. Следовательно, условие положительности в теореме опустить нельзя.

Замечание 2. Суммы Фейера, полиномы A_n удовлетворяют теореме 9 и, так как они приближают любую непрерывную периодическую функцию, они могут служить доказательством второй теоремы Вейерштрасса.

§2.3 ОБЩИЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ

В §2.1 было доказано, что из сходимости последовательности линейных положительных операторов на функциях 1, x, x^2 следует сходимость на любой непрерывной функции. В §2.2 – что из сходимости на 1, $\sin x$, $\cos x$ следует сходимость к любой непрерывной периодической функции. Возникает вопрос: какие еще системы функций обладают аналогичным свойством?

Опред. *Функции $f_0(t), ..., f_n(t) \in C(J)$ образуют на интервале J систему Чебышева порядка n, если при любом наборе чисел $a_0, ..., a_n$, кроме всех нулей, полином $a_0 f_0(t) + ... + a_n f_n(t)$ имеет на интервале J не более n нулей.*

Примеры:

1^0. 1, t, $t^2, ...,$ t^n – система Чебышева порядка n на любом интервале, так как по основной теореме алгебры многочлен степени n имеет n корней.

2^0. 1, e^t, $e^{2t}, ...,$ e^{nt} – система Чебышева порядка n на любом интервале, так как, положив $y = e^t$, получим $a_0 + a_1 e^t + a_2 e^{2t} + ... + a_n e^{nt} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + ... + a_n y^n$ – имеет не более n нулей.

3^0. 1, $\cos t$, $\sin t$, $\cos 2t$, $\sin 2t, ...,$ $\cos nt$, $\sin nt$ – система Чебышева порядка $2n$ на любом интервале длиной 2π. Действительно:

$$a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + ... + a_n \cos nt + b_n \sin nt =$$

$$= a_0 + \frac{a_1}{2}(e^{it} + e^{-it}) + \frac{b_1}{2}(e^{it} - e^{-it}) + \frac{a_2}{2}(e^{2it} + e^{-2it}) + \frac{b_2}{2}(e^{2it} - e^{-2it}) + ...$$

$$+ \frac{a_n}{2}(e^{nit} + e^{-nit}) + \frac{b_n}{2}(e^{nit} - e^{-nit}) =$$

$$= a_0 + \frac{a_1 + b_1}{2} e^{it} + \frac{a_1 - b_1}{2} e^{-it} + \frac{a_2 + b_2}{2} e^{2it} + \frac{a_2 - b_2}{2} e^{-2it} + ...$$

$$+ \frac{a_n + b_n}{2} e^{nit} + \frac{a_n - b_n}{2} e^{-nit} =$$

положим $e^{it} = y$, тогда

$$= a_0 + c_1 y + \frac{d_1}{y} + c_2 y^2 + \frac{d_2}{y^2} + ... + c_n y^n + \frac{d_n}{y^n} =$$

$$= (a_0 y^n + c_1 y^{n+1} + d_1 y^{n-1} + c_2 y^{n+2} + d_2 y^{n-2} + ... + c_n y^{2n} + d_n)\frac{1}{y^n}.$$

Последнее выражение является многочленом порядка $2n$, следовательно имеет не более $2n$ нулей.

Теорема 10.(Обобщение алгебраической и тригонометрической теорем Коровкина.)*Пусть* $L_n(f;x)$ *– последовательность линейных положительных операторов, функции* $f_0,\ f_1,\ f_2$ *образуют систему Чебышева порядка 2 на интервале* J. *Если*

$$L_n(f_0;x) \to f_0(x), \quad L_n(f_1;x) \to f_1(x), \quad L_n(f_2;x) \to f_2(x),$$

то $L_n(f;x) \to f(x)$ *для всех* $f \in C(J)$.

Теорема 11. (Необходимость условия Чебышева.)
Если функции $f_0,\ f_1,\ f_2$ *– непрерывные функции на интервале* J, *не образуют систему Чебышева, то найдется последовательность линейных положительных операторов таких, что*

$$L_n(f_0;x) \equiv f_0(x), \quad L_n(f_1;x) \equiv f_1(x), \quad L_n(f_2;x) \equiv f_2(x),$$

и существует непрерывная на J *функция* f *такая, что* $L_n(f;x) \not\equiv f(x)$

(Доказательства теорем 10 и 11 см. Коровкин П.П. "Линейные операторы и теория приближений".)

§2.4 КЛАСС W

Рассмотрим класс линейных положительных операторов, предложенный Ю.И.Волковым.

Опред. *Будем говорить, что последовательность линейных положительных операторов принадлежит классу W если выполнены условия:*

$$L_n(1;x) = 1 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx} L_n(f(t);x) = nW(x)\, L_n(\,(t-x)f(t);x),$$

где $W(x)$ аналитическая положительная функция.

Приведем примеры операторов класса W.
Операторы Бернштейна:

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \quad W(x) = \frac{1}{x(1-x)}.$$

Операторы Саса-Миракьяна:

$$M_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}, \quad W(x) = \frac{1}{x}.$$

Операторы Баскакова:

$$Б_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-n-k}, \quad W(x) = \frac{1}{x(1+x)}.$$

Операторы Вейерштрасса:

$$W_n(f;x) = \frac{1}{J_n}\int\limits_a^b f(t)e^{-n(t-x)^2}\,dt, \ \text{ где } J_n = \int\limits_{a-b}^{b-a} e^{-nt^2}\,dt, \quad W(x) = 2.$$

Теорема 12. *Пусть $L_n(f;x)$ – линейные положительные операторы класса W Тогда для $f \in C[a;b]$ $L_n(f;x)$ сходится к $f(x)$.*

Док-во. Взяв $f(x) \equiv 1$, получим:

$$\frac{d}{dx}\,L_n(1;x) = nW(x)\,L_n(\,(t-x);x) = nW(x)L_n(t;x) - nW(x)xL_n(1;x),$$

а так как $L_n(1;x) = 1$, получаем

$$0 = nW(x)L_n(t;x) - nW(x)x \quad \text{или} \quad L_n(t;x) = x.$$

Аналогично, взяв $f(t) = t$, получим

$$\frac{d}{dx}\,L_n(t;x) = nW(x)\,L_n(\,(t-x)t;x) = \\ = nW(x)L_n(t^2;x) - nW(x)xL_n(t;x).$$

Как было показано выше, $L_n(t;x) = x$, поэтому получаем

$$1 = nW(x)L_n(t^2;x) - nW(x)x^2, \quad \text{или} \quad L_n(t^2;x) = x^2 + \frac{1}{nW(x)}.$$

Таким образом, L_n удовлетворяет теореме Коровкина (теорема 7), в силу которой

$$|L_n(f;x) - f(x)| \le 2\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{nW(x)}}\right),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

§2.5 СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В этом параграфе рассматривается особый вид линейных положительных операторов, называемых сингулярными интегралами.

Теорема 13. *Пусть* $J_n(f;x) = \int_a^b f(t)u_n(t,x)\,dt$ *– последовательность положительных сингулярных интегралов, то есть*

$$u_n(t,x) \geq 0 \text{ для } (t,x) \in [a,b]\times[a,b] \tag{13.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} J_n(1;x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b u_n(t,x)\,dt = 1 \tag{13.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} u_n(t,x)\,dt = 1 \text{ для всех } x\in(a,b),\ \delta>0 \quad (\delta \leq \min\{x-a, b-x\}). \tag{13.3}$$

Если f непрерывна на $[\alpha,\beta]$, $a<\alpha\leq x\leq\beta<b$, непрерывна слева в точке α, непрерывна справа в точке β, ограничена на $[a,b]$ и условия (13.2) и (13.3) выполняются равномерно на $[\alpha,\beta]$, то последовательность операторов J_n сходится к f равномерно на $[\alpha,\beta]$.

Док-во. Возьмем произвольное число $\varepsilon\in(0,1)$. Обозначим

$$M = \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)|.$$

Во-первых, в силу непрерывности f, найдется δ такое, что для $x\in[\alpha,\beta]$, $t\in\{|t-x|<\delta\}$

$$|f(t)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{7}.$$

Во-вторых, из условий (13.2) и (13.3) найдется номер n_0 такой, что для всех $n \geq n_0$ будут выполнятся неравенства:

$$\int_a^{x-\delta} u_n(t,x)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{7M} \qquad \int_{x+\delta}^b u_n(t,x)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{7M}$$

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} u_n(t,x)\,dt \leq 1+\varepsilon \qquad |\int_a^b u_n(t,x)\,dt - 1| \leq \frac{\varepsilon}{7M}.$$

Для таких n и δ имеем:

$$|J_n(f;x)-f(x)| \leq |J_n(f(t);x)-f(x)J_n(1;x)|+|f(x)J_n(1;x)-f(x)| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(t)-f(x)|u_n(t,x)\,dt + |f(x)||\int_a^b u_n(t,x)\,dt - 1| \leq$$

$$\leq \int_a^{x-\delta} \{|f(t)|+|f(x)|\}u_n(t,x)\,dt + \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(t)-f(x)|u_n(t,x)\,dt +$$

$$+\int_{x+\delta}^b \{|f(t)|+|f(x)|\}u_n(t,x)\,dt + M\frac{\varepsilon}{7M} \leq$$

$$\leq 2M\frac{\varepsilon}{7M} + \frac{\varepsilon}{7}(1+\varepsilon) + 2M\frac{\varepsilon}{7M} + M\frac{\varepsilon}{7M} < \varepsilon,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Пример к теореме 13. Рассмотрим операторы

$$J_n(f;x) = \frac{n}{\pi}\int_0^1 f(t)\frac{dt}{1+n^2(t-x)^2}, \quad x \in [0,1].$$

Проверим выполнение условий теоремы 13. Условие (13.1) очевидно.

