Е.В.Гудошникова

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ВВЕДЕНИЕ

Линейные положительные операторы играют большую роль в теории приближения, поскольку обладают рядом простых свойств, облегчающих их изучение. В частности, для линейных положительных операторов наиболее просто формулируются условия, когда последовательность операторов сходится к тождественному, а следовательно, решает задачу приближения (теоремы Коровкина [1]).

Все известные полиномиальные линейные положительные операторы сумматорного вида приближают функции на отрезке или полуоси. Например, операторы Саса-Миракьяна ([2-3])

$$M_n(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}$$

сходятся к непрерывной функции на $[0;\infty)$.

Используя эти операторы, J.Grof построил последовательность операторов

$$H_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ f\Big(\frac{k}{n}\Big) + (-1)^k f\Big(-\frac{k}{n}\Big) \right\} \frac{(nx)^k}{2\operatorname{ch}(nx)k!},$$

для приближения функций на $(-\infty;\infty)$.

В этом курсе будут построены операторы, являющиеся обобщением операторов $H_n(f;x)$ для приближения функций многих переменных и изучены их аппроксимационные свойства.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА $L_n(f;\bar{x})$

Рассмотрим обобщение операторов $H_n(f;x)$ – операторы для функций многих переменных во всем пространстве $\mathbb{R}_r$.

Для $m \in \mathbb{N}_0$ запишем представление в двоичном формате:

$$m = m_1 + m_2 \cdot 2 + m_3 \cdot 2^2 + \dots, \text{ где } m_k \in \{0;1\}.$$

Введем обозначения:

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_r)$;

$|\bar{x}| = (|x_1|, \dots, |x_r|)$;

$\bar{x}_m = (\,(-1)^{m_1} x_1, \dots, (-1)^{m_r} x_r)$;

$\bar{k}_{n,m} = \left(\frac{k_1}{n}(-1)^{m_1}, \dots, \frac{k_r}{n}(-1)^{m_r}\right)$, где $k_i \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$.

Для функции $f : \mathbb{R}_r \to \mathbb{R}$ введем аналог модуля непрерывности:

$$\omega(f;\bar{h}) = \sup_{\bar{\delta} \in Q(\bar{h})} \sup_{\bar{x} \in \mathbb{R}_r} |f(\bar{x} + \bar{\delta}) - f(\bar{x})|,$$

где $Q(\bar{h}) = [0;h_1] \times [0;h_2] \times \dots \times [0;h_r]$, а $\bar{x} + \bar{\delta}$ понимается как сумма векторов. Очевидно, что если f – равномерно-непрерывная функция, то при $\|\bar{h}\| \to 0$ будет $\omega(f;\bar{h}) \to 0$.

Для функции $f : \mathbb{R}_r \to \mathbb{R}$ рассмотрим операторы

$$L_n(f;\bar{x}) = \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} f(\bar{k}_{n,m}) p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m),$$

$$\text{где } p_{n,\bar{k}}(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{r} \frac{(nx_i)^{k_i}}{2\operatorname{ch}(nx_i) k_i!} \quad \text{и} \quad \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \dots = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_r=0}^{\infty} \dots$$

При $r = 1$ L_n превращаются в операторы, рассмотренные Грофом.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. *Для любых* $\bar{t},\ \bar{x} \in \mathbb{R}_r$

$$|f(\bar{t}) - f(\bar{x})| \le \omega(f;\bar{h}) \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{(t_i - x_i)^2}{h_i^2}\right),$$

где $\bar{h} = (h_1, ..., h_r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$|f(\bar{t}) - f(\bar{x})| \le \omega\left(f;(|t_1 - x_1|, ..., |t_r - x_r|)\right) \boxed{\le}$$

Зафиксируем у векторов $\bar{h}$, $\bar{t}$ и $\bar{x}$ все координаты, кроме первой. Тогда f – функция одной переменной x_1, а $\omega(f;\bar{h}) = \omega(f;h_1)$ – обычный модуль непрерывности со всеми своими свойствами, в том числе следующими: $\omega(f;\lambda h_1) \le (\lambda+1)\omega(f;h_1)$ и для $h_1 < h_1^*$ $\omega(f;h_1) \le \omega(f;h_1^*)$.

Поэтому, если $|t_1 - x_1| \le h_1$, то

$$\boxed{\le} \omega\left(f;(h_1, |t_2 - x_2|, ..., |t_r - x_r|)\right) \le$$
$$\le \left(1 + \frac{(t_1 - x_1)^2}{h_1^2}\right) \omega\left(f;(h_1, |t_2 - x_2|, ..., |t_r - x_r|)\right);$$

если $|t_1 - x_1| > h_1$, то

$$\boxed{\le} \omega\left(f;(h_1\frac{|t_1 - x_1|}{h_1}, |t_2 - x_2|, ..., |t_r - x_r|)\right) \le$$
$$\le \left(1 + \frac{|t_1 - x_1|}{h_1}\right) \omega\left(f;(h_1, |t_2 - x_2|, ..., |t_r - x_r|)\right) <$$
$$< \left(1 + \frac{(t_1 - x_1)^2}{h_1^2}\right) \omega\left(f;(h_1, |t_2 - x_2|, ..., |t_r - x_r|)\right).$$

Повторяя проведенные рассуждения для $|t_2 - x_2|$,...,$|t_r - x_r|$, получим

$$|f(\bar{t}) - f(\bar{x})| \le \left(1 + \frac{(t_1 - x_1)^2}{h_1^2}\right) ... \left(1 + \frac{(t_r - x_r)^2}{h_r^2}\right) \omega(f;(h_1, ..., h_r)),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 2. *Для функции*

$$g(\bar{x}) = \frac{1}{h_1 \cdot \ldots \cdot h_r} \int\limits_0^{h_1} \ldots \int\limits_0^{h_r} f(\bar{x} + \bar{t})\, dt_1 \ldots dt_r$$

имеют место неравенства:

1^o. $|g(\bar{x}) - f(\bar{x})| \le \omega(f; \bar{h})$;

2^o. $|L_n(g; \bar{x}) - L_n(f; \bar{x})| \le \omega(f; \bar{h}) 2^r$;

3^o. $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x_i}\right| \le \dfrac{\omega(f; \bar{h})}{h_i}$,

где $\bar{h} = (h_1, \ldots, h_r)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство 1^o немедленно следует из определений функций g и ω. Покажем 2^o:

$$|L_n(g; \bar{x}) - L_n(f; \bar{x})| = |\sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} (g(\bar{k}_{n,m}) - f(\bar{k}_{n,m}))\, p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m)| \le$$

$$\le \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} |g(\bar{k}_{n,m}) - f(\bar{k}_{n,m})|\, p_{n,\bar{k}}(|\bar{x}|) \le \text{ (с учетом } 1^o)$$

$$\le \omega(f; \bar{h}) \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} p_{n,\bar{k}}(|\bar{x}|).$$

Упростим полученное выражение:

$$\sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} p_{n,\bar{k}}(|\bar{x}|) = \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{r} \frac{(n|x_i|)^{k_i}}{2\operatorname{ch}(nx_i) k_i!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_{r-1}=0}^{\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{r-1} \frac{(n|x_i|)^{k_i}}{2\operatorname{ch}(nx_i) k_i!} \sum_{k_r=0}^{\infty} \frac{(n|x_r|)^{k_r}}{2\operatorname{ch}(nx_r) k_r!} \right\} =$$

$$= \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_{r-1}=0}^{\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{r-1} \frac{(n|x_i|)^{k_i}}{2\operatorname{ch}(nx_i) k_i!} \frac{\exp(n|x_r|)}{2\operatorname{ch}(nx_r)} \right\} = \ldots$$

$$= \sum_{m=0}^{2^r-1} \frac{\exp(n|x_1|)}{2\operatorname{ch}(nx_1)} \cdots \frac{\exp(n|x_r|)}{2\operatorname{ch}(nx_r)} \le \sum_{m=0}^{2^r-1} 1 = 2^r,$$

откуда и следует утверждение 2^o.

Покажем 3^o. Для любой непрерывной функции g имеет место равенство

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int\limits_a^b \{g(t+\delta)-g(t)\}\ dt = g(b)-g(a).$$

Поэтому

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\frac{1}{h_1\cdots h_r}\cdot$$

$$\cdot\left\{\int\limits_0^{h_1}...\int\limits_0^{h_r}\Big[f(x_1+t_1,...,x_{i-1}+t_{i-1},x_i+t_i+\delta,x_{i+1}+t_{i+1},...,x_r+t_r)-\right.$$

$$\left.-f(x_1+t_1,\dots,x_r+t_r)\Big]\,dt_1\dots dt_r\right\} =$$

$$=\frac{1}{h_1\cdots h_r}\left\{\int\limits_0^{h_1}...\int\limits_0^{h_{i-1}}\int\limits_0^{h_{i+1}}...\int\limits_0^{h_r}\Big[\right.$$

$$f(x_1+t_1,...,x_{i-1}+t_{i-1},x_i+h_i,x_{i+1}+t_{i+1},...,x_r+t_r)-$$

$$-f(x_1+t_1,...,x_{i-1}+t_{i-1},x_i,x_{i+1}+t_{i+1},...,x_r+t_r)$$

$$\left.\Big]\,dt_1...dt_{i-1}dt_{i+1}...dt_r\right\},$$

Откуда

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|\le$$

$$\le\omega(f;\bar h)\frac{1}{h_1\cdots h_r}\int\limits_0^{h_1}\dots\int\limits_0^{h_{i-1}}\int\limits_0^{h_{i+1}}\dots\int\limits_0^{h_r}dt_1\dots dt_{i-1}dt_{i+1}\dots dt_r =$$

$$=\frac{1}{h_i}\omega(f;\bar h),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 3. *Для операторов*

$$l_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \frac{1}{2\operatorname{ch}(nx)},$$

где $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *имеют место соотношения*

1^o. $l_n(1;x) = \dfrac{e^{nx}}{2\operatorname{ch}(nx)}$;

2^o. $l_n(t;x) = x\dfrac{e^{nx}}{2\operatorname{ch}(nx)}$;

3^o. *для* $\alpha \geq 2$

$$l_n((t-x)^\alpha;x) == \frac{x}{n}\frac{e^{nx}}{2\operatorname{ch}(nx)}\left[2\operatorname{ch}(nx)e^{-nx}l_n((t-x)^{\alpha-1};x)\right]' + \\ + \frac{x(\alpha-1)}{n}l_n((t-x)^{\alpha-2};x);$$

4^o. *для* $\alpha \geq 2$ $\quad |l_n((t-x)^\alpha;x)| \leq \operatorname{const}(\alpha)n^{-\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]}|x|(1+|x|^{\alpha-2})$.

Доказательство утверждений леммы может быть легко получено из аналогичных утверждений для операторов Саса-Миракьяна, поскольку $l_n(f;x) = M_n(f;x)\dfrac{\exp(nx)}{2\operatorname{ch}(nx)}$.