Покажем (13.2):

$$J_n(1;x) = \frac{n}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{dt}{1+n^2(t-x)^2} = (\text{выполним замену } t = \frac{z}{n} + x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-nx}^{n(1-x)} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} z\Big|_{-nx}^{n(1-x)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\{\operatorname{arctg} n(1-x) + \operatorname{arctg} nx\} \to \frac{1}{\pi}\{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\} = 1$$

– условие (13.2) выполнено. Проверим выполнение условия (13.3):

$$\frac{n}{\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{dt}{1+n^2(t-x)^2} = (\text{выполним замену } t = \frac{z}{n} + x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-n\delta}^{n\delta} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} z\Big|_{-n\delta}^{n\delta} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\{\operatorname{arctg} n\delta + \operatorname{arctg} n\delta\} \to \frac{1}{\pi}\{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\} = 1$$

– и условие (13.3) тоже выполнено. Следовательно $J_n \to f$.

Условия теоремы 13 часто оказываются достаточно сложными для проверки. П.П.Коровкин указал достаточно общую конструкцию сингулярных интегралов и нашел для них легко проверяемые условия сходимости:

Теорема 14. (Сходимость последовательности операторов Коровкина.) *Рассмотрим операторы*

$$K_n(f;x) = \frac{1}{K_n}\int\limits_a^b f(t)\phi^n(t-x)\,dt,$$

где $K_n(f;x) = \int_{-c}^{c}\phi^n(t)\,dt$, *а функция* ϕ *удовлетворяет условиям:*
(1) ϕ *– непрерывна на* $[-c,c]$, $c \geq b-a$;
(2) $0 \leq \phi(x) < 1$ *для* $x \in [-c,0) \cup (0,c]$;
(3) $\max_{x\in[-c,c]}\phi(x) = \phi(0) = 1$.
Последовательность $K_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ *на любом отрезке, содержащемся в* $[a,b]$.

Доказательство разобьем на леммы.

Лемма 1. *Для* $0 < \delta < c$ *обозначим* $K_n(\delta) = \int_{-\delta}^{\delta} \phi^n(t)\,dt$, *тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n}{K_n(\delta)} = 1.$$

Док-во. Обозначим $q = \max \phi(t),\ t \in [-c, -\delta] \cup [c, \delta]$. По условию $q < 1$. Тогда

$$0 \le \int_{-c}^{-\delta} \phi^n(t)\,dt \le q^n \int_{-c}^{-\delta} dt < cq^n$$

$$0 \le \int_{\delta}^{c} \phi^n(t)\,dt \le q^n \int_{\delta}^{c} dt < cq^n,$$

а так как

$$K_n = \int_{-c}^{-\delta} \phi^n(t)\,dt + \int_{\delta}^{c} \phi^n(t)\,dt + K_n(\delta),$$

получаем

$$K_n(\delta) \le K_n \le K_n(\delta) + 2cq^n,$$

откуда

$$1 \le \frac{K_n}{K_n(\delta)} \le 1 + \frac{2cq^n}{K_n(\delta)} \qquad (14.1)$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$. Так как $\phi(0) = 1$, найдется $\delta_1 \in (0, \delta)$ такое, что для $|x| < \delta_1$ будет $\phi(x) > 1 - \varepsilon = \frac{1+q}{2} = q_0$, причем $q_0 > q$. Откуда

$$K_n(\delta) \ge K_n(\delta_1) = \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \phi^n(t)\,dt > q_0^n \int_{-\delta_1}^{\delta_1} dt = 2\delta_1 q_0^n$$

и (14.1) перепишется в виде:

$$1 \le \frac{K_n}{K_n(\delta)} \le 1 + \frac{cq^n}{\delta_1 q_0^n}. \qquad (14.2)$$

А так как $q/q_0 < 1$, то $\lim_{n\to\infty}(q/q_0)^n = 0$ и из (14.2) следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть $K_n(\delta)$ то же, что и в лемме 1. Тогда для $x \in (a,b)$*

$$K_n(\delta) \le \int\limits_a^b \phi^n(t-x)\,dt \le K_n.$$

Док-во. Для $x \in (a,b)$ найдется δ такое, что $a+\delta \le x \le b-\delta$, откуда

$$a - x \ge a - (b-\delta) = \delta - (b-a) \ge \delta - c > -c,$$
$$a - x \le a - (a+\delta) = -\delta \qquad \Longrightarrow$$
$$-c < a - x \le -\delta,$$

и

$$b - x \le b - (a+\delta) = (b-a) - \delta \le c - \delta < c,$$
$$b - x \ge b - (b-\delta) = \delta \qquad \Longrightarrow$$
$$\delta \le b - x < c$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{-\delta}^{\delta} \phi^n(t)\,dt \le \int\limits_{a-x}^{b-x} \phi^n(t)\,dt \le \int\limits_{-c}^{c} \phi^n(t)\,dt,$$

откуда следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 14. Покажем, что для операторов K_n выполнены условия теоремы 13. Для этих интегралов $u_n(t,x) = \frac{1}{K_n}\phi^n(t-x)$, и условие (13.1), очевидно, выполнено. По лемме 2

$$\frac{K_n(\delta)}{K_n} \le \frac{1}{K_n} \int\limits_a^b \phi^n(t-x)\,dt \le 1$$
$$\|$$
$$K_n(1;x)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{K_n(\delta)}{K_n} \le \lim_{n\to\infty} K_n(1;x) \le 1,$$

и с учетом леммы 1 $\lim_{n\to\infty} K_n(1;x) = 1$, то есть выполнено и условие (13.2) теоремы 13. Проверим условие (13.3):

$$\frac{1}{K_n} \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \phi^n(t-x)\,dt = \frac{1}{K_n} \int\limits_{-\delta}^{+\delta} \phi^n(t)\,dt = \frac{K_n(\delta)}{K_n} \to 1 \ \ \text{(по лемме А)}.$$

Отсюда, в силу теоремы 13 получаем требуемое.

Примеры к теореме 14 (частные случаи операторов Коровкина).
1^0. Пусть $\phi(x) = e^{-x^2}$, тогда получаем операторы Вейерштрасса;
2^0. Пусть $\phi(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$, тогда получаем операторы Валле-Пуссена;
3^0. Пусть $\phi(x) = \frac{c^2 - x^2}{c^2}$, тогда получаем операторы Ландау (см. §1.1).

§2.6 УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ПРОИЗВОДНЫХ ОПЕРАТОРА

Пусть оператор $L : C^{(1)} \to C^{(1)}$. Обозначим $L'(f;x) = \frac{d}{dx}L(f;x)$. Возникает вопрос: если $L_n(f;x) \to f(x)$, будет ли $L'_n(f;x) \to f'(x)$?

Теорема 15. (Условия сходимости продифференцированного оператора к производной функции.) *Если L'_n – последовательность линейных операторов, для которых на $[a,b]$ выполнены условия:*

$$\text{для любой неотрицательной функции } f \quad L'_n(f(t)(t-x);x) \geq 0; \tag{15.1}$$

$$L'_n(1;x) = \alpha_n(x), \text{ где } \alpha_n(x) \to 0; \tag{15.2}$$

$$\text{для } k = 1,2,3 \quad L'_n(t^k;x) = kx^{k-1} + \beta_{k,n}(x), \text{ где } \beta_{k,n}(x) \to 0, \tag{15.3}$$

то для $f \in C^{(1)}[a;b]$ $L'_n(f;x) \to f'(x)$ на $[a,b]$.

Док-во. Обозначим $P_n(f;x) = L'_n(f(t)(t-x);x)$. Операторы P_n, очевидно, линейные и по (15.1) положительные. Проверим для них выполнение условий алгебраической теоремы Коровкина:

$$P_n(1;x) = L_n(t-x;x) = L'_n(t;x) - xL'_n(1;x) = 1 + \beta_{1,n}(x) - x\alpha_n(x) \to 1;$$

$$P_n(t;x) = L'_n(t(t-x);x) = L'_n(t^2;x) - xL'_n(t;x) =$$
$$= 2x + \beta_{2,n}(x) - x(1+\beta_{1,n}(x)) = x + \beta_{2,n}(x) - x\beta_{1,n}(x) \to x;$$

$$P_n(t^2;x) = L'_n(t^2(t-x);x) = L'_n(t^3;x) - xL'_n(t^2;x) =$$
$$= 3x^2 + \beta_{3,n}(x) - x(2x + \beta_{2,n}(x)) = x^2 + \beta_{3,n}(x) - \beta_{2,n}(x) \to x^2.$$

Таким образом $P_n(f;x) \to f(x)$ для $f \in C[a,b]$ и, тем более, для $f \in C^{(1)}[a,b]$. По формуле Тейлора $f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \delta(t)(t-$

x), где $\delta(t)$ – ограниченная непрерывная функция, причем $\delta(x) = 0$. Поэтому

$$L'_n(f(t);x) = f(x)L'_n(1;x) + f'(x)L'_n(t;x) - xf'(x)L'_n(1;x) + \\ = L'_n(\delta(t)(t-x);x) = \\ = f(x)\alpha_n(x) + f'(x)(1+\beta_{1,n}(x)) - xf'(x)\alpha_n(x) + P_n(\delta(t);x) \to f'(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 16. (Условия сходимости продифференцированного оператора к функции, имеющей односторонние производные.) *Если $\{L'_n\}$ – последовательность линейных операторов, для которых на $[a,b]$ выполнены условия теоремы 15, то для функции f, имеющей левую производную $f'(x-0)$ и правую производную $f'(x+0)$*

$$L'_n(f;x) \to pf'(x-0) + (1-p)f'(x+0),$$

где

$$p = \lim_{n\to\infty} L'_n(\chi(t);x), \qquad \chi(t) = \begin{cases} t-x, \text{ если } t \le x; \\ 0, \text{ если } t > x. \end{cases}$$