Следствие.

$$1^o.\ l_n((t-x)^2;x) = \frac{x}{n}\frac{e^{nx}}{2\operatorname{ch}(nx)}\left[2\operatorname{ch}(nx)e^{-nx}l_n((t-x);x)\right]' + \\ + \frac{x}{n}l_n(1;x) = \frac{x}{n}\frac{e^{nx}}{2\operatorname{ch}(nx)}.$$

$$2^o.\ l_n((t-x)^3;x) = \\ = \frac{x}{n}\frac{e^{nx}}{2\operatorname{ch}(nx)}\left[2\operatorname{ch}(nx)e^{-nx}l_n((t-x)^2;x)\right]' + \frac{2x}{n}l_n((t-x);x) = \\ = \frac{x}{n}\frac{e^{nx}}{2\operatorname{ch}(nx)}\left[\frac{x}{n}\right]' = \frac{x}{n^2}\frac{e^{nx}}{2\operatorname{ch}(nx)}.$$

3^o. $l_n((t-x)^4;x) =$

$$= \frac{x}{n}\frac{e^{nx}}{2\operatorname{ch}(nx)}\left[2\operatorname{ch}(nx)e^{-nx}l_n((t-x)^3;x)\right]' + \frac{3x}{n}l_n((t-x)^2;x) =$$

$$= \frac{x}{n}\frac{e^{nx}}{2\operatorname{ch}(nx)}\left[\frac{x}{n^2}\right]' + \frac{3x}{n}\frac{x}{n}\frac{e^{nx}}{2\operatorname{ch}(nx)} = \left[\frac{x}{n^3}+\frac{3x^2}{n^2}\right]\frac{e^{nx}}{2\operatorname{ch}(nx)}.$$

Лемма 4. *Имеют место равенства*

$$1^o.\quad \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m) = \prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)};$$

$$2^o.\quad \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty} p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m) = 1;$$

$$3^o.\quad \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}(-1)^{m_j} p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m) = \operatorname{th}(nx_j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем 1^o:

$$\sum_{\bar{k}=0}^{\infty} p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m) = \sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{r}\frac{(nx_i(-1)^{m_i})^{k_i}}{2\operatorname{ch}(nx_i)k_i!} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty}\dots\sum_{k_{r-1}=0}^{\infty}\left\{\prod_{i=1}^{r-1}\frac{(nx_i(-1)^{m_i})^{k_i}}{2\operatorname{ch}(nx_i)k_i!}\sum_{k_r=0}^{\infty}\frac{(nx_r(-1)^{m_r})^{k_r}}{2\operatorname{ch}(nx_r)k_r!}\right\} =$$

$$= \frac{\exp(nx_r(-1)^{m_r})}{2\operatorname{ch}(nx_r)}\sum_{k_1=0}^{\infty}\dots\sum_{k_{r-1}=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{r-1}\frac{(nx_i(-1)^{m_i})^{k_i}}{2\operatorname{ch}(nx_i)k_i!} = \dots$$

$$= \prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} \qquad \square$$

Покажем 2^o. Пусть $r=1$. Тогда утверждение леммы примет вид:

$$\left.\frac{\exp(nx_1(-1)^{m_1})}{2\operatorname{ch}(nx_1)}\right|_{m=0} + \left.\frac{\exp(nx_1(-1)^{m_1})}{2\operatorname{ch}(nx_1)}\right|_{m=1} = 1.$$

Для $m = 0$ $m_1 = 0$, а для $m = 1$ $m_1 = 1$, поэтому получаем

$$\frac{\exp(nx_1)}{2\operatorname{ch}(nx_1)} + \frac{\exp(-nx_1)}{2\operatorname{ch}(nx_1)} = 1,$$

что, очевидно, выполнено. Следовательно, для $r = 1$ равенство 2^o имеет место. Пусть оно выполнено для некоторого r. Проверим его выполнение для $r+1$:

$$\sum_{m=0}^{2^{r+1}-1} \prod_{i=1}^{r+1} \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{2^r-1} \prod_{i=1}^{r+1} \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} + \sum_{m=2^r}^{2^{r+1}-1} \prod_{i=1}^{r+1} \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} \boxed{=}$$

Заметим, что в обеих суммах наборы $(m_1, \ldots, m_r)$ пробегают одно и то же множество от $(0, \ldots, 0)$ до $(1, \ldots, 1)$, а m_{r+1} в первой сумме равно 0, а во второй 1. Поэтому равенство можно продолжить следующим образом:

$$\boxed{=} \sum_{m=0}^{2^r-1} \prod_{i=1}^{r} \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} \cdot \frac{\exp(nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{2^r-1} \prod_{i=1}^{r} \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} \cdot \frac{\exp(-nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})} =$$

(с учетом предположения индукции)

$$= \frac{\exp(nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})} + \frac{\exp(-nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})} = 1$$

и утверждение леммы выполнено и для $r+1$. Следовательно, оно выполняется для любого натурального r. $\square$

Покажем 3^o. При $r = 1$ будет $j = 1$ и равенство 3^0 примет вид:

$$\frac{\exp(nx_1)}{2\operatorname{ch}(nx_1)} - \frac{\exp(-nx_1)}{2\operatorname{ch}(nx_1)} = \operatorname{th}(nx_1),$$

что, очевидно, выполнено.

Пусть доказываемое равенство выполняется для некоторого r. Тогда для $r+1$ получим:

$$\sum_{m=0}^{2^{r+1}-1}(-1)^{m_j}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m)=\sum_{m=0}^{2^{r+1}-1}(-1)^{m_j}\prod_{i=1}^{r+1}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}=$$

$$=\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{m_j}\left\{\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}\right\}\frac{\exp(nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})}+$$

$$+\sum_{m=2^r}^{2^{r+1}-1}(-1)^{m_j}\left\{\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}\right\}\frac{\exp(-nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})}\boxed{=}$$

если $j=r+1$, то

$$\boxed{=}\sum_{m=0}^{2^r-1}\left\{\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}\right\}\frac{\exp(nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})}-$$

$$-\sum_{m=2^r}^{2^{r+1}-1}\left\{\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}\right\}\frac{\exp(-nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})}=$$

$$=\sum_{m=0}^{2^r-1}\left\{\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}\right\}\frac{\exp(nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})}-$$

$$-\sum_{m=0}^{2^r-1}\left\{\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}\right\}\frac{\exp(-nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})}=$$

$$=\sum_{m=0}^{2^r-1}\left\{\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}\right\}\left(\frac{\exp(nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})}-\frac{\exp(-nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})}\right)=$$

$$=\operatorname{th}(nx_{r+1});$$

если $j\le r$, то

$$\boxed{=}\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{m_j}\left\{\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}\right\}\frac{\exp(nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})}+$$

$$+\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{m_j}\left\{\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}\right\}\frac{\exp(-nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})}=$$

$$=\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{m_j}\left\{\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}\right\}\left(\frac{\exp(nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})}+\frac{\exp(-nx_{r+1})}{2\operatorname{ch}(nx_{r+1})}\right)=$$

$$=\operatorname{th}(nx_j),$$

и равенство 3^o доказано. $\square$

Лемма 5. *Имеют место равенства:*

1^o. $L_n(1;\bar{x}) = 1$;

2^o. $L_n(t_j;\bar{x}) = x_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1^o есть прямое следствие леммы 4. Покажем 2^o.

$$L_n(t_j;\bar{x}) = \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\frac{k_j}{n}(-1)^{m_j}\prod_{i=1}^{r}\frac{(nx_i(-1)^{m_i})^{k_i}}{2\operatorname{ch}(nx_i)k_i!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\frac{k_j}{n}(-1)^{m_j}\frac{(nx_j(-1)^{m_j})^{k_j}}{2\operatorname{ch}(nx_j)k_j!}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r}\frac{(nx_i(-1)^{m_i})^{k_i}}{2\operatorname{ch}(nx_i)k_i!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{k_j=1}^{\infty}\frac{k_j}{n}(-1)^{m_j}\frac{(nx_j(-1)^{m_j})^{k_j}}{2\operatorname{ch}(nx_j)k_j!}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{k_j=1}^{\infty}x_j\frac{(nx_j(-1)^{m_j})^{k_j-1}}{2\operatorname{ch}(nx_j)(k_j-1)!}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{k_j=0}^{\infty}x_j\frac{(nx_j(-1)^{m_j})^{k_j}}{2\operatorname{ch}(nx_j)(k_j)!}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} =$$

$$= x_j\sum_{m=0}^{2^r-1}\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)},$$

откуда, с учетом равенства 2^o из леммы 4, получаем требуемое. $\square$

Лемма 6. *Пусть, как и прежде,* $\bar{x} = (x_1, ..., x_r)$.

Обозначим $\bar{x}(i) = (x_1, ..., x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, ..., x_r)$.

Положим $f_i(\bar{x}) = f(\bar{x}(i))$. *Тогда*

$$L_n(f;\bar{x}) = L_n(f_i;\bar{x}(i)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$L_n(f_i;\bar{x}(i)) = \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty} f_i\left(\frac{k_1}{n}(-1)^{m_1},\dots,\frac{k_r}{n}(-1)^{m_r}\right)p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m(i)) =$$

$$= \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty} f\Bigg(\frac{k_1}{n}(-1)^{m_1},\dots,$$

$$\frac{k_{i-1}}{n}(-1)^{m_{i-1}},\frac{k_i}{n}(-1)^{m_i+1},\frac{k_{i+1}}{n}(-1)^{m_{i+1}},\dots,\frac{k_r}{n}(-1)^{m_r}\Bigg)p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m(i)).$$

Для каждого $m = m_1+m_2 2+\dots+m_{i-1}2^{i-2}+1\cdot 2^{i-1}+m_{i+1}2^i+\dots+m_r 2^{r-1}$ найдется пара $m^* = m_1 + m_2 2 + \dots + m_{i-1}2^{i-2} + 0\cdot 2^{i-1} + m_{i+1}2^i + \dots + m_r 2^{r-1}$. Поменяем местами все пары слагаемых с номерами m и m^*. Получим

$$L_n(f_i;\bar{x}(i)) = \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty} f(\bar{k}_{n,m})p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m) = L_n(f;\bar{x}),$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 7. *Для* $\alpha \geq 2$ *обозначим*

$$S_n^\alpha(\bar{x}) = L_n(\prod_{i=1}^{r}(t_i-x_i)^{\alpha_i};\bar{x}), \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{r}\alpha_i = \alpha.$$

Имеет место неравенство

$$|S_n^\alpha(\bar{x})| \leq \text{const}(\alpha,r)(1+\|\bar{x}\|^{\alpha-1})n^{-\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем преобразования:

$$S_n^\alpha(\bar{x}) = \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{r}\left[\Big(\frac{k_i}{n}(-1)^{m_i}-x_i\Big)^{\alpha_i}\frac{(nx_i(-1)^{m_i})^{k_i}}{2\operatorname{ch}(nx_i)k_i!}\right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{2^r-1}\prod_{i=1}^{r}(-1)^{m_i\alpha_i}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{k}{n}-x_i(-1)^{m_i}\Big)^{\alpha_i}\frac{(nx_i(-1)^{m_i})^k}{2\operatorname{ch}(nx_i)k!}\right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{2^r-1}\prod_{i=1}^{r}(-1)^{m_i\alpha_i}\,l_n\Big((t_i-x_i(-1)^{m_i})^{\alpha_i};x_i(-1)^{m_i}\Big),$$

где l_n – то же, что и в лемме 3.

Пусть хоть одно $\alpha_i = 1$. Так как по лемме 3

$$l_n\Big((t_i - x_i(-1)^{m_i}); x_i(-1)^{m_i}\Big) = 0,$$

в этом случае будет $S_n^\alpha(\bar{x}) = 0$ и доказываемое утверждение тривиально.

Пусть все $\alpha_i \neq 1$. Тогда или $\alpha_i = 0$, и в этом случае по лемме 3

$$l_n\Big((t_i - x_i(-1)^{m_i})^{\alpha_i}; x_i(-1)^{m_i}\Big) = \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i(-1)^{m_i})} \leq 1,$$

или $\alpha_i \geq 2$ и с учетом леммы 3 получаем

$$|S_n^\alpha(\bar{x})| \leq \sum_{m=0}^{2^r-1} \prod_{\substack{i=1\\ \alpha_i \geq 2}} \operatorname{const}(\alpha_i)|x_i| n^{-\left[\frac{\alpha_i+1}{2}\right]}(1 + |x_i|^{\alpha_i-2}). \qquad (1)$$

Если α_i четное, то $\left[\dfrac{\alpha_i+1}{2}\right] = \dfrac{\alpha_i}{2}$. Поэтому если все α_i четные, то α четное и

$$\left[\frac{\alpha_1+1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{\alpha_r+1}{2}\right] = \frac{\alpha_1}{2} + \cdots + \frac{\alpha_r}{2} = \frac{\alpha}{2} = \left[\frac{\alpha+1}{2}\right].$$

Если α_i нечетное, то $\left[\dfrac{\alpha_i+1}{2}\right] = \dfrac{\alpha_i}{2} + \dfrac{1}{2}$. Поэтому если среди α_i есть нечетные, то

$$\left[\frac{\alpha_1+1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{\alpha_r+1}{2}\right] \geq \frac{\alpha_1}{2} + \cdots + \frac{\alpha_r}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\alpha+1}{2} \geq \left[\frac{\alpha+1}{2}\right].$$

И в любом случае

$$\prod_{\substack{i=1\\ \alpha_i \geq 2}} n^{-\left[\frac{\alpha_i+1}{2}\right]} \leq n^{-\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]}.$$

Подставляя полученную оценку в (1), получим утверждение леммы. □

Лемма 8. *Для*

$$R_\nu(f;\bar{x}) = \sum_{\alpha=\nu}{}^{*} \frac{1}{\alpha_1!\dots\alpha_r!} L_n\Big([F_\alpha^\nu(\bar{\xi}) - F_\alpha^\nu(\bar{x})] \prod_{i=1}^{r}(t_i - x_i)^{\alpha_i}; \bar{x}\Big),$$

где $\sum\limits_{\alpha=k}{}^{*}$ *берется по всем наборам целых неотрицательных чисел* α_i, $i = \overline{1,r}$, *таких, что* $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i = \alpha$, $F_\alpha^\nu = \dfrac{\partial^\nu f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_r^{\alpha_r}}$, $\bar{\xi} = \bar{x} + \theta(\bar{t} - \bar{x})$, $\theta \in [0;1]$ *имеет место неравенство*

$$|R_\nu(f;\bar{x})| \le \mathrm{const}(r;\nu) \sum_{\alpha=\nu}{}^{*} \omega(F_\alpha^\nu;\bar{h}) \|\bar{x}\|^{\nu/2} n^{-\nu/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\psi_\alpha(\bar{t}) = [F_\alpha^\nu(\bar{\xi}) - F_\alpha^\nu(\bar{x})] \prod_{i=1}^{r}(t_i - x_i)^{\alpha_i}.$$

ψ_α – непрерывная функция и по теореме 1

$$\Big|L_n(\psi_\alpha(\bar{t});\bar{x}) - \psi_\alpha(\bar{x})\Big| \le \mathrm{const}(r)\omega(\psi_\alpha;\bar{h}),$$

где $\bar{h} = \left(\sqrt{\dfrac{|x_1|}{n}}, \dots, \sqrt{\dfrac{|x_r|}{n}}\right)$.

Во-первых, $\psi_\alpha(\bar{x}) = 0$.

Во-вторых,

$$\omega(\psi_\alpha;\bar{h}) = \sup_{\bar{\delta},\,\bar{x}} |\psi_\alpha(\bar{x}+\bar{\delta}) - \psi_\alpha(\bar{x})| = \sup_{\bar{\delta},\,\bar{x}} \Big|[F_\alpha^\nu(\bar{x}+\theta\bar{\delta}) - F_\alpha^\nu(\bar{x})] \prod_{i=1}^{r} \delta_i^{\alpha_i}\Big| \le$$

$$\le \sup_{\bar{\delta},\,\bar{x}} \Big|F_\alpha^\nu(\bar{x}+\theta\bar{\delta}) - F_\alpha^\nu(\bar{x})\Big| \prod_{i=1}^{r} h_i^{\alpha_i} \le \omega(F_\alpha^\nu;\bar{h}) \left(\frac{\|\bar{x}\|}{n}\right)^{\alpha/2}.$$

Таким образом

$$\Big|L_n(\psi_\alpha(\bar{t});\bar{x})\Big| \le \mathrm{const}(r)\omega(F_\alpha^\nu;\bar{h})\|\bar{x}\|^{\alpha/2} n^{-\alpha/2},$$

откуда

$$\Big|R_\nu(f;\bar{x})\Big| \le \mathrm{const}(r,\nu) \sum_{\alpha=\nu}{}^{*} \omega(F_\alpha^\nu;\bar{h}) \|\bar{x}\|^{\nu/2} n^{-\nu/2}. \quad \square$$

§3. ПОРЯДОК ПРИБЛИЖЕНИЯ ОПЕРАТОРАМИ $L_n(f;\bar{x})$

ТЕОРЕМА 1. *Для непрерывной функции* $f:\mathbb{R}_r\to\mathbb{R}$

$$|L_n(f;\bar{x})-f(\bar{x})|\le(1+2^r+r2^{r+1})\omega(f;\bar{h}),$$

где $\bar{h}=\left(\sqrt{\dfrac{|x_1|}{n}},\dots,\sqrt{\dfrac{|x_r|}{n}}\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\bar{h}=\left(\sqrt{\frac{|x_1|}{n}},...,\sqrt{\frac{|x_r|}{n}}\right),$$

$$g(\bar{x})=\frac{1}{h_1\cdots h_r}\int\limits_0^{h_1}...\int\limits_0^{h_r}f(\bar{x}+\bar{t})\,dt_1...dt_r.$$

Очевидно, что

$$|L_n(f;\bar{x})-f(\bar{x})|\le|L_n(f;\bar{x})-L_n(g;\bar{x})|+|L_n(g;\bar{x})-g(\bar{x})|+|g(\bar{x})-f(\bar{x})|. \tag{T1-1}$$

Из леммы 2 имеем, во-первых,

$$|L_n(f;\bar{x})-L_n(g;\bar{x})|=|\sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\{f(\bar{k}_{n,m})-g(\bar{k}_{n,m})\}p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m)|\le$$

$$\le\sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}|f(\bar{k}_{n,m})-g(\bar{k}_{n,m})|p_{n,\bar{k}}(|\bar{x}|)\le$$

$$\le\omega(f;\bar{h})\sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}p_{n,\bar{k}}(|\bar{x}|)=\omega(f;\bar{h})\sum_{m=0}^{2^r-1}\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(n|x_i|)}{2\,\mathrm{ch}(nx_i)}\le\omega(f;\bar{h})2^r \tag{T1-2}$$

во-вторых,

$$|g(\bar{x}) - f(\bar{x})| \leq \omega(f; \bar{h}) \tag{T1-3.}$$

Покажем, что для второго слагаемого из (T1-1) имеет место оценка:

$$|L_n(g; \bar{x}) - g(\bar{x})| \leq r 2^{r+1} \omega(f; \bar{h}). \tag{T1-4}$$

Пусть $\bar{x}$ такое, что для $1 \leq i \leq r$ будет $x_i \geq 0$. Учитывая, что $L_n(1; \bar{x}) = 1$ и $\bar{x}_0 = \bar{x}$, можем записать:

$$\begin{aligned}
L_n(g; \bar{x}) - g(\bar{x}) &= \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \left\{ g(\bar{k}_{n,m}) - g(\bar{x}) \right\} p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m) = \\
&= \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \left\{ g(\bar{k}_{n,m}) - g(\bar{x}_m) \right\} p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m) + \\
&+ \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ g(\bar{x}_m) - g(\bar{x}) \right\} p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m) = \\
&= \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \left\{ g(\bar{k}_{n,m}) - g(\bar{x}_m) \right\} p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m) + \\
&+ \sum_{m=1}^{2^r-1} \left\{ g(\bar{x}_m) - g(\bar{x}) \right\} \prod_{i=1}^{r} \frac{\exp(n x_i (-1)^{m_i})}{2 \operatorname{ch}(n x_i)}.
\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}
|L_n(g; \bar{x}) - g(\bar{x})| \leq \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \left| g(\bar{k}_{n,m}) - g(\bar{x}_m) \right| p_{n,\bar{k}}(\bar{x}) + \\
+ \sum_{m=1}^{2^r-1} |g(\bar{x}_m) - g(\bar{x})| \prod_{i=1}^{r} \frac{\exp(n x_i (-1)^{m_i})}{2 \operatorname{ch}(n x_i)}.
\end{aligned} \tag{T1-5}$$

По формуле конечных приращений

$$g(\bar{t}) - g(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x_j} g(\bar{\xi})(t_j - x_j),$$

где $\xi = (x_1 + \theta(t_1 - x_1), ..., x_r + \theta(t_r - x_r))$, $\theta \in (0;1)$. Откуда, с учетом леммы 2, получаем

$$|g(\bar{k}_{n,m}) - g(\bar{x}_m)| \leq \sum_{j=1}^{r} \frac{\omega(f;\bar{h})}{h_j} \left| \frac{k_j}{n}(-1)^{m_j} - x_j(-1)^{m_j} \right| =$$

$$= \omega(f;\bar{h}) \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{h_j} \left| \frac{k_j}{n} - x_j \right|$$

и

$$|g(\bar{x}_m) - g(\bar{x})| \leq \sum_{j=1}^{r} \frac{\omega(f;\bar{h})}{h_j} |x_j(-1)^{m_j} - x_j| =$$

$$= \omega(f;\bar{h}) \sum_{j=1}^{r} \frac{x_j}{h_j} |(-1)^{m_j} - 1|.$$

Подставим полученные оценки в (T1-5):

$$|L_n(g;\bar{x}) - g(\bar{x})| \leq \omega(f;\bar{h}) \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} \frac{1}{h_j} l_n(|t_j - x_j|;x_j) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} \frac{\exp(nx_i)}{2\operatorname{ch}(nx_i)} +$$

$$+ \omega(f;\bar{h}) \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=1}^{2^r-1} \frac{x_j}{h_j} |(-1)^{m_j} - 1| \frac{\exp(nx_j(-1)^{m_j})}{2\operatorname{ch}(nx_j)} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}, \qquad \text{(T1-6)}$$

где l_n то же, что и в лемме 3.

В силу неравенства Коши-Буняковского леммы 3 и следствия 1 из нее

$$\frac{1}{h_j} l_n(|t_j - x_j|;x_j) \leq \sqrt{l_n((t_j - x_j)^2;x_j)} \sqrt{l_n(1;x_j)} =$$

$$= \frac{1}{h_j} \sqrt{\frac{x_j}{n} \frac{e^{nx_j}}{2\operatorname{ch}(nx_j)}} \sqrt{\frac{e^{nx_j}}{2\operatorname{ch}(nx_j)}} \leq 1. \qquad \text{(T1-7)}$$

Поскольку

$$|(-1)^{m_j} - 1| = \begin{cases} 0, & \text{если } m_j = 0; \\ 2, & \text{если } m_j = 1, \end{cases}$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=1}^{2^r-1}\frac{x_j}{h_j}|(-1)^{m_j}-1|\frac{\exp(nx_j(-1)^{m_j})}{2\operatorname{ch}(nx_j)}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}\leq$$

$$\leq\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=1}^{2^r-1}\frac{x_j}{h_j}\frac{\exp(-nx_j)}{\operatorname{ch}(nx_j)}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}.$$

Заметим, что $\dfrac{x_j\exp(-nx_j)}{\operatorname{ch}(nx_j)}\leq\sqrt{\dfrac{x_j}{n}}$. Действительно, из очевидной цепочки неравенств

$$2t<e^{2t}+1\implies\frac{2t}{e^{2t}+1}<1\implies\frac{2nxe^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}<1\implies\frac{nxe^{-nx}}{\operatorname{ch}(nx)}<1$$

следует, что если $nx\geq 1$, то

$$\frac{xe^{-nx}}{\operatorname{ch}(nx)}=\sqrt{\frac{x}{n}}\frac{\sqrt{nx}e^{-nx}}{\operatorname{ch}(nx)}\leq\sqrt{\frac{x}{n}}\frac{nxe^{-nx}}{\operatorname{ch}(nx)}<\sqrt{\frac{x}{n}},$$

а если $0<nx<1$, то

$$\frac{xe^{-nx}}{\operatorname{ch}(nx)}\leq\frac{1}{\sqrt{nx}}\frac{xe^{-nx}}{\operatorname{ch}(nx)}=\sqrt{\frac{x}{n}}\frac{e^{-nx}}{\operatorname{ch}(nx)}=\sqrt{\frac{x}{n}}\frac{2e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x}{n}}\frac{2}{e^{2nx}+1}\leq\sqrt{\frac{x}{n}}.$$

И мы получаем

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=1}^{2^r-1}\frac{x_j}{h_j}|(-1)^{m_j}-1|\prod_{i=1}^{r}\frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}\leq 2^r\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{h_j}\sqrt{\frac{x_j}{n}}=r2^r \tag{T1-8}$$

Подставим неравенства (T1-7) и (T1-8) в (T1-6):

$$|L_n(g;\bar{x})-g(\bar{x})|\leq\omega(f;\bar{h})r2^{r+1}$$

и для неотрицательных координат неравенство (T1-4) доказано.

Пусть теперь $x_i < 0$, а остальные координаты неотрицательны. Обозначим, как и в лемме 6,

$$\bar{x}(i) = (x_1, ..., x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, ..., x_r),$$
$$g_i(\bar{x}) = g(\bar{x}(i)),$$
$$f_i(\bar{x}) = f(\bar{x}(i)),$$

тогда с учетом леммы 6

$$|L_n(g;\bar{x})-g(\bar{x})| = |L_n(g_i;\bar{x}(i))-g_i(\bar{x}(i))| \le \text{(по доказанному)} \le \omega(f_i;\bar{h})r2^{r+1}.$$

А поскольку $\omega(f_i;\bar{h}) = \omega(f;\bar{h})$ неравенство (T1-4) так же выполнено. Применяя r раз такие же рассуждения, что и выше, получим, что оно выполнено для $\bar{x}$ с любым числом отрицательных координат.