Док-во. Обозначим $\phi(t) = f(t) - f'(x-0)\chi(t) + f'(x+0)(\chi(t)-t)$. Рассмотрим

$$\frac{\phi(t)-\phi(x)}{t-x} = \frac{f(t)-f(x)}{t-x} - f'(x-0)\frac{\chi(t)-\chi(x)}{t-x} + \\ + f'(x+0)\left\{\frac{\chi(t)-\chi(x)}{t-x} - \frac{t-x}{t-x}\right\} = \\ = \frac{f(t)-f(x)}{t-x} - f'(x-0)\frac{\chi(t)}{t-x} + f'(x+0)\frac{\chi(t)}{t-x} - f'(x+0).$$

Для $t \le x$ $\chi(t) = t-x$ и $\dfrac{\phi(t)-\phi(x)}{t-x} = \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} - f'(x-0) \Longrightarrow$

откуда $\phi'(x-0) = \lim\limits_{t\to x-0} \dfrac{\phi(t)-\phi(x)}{t-x} = f'(x-0) - f'(x-0) = 0$

Для $t > x$ $\chi(t) = 0$ и $\dfrac{\phi(t)-\phi(x)}{t-x} = \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} - f'(x+0) \Longrightarrow$

откуда $\phi'(x+0) = \lim\limits_{t\to x+0} \dfrac{\phi(t)-\phi(x)}{t-x} = f'(x+0) - f'(x+0) = 0$

Так как $\phi'(x-0) = \phi'(x+0) = 0$, то существует $\phi'(x) = 0$, следовательно функция ϕ удовлетворяет теореме 15, в силу которой

$$\lim_{n\to\infty} L_n'(\phi(t);x) = \phi'(x) = 0 \implies$$

$$\lim_{n\to\infty} \Big\{ L_n'(f(t);x) - f'(x-0)L_n'(\chi(t);x) + \\ + f'(x+0)(L_n'(\chi(t);x) - L_n'(t;x)) \Big\} = 0 \implies$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n'(f(t);x) = f'(x-0)\lim_{n\to\infty} L_n'(\chi(t);x) + \\ + f'(x+0)(1 - \lim_{n\to\infty} L_n'(\chi(t);x)) = \\ = pf'(x-0) + (1-p)f'(x+0),$$

что и требовалось доказать.

ГЛАВА 3.

ПОРЯДОК ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§3.1 О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ОПЕРАТОРАМИ БЕРНШТЕЙНА

Для операторов Бернштейна:

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

было показано, что для $f \in C[0,1]$ будет $\|B_n(f;x) - f\| \le 2\omega(f, \frac{1}{2\sqrt{n}})$.

С точки зрения теорем Джексона это далеко не наилучший порядок приближения.

Так как $\omega(f;\delta) \le \|f'\|\delta$, из последнего неравенства получаем, что для $f \in C^1[0,1]$ $\|B_n(f;x) - f\| \le \dfrac{\text{const}}{\sqrt{n}}$, то есть порядок приближения операторами Бернштейна дифференцируемых функций по крайней мере $1/\sqrt{n}$, что лучше, чем для непрерывных.

Так же было показано, что для $f(t) = t^2$ будет $B_n(t^2;x) = x^2 + \dfrac{x(1-x)}{n}$.

Но и $1/n$, с точки зрения теорем Джексона, не наилучший возможный порядок на классе C^2.

Возникает вопрос: может ли быть улучшена эта оценка, хотя бы для более "хороших" с точки зрения дифференцируемости функций? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 17. (Теорема Вороновской) *Если* $f \in C^2[0,1]$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{B_n(f;x)-f(x)}{x-x^2} = \frac{1}{2}f''(x).$$

(То есть даже если мы возьмем дважды дифференцируемую функцию (кроме линейной, у которой $f''(x)=0$), то порядок приближения ее последовательностью операторов Бернштейна будет не лучше $1/n$, а по теореме Джексона существуют полиномы, для которых порядок приближения дважды дифференцируемой функции по крайней мере $1/n^2$).

Доказательство теоремы разобьем на леммы.

Лемма 1. *Обозначим*

$$\alpha_n(\delta) = \sum_{|k/n-x|\geq\delta} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

Тогда $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n(\delta) = 0$.

Док-во. Из математического анализа известно неравенство Стирлинга:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n en \implies$$

$$\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} \leq$$

$$\leq \frac{n^n e^{-n} en}{k^k e^{-k}(n-k)^{n-k}e^{-n+k}}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{n^k n^{n-k} en}{k^k(n-k)^{n-k}}x^k(1-x)^{n-k} = en\left(\frac{nx}{k}\right)^k\left(\frac{n(1-x)}{n-k}\right)^{n-k} =$$

$$= en\left\{\left(\frac{x}{k/n}\right)^{k/n}\left(\frac{1-x}{1-k/n}\right)^{1-k/n}\right\}^n.$$

Рассмотрим функцию $y(t) = \left(\frac{x}{t}\right)^t\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1-t}$. Подсчитаем ее производную:

$$y'(t) = \left(\frac{x}{t}\right)^t\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1-t}\left\{t\ln\frac{x}{t}+(1-t)\ln\frac{1-x}{1-t}\right\}' =$$

$$= \left(\frac{x}{t}\right)^t\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1-t}\ln\left\{\frac{x}{t}\frac{1-t}{1-x}\right\},$$

откуда $y'(t) > 0$ если $\dfrac{x}{t}\dfrac{1-t}{1-x} > 1$ или $x(1-t) > t(1-x)$, $x - xt > t - tx$, $t < x$. Соответственно, $y'(t) < 0$ если $t > x$. Следовательно, $t = x$ – точка max функции y, поэтому $y(t) \le y(x) = 1$.

Для $k/n \ge x + \delta$ имеем $y(k/n) \le y(x+\delta) = q_1(\delta) < 1$

Для $k/n \le x - \delta$ имеем $y(k/n) \le y(x-\delta) = q_2(\delta) < 1$

Таким образом для $|k/n - x| \ge \delta$ получаем

$$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le enq^n, \text{ где } q < 1 \implies$$

$$\alpha_n(\delta) \le \sum_{|k/n - x| \ge \delta} enq^n \le en^2 q^n \implies$$

$$n\alpha_n(\delta) \le en^3 q^n \implies \lim_{n\to\infty} n\alpha_n(\delta) \le \lim_{n\to\infty} en^3 q^n = e \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{q^{-n}} =$$

(трижды применяем правило Лопиталя)

$$= e \lim_{n\to\infty} \frac{6}{q^{-n}\ln^3 q} = \frac{6e}{\ln^3 q} \lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть f – непрерывная функция, $g(t) = (t-x)^2$ и*

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{g(t)} = A,$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n(f(t);x) - f(x)}{B_n(g(t);x)} = A.$$

Док-во.

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{g(t)} = A \implies$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta \; : \text{ для } |t - x| < \delta \; \left| \frac{f(t) - f(x)}{g(t)} - A \right| < \varepsilon \implies$$

$$\text{для } |t - x| < \delta \qquad g(t)(A - \varepsilon) < f(t) - f(x) < g(t)(A + \varepsilon) \quad (17.1)$$

Пусть $M = \max_{|t-x|\ge\delta} |f(t) - f(x)|$, тогда

$$\text{для } |t - x| \ge \delta \qquad -M \le f(t) - f(x) \le M \qquad (17.2)$$

Обозначим

$$\lambda_\delta(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } |t-x| < \delta; \\ 1, \text{ если } |t-x| \geq \delta, \end{cases}$$

тогда (17.1) и (17.2) можно записать в виде:

$$(1-\lambda_\delta(t))g(t)(A-\varepsilon) - \lambda_\delta(t)M < f(t) - f(x) <$$
$$< (1-\lambda_\delta(t))g(t)(A+\varepsilon) + \lambda_\delta(t)M \quad \text{для всех } t.$$

Усилим полученные неравенства:

$$g(t)(A-\varepsilon) - \lambda_\delta(t)\|g\|(|A|+\varepsilon) - \lambda_\delta(t)M < f(t) - f(x) <$$
$$< g(t)(A+\varepsilon) + \lambda_\delta(t)\|g\|(|A|+\varepsilon) + \lambda_\delta(t)M \implies$$
$$(A-\varepsilon)B_n(g(t);x) - \{\|g\|(|A|+\varepsilon)+M\}B_n(\lambda_\delta(t);x) <$$
$$< B_n(f(t);x) - f(x)B_n(1;x) <$$
$$< (A+\varepsilon)B_n(g(t);x) + \{\|g\|(|A|+\varepsilon)+M\}B_n(\lambda_\delta(t);x) \implies$$

$$A - \varepsilon - a_n < \frac{B_n(f(t);x) - f(x)}{B_n(g(t);x)} < A + \varepsilon + a_n,$$

где $a_n = \{\|g\|(|A|+\varepsilon)+M\}\dfrac{B_n(\lambda_\delta(t);x)}{B_n(g(t);x)}$. Откуда

$$\left|\frac{B_n(f(t);x) - f(x)}{B_n(g(t);x)} - A\right| < \varepsilon + a_n$$

Во-первых, $B_n(\lambda_\delta(t);x) = \alpha_n(\delta)$ из леммы 1. Во-вторых,

$$B_n(g(t);x) = B_n(t^2;x) - 2xB_n(t;x) + x^2B_n(1;x) =$$
$$\text{(см. пример к теореме 7)}$$
$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - 2x^2 + x^2 = \frac{x(1-x)}{n},$$

откуда получаем, что $a_n = \text{const}\,\dfrac{n\alpha_n(\delta)}{x(1-x)}$ и по лемме 1 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Следовательно

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \ : \ \forall n > n_0 \quad \left|\frac{B_n(f(t);x) - f(x)}{B_n(g(t);x)} - A\right| < 2\varepsilon,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 17. Обозначим $\phi(t)=f(t)-tf'(x)$. Тогда

$$\lim_{t\to x}\frac{\phi(t)-\phi(x)}{(t-x)^2}=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-tf'(x)-f(x)+xf'(x)}{(t-x)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$
$$=\lim_{t\to x}\frac{f'(t)-f'(x)}{2(t-x)}=\frac{1}{2}f''(x)$$

и по лемме 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n(\phi(t);x)-\phi(x)}{B_n((t-x)^2;x)}=\frac{1}{2}f''(x). \tag{17.3}$$

Поскольку, как было подсчитано в лемме 2, $B_n((t-x)^2;x)=\dfrac{x(1-x)}{n}$, и

$$B_n(\phi(t);x)-\phi(x)=B_n(f(t);x)-f'(x)B_n(t;x)-f(x)+xf'(x)=$$
$$=B_n(f;x)-f(x),$$

соотношение (17.3) перепишется в виде

$$\lim_{n\to\infty}n\frac{B_n(f;x)-f(x)}{x-x^2}=\frac{1}{2}f''(x),$$

что и требовалось доказать.