Подставляя (T1-2), (T1-3) и (T1-4) в (T1-1), получим утверждение теоремы. $\square$

ТЕОРЕМА 2. *Если функция $f : \mathbb{R}_r \to \mathbb{R}$ дифференцируема, то*

$$|L_n(f;\bar{x}) - f(\bar{x})| \le \frac{2^{2r-1}}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{r} \omega\left(\frac{\partial f}{\partial x_j};\bar{h}\right)\left(\sqrt{3|x_j|}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \\ + \frac{2^{r-1}}{n}\sum_{j=1}^{r}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|$$

где $\bar{h} = \left(\sqrt{\dfrac{|x_1|}{n}}, \dots, \sqrt{\dfrac{|x_r|}{n}}\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{x}$ такое, что для $1 \le i \le r$ будет $x_i \ge 0$.

$$L_n(f;\bar{x}) - f(x) = \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\{f(\bar{k}_{n,m}) - f(\bar{x}_m)\}p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m) + \\ + \sum_{m=0}^{2^r-1}\{f(\bar{x}_m) - f(\bar{x})\}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m)$$

По формуле конечных приращений имеем

$$f(\bar{t}) - f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{\xi})\,(t_j - x_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{\xi}) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) \right\} (t_j - x_j) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})(t_j - x_j),$$

где $\bar{\xi} = (x_1 + \theta(t_1 - x_1), ..., x_r + \theta(t_r - x_r))$, $\theta \in (0,1)$.
Обозначим

$$A_1 = \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{\xi}_{\bar{k},m}) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_m) \right\} \cdot$$

$$\left(\frac{k_j}{n}(-1)^{m_j} - x_j(-1)^{m_j} \right) p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m),$$

$$A_2 = \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_m) \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \left(\frac{k_j}{n}(-1)^{m_j} - x_j(-1)^{m_j} \right) p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m),$$

$$A_3 = \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{\eta}_m)(x_j(-1)^{m_j} - x_j) \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m).$$

Тогда

$$L_n(f;\bar{x}) = A_1 + A_2 + A_3 \tag{T2-1}$$

Оценим A_1. С учетом леммы 1

$$|A_1| \leq \sum_{j=1}^{r} \omega\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}; \bar{h}\right) \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \left| \frac{k_j}{n} - x_j \right| \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{r} \left\{ \left(1 + \frac{1}{h_i^2} \left(\frac{k_i}{n} - x_i \right)^2 \right) \frac{(nx_i)^{k_i}}{2\,\mathrm{ch}(nx_i) k_i!} \right\} =$$

$$= 2^r \sum_{j=1}^{r} \omega\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}; \bar{h}\right) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} l_n\left(1 + \frac{1}{h_i^2}(t_i - x_i)^2; x_i\right) \cdot$$

$$\cdot\, l_n\left(\left[1 + \frac{1}{h_i^2}(t_i - x_i)^2\right] |t_j - x_j|; x_j \right).$$

Во-первых, с учетом леммы 3

$$l_n\left(1+\frac{1}{h_i^2}(t_i-x_i)^2;x_i\right)=\left(1+\frac{x_i}{h_i^2 n}\right)\frac{\exp(nx_i)}{2\operatorname{ch}(nx_i)}=\frac{\exp(nx_i)}{\operatorname{ch}(nx_i)}<2.$$

Во-вторых,

$$l_n\left(\left[1+\frac{1}{h_j^2}(t_j-x_j)^2\right]|t_j-x_j|;x_j\right)=$$
$$=l_n(|t_j-x_j|;x_j)+\frac{1}{h_j^2}l_n((t_j-x_j)^2|t_j-x_j|;x_j)\leq$$

применим неравенство Коши-Буняковского и следствия леммы 3

$$\leq\sqrt{l_n((t_j-x_j)^2;x_j)}\sqrt{l_n(1;x_j)}+$$
$$+\frac{1}{h_i^2}\sqrt{l_n((t_j-x_j)^4;x_j)}\sqrt{l_n((t_j-x_j)^2;x_j)}=$$
$$=\sqrt{\frac{x_j}{n}\frac{\exp(nx_j)}{2\operatorname{ch}(nx_j)}}+\sqrt{\frac{3x_j^2}{n^2}+\frac{x_j}{n^3}}\sqrt{\frac{x_j}{n}\frac{\exp(nx_j)}{2\operatorname{ch}(nx_j)}}\leq$$
$$\leq\left(\sqrt{\frac{x_j}{n}}+\sqrt{\frac{3x_j^2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{n}}3\sqrt{x_j}+\frac{1}{\sqrt{n}},$$

что следует из очевидной цепочки неравенств:

$$x+4\sqrt{\frac{x}{n}}\geq0\implies4x+4\sqrt{\frac{x}{n}}+\frac{1}{n}>3x+\frac{1}{n}\implies$$
$$(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{n}})^2>3x+\frac{1}{n}\implies2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{3x+\frac{1}{n}}\implies$$
$$3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{x}+\sqrt{3x+\frac{1}{n}}.$$

Поэтому

$$|A_1|\leq\frac{2^{2r-1}}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{r}\omega\left(\frac{\partial f}{\partial x_j};\bar{h}\right)\left(3\sqrt{x_j}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\tag{T2-2}$$

Подсчитаем A_2:

$$A_2 = \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_m)(-1)^{m_j} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \left(\frac{k_j}{n} - x_j \right) p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_m)(-1)^{m_j} l_n(t_j - x_j; x_j(-1)^{m_j}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} l_n(1; x_i),$$

откуда, с учетом линейности оператора l_n и леммы 3 получаем

$$A_2 = 0 \tag{T2-3}$$

Оценим A_3:

$$A_3 = \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{\eta}_m)((-1)^{m_j} - 1) \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{\eta}_m)((-1)^{m_j} - 1) \prod_{i=1}^{r} \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2 \operatorname{ch}(nx_i)} \implies$$

$$|A_3| \leq \sum_{j=1}^{r} x_j \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\| \sum_{m=0}^{2^r-1} (1 - (-1)^{m_j}) \prod_{i=1}^{r} \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2 \operatorname{ch}(nx_i)} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r} x_j \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\| \sum_{m=0}^{2^r-1} (1 - (-1)^{m_j}) \frac{\exp(nx_j(-1)^{m_j})}{2 \operatorname{ch}(nx_j)} =$$

$$= 2^{r-1} \sum_{j=1}^{r} x_j \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\| \frac{\exp(-nx_j)}{\operatorname{ch}(nx_j)}.$$

Рассмотрим функцию $y(t) = 2t - e^{2t} - 1$. Поскольку $y' = 2 - 2e^{2t}$, функция $y(t)$ имеет максимум при $t = 0$, откуда

$$y(t) \leq y(0) = -2 < 0 \implies 2t - e^{2t} - 1 < 0 \implies 2t < e^{2t} + 1 \implies$$

$$\frac{2t}{e^{2t} + 1} < 1 \implies \frac{2nx}{e^{2nx} + 1} < 1 \implies \frac{2nxe^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}} < 1 \implies$$

$$\frac{xe^{-nx}}{\operatorname{ch}(nx)} < \frac{1}{n}$$

Поэтому

$$|A_3| < \frac{2^{r-1}}{n} \sum_{j=1}^{r} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\| \qquad \text{(T2-4)}$$

Подставляя в (T2-1) неравенства (T2-2), (T2-3) и (T2-4), получим

$$|L_n(f;\bar{x}) - f(\bar{x})| \leq \frac{2^{2r-1}}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{r} \omega\left(\frac{\partial f}{\partial x_j};\bar{h}\right)\left(\sqrt{3x_j} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \\ + \frac{2^{r-1}}{n} \sum_{j=1}^{r} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|$$

и для неотрицательных координат утверждение леммы доказано.
Проводя такие же рассуждения, как и при завершении доказательства теоремы 1, приходим к выводу, что утверждение теоремы 2 выполнено для любого $\bar{x}$. $\square$

ТЕОРЕМА 3. 1^o. *Для дважды дифференцируемой* $f : \mathbb{R}_r \to \mathbb{R}$

$$|L_n(f;\bar{x}) - f(\bar{x})| \leq \frac{c(r)}{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=j}^{r} \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l};\bar{h}\right)\left(|x_j| + |x_l| + \frac{1}{n}\right) + \\ + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right\| |x_j|,$$

где $\bar{h} = \left(\sqrt{\frac{|x_1|}{n}}, \ldots, \sqrt{\frac{|x_r|}{n}}\right)$,

$c(r)$ *константа, зависящая только от* r.

2^o. *Если все вторые производные* f *равномерно-непрерывны, то*

$$\lim_{n\to\infty} \left|L_n(f;\bar{x}) - f(\bar{x}) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x})\, x_j \operatorname{th}(n x_j)\right| = 0$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{x}$ такое, что для $1 \leq i \leq r$ $x_i \geq 0$.

$$L_n(f;\bar{x}) - f(x) = \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \{f(\bar{k}_{n,m}) - f(\bar{x}_m)\} p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m) - \\ - \sum_{m=0}^{2^r-1} \{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_m)\} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m).$$

По формуле Тейлора

$$f(\bar t) - f(\bar x) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar x)\,(t_j - x_j) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar x)\,(t_j - x_j)^2 +$$

$$+\, 2\sum_{j=1}^{r} \sum_{l=j+1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}(\bar x)(t_j - x_j)(t_l - x_l) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar\xi) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar x) \right\} (t_j - x_j)^2 +$$

$$+\, 2\sum_{j=1}^{r} \sum_{l=j+1}^{r} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}(\bar\xi) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}(\bar x) \right\} (t_j - x_j)(t_l - x_l),$$

где $\bar\xi = (x_1 + \theta(t_1 - x_1), ..., x_r + \theta(t_r - x_r))$, $\theta \in (0, 1)$. Обозначим

$$A_1 = \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar x_m) \left(\frac{k_j}{n}(-1)^{m_j} - x_j(-1)^{m_j} \right) p_{n,\bar k}(\bar x_m) -$$

$$- \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar x_m)\,(x_j - x_j(-1)^{m_j})\, p_{n,\bar k}(\bar x_m);$$

$$A_2 = \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar x_m) \left(\frac{k_j}{n}(-1)^{m_j} - x_j(-1)^{m_j} \right)^2 p_{n,\bar k}(\bar x_m) -$$

$$- \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar x_m)\,(x_j - x_j(-1)^{m_j})^2\, p_{n,\bar k}(\bar x_m);$$

$$A_3 = \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=j+1}^{r} 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}(\bar x_m) \left(\frac{k_j}{n}(-1)^{m_j} - x_j(-1)^{m_j} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{k_l}{n}(-1)^{m_l} - x_l(-1)^{m_l} \right) p_{n,\bar k}(\bar x_m) -$$

$$- \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=j+1}^{r} 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}(\bar x_m)\,(x_j - x_j(-1)^{m_j})\,(x_l - x_l(-1)^{m_l}) \cdot$$

$$\cdot\, p_{n,\bar k}(\bar x_m);$$

$$A_4 = \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{\xi}_{\bar{k},n,m}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x}_m) \right\} \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{k_j}{n}(-1)^{m_j} - x_j(-1)^{m_j} \right)^2 p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m);$$

$$A_5 = \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=j+1}^{r} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}(\bar{\xi}_{\bar{k},n,m}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}(\bar{x}_m) \right\} \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{k_j}{n}(-1)^{m_j} - x_j(-1)^{m_j} \right) \left(\frac{k_l}{n}(-1)^{m_l} - x_l(-1)^{m_l} \right) p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m);$$

$$A_6 = \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{\eta}_m) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x}_m) \right\} (x_j - x_j(-1)^{m_j})^2 p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m);$$

$$A_7 = \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=j+1}^{r} 2 \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}(\bar{\eta}_m) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}(\bar{x}_m) \right\} \cdot$$
$$\cdot (x_j - x_j(-1)^{m_j}) (x_l - x_l(-1)^{m_l}) p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m).$$

Тогда

$$L_n(f;\bar{x}) - f(\bar{x}) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 \qquad \text{(T3-1)}$$

Подсчитаем A_1:

$$A_1 = \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_m) \sum_{k_j=0}^{\infty} \left\{ \frac{k_j}{n}(-1)^{m_j} - x_j \right\} \frac{(nx_j(-1)^{m_j})^{k_j}}{2\operatorname{ch}(nx_j)k_j!} \cdot$$
$$\cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_m) \Big\{ (-1)^{m_j} l_n(t; x_j(-1)^{m_j}) - x_j l_n(1; x_j(-1)^{m_j}) \Big\} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_m) \left\{ (-1)^{m_j} \frac{x_j(-1)^{m_j} \exp(nx_j(-1)^{m_j})}{2\operatorname{ch}(nx_j)} - \right.$$

$$\left. - x_j \frac{\exp(nx_j(-1)^{m_j})}{2\operatorname{ch}(nx_j)} \right\} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}$$

Таким образом

$$A_1 = 0. \tag{T3-2}$$

Подсчитаем A_2:

$$A_2 = \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x}_m) \sum_{k_j=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{k_j}{n} \right)^2 - 2x_j \frac{k_j}{n} + 2x_j^2(-1)^{m_j} - x_j^2 \right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{(nx_j(-1)^{m_j})^{k_j}}{2\operatorname{ch}(nx_j) k_j!} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x}_m) \Big\{ l_n(t^2; x_j(-1)^{m_j}) - 2x_j l_n(t; x_j(-1)^{m_j}) +$$

$$+ (2x_j^2(-1)^{m_j} - x_j^2) l_n(1; x_j(-1)^{m_j}) \Big\} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x}_m) \left\{ \left(x_j^2 + \frac{x_j(-1)^{m_j}}{n} \right) - 2x_j^2(-1)^{m_j} + \right.$$

$$\left. + \left(2x_j^2(-1)^{m_j} - x_j^2 \right) \right\} \prod_{i=1}^{r} \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x}_m) \frac{x_j(-1)^{m_j}}{n} \prod_{i=1}^{r} \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x}_m) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x}) \right\} x_j (-1)^{m_j} \prod_{i=1}^{r} \frac{\exp(n x_i (-1)^{m_i})}{2 \operatorname{ch}(n x_i)} +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x}) x_j \sum_{m=0}^{2^r-1} (-1)^{m_j} \prod_{i=1}^{r} \frac{\exp(n x_i (-1)^{m_i})}{2 \operatorname{ch}(n x_i)}.$$

Обозначим

$$A_8 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{2^r-1} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x}_m) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x}) \right\} x_j (-1)^{m_j} \prod_{i=1}^{r} \frac{\exp(n x_i (-1)^{m_i})}{2 \operatorname{ch}(n x_i)}.$$

Тогда с учетом леммы 4

$$A_2 = A_8 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x})\, x_j \operatorname{th}(n x_j) \tag{T3-3}$$

Подсчитаем A_3. Так как

$$\sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{k_j}{n}(-1)^{m_j} - x_j(-1)^{m_j} \right) \left(\frac{k_l}{n}(-1)^{m_l} - x_l(-1)^{m_l} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(x_j - x_j(-1)^{m_j}\right) \left(x_l - x_l(-1)^{m_l}\right) \right\} \prod_{i=1}^{r} \frac{(n x_i (-1)^{m_i})^{k_i}}{2 \operatorname{ch}(n x_i) k_i!} =$$

$$= (-1)^{m_j+m_l} \sum_{k_j=0}^{\infty} \sum_{k_l=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{k_j}{n} - x_j \right) \left(\frac{k_l}{n} - x_l \right) - \right.$$

$$\left. - x_j x_l \left((-1)^{m_j} - 1\right) \left((-1)^{m_l} - 1\right) \right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{(n x_j (-1)^{m_j})^{k_j}}{2 \operatorname{ch}(n x_j) k_j!} \frac{(n x_l (-1)^{m_l})^{k_l}}{2 \operatorname{ch}(n x_l) k_l!} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j,\ i \neq l}}^{r} \frac{\exp(n x_i (-1)^{m_i})}{2 \operatorname{ch}(n x_i)} =$$

$$= (-1)^{m_j+m_l} \sum_{k_j=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{k_j}{n} - x_j \right) \left(l_n(t; x_l(-1)^{m_l}) - x_l l_n(1; x_l(-1)^{m_l}) \right) - \right.$$

$$\left. - x_j x_l \left((-1)^{m_j} - 1\right) \left((-1)^{m_l} - 1\right) l_n(1; x_l(-1)^{m_l}) \right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{(n x_j (-1)^{m_j})^{k_j}}{2 \operatorname{ch}(n x_j) k_j!} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j,\ i \neq l}}^{r} \frac{\exp(n x_i (-1)^{m_i})}{2 \operatorname{ch}(n x_i)} =$$

$$= (-1)^{m_j+m_l} \sum_{k_j=0}^{\infty} \left\{ \frac{k_j}{n} x_l (-1)^{m_l} - x_j x_l (-1)^{m_l} - \frac{k_j}{n} x_l + x_j x_l - \right.$$

$$\left. - x_j x_l \left((-1)^{m_j} - 1\right)\left((-1)^{m_l} - 1\right) \right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{(n x_j (-1)^{m_j})^{k_j}}{2 \operatorname{ch}(n x_j) k_j!} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} \frac{\exp(n x_i (-1)^{m_i})}{2 \operatorname{ch}(n x_i)} =$$

$$= (-1)^{m_j+m_l} \left\{ \left[x_l (-1)^{m_l} - x_l \right] l_n(t; x_j (-1)^{m_j}) - \right.$$

$$\left. - x_j x_l \left[(-1)^{m_l} - 1 + ((-1)^{m_j} - 1)((-1)^{m_l} - 1) \right] l_n(1; x_j (-1)^{m_j}) \right\} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} \frac{\exp(n x_i (-1)^{m_i})}{2 \operatorname{ch}(n x_i)} =$$

$$= (-1)^{m_j+m_l} \left\{ \left[x_l (-1)^{m_l} - x_l \right] x_j (-1)^{m_j} - \right.$$

$$\left. - x_j x_l \left[(-1)^{m_l} - 1 + (-1)^{m_j+m_l} - (-1)^{m_l} - (-1)^{m_j} + 1 \right] \right\} \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{\exp(n x_i (-1)^{m_i})}{2 \operatorname{ch}(n x_i)},$$

получаем, что

$$A_3 = 0. \tag{Т3-4}$$

Из соотношений (Т3-1), (Т3-2), (Т3-3) и (Т3-4) следует равенство

$$L_n(f; \bar{x}) - f(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x}) x_j \operatorname{th}(n x_j) + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 \tag{Т3-5}$$

Оценим $|A_4|$:

$$|A_4| \le \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{r}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{\xi}_{\bar{k},n,m}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x}_m)\right|\left(\frac{k_j}{n}-x_j\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{r}\frac{(nx_i)^{k_i}}{2\operatorname{ch}(nx_i)k_i!} \le \text{(применим лемму 1)}$$

$$\le \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{r}\omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2};\bar{h}\right)\left\{\prod_{i=1}^{r}\left(1+\frac{1}{h_i^2}\left(\frac{k_i}{n}-x_i\right)^2\right)\right\}\left(\frac{k_j}{n}-x_j\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{r}\frac{(nx_i)^{k_i}}{2\operatorname{ch}(nx_i)k_i!} =$$

$$= 2^r\sum_{j=1}^{r}\omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2};\bar{h}\right)\left\{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} l_n\Big(1+\frac{1}{h_i^2}(t_i-x_i^2;x_i\Big)\right\}\cdot$$

$$\cdot\, l_n\Big((t_j-x_j)^2+\frac{1}{h_j^2}(t_j-x_j)^4;x_j\Big).$$

Во-первых, с учетом леммы 3

$$l_n\left(1+\frac{1}{h_i^2}(t_i-x_i)^2;x_i\right) = l_n(1;x_i)+\frac{1}{h_i^2}l_n((t_i-x_i)^2;x_i) =$$

$$= \left(1+\frac{x_i}{h_i^2 n}\right)\frac{\exp(nx_i)}{2\operatorname{ch}(nx_i)} < 2.$$

Во-вторых,

$$l_n\Big((t_j-x_j)^2+\frac{1}{h_j^2}(t_j-x_j)^4;x_j\Big) =$$

$$= l_n\Big((t_j-x_j)^2;x_j\Big)+\frac{1}{h_j^2}l_n\Big((t_j-x_j)^4;x_j\Big) =$$

$$= \left\{\frac{x_j}{n}+\frac{1}{h_j^2}\left[\frac{3x_j^2}{n^2}+\frac{x_j}{n^3}\right]\right\}\frac{\exp(nx_j)}{2\operatorname{ch}(nx_j)} = \left\{\frac{4x_j}{n}+\frac{1}{n^2}\right\}\frac{\exp(nx_j)}{2\operatorname{ch}(nx_j)} \le$$

$$\le \frac{4x_j}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

Поэтому

$$|A_4| \le \frac{2^{2r-1}}{n} \sum_{j=1}^{r} \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}; \bar{h}\right) \left\{4x_j + \frac{1}{n}\right\} \tag{T3-6}$$

Оценим $|A_5|$:

$$|A_5| \le 2\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=j+1}^{r} \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}; \bar{h}\right) \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{2^r-1} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{1}{h_i^2}\left(\frac{k_i}{n} - x_i\right)^2\right)\right\} \left|\frac{k_j}{n} - x_j\right| \left|\frac{k_l}{n} - x_l\right| \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{(nx_i)^{k_i}}{2\operatorname{ch}(nx_i)k_i!} =$$

$$= 2^{r+1} \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=j+1}^{r} \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}; \bar{h}\right) \left\{ \prod_{\substack{i=1\\ i\ne j, i\ne l}}^{r} l_n\Big(1 + \frac{1}{h_i^2}(t_i - x_i)^2; x_i\Big)\right\} \cdot$$

$$\cdot\, l_n\left(\left[1 + \frac{1}{h_j^2}(t_j - x_j)\right]|t_j - x_j|; x_j\right) l_n\left(\left[1 + \frac{1}{h_l^2}(t_l - x_l)\right]|t_l - x_l|; x_l\right)$$

Во-первых, как было получено при оценке A_4

$$l_n\Big(1 + \frac{1}{h_i^2}(t_i - x_i)^2; x_i\Big) \le 2$$

Во-вторых, как было показано при доказательстве теоремы 2

$$l_n\left(\left[1 + \frac{1}{h_j^2}(t_j - x_j)^2\right]|t_j - x_j|; x_j\right) \le \frac{1}{\sqrt{n}}\Big\{3\sqrt{x_j} + \frac{1}{\sqrt{n}}\Big\}.$$

Поэтому

$$|A_5| \le \frac{2^{2r-1}}{n} \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=j+1}^{r} \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}; \bar{h}\right) \Big\{3\sqrt{x_j} + \frac{1}{\sqrt{n}}\Big\}\Big\{3\sqrt{x_l} + \frac{1}{\sqrt{n}}\Big\}. \tag{T3-7}$$

Оценим A_6, A_7, A_8. Применяя леммы 1 и 4, получим

$$|A_6| \le \sum_{j=1}^{r} x_j^2 \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}; \bar{h}\right) \sum_{m=0}^{2^r-1} (1-(-1)^{m_j})^2 \cdot$$
$$\cdot \prod_{i=1}^{r} \left(1+\frac{x_i^2}{h_i^2}(1-(-1)^{m_i})^2\right) \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)};$$

$$|A_7| \le 2\sum_{j=1}^{r} \sum_{l=j+1}^{r} x_j x_l \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}; \bar{h}\right) \sum_{m=0}^{2^r-1} (1-(-1)^{m_j})(1-(-1)^{m_l}) \cdot$$
$$\cdot \prod_{i=1}^{r} \left(1+\frac{x_i^2}{h_i^2}(1-(-1)^{m_i})^2\right) \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)};$$

$$|A_8| \le \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} x_j \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}; \bar{h}\right) \cdot$$
$$\cdot \sum_{m=0}^{2^r-1} \prod_{i=1}^{r} \left(1+\frac{x_i^2}{h_i^2}(1-(-1)^{m_i})^2\right) \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)}.$$

Если $m_i = 0$, то

$$\left(1+\frac{x_i^2}{h_i^2}(1-(-1)^{m_i})^2\right) \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} = \frac{\exp(nx_i)}{2\operatorname{ch}(nx_i)} \le 1.$$

Если $m_i = 1$, то,

$$\left(1+\frac{x_i^2}{h_i^2}(1-(-1)^{m_i})^2\right) \frac{\exp(nx_i(-1)^{m_i})}{2\operatorname{ch}(nx_i)} = (1+4nx_i)\frac{\exp(-nx_i)}{2\operatorname{ch}(nx_i)}.$$

Рассмотрим функцию $y(t) = 4t - e^{2t}$. Очевидно, что $t = \ln\sqrt{2}$ – точка максимума функции $y(t)$, поэтому

$$y(t) \le y(\ln\sqrt{2}) = 2\ln 2 - 2 < 0 \implies 4t - e^{2t} < 0 \implies$$
$$4t < e^{2t} \implies 1+4t < 1+e^{2t} \implies$$
$$\frac{1+4t}{1+e^{2t}} < 1 \implies \frac{1+4nx}{1+e^{2nx}} < 1 \implies \frac{(1+4nx)\exp(-nx)}{2\operatorname{ch}(nx)} < 1$$

Поэтому

$$|A_6| \le \sum_{j=1}^{r} x_j^2 \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2};\bar h\right) \sum_{m=0}^{2^r-1} (1-(-1)^{m_j})^2 \left(1+\frac{x_j^2}{h_j^2}(1-(-1)^{m_j})^2\right)\cdot$$

$$\cdot \frac{\exp(nx_j(-1)^{m_j})}{2\operatorname{ch}(nx_j)} =$$

(так как половина слагаемых обращается в ноль)

$$= 2^{r+1} \sum_{j=1}^{r} x_j^2 \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2};\bar h\right)(1+4nx_j)\frac{\exp(nx_j(-1)^{m_j})}{2\operatorname{ch}(nx_j)};$$

$$|A_7| \le 2\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=j+1}^{r} x_j x_l \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l};\bar h\right)\sum_{m=0}^{2^r-1}(1-(-1)^{m_j})(1-(-1)^{m_l})\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{x_j^2}{h_j^2}(1-(-1)^{m_j})^2\right)\left(1+\frac{x_l^2}{h_l^2}(1-(-1)^{m_l})^2\right)\cdot$$

$$\cdot \frac{\exp(nx_j(-1)^{m_j})}{2\operatorname{ch}(nx_j)}\frac{\exp(nx_l(-1)^{m_l})}{2\operatorname{ch}(nx_l)} =$$

(так как 3/4 слагаемых обращается в ноль)

$$= 2^{r+1}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=j+1}^{r} x_j x_l \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l};\bar h\right)(1+4nx_j)(1+4nx_l)\cdot$$

$$\cdot \frac{\exp(nx_j(-1)^{m_j})}{2\operatorname{ch}(nx_j)}\frac{\exp(nx_l(-1)^{m_l})}{2\operatorname{ch}(nx_l)};$$

и

$$|A_8| \le \frac{2^r}{n}\sum_{j=1}^{r} x_j \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2};\bar h\right). \tag{Т3-8}$$

Для завершения оценки $|A_6|$ и $|A_7|$ рассмотрим вспомогательную функцию $y(t) = t + 2t^2 - e^t$. Уравнение $y'(t) = 0$ имеет два корня $t = 0$ и $t = t_0 > 0$, причем при $t \in (0, t_0)$ будет $1 + 4t > e^t$, а при $t \in (t_0, \infty)$ будет $1 + 4t < e^t$, то есть t_0 – точка максимума функции $y(t)$.