§3.2 ПОРЯДОК ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В предыдущем параграфе был рассмотрен порядок приближения операторами Бернштейна, которые являются частным случаем более общих конструкций операторов, например, рассмотренных в §2.4. Операторы Бернштейна, несомненно, самые известные и изучаемые из линейных положительных операторов, а теорема Вороновской – классическая теорема теории приближения, поэтому им было уделено отдельное внимание. Подобные результаты можно получить и для других операторов. В этом параграфе будут найдены порядки приближения операторами класса W, но метод доказательства может быть применен и к другим последовательностям линейных положительных операторов.

Теорема 18. *Пусть f определена на $[a;b]$, и $L_n(f;x)$ – последовательность линейных положительных операторов класса W, то есть удовлетворяет условиям:*

$$L_n(1;x) = 1 \tag{18.1}$$

$$L_n(\,(t-x)f(t);x) = \frac{v(x)}{n}\frac{d}{dx}\,L_n(f(t);x), \tag{18.2}$$

где $v(x)$ аналитическая положительная функция, принимающая *неотрицательные значения на* $[a;b]$.

Если $f \in C[a;b]$, *то*

$$|L_n(f;x) - f(x)| \le 2\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\sqrt{v(x)}\right) \qquad (18.3)$$

Если $f \in C^1[a;b]$, *то*

$$|L_n(f;x) - f(x)| \le \omega\left(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\frac{v(x)+\sqrt{v(x)}}{\sqrt{n}} \qquad (18.4)$$

Если $f \in C^2[a;b]$, *то*

$$|L_n(f;x) - f(x)| \le \omega\left(f''; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\frac{V(x)}{n} + \frac{\|f''\|v(x)}{2n}, \qquad (18.5)$$

где $V(x)$ *некоторая аналитическая функция, выражаемая через* $v(x)$.

Если $f \in C^2[a;b]$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(L_n(f;x) - f(x)\Big) = \dfrac{1}{2}f''(x)v(x)$

$$(18.6)$$

(Как видно из неравенств (18.3), (18.4), (18.5) порядок приближения для дифференцируемых функций лучше, чем для непрерывных, а для дважды дифференцируемых – чем для дифференцируемых. А из соотношения (18.6) которое является аналогом теоремы Вороновской, следует, что при дальнейшем повышении гладкости функций порядок приближения уже не улучшается.)

Док-во (18.3). Как было установлено в §2.4 $L_n(t;x) = x$ и $L_n(t^2;x) = x^2 + \dfrac{v(x)}{n}$. Применяя теорему 7, получаем, что

$$|L_n(f;x) - f(x)| \le 2\omega\left(f; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right) \le 2\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\sqrt{v(x)}\right)$$

и (18.3) доказано.

Док-во (18.4). Пусть теперь $f \in C^1[0,1]$. По формуле Лагранжа $f(t) - f(x) = f'(\xi)(t-x)$, где ξ лежит между t и x. Откуда

$$f(t) - f(x) = f'(x)(t-x) + [f'(\xi) - f'(x)](t-x),$$
$$L_n(f(t) - f(x); x) = f'(x)L_n(t-x;x) + L_n([f'(\xi) - f'(x)](t-x);x). \tag{18.7}$$

Если $|\xi - x| > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, то

$$|f(\xi) - f(x)| \le \omega(f; |\xi - x|) = \omega(f; \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}|\xi - x|) \le$$
$$\le (1 + \sqrt{n}|\xi - x|)\omega(f; \frac{1}{\sqrt{n}}) \le (1 + \sqrt{n}|t - x|)\omega(f; \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Если $|\xi - x| \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, то $|f(\xi) - f(x)| \le \omega(f; |\xi - x|) \le \omega(f; \dfrac{1}{\sqrt{n}})$, и в любом случае можно утверждать, что

$$|f(\xi) - f(x)| \le (1 + \sqrt{n}|t - x|)\omega(f; \frac{1}{\sqrt{n}}) \tag{18.8}$$

Так как

$L_n(1;x) = 1,$

$L_n(t-x;x) = L_n(t;x) - xL_n(1;x) = x - x = 0$ и

$$L_n\left((t-x)^2;x\right) = L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x) =$$
$$= x^2 + \frac{v(x)}{n} - 2x^2 + x^2 = \frac{v(x)}{n}$$

из (18.7) и (18.8) получаем, что

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| = |L_n(f(t);x) - f(x)L_n(1;x)| =$$
$$= |L_n(f(t) - f(x);x)| \le L_n(|f'(\xi) - f'(x)|\,|t-x|;x) \le$$
$$\le L_n\left((1 + \sqrt{n}|t-x|)|t-x|;x\right)\omega(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}) =$$
$$= \omega(f'; \frac{1}{\sqrt{n}})\left[L_n(|t-x|;x) + \sqrt{n}L_n((t-x)^2;x)\right] \le$$
$$\le \omega\Big(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big[\sqrt{L_n((t-x)^2;x)L_n(1;x)} + \sqrt{n}L_n((t-x)^2;x)\Big] =$$
$$= \omega\Big(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\frac{\sqrt{v(x)} + v(x)}{\sqrt{n}}$$

и (18.4) доказано.

Док-во (18.5). Пусть теперь $f \in C^2[0,1]$. По формуле Тейлора

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2 + \frac{1}{2}\left(f''(\xi) - f''(x)\right)(t-x)^2,$$

где ξ лежит между t и x. Откуда

$$\begin{aligned} L_n(f(t)-f(x);x) &= \\ &= f'(x)L_n(t-x;x) + \frac{f''(x)}{2}L_n((t-x)^2;x) + \\ &\quad + \frac{1}{2}L_n\big([f''(\xi)-f''(x)](t-x)^2;x\big) = \\ &= \frac{f''(x)v(x)}{2n} + \frac{1}{2}L_n\big([f''(\xi)-f''(x)](t-x)^2;x\big), \end{aligned} \tag{18.9}$$

откуда и из (18.8) получаем

$$\begin{aligned} |L_n(f(t);x) - f(x)| &\le \frac{\|f''\|v(x)}{2n} + \frac{1}{2}L_n(|f''(\xi)-f''(x)|\,(t-x)^2;x) \le \\ &\le \frac{\|f''\|v(x)}{2n} + \frac{1}{2}L_n\left((1+\sqrt{n}|t-x|)(t-x)^2;x\right)\omega(f'';\frac{1}{\sqrt{n}}) = \\ &= \frac{\|f''\|v(x)}{2n} + \frac{1}{2}\omega(f'';\frac{1}{\sqrt{n}})\Big[L_n((t-x)^2;x) + \\ &\qquad + \sqrt{n}L_n(|t-x|(t-x)^2;x)\Big] \le \end{aligned}$$

(применяем к последнему слагаемому неравенство Коши-Буняковского)

$$\begin{aligned} &\le \frac{\|f''\|v(x)}{2n} + \frac{1}{2}\omega\Big(f'';\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big[L_n((t-x)^2;x) + \\ &\qquad + \sqrt{n}\sqrt{L_n((t-x)^2;x)L_n((t-x)^4;x)}\Big] \end{aligned} \tag{18.10}$$

Как уже отмечалось, $L_n((t-x)^2;x) = \dfrac{v(x)}{n}$.
Подсчитаем $L_n((t-x)^4;x)$. Из (18.2) следует, что

$$L_n(t^k;x) = xL_n(t^{k-1};x) + \frac{v(x)}{n}\frac{d}{dx}L_n(t^{k-1};x),$$

поэтому, поскольку $L_n(t^2;x) = x^2 + \dfrac{v(x)}{n}$

$$L_n(t^3;x) = x^3 + \frac{3xv(x)}{n} + \frac{v(x)v'(x)}{n^2}$$

и

$$\begin{aligned}L_n(t^4;x) = x\left(x^3 + \frac{3xv(x)}{n} + \frac{v(x)v'(x)}{n^2}\right) + \\ + \frac{v(x)}{n}\left(x^3 + \frac{3xv(x)}{n} + \frac{v(x)v'(x)}{n^2}\right)' = \\ = x^4 + \frac{6x^2v(x)}{n} + \frac{4xv(x)v'(x) + 3v^2(x)}{n^2} + \frac{v(x)v'^2(x) + v^2(x)v''(x)}{n^3}\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}L_n((t-x)^4;x) = L_n(t^4;x) - 4xL_n(t^3;x) + 6x^2L_n(t^2;x) - \\ - 4x^3L_n(t;x) + x^4L_n(1;x) = \\ = \frac{3v^2(x)}{n^2} + \frac{v(x)v'^2(x) + v^2(x)v''(x)}{n^3}\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (18.10), получаем

$$\begin{aligned}|L_n(f(t);x) - f(x)| \le \\ \le \frac{\|f''\|v(x)}{2n} + \frac{1}{2}\omega\Big(f''; \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Bigg(\frac{v(x)}{n} + \\ + \sqrt{v(x)}\sqrt{\frac{3v^2(x)}{n^2} + \frac{v(x)v'^2(x) + v^2(x)v''(x)}{n^3}}\Bigg) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \frac{\|f''\|v(x)}{2n} + \frac{1}{n}\omega\Big(f''; \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Bigg(\frac{v(x)}{2} + \\ + \frac{\sqrt{v(x)}}{2}\sqrt{3v^2(x) + \frac{v(x)v'^2(x) + v^2(x)v''(x)}{n}}\Bigg)\end{aligned}$$

и (18.5) доказано.

Док-во (18.6). Как следует из (18.9)

$$L_n(f(t)-f(x);x)-\frac{f''(x)v(x)}{2n}=\frac{1}{2}L_n\big([f''(\xi)-f''(x)](t-x)^2;x\big),$$

где ξ лежит между t и x. Проводя такие же рассуждения, как и при доказательстве (18.5), получаем

$$\Big|L_n(f(t);x)-f(x)-\frac{f''(x)v(x)}{2n}\Big|\le$$
$$\le\frac{1}{n}\omega\Big(f'';\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\left(\frac{v(x)}{2}+\frac{\sqrt{v(x)}}{2}\sqrt{3v^2(x)+\frac{v(x)v'^2(x)+v^2(x)v''(x)}{n}}\right)$$

или

$$\Big|n\big(L_n(f(t);x)-f(x)\big)-\frac{1}{2}f''(x)v(x)\Big|\le$$
$$\le\omega\Big(f'';\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\left(\frac{v(x)}{2}+\frac{\sqrt{v(x)}}{2}\sqrt{3v^2(x)+\frac{v(x)v'^2(x)+v^2(x)v''(x)}{n}}\right)$$

В последнем неравенстве правая часть стремится к нулю при $n\to\infty$, значит и левая часть стремится к нулю, откуда и следует последнее утверждение теоремы.

§3.3 НАИЛУЧШИЙ ВОЗМОЖНЫЙ ПОРЯДОК ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Как было показано в \$3.1-3.2, операторы Бернштейна "плохие" в смысле порядка приближения. Могут ли другие линейные положительные операторы давать порядок приближения, указанный в теоремах Джексона? В этом параграфе будет получен ответ на этот вопрос.

Теорема 19 (Коровкин) *Пусть L_n –линейные положительные операторы, определенные на $C_{2\pi}$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} n^2\Big\{\|L_n(1;x)-1\| + \|L_n(\cos t;x)-\cos x\| + \\ + \|L_n(\sin t;x)-\sin x\|\Big\} \neq 0$$

(т.е. порядок приближения тригонометрическими линейными положительными операторами не лучше, чем $\frac{1}{n^2}$).

Доказательство разобьем на леммы, обозначив

$$a_n = \|L_n(1;x)-1\|$$
$$b_n = \|L_n(\cos t;x)-\cos x\|$$
$$c_n = \|L_n(\sin t;x)-\sin x\|$$

Лемма 1. $\|L_n(|\sin t|;x) - |\sin x|\| \le \sqrt{2\|L_n(1;x)\|}\sqrt{a_n+b_n+c_n} + a_n$

Док-во.

$$|L_n(|\sin t|;x) - |\sin x|\,| \le$$
$$\le |L_n(|\sin t|;x) - L_n(|\sin x|;x)| + |L_n(|\sin x|;x) - |\sin x|\,| \le$$
$$\le L_n(|\,|\sin t| - |\sin x|\,|;x) + |L_n(1;x)-1| \le$$

т.к. $|\,|\sin t| - |\sin x|\,| \le |\sin t - \sin x| = |2\cos\frac{t+x}{2}\sin\frac{t-x}{2}| \le$

$$\le 2|\sin\frac{t-x}{2}|, \text{ получаем}$$

$$\le 2L_n(|\sin\frac{t-x}{2}|;x) + a_n \le 2\sqrt{L_n(\sin^2\frac{t-x}{2};x)}\sqrt{L_n(1;x)} + a_n \tag{19.1}$$

Оценим отдельно первое подкоренное выражение:

$$L_n(\sin^2\frac{t-x}{2};x)=L_n(\frac{1-\cos(t-x)}{2};x)=$$
$$=\frac{1}{2}L_n(1-\cos t\cos x-\sin t\sin x)=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{L_n(1;x)-\cos xL_n(\cos t;x)-\sin xL_n(\sin t;x)\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{L_n(1;x)-1+\cos x(\cos x-L_n(\cos t;x))+$$
$$+\sin x(\sin x-L_n(\sin t;x))\Big\}\le\frac{1}{2}\{a_n+b_n+c_n\}$$

и, подставляя эту оценку в (19.1), получим требуемое.

Лемма 2. *Пусть V_n – суммы Валле-Пуссена, тогда*

$$|V_n(|\sin t|;0)|>\frac{1}{\pi n}.$$

Док-во. Разложим $|\sin t|$ в ряд Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\sin t|\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\,dx=\frac{4}{\pi};$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\sin t|\cos kt\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin t\cos kt\,dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Big\{\sin(k+1)t-\sin(k-1)t\Big\}\,dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\cos(k+1)\pi}{k+1}+\frac{1}{k+1}+\frac{\cos(k-1)\pi}{k-1}-\frac{1}{k-1}\right\}=$$
$$=\begin{cases} k\ \text{четное} & \frac{1}{\pi}\left\{\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k-1}\right\}=-\frac{4}{\pi(k^2-1)},\\ k\ \text{нечетное} & \frac{1}{\pi}\{0+0\}=0;\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\sin t|\sin kt\,dt=0\quad\text{(в силу четности функции)}.$$

Таким образом частная сумма ряда Фурье для функции $|\sin t|$ имеет вид:

$$\Phi_n(|\sin t|;x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\cos 2kx}{4k^2-1} \tag{19.2}$$

Из (19.2) следует, во-первых,

$$\Phi_{2n-1}(|\sin t|;0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{2\pi}\left\{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2(n-1)-1} - \frac{1}{2(n-1)+1}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{\pi(n-1/2)} > \frac{1}{\pi n},$$

во-вторых, Φ_n убывает с ростом n, следовательно для $k \le 2n-1$ $\Phi_k(|\sin t|;0) > \frac{1}{\pi n}$. Поэтому

$$V_n(|\sin t|;0) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Phi_k(|\sin t|;0) > \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\pi n} = \frac{1}{\pi n},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. $E_n^T(|\sin x|) > \frac{1}{4\pi n}$.

Док-во. Пусть t_n – многочлен порядка не выше n, наименее уклоняющийся от функции $|\sin x|$. Тогда для сумм Валле-Пуссена $V_n(t_n;x) \equiv t_n(x)$. Поэтому

$$\|V_n(|\sin t|;x) - |\sin x|\,\| \le$$

$$\le \|V_n(|\sin t|;x) - V_n(t_n;x)\| + \|t_n(x) - |\sin x|\,\| =$$

$$= \|V_n(|\sin t| - t_n;x)\| + \|t_n(x) - |\sin x|\,\| =$$

т.к. по свойству сумм Валле – Пуссена $\|V_n(f;x)\| \le 3\|f\|$,

$$= 3\|\,|\sin x| - t_n\| + \|t_n(x) - |\sin x|\,\| = 4\|t_n(x) - |\sin x|\,\| = 4E_n(|\sin x|).$$

Откуда получаем

$$E_n(|\sin x|) \ge \frac{1}{4}\|V_n(|\sin t|;x) - |\sin x|\,\| \ge \frac{1}{4}|V_n(|\sin t|;0) - |\sin 0|\,| =$$

$$= \frac{1}{4}|V_n(|\sin t|;0)| > \frac{1}{4\pi n},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 19. Пусть $n^2(a_n + b_n + c_n) \to 0$. Из лемм 1 и 2 имеем

$$\frac{1}{4\pi n} < E_n^T(|\sin x|) \le \|L_n(|\sin t|; x) - |\sin x|\,\| \le$$
$$\le \sqrt{2\|L_n(1;x)\|}\sqrt{a_n + b_n + c_n} + a_n,$$

откуда

$$\frac{1}{4\pi} < \sqrt{2\|L_n(1;x)\|}\sqrt{n^2(a_n + b_n + c_n)} + na_n$$

В полученном неравенстве правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, а левая – строго положительная константа. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 20. (Коровкин) *Пусть L_n –линейные положительные операторы, определенные на $C[a,b]$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} n^2\Big(\|L_n(1;x) - 1\| + \|L_n(t;x) - x\| + \|L_n(t^2;x) - x^2\|\Big) \ne 0,$$

(т.е. порядок приближения алгебраическими линейными положительными операторами не лучше $\frac{1}{n^2}$).

Док-во. Обозначим

$$a_n = \|L_n(1;x) - 1\| \qquad c_n = \|L_n(t^2;x) - x^2\|$$
$$b_n = \|L_n(t;x) - x\| \qquad M = \max\{|a|, |b|\}$$

Имеем:

$$|L_n(|t|;x) - |x|\,| \le |L_n(|t|;x) - L_n(|x|;x)| + |L_n(|x|;x) - |x|\,| \le$$
$$\le L_n(|\,|t| - |x|\,|;x) + |x|\,|L_n(1;x) - 1| \le$$
$$\le L_n(|t-x|;x) + M|L_n(1;x) - 1| \le \sqrt{L_n(1;x)}\sqrt{L_n((t-x)^2;x)} + Ma_n =$$
$$= \sqrt{L_n(1;x)}\sqrt{L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x)} + Ma_n =$$
$$= \sqrt{L_n(1;x)}\sqrt{(L_n(t^2;x) - x^2) + 2x(x - L_n(t;x)) + x^2(L_n(1;x) - 1)} + Ma_n \le$$
$$\le \sqrt{L_n(1;x)}\sqrt{c_n + 2Mb_n + M^2a_n} + Ma_n.$$

А поскольку $E_n^A(|x|) \le \|L_n(|t|;x) - |x|\,\|$, получаем

$$E_n^A(|x|) \le \sqrt{L_n(1;x)}\sqrt{c_n + 2Mb_n + M^2a_n} + Ma_n. \tag{20.1}$$

С другой стороны, в теореме 19 было показано, что

$$E_n^T(|\sin x|) > \frac{1}{4\pi n}.$$

Следовательно, для любого тригонометрического полинома порядка не выше n

$$\max_x |\,|\sin x| - t_n(x)| > \frac{1}{4\pi n} \implies$$

$$\max_x |\,|\cos(x - \frac{\pi}{2}) - t_n(x)| = \max_y |\,|\cos y - t_n(y + \frac{\pi}{2})| > \frac{1}{4\pi n}.$$

Таким образом, функция $|\cos y|$ не приближается никаким тригонометрическим полиномом с отклонением меньше, чем $\frac{1}{4\pi n}$, и тем более не приближается четным тригонометрическим полиномом с отклонением меньше указанного. Поскольку замена $y = \arccos z$ переводит $|\cos y| = |z|$, а четный тригонометрический полином в алгебраический многочлен, получаем, что $|z|$ не приближается алгебраическим многочленом с отклонением меньше, чем $\frac{1}{4\pi n}$, то есть

$$E_n^A(|x|) > \frac{1}{4\pi n}. \tag{20.2}$$

Из соотношений (20.1) и (20.2) получаем:

$$\frac{1}{4\pi n} < \sqrt{\|L_n(1;x)\|}\sqrt{c_n + 2Mb_n + M^2 a_n} + Ma_n,$$
$$\frac{1}{4\pi} < \sqrt{\|L_n(1;x)\|}\sqrt{n^2(c_n + 2Mb_n + M^2 a_n)} + Ma_n n.$$

и утверждение теоремы обязательно выполняется, так как иначе в полученном неравенстве правая часть стремится к нулю, а левая часть есть неотрицательная константа.