Отметим, что

$$y'(2,2) = 9,8 - e^{2,2} > 9,8 - 2,8^{2,2} \approx 9,8 - 9,63 > 0$$
$$y'(2,5) = 11 - e^{2,5} < 11 - 2,7^{2,5} \approx 11 - 11,98 < 0,$$

следовательно, $2,2 < t_0 < 2,5$. Таким образом, для $t \geq 0$

$$y(t) \leq y(t_0) = t_0 + 2t_0^2 - e^{t_0} < 2,5 + 2 \cdot 2,5^2 - 2,7^{2,2} \approx 15 - 8,89 < 8$$
$$\Longrightarrow\ t + 2t^2 - e^t < 8 \Longrightarrow \frac{t+2t^2}{8+e^t} < 1 \Longrightarrow \frac{1+2t}{8+e^t} < \frac{1}{t} \Longrightarrow$$
$$\frac{1+4nx}{8+e^{2nx}} < \frac{1}{2nx} \Longrightarrow$$
$$\frac{1+4nx}{1+e^{2nx}} = \frac{8(1+4nx)}{8(1+e^{2nx})} < \frac{8(1+4nx)}{8+e^{2nx}} < \frac{8}{2nx} = \frac{4}{nx}.$$

Подставляя полученную оценку, получаем:

$$|A_6| \leq \frac{2^{r+3}}{n} \sum_{j=1}^{r} x_j \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}; \bar{h}\right),$$
$$|A_7| \leq \frac{2^{r+5}{}^{2}}{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=j+1}^{r} \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}; \bar{h}\right) \tag{T3-9}$$

Применяя к соотношению (T3-5) неравенства (T3-6), (T3-7), (T3-8) и (T3-9), получаем с одной стороны

$$|L_n(f;\bar{x}) - f(\bar{x})| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x})\, x_j \operatorname{th}(nx_j) +$$
$$+ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}; \bar{h}\right) \left\{2^{2r+1} x_j + \frac{2^{2r-1}}{n} + 2^{r+3} x_j + 2^r x_j\right\} +$$
$$+ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=j+1}^{r} \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}; \bar{h}\right) \cdot$$
$$\cdot \left\{2^{2r-1}\left(3\sqrt{x_j} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(3\sqrt{x_l} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{2^{r+5}}{n}\right\} \leq$$
$$\leq \frac{c(r)}{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=j}^{r} \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}; \bar{h}\right)\left(|x_j| + |x_l| + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right\| |x_j|,$$

С другой стороны,

$$|L_n(f;\bar{x}) - f(\bar{x}) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\bar{x})\, x_j \operatorname{th}(nx_j)| \le$$
$$\le \frac{c(r)}{n}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=j}^{r}\omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}; \bar{h}\right)\left(|x_j| + |x_l| + \frac{1}{n}\right) \to 0$$

при $n \to \infty$ и функции с равномерно-непрерывными вторыми производными.

Таким образом для положительных координат теорема доказана. Проводя такие же рассуждения, как и при завершении доказательства теоремы 2, приходим к выводу, что утверждение теоремы 3 выполнено для любого $\bar{x}$. $\square$

Замечание. С одной стороны, из теоремы 3 следует, что порядок приближения операторами L_n функций, у которых все вторые производные равномерно непрерывны, есть $\frac{1}{n}$. С другой стороны, указанный порядок приближения не улучшается для трижды дифференцируемых функций. В этом смысле, теорема 3 является аналогом хорошо известной теоремы Вороновской (см., например, [6]). Аналогичные теоремы справедливы для операторов Саса-Миракьяна.

§4. ОПЕРАТОРЫ $\mathcal{L}_{n,\nu}(f;\bar{x})$

Для ν раз дифференцируемых функций рассмотрим операторы

$$\mathcal{L}_{n,0}(f;\bar{x}) = \mathcal{L}_{n,1}(f;\bar{x}) = L_n(f;\bar{x});$$

для $\nu \geq 2$

$$\mathcal{L}_{n,\nu}(f;\bar{x}) = L_n(f;\bar{x}) - \sum_{k=2}^{\nu} \sum_{\alpha=k}{}^{*} \frac{1}{\alpha_1!...\alpha_r!} S_n^{\alpha}(\bar{x}) \cdot \mathcal{L}_{n,\nu-k}(F_{\alpha}^{k};\bar{x}),$$

где $S_n^{\alpha}(\bar{x}) = L_n(\prod_{i=1}^{r}(t_i - x_i)^{\alpha_i};\bar{x})$,

$\sum\limits_{\alpha=k}{}^{*}$ берется по всем наборам целых неотрицательных чисел α_i, $i = \overline{1,r}$, таких, что $\alpha_1 + ... + \alpha_r = k$,

$$F_{\alpha}^{k} = \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_r^{\alpha_r}}.$$

Если взять $r = 1$ (функцию одного переменного), а вместо операторов L_n – операторы Бернштейна, то получим конструкцию, которая при $\nu = 3$ была указана самим С.Н. Бернштейном, а для любого ν построена и изучена В.С. Виденским ([5]).

ТЕОРЕМА 4. *Если функция $f : \mathbb{R}_r \to \mathbb{R}$ ν раз дифференцируема, то*

$$|\mathcal{L}_{n,\nu}(f;\bar{x}) - f(\bar{x})| \leq \mathrm{const}(\nu,r)(1 + \|x\|^{\nu-1})n^{-\nu/2} \sum_{\alpha=\nu}{}^{*} \omega(F_{\alpha}^{\nu};\bar{h})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f : \mathbb{R}_r \to \mathbb{R}$ – ν раз дифференцируемая функция. По формуле Тейлора

$$f(\bar{t}) = f(\bar{x}) + \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{\alpha=k}{}^{*} \frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_r!} F_{\alpha}^{k}(\bar{x}) \prod_{i=1}^{r}(t_i - x_i)^{\alpha_i} +$$
$$+ \sum_{\alpha=\nu}{}^{*} \frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_r!} \left[F_{\alpha}^{k}(\bar{\xi}) - F_{\alpha}^{k}(\bar{x})\right] \prod_{i=1}^{r}(t_i - x_i)^{\alpha_i},$$

где $\bar{\xi} = \bar{x} + \theta(\bar{t} - \bar{x})$, $\theta \in [0; 1]$. Откуда имеем

$$L_n(f(\bar{t}); \bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{\alpha=k}^{*} \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_r!} F_\alpha^k(\bar{x}) S_n^\alpha(\bar{x}) + R_\nu(f; \bar{x}),$$

где $R_\nu(f; \bar{x})$ – то же, что и в лемме 8.

Если $k = 1$, то α_i все, кроме одного равны нулю, а одно из них $\alpha_{i_0} = 1$.

Поэтому для $k = 1$

$$S_n^\alpha(\bar{x}) = L_n(t_{i_0}; \bar{x}) - x_{i_0} L_n(1; \bar{x}) = 0.$$

Следовательно,

$$L_n(f(\bar{t}); \bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{k=2}^{\nu} \sum_{\alpha=k}^{*} \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_r!} F_\alpha^k(\bar{x}) S_n^\alpha(\bar{x}) + R_\nu(f; \bar{x}).$$

Подставляя полученное представление L_n в выражение для $\mathcal{L}_{n,\nu}$, получим

$$\mathcal{L}_{n,\nu}(f(\bar{t}); \bar{x}) = f(\bar{x}) +$$
$$+ \sum_{k=2}^{\nu} \sum_{\alpha=k}^{*} \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_r!} \Big[F_\alpha^k(\bar{x}) - \mathcal{L}_{n,\nu-k}(F_\alpha^k; \bar{x}) \Big] S_n^\alpha(\bar{x}) + R_\nu(f; \bar{x}),$$

откуда

$$\Big| \mathcal{L}_{n,\nu}(f(\bar{t}); \bar{x}) - f(\bar{x}) \Big| \le$$
$$\le \sum_{k=2}^{\nu} \sum_{\alpha=k}^{*} \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_r!} \Big| F_\alpha^k(\bar{x}) - \mathcal{L}_{n,\nu-k}(F_\alpha^k; \bar{x}) \Big| \Big| S_n^\alpha(\bar{x}) \Big| + \Big| R_\nu(f; \bar{x}) \Big| \qquad \text{(T3-1)}$$

Для $\nu = 2$ неравенство (T3-1) примет вид

$$\Big| \mathcal{L}_{n,2}(f(\bar{t}); \bar{x}) - f(\bar{x}) \Big| \le$$
$$\le \sum_{\alpha=2}^{*} \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_r!} \Big| F_\alpha^2(\bar{x}) - L_n(F_\alpha^2; \bar{x}) \Big| \Big| S_n^\alpha(\bar{x}) \Big| + \Big| R_2(f; \bar{x}) \Big| \boxed{\le}$$

применим леммы 7, 8 и теорему 1:

$$\boxed{\leq} \sum_{\alpha=2}^{*} \frac{\mathrm{const}(\alpha, r)}{\alpha_1! \ldots \alpha_r!} \, \frac{1 + \|\bar{x}\|}{n} \omega(F_\alpha^2; \bar{h}) + \mathrm{const}(r) \sum_{\alpha=2}^{*} \frac{\|\bar{x}\|}{n} \omega(F_\alpha^2; \bar{h}) \leq$$

$$\leq \mathrm{const}(r) \frac{1 + \|\bar{x}\|}{n} \sum_{\alpha=2}^{*} \omega(F_\alpha^2; \bar{h})$$

и для $\nu = 2$ утверждение теоремы выполнено. Пусть оно выполнено до некоторого $\nu - 1$ включительно. Тогда, применяя к (Т3-1) леммы 7, 8 и предположение индукции, получим

$$\left| \mathcal{L}_{n,\nu}(f(\bar{t}); \bar{x}) - f(\bar{x}) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\nu} \sum_{\alpha=k}^{*} \frac{\mathrm{const}(\alpha, r)}{\alpha_1! \ldots \alpha_r!} (1 + \|\bar{x}\|^{\nu-k-1}) n^{-\frac{\nu-k}{2}} (1 + \|\bar{x}\|^{k-1}) n^{-\left[\frac{k+1}{2}\right]} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\beta=\nu-k}^{*} \omega\Big((F_\alpha^k)_\beta^{\nu-k}; \bar{h} \Big) +$$

$$+ \mathrm{const}(r, \nu) \sum_{\alpha=\nu}^{*} \omega(F_\alpha^\nu; \bar{h}) \|x\|^{\nu/2} n^{-\nu/2} \leq$$

$$\leq \mathrm{const}(r, \nu) \sum_{\alpha=\nu}^{*} \omega(F_\alpha^\nu; \bar{h}) (1 + \|x\|^{\nu-1}) n^{-\nu/2}. \quad \square$$

§5. ОБОБЩЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ $L_n(f;\bar{x})$

Применяя идеи и методы, изложенные в §1-3, построим класс операторов для приближения функций многих переменных с определенным весовым ограничением на рост в бесконечности.