Как следует из теорем 19 и 20, линейные положительные операторы хорошо, с точки зрения порядка, могут приближать непрерывные, дифференцируемые и дважды дифференцируемые функции. Если же брать более гладкие функции, то порядок приближения не улучшается. Следовательно, для улучшения порядка необходимо отказаться от положительности операторов, но тогда значительно усложняются условия сходимости последовательности операторов к функции.

§3.4 ПРИМЕР ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ДАЮЩИХ НАИЛУЧШИЙ ВОЗМОЖНЫЙ ПОРЯДОК ПРИБЛИЖЕНИЯ

Пусть $f \in C^1_{2\pi}$. По теореме Джексона наилучший порядок приближения на этом классе $\frac{1}{n}$. Примером линейного положительного оператора, дающего такой порядок может служить $A_n(f;x)$. Действительно, при доказательстве первой теоремы Джексона было показано, что

$$\|A_n(f;x) - f\| \le \omega(f;\frac{1}{n}),$$

откуда для $f \in C^1_{2\pi}$ получаем:

$$\|A_n(f;x) - f\| \le \|f'\|\frac{1}{n}$$

Пусть $f \in C^2_{2\pi}$. По теореме Джексона наилучший порядок приближения на этом классе $\frac{1}{n^2}$. Примером линейного положительного оператора, дающего такой порядок так же может служить $A_n(f;x)$. Докажем это.

Как было показано, оператор A_n может быть записан в виде:

$$A_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)u_n(t-x)\,dt,$$

где

$$u_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_{n,k}\cos kt, \qquad \rho_{n,1} = \cos\frac{\pi}{n+2},$$

причем

$$(a)\ 1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_n(t)\,dt;$$

$$(b)\ A_n(\cos t;x) = \rho_{n,1}\cos x;$$

$$(c)\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |t|u_n(t)\,dt \le \frac{\pi^2}{2n+4}$$

Выполним в интеграле, определяющем оператор, замену $y = t - x$:

$$A_n(f;x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+y)u_n(y)\,dy,$$

и еще одну замену $z = -y$:

$$A_n(f;x) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\pi+x}^{-\pi+x} f(x-z)u_n(z)\,dz.$$

В силу периодичности подинтегральных выражений, получим:

$$A_n(f;x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)u_n(t)\,dt \quad \text{и} \quad A_n(f;x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)u_n(t)\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$A_n(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \{f(x+t) + f(x-t)\}u_n(t)\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$A_n(f;x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\}u_n(t)\,dt$$

По формуле Лагранжа найдутся $\xi_1 \in [x, x+t]$ и $\xi_2 \in [x-t, x]$ такие, что

$$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)| = |\,(\,f(x+t)-f(x)\,)-(\,f(x)-f(x-t)\,)\,| =$$
$$= |f'(\xi_1)t - f'(\xi_2)t| \le |t|\omega(f', 2|t|) \le |t|(1+2n|t|)\omega(f', \frac{1}{n}).$$

Поэтому

$$|A_n(f;x) - f(x)| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |t|(1+2n|t|)\omega(f', \frac{1}{n})u_n(t)\,dt =$$

$$= \omega(f', \frac{1}{n})\Big\{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |t|u_n(t)\,dt + \frac{n}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2 u_n(t)\,dt\Big\}$$

Из (c)имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|u_n(t)\,dt\le\frac{\pi^2}{2(2n+4)}.$$

Для $0\le x\le\pi/2$ имеет место неравенство $x\le\frac{\pi}{2}\sin x$, поэтому

$$\frac{n}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}t^2u_n(t)\,dt=\frac{4n}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{t}{2}\right)^2u_n(t)\,dt\le\frac{4n}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi^2}{4}\sin^2\frac{t}{2}u_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{n\pi}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-\cos t)u_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{n\pi^2}{2}\Big\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u_n(t)\,dt-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos t u_n(t-0)\,dt\Big\}=$$

$$=\frac{n\pi^2}{2}\Big\{A_n(1;x)-A_n(\cos t;0)\Big\}=$$

$$=\frac{n\pi^2}{2}\Big\{1-\cos\frac{\pi}{n+2}\Big\}=n\pi^2\sin^2\frac{\pi}{2(n+2)}\le\frac{n\pi^4}{4(n+2)^2}$$

Таким образом

$$|A_n(f;x)-f(x)|\le\omega(f',\frac{1}{n})\Big\{\frac{\pi^2}{2(2n+4)}+\frac{n\pi^4}{4(n+2)^2}\Big\}=$$

$$=\frac{1}{n}\omega(f',\frac{1}{n})\Big\{\frac{\pi^2}{4+8/n}+\frac{\pi^4}{4(1+4/n+4/n^2)}\Big\}\le\frac{1}{n}\omega(f',\frac{1}{n})\,\mathrm{const}\,.$$

А так как $f\in C^2_{2\pi}$, $\omega(f',\frac{1}{n})\le\|f''\|\frac{1}{n}$, поэтому

$$|A_n(f;x)-f(x)|\le\frac{\mathrm{const}\,\|f''\|}{n^2},$$

что и означает, что порядок приближения функций из $C^2_{2\pi}$ есть $\frac{1}{n^2}$.

Заменой $x=\arccos y$ оператор $A_n(f;x)$ переводится в алгебраический многочлен порядка n, который может служить примером оператора, дающего порядок приближения $\frac{1}{n}$ для $f\in C[0,1]$, и порядок $\frac{1}{n^2}$ для $f\in C^1[0,1]$.

Таким образом показано, что существуют линейные положительные операторы, дающие наилучший возможный порядок приближения для дифференцируемых и дважды дифференцируемых функций. (Для трижды дифференцируемых функций таких операторов, как следует из теорем 19 и 20, не существует.)

ГЛАВА 4.

УЛУЧШЕНИЕ ПОРЯДКА ПРИБЛИЖЕНИЯ

§4.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $M_{n,m}(f;x)$

Как было установлено выше, линейные положительные операторы имеют наиболее высокий порядок приближения на классе дважды дифференцируемых функций, и этот порядок не улучшается при повышении гладкости функции. Это существенный недостаток линейных положительных операторов.

С другой стороны линейные положительные операторы имеют очень простые и легко проверяемые условия, обеспечивающие сходимость последовательности операторов к тождественному на всем классе непрерывных функций. Это, несомненно, не менее существенное преимущество линейных положительных операторов как аппарата приближения.

Поэтому возникает идея, используя линейные положительные операторы, построить последовательности, дающие более высокий порядок приближения для m раз дифференцируемых функций, чем исходные операторы. В этом параграфе будет рассмотрена одна из таких конструкций, построенная по классу операторов, рассмотренных в §2.4, но излагаемые ниже идеи и методы могут быть применены и для других линейных положительных операторов.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $f \in C^m[a;b]$. Как и в §2.4 $L_n(f;x)$ – последовательность линейных положительных операторов класса W, то есть удовлетворяет условиям:

$$L_n(1;x) = 1,$$

$$L_n(\,(t-x)f(t);x) = \frac{v(x)}{n}\frac{d}{dx}\,L_n(f(t);x),$$

где $v(x)$ аналитическая положительная функция, принимающая неотрицательные значения на $[a;b]$.

Рассмотрим операторы:

$$M_{n,1}(f;x) = M_{n,2}(f;x) = L_n(f;x),$$

для $m > 2$

$$M_{n,m}(f;x) = L_n(f;x) - \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k!} L_n\left((t-x)^k;x\right) M_{n,m-k}(f^{(k)};x).$$

(Для частного случая, когда L_n это операторы Бернштейна для $m = 3$ указанная последовательность операторов была построена самим Бернштейном ([ ]), а для $m > 3$ рассмотрена Виденским ([ ]).)