Обозначим $\mathcal{m}$ – класс линейных положительных операторов вида

$$l_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\tfrac{k}{n}\right)\frac{u_{n,k}(x)}{v_n(x)}x^k,\ x\in[0;\infty),$$

где $u_{n,k}(x)$ и $v_n(x)$ – дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям:

(1) $u_{n,k}(x)\ge 0$ и $v_n(x)>0$ для $x\ge 0$, $v_n(0)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty} v_n(x)=\infty$;

(2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_{n,k}(x)x^k=v_n(x)$;

(3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_{n,k}(x)(-x)^k=\dfrac{v_n(x)}{v_n(2x)}$;

(4) для $q_{n,k}(x)=\dfrac{u_{n,k}(x)}{v_n(x)}x^k$ выполняется соотношение:

$$q'_{n,k}(x)=\frac{k-nx}{w(x)}q_{n,k}(x),$$

где $w(x)$ – дважды дифференцируемая функция, не имеющая нулей на $(0;\infty)$.

Этим условиям удовлетворяют, например,

операторы Саса-Миракьяна: $M_n(f;x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}$, операторы Баскакова: $\text{Б}_n(f;x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$,

операторы Каталана: $K_n(f;x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{2k+n}{k}\frac{nx^k(1+x)^{n+k}}{(2k+n)(1+2x)^{n+2k}}$

и другие.

Пусть, как и раньше:

для $m\in N_0$ имеем представление в двоичном формате:

$m=m_1+m_2\cdot 2+m_3\cdot 2^2+...+m_r\cdot 2^{r-1}$, где $m_k\in\{0;1\}$;

$\overline{x}=(x_1,...,x_r)$;

$|\overline{x}|=(|x_1|,...,|x_r|)$;

$\overline{k}_{n,m}=\left(\frac{k_1}{n}(-1)^{m_1},\frac{k_2}{n}(-1)^{m_2},....,\frac{k_r}{n}(-1)^{m_r}\right)$, где $k_j\in N_0$, $n\in N$;

$\left(\overline{m}\overline{k}\right)=m_1k_1+.....+m_rk_r$.

Для $f:R_r\to R$, $\overline{x}\in R_r$ по классу m построим класс m^* операторов

$$L_n(f;\overline{x})=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{(\overline{m}\overline{k})}f(\overline{k}_{n,m})\cdot p_{n,\overline{k}}(\overline{x}_m),$$

где $p_{n,\overline{k}}(\overline{x})=\prod\limits_{i=1}^{r}\frac{u_{n,k_i}(|x_i|)}{z_n(x_i)}x_i^{k_i}$; $z_n(x)=v_n(|x|)+\frac{v_n(|x|)}{v_n(2|x|)}$.

Пусть $Q(\overline{x})$ – положительная, непрерывная, убывающая по каждой переменной функция, определенная на $[0;\infty)^r$, такая, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1}\frac{1}{Q(\overline{k}_{n,m})}\cdot|p_{n,\overline{k}}(\overline{x}_m)|\le\frac{c}{Q(\overline{x})}.$$

Модулем непрерывности функции $f:R_r\to R$ с весом Q, будем называть

$$\omega_Q(f,\overline{h})=\sup_{\overline{\delta}\in R(\overline{h})}\sup_{\overline{x}\in R_r}Q(|\overline{x}|)\left|f(\overline{x}+\overline{\delta})-f(\overline{x})\right|,$$

где $R(\overline{h})=[0,h_1]\times[0,h_2]\times\cdots\times[0,h_r]$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f : R_r \to R$ -- непрерывная функция, для которой величина $Q(|\bar{x}|)\,|f(\bar{x})|$ ограничена. Тогда $L_n(f;\bar{x}) \to f(\bar{x})$, причем имеет место неравенство:

$$Q(|\bar{x}|)\left|L_n(f;\bar{x}) - f(\bar{x})\right| \le C(r)\omega_Q(f;\bar{h}),$$

где $h_i = 2\sqrt{\frac{w(|x_i|)}{n}} + \frac{|x_i|}{1+v_n(2|x_i|)}$.

Доказательство теоремы разобьем на леммы.

Лемма1. Для $x \ge 0$, $m \in N$

$$l_n(t^m;x) = x l_n(t^{m-1};x) + \frac{w(x)}{n} l_n{}'(t^{m-1};x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $x = 0$ равенство очевидно. При $x > 0$ в силу условия (4) имеем:

$$\frac{k}{n} q_{n,k}(x) = x q_{n,k}(x) + \frac{w(x)}{n} q'_{n,k}(x).$$

Тогда

$$l_n(t^m;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^m q_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{m-1}\left(x q_{n,k}(x) + \frac{w(x)}{n} q'_{n,k}(x)\right) =$$

$$= x\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{m-1} q_{n,k}(x) + \frac{w(x)}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{m-1} q'_{n,k}(x) = x l_n(t^{m-1};x) + \frac{w(x)}{n} l_n{}'(t^{m-1};x). \square$$

СЛЕДСТВИЯ. Отметим, что в силу условия (2) $l_n(1;x) = 1$. Применяя лемму 1, получаем следующие равенства:

1°. $l_n(t;x) = x l_n(1;x) + \frac{w(x)}{n} l_n{}'(1;x) = x$;

2°. $l_n(t^2;x) = x l_n(t;x) + \frac{w(x)}{n} l_n{}'(t;x) = x^2 + \frac{w(x)}{n}$;

3°. $l_n((t-x)^2;x) = l_n(t^2;x) - 2x l_n(t;x) + x^2 l_n(1;x) = \frac{w(x)}{n}$.

Лемма 2. $L_n(1;\bar{x}) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$L_n(1;\bar{x}) = \sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{(\overline{m}\overline{k})}\ p_{n,\bar{k}}(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{(\overline{m}\overline{k})}\ \prod_{i=1}^{r}\frac{u_{n,k_i}(|x_i|)v_n(2|x_i|)}{v_n(|x_i|)(1+v_n(2|x_i|))}x_i^{k_i} =$$

$$=\sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{k_1=0}^{\infty}\dots\sum_{k_{r-1}=0}^{\infty}\left[(-1)^{m_1k_1+\dots+m_{r-1}k_{r-1}}\prod_{i=1}^{r-1}\frac{u_{n,k_i}(|x_i|)v_n(2|x_i|)}{v_n(|x_i|)(1+v_n(2|x_i|))}x_i^{k_i}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{k_r=0}^{\infty}(-1)^{m_rk_r}\ \frac{u_{n,k_r}(|x_r|)v_n(2|x_r|)}{v_n(|x_r|)(1+v_n(2|x_r|))}x_r^{k_r}\right]$$

Обозначим последнюю сумму $A(x_r;m_r)$. Тогда

$$\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}(-1)^{(\overline{m}\overline{k})}\ p_{n,\bar{k}}(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{r}A(x_i,m_i) \tag{1}$$

и
$$L_n(1;\bar{x}) = \sum_{m=0}^{2^r-1}\prod_{i=1}^{r}A(x_i,m_i).$$

Если $x_r \ge 0$, $m_r = 0$, то

$$A(x_r;m_r) = \frac{v_n(2x_r)}{v_n(x_r)(1+v_n(2x_r))}\cdot\sum_{k_r=0}^{\infty}u_{n,k_r}(x_r)x_r^{k_r} = \frac{v_n(2x_r)}{1+v_n(2x_r)}.$$

Если $x_r \ge 0$, $m_r = 1$, то

$$A(x_r;m_r) = \frac{v_n(2x_r)}{v_n(x_r)(1+v_n(2x_r))}\cdot\sum_{k_r=0}^{\infty}u_{n,k_r}(x_r)(-x_r)^{k_r} = \frac{1}{1+v_n(2x_r)}.$$

Если $x_r < 0$, $m_r = 0$, то

$$A(x_r;m_r) = \frac{v_n(-2x_r)}{v_n(-x_r)(1+v_n(-2x_r))}\cdot\sum_{k_r=0}^{\infty}u_{n,k_r}(-x_r)x_r^{k_r} = \frac{1}{1+v_n(-2x_r)}.$$

Если $x_r < 0$, $m_r = 1$, то

$$A(x_r;m_r) = \frac{v_n(-2x_r)}{v_n(-x_r)(1+v_n(-2x_r))}\cdot\sum_{k_r=0}^{\infty}u_{n,k_r}(-x_r)(-x_r)^{k_r} = \frac{v_n(-2x_r)}{1+v_n(-2x_r)}.$$

Завершение доказательства проведем по индукции. Пусть r=1, тогда

$$L_n(1;x) = A(x,0) + A(x,1) = 1.$$

Предположим, что для некоторого r $L_n(1;\bar{x})=1$. Тогда для r+1

$$L_n(1;\bar{x}) = \sum_{m=0}^{2^r-1}\prod_{i=1}^{r} A(x_i,m_i)\ A(x_{r+1},0) + \sum_{m=0}^{2^r-1}\prod_{i=1}^{r} A(x_i,m_i)\ A(x_{r+1},1) =$$

(с учетом предположения индукции) $= A(x_{r+1},0)+A(x_{r+1},1)=1$

и лемма 2 доказана. □

Лемма 3. Для функции

$$g(\bar{x}) = \frac{1}{h_1....h_r}\int_0^{h_1}....\int_0^{h_r} f(\bar{x}+\bar{t})dt_1....dt_r$$

имеют место неравенства:

1°. $|g(\bar{x}) - f(\bar{x})| \le \dfrac{\omega_Q(f;\bar{h})}{Q(|\bar{x}|)}$;

2°. $|L_n(g;\bar{x}) - L_n(f;\bar{x})| \le \dfrac{\omega_Q(f;\bar{h})}{Q(|\bar{x}|)} 2^r$;

3°. $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x_i}\right| \le \dfrac{\omega_Q(f;\bar{h}(i))}{h_i Q(|\bar{x}|)}$, где $\bar{h}(i) = (0,....0,h_i,0....,0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство 1° непосредственно следует из определений g и ω.

Покажем 2°:

$$|L_n(g;\bar{x}) - L_n(f;\bar{x})| \le \left| \sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{(\overline{mk})}\ (g(\bar{k}_{n,m}) - f(\bar{k}_{n,m}))\ p_{n,\bar{k}}(\bar{x}) \right| \le$$

$$\le \sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1} |g(\bar{k}_{n,m}) - f(\bar{k}_{n,m})|\ p_{n,\bar{k}}(|\bar{x}|) \le \frac{\omega_Q(f;\bar{h})}{Q(|\bar{x}|)} \sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1} p_{n,\bar{k}}(|\bar{x}|) =$$

(с учетом (1)) $= \dfrac{\omega_Q(f;\bar{h})}{Q(|\bar{x}|)} \displaystyle\sum_{m=0}^{2^r-1}\prod_{i=1}^{r} A(|x_i|,0)$,

где, как и в лемме 2, $A(|x_i|;0) = \dfrac{v_n(2|x_i|)}{1+v_n(2|x_i|)} < 1$, откуда и следует неравенство 2°.

Докажем 3°. Для любой непрерывной функции *q(t)* имеет место равенство

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_a^b (q(t+\delta)-q(t))dt = q(b)-q(a).$$

Поэтому $\frac{\partial g}{\partial x_1} =$

$$\frac{1}{h_1....h_r}\int_0^{h_2}....\int_0^{h_r}\left[f(x_1+t_1+\delta, x_2+t_2,....,x_r+t_r)-f(x_1+t_1,x_2+t_2,....,x_r+t_r)\right]dt_2....dt_r$$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right| \le \frac{\omega_Q(f;\overline{h}(1))}{h_1 Q(|\,\overline{x}\,|)}\,\frac{1}{h_1....h_r}\int_0^{h_2}....\int_0^{h_r}dt_2....dt_r = \frac{\omega_Q(f;\overline{h}(1))}{h_1 Q(|\,\overline{x}\,|)}.$$

Аналогично для других координат, и лемма 3 полностью доказана. □

Лемма 4. Обозначим $\overline{x}(j)=(x_1,...,x_{j-1},-x_j,x_{j+1},....x_r)$ и $f_j(\overline{x}) = f(\overline{x}(j))$, тогда

$$L_n(f;\overline{x}) = L_n(f_j;\overline{x}(j)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$L_n(f_j;\overline{x}(j)) = \sum_{\overline{k}=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{(\overline{m}\overline{k})}\; f_j(\overline{k}_{n,m}))\; p_{n,\overline{k}}(\overline{x}) =$$

$$= \sum_{\overline{k}=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{(\overline{m}\overline{k})}\; f\left((-1)^{m_1}\frac{k_1}{n},...,(-1)^{m_{j-1}}\frac{k_{j-1}}{n},(-1)^{m_j+1}\frac{k_j}{n},(-1)^{m_{j+1}}\frac{k_{j+1}}{n},...,(-1)^{m_r}\frac{k_r}{n}\right)\cdot$$

$$\cdot\, p_{n,\overline{k}}(\overline{x}(j)).$$

В сумме по m для каждого номера

$$m^o = m_1+2m_2+....+2^{j-2}m_{j-1}+2^{j-1}\cdot 1+2^j m_{j+1}+....+2^{r-1}m_r$$