§4.2 ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. *Для* $m \in \mathbb{N}$

$$L_n\left((t-x)^{m+1};x\right)=\frac{v(x)}{n}\left[\frac{d}{dx}L_n\Big((t-x)^m;x\Big)+mL_n\Big((t-x)^{m-1};x\Big)\right].$$

Док-во. Обозначим $l(t^k)=L_n(t^k;x)$. В силу линейности оператора L_n

$$L_n\left((t-x)^{m+1};x\right)=\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-x)^{m+1-k}l(t^k).$$

$$\text{так как}\qquad \binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}=\frac{m!}{k!(m-k)!}+\frac{m!}{(k-1)!(m-k+1)!}=$$
$$=\frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m-k+1}\right)=\frac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!}=\binom{m+1}{k}$$

$$L_n\left((t-x)^{m+1};x\right)=\binom{m+1}{0}(-x)^{m+1}+\binom{m+1}{m+1}l(t^{m+1})+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-x)^{m+1-k}l(t^k)+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k-1}(-x)^{m+1-k}l(t^k)=$$

$$=\binom{m}{0}(-x)^{m+1}+\binom{m}{m}l(t^{m+1})+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-x)^{m+1-k}l(t^k)+$$
$$+\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}(-x)^{m-k}l(t^{k+1})=$$
$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-x)^{m+1-k}l(t^k)+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-x)^{m-k}l(t^{k+1})\boxed{=}$$

из условий на операторы L_n следует, что

$$L_n(t^{k+1};x) = xL_n(t^k;x) + \frac{v(x)}{n}\frac{d}{dx}L_n(t^k;x),$$

поэтому

$$\boxed{=}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-x)^{m+1-k}l(t^k) + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-x)^{m-k}xl(t^k) +$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-x)^{m-k}\frac{v(x)}{n}\frac{d}{dx}l(t^k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-x)^{m-k}\frac{v(x)}{n}\frac{d}{dx}l(t^k)\boxed{=}$$

Поскольку

$$\frac{d}{dx}\Big(x^{m-k}l(t^k)\Big) = (m-k)x^{m-k-1}l(t^k) + x^{m-k}\frac{d}{dx}l(t^k)$$

получаем

$$\boxed{=}\frac{v(x)}{n}\Bigg[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}\frac{d}{dx}\Big(x^{m-k}l(t^k)\Big) +$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(m-k)(-x)^{m-k-1}l(t^k)\Bigg]\boxed{=}$$

Отметим, что в последней сумме слагаемой при $k = m$ равно нулю, и

$$\binom{m}{k}(m-k) = \frac{m!}{k!(m-k)!}(m-k) = \frac{m!}{k!(m-1-k)!} = \binom{m-1}{k}m$$

поэтому

$$\boxed{=}\frac{v(x)}{n}\Bigg[\frac{d}{dx}\Bigg(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}x^{m-k}l(t^k)\Bigg) +$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}m(-x)^{m-k-1}l(t^k)\Bigg] =$$

$$= \frac{v(x)}{n}\left[\frac{d}{dx}L_n\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}x^{m-k}t^k;x\right)+\right.$$

$$\left.+L_n\left(\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}m(-x)^{m-k-1}t^k;x\right)\right]=$$

$$=\frac{v(x)}{n}\left[\frac{d}{dx}L_n\Big((t-x)^m;x)+mL_n\Big((t-x)^{m-1};x)\right],$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Для* $m \geq 2$

$$L_n\left((t-x)^m;x\right)=\frac{V_m(x)}{n^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}},$$

где $V_1(x)=0,\ \ V_2(x)=v(x),$

$$V_m(x)=v(x)\Big(n^{\left[\frac{m-1}{2}\right]-\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{d}{dx}V_{m-1}(x)+(m-1)V_{m-2}(x)\Big)\ \text{при}\ m\geq 3.$$

Док-во. По лемме 1

$$L_n\left((t-x)^2;x\right)=\frac{v(x)}{n}\left[\frac{d}{dx}L_n(t-x;x)+L_n(1;x)\right]=\frac{v(x)}{n}$$

и доказываемое утверждение выполнено.

Пусть оно выполнено до некоторого m включительно. Тогда, применяя лемму 1, получим

$$L_n\left((t-x)^{m+1};x\right)=$$

$$=\frac{v(x)}{n}\left[\frac{d}{dx}L_n\Big((t-x)^m;x)+mL_n\Big((t-x)^{m-1};x)\right]=$$

$$=\frac{v(x)}{n}\left[\frac{d}{dx}\frac{V_m(x)}{n^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}}+m\frac{V_{m-1}(x)}{n^{\left[\frac{m}{2}\right]}}\right]=$$

$$=\frac{v(x)}{n^{1+\left[\frac{m}{2}\right]}}\left[\frac{d}{dx}\frac{V_m(x)}{n^{\left[\frac{m+1}{2}\right]-\left[\frac{m}{2}\right]}}+mV_{m-1}(x)\right]=$$

$$=\frac{v(x)}{n^{\left[\frac{m+2}{2}\right]}}\left[n^{\left[\frac{m}{2}\right]-\left[\frac{m+1}{2}\right]}\frac{d}{dx}V_m(x)+mV_{m-1}(x)\right]$$

и доказываемое утверждение выполнено так же и для $m+1$.

Лемма 3. *Для* $m \geq 2$

$$L_n\left(|t-x|^m; x\right) \leq \frac{V_m^*(x)}{n^{\frac{m}{2}}},$$

где

$$V_m^*(x) = \begin{cases} V_m(x), & \text{если } m \text{ четное}, \\ \sqrt{V_{2m-2}(x)v(x)}, & \text{если } m \text{ нечетное}, \end{cases}$$

$V_m(x)$ *– то же, что и в лемме 2.*

Док-во. Если m четное, то

$$L_n\left(|t-x|^m; x\right) = L_n\left((t-x)^m; x\right) = (\text{лемма } 2) = \frac{V_m(x)}{n^{[\frac{m+1}{2}]}} = \frac{V_m(x)}{n^{\frac{m}{2}}}.$$

Если m нечетное, то

$$L_n\left(|t-x|^m; x\right) = L_n\left(|t-x|^{m-1}|t-x|; x\right) \leq$$

$$(\text{неравенство Коши-Буняковского})$$

$$\leq \sqrt{L_n\left((t-x)^{2m-2}; x\right) L_n\left((t-x)^2; x\right)} = \sqrt{\frac{V_{2m-2}(x)}{n^{[\frac{2m-1}{2}]}}}\sqrt{\frac{v(x)}{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{V_{2m-2}(x)v(x)}}{n^{\frac{1}{2}[m-\frac{1}{2}]+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{V_{2m-2}(x)v(x)}}{n^{\frac{1}{2}(m-1)+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{V_{2m-2}(x)v(x)}}{n^{\frac{m}{2}}}.$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Обозначим* $R_{n,m}(f;x) = \dfrac{1}{m!}L_n\Big(\big(f^{(m)}(\xi) - f^{(m)}(x)\big)(t-x)^m; x\Big)$, *где* ξ *лежит между* t *и* x. *Тогда*

$$|R_{n,m}(f;x)| \leq \frac{1}{n^{\frac{m}{2}}\, m!}\big(V_m^*(x) + V_{m+1}^*(x)\big)\omega(f^{(m)}; \frac{1}{\sqrt{n}}),$$

где $V_m(x)$ *– то же, что и в лемме 3.*

Док-во. Как было показано при доказательстве теоремы 18 (см. (18.8)),

$$|f^{(m)}(\xi)-f^{(m)}(x)| \leq (1+\sqrt{n}|t-x|)\omega(f^{(m)};\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Поэтому

$$|R_{n,m}(f;x)| \leq \frac{1}{m!}L_n\Big((1+\sqrt{n}|t-x|)(|t-x|^m;x\Big)\omega(f^{(m)};\frac{1}{\sqrt{n}}) =$$

$$= \frac{1}{m!}\left[L_n\Big(|t-x|^m;x\Big)+\sqrt{n}L_n\Big(|t-x|^{m+1};x\Big)\right]\omega(f^{(m)};\frac{1}{\sqrt{n}}) \leq (\text{лемма } 3)$$

$$\leq \frac{1}{m!}\left[\frac{V_m^*(x)}{n^{\frac{m}{2}}}+\frac{\sqrt{n}V_{m+1}^*(x)}{n^{\frac{m+1}{2}}}\right]\omega(f^{(m)};\frac{1}{\sqrt{n}}) =$$

$$= \frac{1}{n^{\frac{m}{2}}\, m!}\big(V_m^*(x)+V_{m+1}^*(x)\big)\omega(f^{(m)};\frac{1}{\sqrt{n}}),$$

что и требовалось доказать.

§4.3 ПОРЯДОК ПРИБЛИЖЕНИЯ ОПЕРАТОРАМИ $M_{n,m}(f;x)$

Теорема 21. *Для* $f \in C^{m-1}[a;b], \quad m \in \mathbb{N}$

$$|M_{n,m}(f;x) - f(x)| \le \frac{1}{n^{\frac{m-1}{2}}} A_m(x)\omega\left(f^{(m-1)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где $A_m(x)$ *– аналитическая функция, заданная следующим образом:*

$$A_1(x) = 2(1+\sqrt{v(x)}),$$
$$A_2(x) = 2(v(x)+\sqrt{v(x)}),$$
для $m \ge 3$ $$A_m(x) = \sum_{k=2}^{m-1} \frac{V_k(x)A_{m-k}(x)}{k!\, n^{[\frac{k+1}{2}]-\frac{k}{2}}} + \frac{V_{m-1}^*(x)+V_m^*(x)}{(m-1)!},$$
$$V_1(x) = 0,$$
$$V_2(x) = v(x),$$
для $m \ge 3$ $$V_m(x) = v(x)\Big(n^{[\frac{m-1}{2}]-[\frac{m}{2}]}\frac{d}{dx}V_{m-1}(x) + (m-1)V_{m-2}(x)\Big),$$
$$V_m^*(x) = \begin{cases} V_m(x), & \text{если } m \text{ четное,} \\ \sqrt{V_{2m-2}(x)v(x)}, & \text{если } m \text{ нечетное,} \end{cases}$$

Док-во. Применяя к разложению функции $f(x)$ по формуле Тейлора оператор L_n, учитывая, что $L_n(1;x)=1$ и $L_n(t-x;x)=0$, получим:

$$L_n(f(t);x) = f(x) + \sum_{k=2}^{m} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} L_n\big((t-x)^k;x\big) + R_{n,m}(f;x), \qquad (21.1)$$