найдется парный номер

$$m^* = m_1+2m_2+....+2^{j-2}m_{j-1}+2^{j-1}\cdot 0+2^j m_{j+1}+....+2^{r-1}m_r.$$

Поменяем местами все пары слагаемых с номерами m^o и m^*, получим, что

$$L_n(f_j;\bar{x}(j)) = \sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{(\overline{m}\bar{k})}\ (-1)^{m_j^o k_j + m_j^* k_j}\ f\left((-1)^{m_1}\frac{k_1}{n},...,(-1)^{m_r}\frac{k_r}{n}\right) p_{n,\bar{k}}(\bar{x}(j)) =$$

$$= \sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{(\overline{m}\bar{k})}\ (-1)^{k_j}\ f(\bar{k}_{n,m})\ p_{n,\bar{k}}(\bar{x}(j)) = \sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{(\overline{m}\bar{k})}\ f(\bar{k}_{n,m})\ p_{n,\bar{k}}(\bar{x}),$$

что и доказывает лемму.□

Лемма 5. Пусть, как и выше, $g(\bar{x}) = \dfrac{1}{h_1....h_r}\int_0^{h_1}....\int_0^{h_r} f(\bar{x}+\bar{t})dt_1....dt_r$, тогда

$$|L_n(g;\bar{x}) - g(\bar{x})| \le \frac{\omega_Q(f;\bar{h})}{Q(|\bar{x}|)}\cdot 2^{r-1}\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_n(x_j)}{h_j},\quad \text{где}$$

$$\alpha_n(x_j) = 2\sqrt{\frac{w(|x_j|)}{n}} + \frac{|x_j|}{1+v_n(2|x_j|)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{x}$ – точка с неотрицательными координатами. Обозначим $\overline{mx} = ((-1)^{m_1}x_1,....,(-1)^{m_r}x_r)$. С учетом леммы 2

$$L_n(g;\bar{x}) - g(\bar{x}) = L_n(g;\bar{x}) - g(\bar{x})L_n(1;\bar{x}) =$$

$$= \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}(-1)^{(\overline{m}\bar{k})}\left(g(\bar{k}_{n,m}) - g(\bar{x}_m)\right) p_{n,\bar{k}}(\bar{x}) + \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}(-1)^{(\overline{m}\bar{k})}\left(g(\bar{x}_m) - g(\bar{x})\right) p_{n,\bar{k}}(\bar{x}),$$

Откуда

$$|L_n(g;\bar{x}) - g(\bar{x})| \le$$

$$\le \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}(-1)^{(\overline{m}\bar{k})}\,|g(\bar{k}_{n,m}) - g(\bar{x}_m)|\ p_{n,\bar{k}}(\bar{x}) + \sum_{m=0}^{2^r-1}|g(\bar{x}_m) - g(\bar{x})|\,\left|\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}(-1)^{(\overline{m}\bar{k})}p_{n,\bar{k}}(\bar{x})\right|$$

По формуле конечных приращений

$$g(\bar{t}) - g(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{r}\frac{\partial g}{\partial x_j}(\bar{\xi})\cdot(t_j - x_j),\quad \text{где } \bar{\xi} = (x_1+\theta(t_1-x_1),....,x_r+\theta(t_r-x_r)),$$

$$\theta \in (0;1).$$

Поэтому, с учетом леммы 3 получаем

$$|L_n(g;\bar{x})-g(\bar{x})|\le \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{r}\frac{\omega_Q(f;(0,\dots,h_j,\dots,0))}{h_jQ(\bar{x})}\left|\frac{k_j}{n}-x_j\right|\cdot p_{n,\bar{k}}(\bar{x})+$$

$$+\sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{j=1}^{r}\frac{\omega_Q(f;(0,\dots,h_j,\dots,0))}{h_jQ(\bar{x})}\left|(-1)^{m_j}x_j-x_j\right|\cdot\left|\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}(-1)^{\bar{m}\bar{k}}p_{n,\bar{k}}(\bar{x})\right|\le$$

$$\le\frac{\omega_Q(f;\bar{h})}{Q(\bar{x})}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{h_j}\sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\left|\frac{k_j}{n}-x_j\right|p_{n,\bar{k}}(\bar{x})+$$

$$+\frac{\omega_Q(f;\bar{h})}{Q(\bar{x})}\sum_{j=1}^{r}\frac{x_j}{h_j}\sum_{m=0}^{2^r-1}\left|(-1)^{m_j}-1\right|\left|\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}(-1)^{\bar{m}\bar{k}}p_{n,\bar{k}}(\bar{x})\right|=\frac{\omega_Q(f;\bar{h})}{Q(\bar{x})}(A_1+A_2).$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\left|\frac{k_j}{n}-x_j\right|p_{n,\bar{k}}(\bar{x})=\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\left|\frac{k_j}{n}-x_j\right|\prod_{i=1}^{r}\frac{u_{n,k_i}(x_i)v_n(2x_i)}{v_n(x_i)(1+v_n(2x_i))}x_i^{k_i}=$$

$$=\sum_{k_j=0}^{\infty}\left|\frac{k_j}{n}-x_j\right|\frac{u_{n,k_j}(x_j)v_n(2x_j)}{v_n(x_j)(1+v_n(2x_j))}x_j^{k_j}\prod_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{r}\frac{v_n(2x_i)}{1+v_n(2x_i)}=$$

$$=\sum_{k_j=0}^{\infty}\left|\frac{k_j}{n}-x_j\right|\frac{u_{n,k_j}(x_j)}{v_n(x_j)}x_j^{k_j}\prod_{i=1}^{r}\frac{v_n(2x_i)}{1+v_n(2x_i)}.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского

$$\sum_{k_j=0}^{\infty}\left|\frac{k_j}{n}-x_j\right|\frac{u_{n,k_j}(x_j)}{v_n(x_j)}x_j^{k_j}\le\sqrt{\sum_{k_j=0}^{\infty}\frac{u_{n,k_j}(x_j)}{v_n(x_j)}x_j^{k_j}}\sqrt{\sum_{k_j=0}^{\infty}\left(\frac{k_j}{n}-x_j\right)^2\frac{u_{n,k_j}(x_j)}{v_n(x_j)}x_j^{k_j}}=$$

$$=\sqrt{l_n(1;x_j)}\sqrt{l_n((t-x_j)^2;x_j)}=\sqrt{\frac{w(x_j)}{n}}.$$

Кроме того, $\dfrac{v_n(2x_i)}{1+v_n(2x_i)}<1$, поэтому $A_1\le\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{h_j}\sum_{m=0}^{2^r-1}\sqrt{\frac{w(x_j)}{n}}=\frac{2^r}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{r}\frac{\sqrt{w(x_j)}}{h_j}$.

Преобразуем второе слагаемое. Так как $|A(x_i;m_i)|<1$, где $A(x_i;m_i)$ то же, что и в лемме 2, получаем, что

$$A_2=\sum_{j=1}^{r}\frac{x_j}{h_j}\sum_{m=0}^{2^r-1}\left|(-1)^{m_j}-1\right|\left|\prod_{i=1}^{r}A(x_i;m_i)\right|<\sum_{j=1}^{r}\frac{x_j}{h_j}\sum_{m=0}^{2^r-1}\left|(-1)^{m_j}-1\right|\left|A(x_j;m_j)\right|.$$

При $m_j = 0$ слагаемое в последней сумме пропадает, поэтому

$$A_2 < \sum_{j=1}^{r} \frac{x_j}{h_j} \sum_{m=0}^{2^r-1} |(-1)^{m_j} - 1|\,|A(x_j;1)| =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \frac{x_j}{h_j} \sum_{m=0}^{2^r-1} |(-1)^{m_j} - 1| \frac{1}{1+v_n(2x_j)} = 2^{r-1} \sum_{j=1}^{r} \frac{x_j}{h_j(1+v_n(2x_j))}.$$

И, подставляя полученные оценки, имеем:

$$|L_n(g;\bar{x}) - g(\bar{x})| \le \frac{\omega_Q(f;\bar{h})}{Q(|\bar{x}|)} \cdot 2^{r-1} \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{h_j} \left[2\sqrt{\frac{w(x_j)}{n}} + \frac{x_j}{1+v_n(2x_j)} \right],$$

и для неотрицательных координат утверждение леммы доказано.

Пусть теперь $x_i < 0$, а остальные координаты неотрицательны.

Обозначим, как и в лемме 4, $\bar{x}(j) = (x_1, ..., x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, ... x_r)$,

$f_j(\bar{x}) = f(\bar{x}(j))$, $g_j(\bar{x}) = g(\bar{x}(j))$. Тогда, с учетом леммы 4,

$|L_n(g;\bar{x}) - g(\bar{x})| = |L_n(g_i;\bar{x}(i)) - g_i(\bar{x}(i))| \le$ (по доказанному)

$$\le \frac{\omega_Q(f_i;\bar{h})}{Q(|\bar{x}(i)|)} \cdot 2^{r-1} \sum_{j=1}^{r} \frac{\alpha_n(x_j(i))}{h_j} = \frac{\omega_Q(f;\bar{h})}{Q(|\bar{x}|)} \cdot 2^{r-1} \sum_{j=1}^{r} \frac{\alpha_n(x_j)}{h_j}$$

и утверждение леммы так же выполнено. Применяя необходимое количество раз те же рассуждения, что и выше, получим, что утверждение леммы выполнено для $\bar{x}$ с любым количеством отрицательных координат. □

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $g(\bar{x})$ то же, что и выше.

Возьмем $h_j = \alpha_{n_j}(x_j)$.

$$|L_n(f;\bar{x}) - f(\bar{x})| \le |L_n(f;\bar{x}) - L_n(g;\bar{x})| + |L_n(g;\bar{x}) - g(\bar{x})| + |g(\bar{x}) - f(\bar{x})|.$$

Во-первых, с учетом леммы 3,

$$|L_n(f;\bar{x}) - L_n(g;\bar{x})| = |\sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}(-1)^{(\bar{m}\bar{k})}\left(f(\bar{k}_{n,m}) - g(\bar{k}_{n,m})\right)|\; p_{n,\bar{k}}(\bar{x}) \le$$

$$\le \sum_{m=0}^{2^r-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\frac{\omega_Q(f;\bar{h})}{Q(\bar{k}_{n,m})}\,|\,p_{n,\bar{k}}(\bar{x})\,| \le \frac{C\omega_Q(f;\bar{h})}{Q(|\,\bar{x}\,|)}.$$

Во-вторых, по лемме 5

$$|L_n(g;\bar{x}) - g(\bar{x})| \le \frac{\omega_Q(f;\bar{h})}{Q(|\,\bar{x}\,|)}\cdot 2^{r-1}\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_n(x_j)}{h_j} \le \frac{\omega_Q(f;\bar{h})}{Q(|\,\bar{x}\,|)}\cdot 2^{r-1}r\,,$$

и, оценивая $|g(\bar{x}) - f(\bar{x})|$, так же по лемме 3 получаем

$$|L_n(f;\bar{x}) - f(\bar{x})| \le \frac{\omega_Q(f;\bar{h})}{Q(|\,\bar{x}\,|)}\cdot[C + 2^{r-1}r + 2^r],$$

откуда $Q(|\,\bar{x}\,|)\left|L_n(f;\bar{x}) - f(\bar{x})\right| \le C(r)\omega_Q(f;\bar{h})$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коровкин П.П. *Линейные операторы и теория приближений* //"Наука" М., 1959.
2. Миракьян Г.М. *Аппроксимирование непрерывных функций с помощью полиномов* $e^{-nx}\sum\limits_{k=0}^{n} c_{k,n}x^k$ //Докл. АН СССР, 1941, т.31, с.201-205.
3. Szasz O. *Generalization of S.Bernstein's polinomials to the infinite interval* //J. Res. Nat. Bur. Standards, Sect.B, 1950, v.45, p.239-245.
4. Grof J. *Konstruktion einer Folge linearer Operatoren zur Approximation auf der ganzen reellen Aches* //"Конструктивная теория функций, Тр. Межд. конф. Варна, 1-5 июня 1981", София, 1983, с.336-340.
5. Виденский В.С. *Многочлены Бернштейна* – Изд-во Ленинград. гос. пед. ин-та – 1990.
6. Гудошникова Е.В. Приближение непрерывных функций многих переменных. // Сарат. гос. ун-т.-Саратов, 2001. - 10 с. - Деп. в ВИНИТИ 03.10.2001, № 2083-В2001.
7. Гудошникова Е.В. Аппроксимативные свойства многомерных аналогов операторов Саса-Миракьяна. // Сарат. гос. ун-т.-Саратов, 2001. - 24 с. - Деп. в ВИНИТИ 20.11.2001, № 2412-В2001.