где $R_{n,m}(f;x)$ – то же, что и в лемме 4.
Из определения оператора $M_{n,m}$ для $f \in C^2[a;b]$

$$M_{n,3}(f;x) = L_n(f;x) - \frac{1}{2}L_n\big((t-x)^2;x\big)L_n(f'';x)$$

А в силу (21.1)

$$L_n(f(t);x) = f(x) + \frac{f''(x)}{2} L_n\big((t-x)^2;x\big) + R_{n,2}(f;x)$$

Поэтому

$$M_{n,3}(f;x) - f(x) = \frac{1}{2}\Big[f''(x) - L_n(f'';x)\Big] L_n\big((t-x)^2;x\big) + R_{n,2}(f;x)$$

Из теоремы 18 и леммы 4 получаем

$$|M_{n,3}(f;x) - f(x)| \le \omega\left(f''; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[\frac{(1+\sqrt{v(x)}\,)v(x)}{n} + \frac{V_2^*(x)+V_3^*(x)}{2n}\right] \tag{21.2}$$

и поскольку

$$A_3(x) = \frac{|V_2(x)|}{2n^{[3/2]-1}} A_1(x) + \frac{V_2^*(x)+V_3^*(x)}{2} =$$
$$= (1+\sqrt{v(x)}\,)v(x) + \frac{V_2^*(x)+V_3^*(x)}{2},$$

(21.2) равносильно утверждению теоремы для $m=3$.
Аналогично для $f \in C^3[a;b]$

$$M_{n,4}(f;x) - f(x) = \frac{1}{2}\Big[f''(x) - L_n(f'';x)\Big] L_n\big((t-x)^2;x\big) +$$
$$+ \frac{1}{3!}\Big[f'''(x) - L_n(f''';x)\Big] L_n\big((t-x)^3;x\big) + R_{n,3}(f;x)$$

Применяя к первому слагаемому оценку (18.4), ко второму (18.3), а к третьему лемму 4, с учетом леммы 2, получим

$$|M_{n,4}(f;x) - f(x)| \le \omega\left(f''; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[\frac{v(x)+\sqrt{v(x)}}{2\sqrt{n}}\frac{v(x)}{n} + \right.$$
$$\left. + \frac{1+\sqrt{v(x)}}{3!}\frac{|V_3(x)|}{n^2} + \frac{V_3^*(x)+V_4^*(x)}{3!\,n^{3/2}}\right] \tag{21.3}$$

и поскольку

$$A_4(x) = \frac{|V_2(x)|}{2!\, n^{[3/2]-1}} A_2(x) + \frac{|V_3(x)|}{3!\, n^{[4/2]-3/2}} A_1(x) + \frac{V_3^*(x) + V_4^*(x)}{3!} =$$
$$= \frac{v(x)(v(x) + \sqrt{v(x)})}{2} + \frac{|V_3(x)|(1 + \sqrt{v(x)})}{3\sqrt{n}} + \frac{V_3^*(x) + V_4^*(x)}{3!}$$

(21.3) равносильно утверждению теоремы для $m = 4$.
Предположим, что утверждение теоремы выполнено до некоторого m включительно. Тогда для $f \in C^m[a;b]$ аналогично предыдущему из (21.1) и определения оператора $M_{n,m}$ получаем:

$$M_{n,m+1}(f;x) - f(x) =$$
$$= \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \Big[f^{(k)}(x) - M_{n,m+1-k}(f^{(k)};x) \Big] L_n\big((t-x)^k;x\big) + R_{n,m}(f;x), \tag{21.4}$$

откуда

$$|M_{n,m+1}(f;x) - f(x)| \le \sum_{k=2}^{m} \frac{A_{m+1-k}(x)|V_k(x)|}{k!\, n^{[\frac{k+1}{2}]} n^{\frac{m+1-k}{2}}} \omega\left(f^{(m)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) +$$
$$+ \frac{V_m^*(x) + V_{m+1}^*(x)}{n^{\frac{m}{2}}\, m!} \omega\left(f^{(m)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{A_{m+1}(x)}{n^{m/2}} \omega\left(f^{(m)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Следовательно, утверждение теоремы выполнено для любого m.

Теорема 22. *Для* $f \in C^m[a;b]$, $\quad m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} n^{[\frac{m+1}{2}]} \Big(M_{n,m}(f;x) - f(x) \Big) = \frac{f^{(m)}(x) V_m(x)}{m!},$$

то есть порядок приближения операторами $M_{n,m}(f;x)$ *не лучше, чем* $\dfrac{1}{n^{[\frac{m+1}{2}]}}$.

Док-во. Из определения оператора $M_{n,m}$ и (21.1) непосредственно следует, что

$$M_{n,m}(f;x) - f(x) - \frac{f^{(m)}(x)}{m!} L_n\big((t-x)^m;x\big) =$$
$$= \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k!} L_n\big((t-x)^k;x\big) \Big[f^{(k)}(x) - M_{n,m-k}(f^{(k)};x) \Big] + R_{n,m}(f;x) \tag{22.1}$$

Оценим правую часть неравенства (22.1). С учетом лемм 2, 4 и теоремы 21 получаем:

$$\left|\sum_{k=2}^{m-1}\frac{1}{k!}L_n\big((t-x)^k;x\big)\Big[f^{(k)}(x)-M_{n,m-k}(f^{(k)};x)\Big]+R_{n,m}(f;x)\right|\le$$

$$\le\sum_{k=2}^{m-1}\frac{1}{k!}\frac{|V_k(x)|}{n^{[\frac{k+1}{2}]}}\frac{A_{m-k}(x)}{n^{\frac{m-k-1}{2}}}\omega\left(f^{(m-1)};\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+$$

$$+\frac{V^*_m(x)+V^*_{m+1}(x)}{n^{\frac{m}{2}}\,m!}\omega\left(f^{(m)};\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

что стремится к нулю при $n\to\infty$. Следовательно, и правая часть неравенства (22.1) стремится к нулю при $n\to\infty$, то есть, с учетом леммы 2,

$$\lim_{n\to\infty}n^{[\frac{m+1}{2}]}\Big(M_{n,m}(f;x)-f(x)\Big)=n^{[\frac{m+1}{2}]}\frac{f^{(m)}(x)}{m!}L_n\big((t-x)^m;x\big)=$$

$$=\frac{f^{(m)}(x)V_m(x)}{m!},$$

что и требовалось доказать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, обозначим еще раз основные моменты изложенной теории.

Основная задача теории приближения – приближение функции алгебраическим многочленом или тригонометрическим полиномом заданного порядка. Как следует из теорем Вейерштрасса, эта задача имеет решение, то есть любая непрерывная функция может быть с любой точностью приближена алгебраическим многочленом или тригонометрическим полиномом.

Точность приближения зависит от степени многочлена или полинома и дифференциальных свойств приближаемой функции. Как следует из теорем Джексона, если функция p раз дифференцируема, то ее можно приблизить алгебраическим или тригонометрическим полиномом порядка n с точностью $\dfrac{1}{n^p}$.

Как аппарат приближения используют последовательность операторов, то есть многочленов или полиномов порядка n, коэффициенты которых находятся по приближаемой функции.

Условия сходимости этой последовательности операторов к тождественному, или, по сути, к исходной функции могут быть достаточно сложными (как, например, условия сходимости частных сумм ряда Фурье).

Наиболее простой вид эти условия имеют для случая положительных операторов, то есть принимающих положительные значения на положительных функциях.

Эти условия сформулированы в теоремах Коровкина, из которых следует, что если последовательность линейных положительных операторов сходится к функции для трех функций, образующих систему Чебышева, то эта последовательность сходится к функции для любой непрерывной функции, причем и условие положительности, и условие Чебышева существенны. Примерами системы Чебышева могут служить функции 1, x, x^2 для алгебраических многочленов или 1, $\sin x$, $\cos x$ для тригонометрических полиномов.

Основным недостатком линейных положительных операторов является тот факт, что их порядок приближения не может быть выше $\frac{1}{n^2}$ даже для p раз ($p > 2$) дифференцируемых функций. Причем и этот порядок достигается далеко не всеми операторами. В частности, наиболее известные из линейных положительных операторов – многочлены Бернштейна – дают порядок приближения не выше, чем $\frac{1}{n}$ (теорема Вороновской). Но можно привести пример последовательности линейных положительных операторов, которые доставляют оптимальный, с точки зрения теорем Джексона порядок приближения для классов непрерывных, дифференцируемых и дважды дифференцируемых функций.

Для повышения порядка приближения можно рассмотреть конструкции, являющиеся по сути линейными комбинациями исходных операторов. Эти конструкции так же являются линейными операторами, но уже перестают быть положительными, однако сохраняют очень многие свойства положительных операторов. И если исходные линейные положительные операторы удовлетворяли условиям теорем Коровкина о сходимости, то и построенная указанным методом последовательность операторов тоже будет приближать функцию с более высоким порядком точности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

(1) Jakson D. *The Theory of Approximation* //Amer. Math. Soc., New York, 1930.

(2) Натансон И.П. *Конструктивная теория функций* //ГИТТЛ, М.-Л., 1949.

(3) Коровкин П.П. *О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций* //Докл. АН СССР, 1953, т.90, N^o6, с.961-964.

(4) Коровкин П.П. *Линейные операторы и теория приближений* //"Наука" М., 1959.

(5) Дзядык В.К. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами* //"Наука", М., 1977.

(6) Тихомиров Н.Б., Рятин А.Г. *Линейные положительные операторы и сингулярные интегралы* //Калининский гос. ун-т, Калинин, 1979.

(7) Волков Ю.И. *Структура положительных линейных операторов типа B с полиномиальной и степенной ковариациями* //Ин-т математики АН УССР, Киев, 1989.

(8) Виденский В.С. *Многочлены Бернштейна* //Ленинградский гос. пед. ин-т., Ленинград, 1990

(9) Гудошникова Е.В. *Оценки порядка приближения и теоремы насыщения для класса операторов* //Математика. Механика. Сб. науч. трудов. – Саратов: изд-во Сарат. ун-та, 2015. – вып.17, С.21-25