Е.В.Гудошникова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

лекции к курсу "Высшая математика"

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

СОДЕРЖАНИЕ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ 4
Обыкновенное дифференциальное уравнение
Решение дифференциального уравнения
Общее решение дифференциального уравнения
Задача Коши

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ 6
Уравнения с разделяющимися переменными 7
Общий вид уравнения с разделяющимися переменными
Алгоритм решения уравнения с разделяющимися переменными
Пример
Однородные уравнения 9
Общий вид однородного уравнения первого порядка
Метод решения однородного уравнения первого порядка
Алгоритм решения однородного уравнения первого порядка
Примеры
Линейные уравнения первого порядка 12
Общий вид линейного уравнения первого порядка
Вид общего решения неоднородного линейного уравнения
Нахождение общего решения однородного линейного уравнения первого порядка
Нахождение частного решения неоднородного уравнения первого порядка методом вариации произвольной постоянной
Алгоритм решения линейного уравнения первого порядка
Пример
Уравнения Бернулли 16
Общий вид уравнения Бернулли
Метод решения уравнения Бернулли
Алгоритм решения уравнения Бернулли
Пример
Уравнения в полных дифференциалах 18
Общий вид уравнения в полных дифференциалах
Метод решения уравнения в полных дифференциалах
Алгоритм решения уравнения в полных дифференциалах
Пример
Замечание об интегрирующем множителе

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ 22
Основные понятия 22
Линейное неоднородное уравнение первого порядка
Линейное однородное уравнение первого порядка
Вид общего решения неоднородного линейного уравнения

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Нахождение общего решения линейного однородного уравнения 24
Функции, являющиеся решениями линейного однородного уравнения в случае простого корня характеристического уравнения
Функции, являющиеся решениями линейного однородного уравнения в случае кратного корня характеристического уравнения
Вид общего решения однородного линейного уравнения
Алгоритм нахождения общего решения линейного однородного уравнения с действительными коэффициентами
Примеры
Нахождение частного решения линейного неоднородного уравнения 32
Нахождение частного решения линейного неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов
Пример
Нахождение частного решения линейного неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных
Пример
Принцип наложения решений
Пример

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ 40
ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 54
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Сводная таблица изученных типов дифференциальных уравнений первого порядка и методов их решения 60
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Линейные уравнения второго порядка с действительными коэффициентами 61
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Таблицы неопределенных интегралов 63

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

• *Обыкновенным дифференциальным уравнением* порядка n называется уравнение вида

$$F(x; y(x); y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0,$$

где $y(x)$ – искомая функция.

Например,

$$\sin y \cdot y'(x) = 2\cos x \cdot y(x) \tag{1}$$

– дифференциальное уравнение первого порядка.

Поскольку $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, уравнение (1) можно так же записать в виде

$$\sin y \cdot dy = 2\cos x \cdot y \cdot dx \tag{2}$$

С другой стороны, $y(x)$ – это зависимость y от x. Но с таким же правом можно считать, что наоборот, x зависит от y, то есть искать функцию $x(y)$, для которой $x'(y) = \dfrac{dx}{dy}$. И, поделив уравнение (2) на dy, получим

$$\sin y = 2\cos x \cdot y \cdot x'(y) \tag{3}$$

(1), (2) и (3) по сути одно и то же уравнение, записанное в разных видах.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

• *Решением* дифференциального уравнения называется любая функция, обращающая уравнение в верное равенство.

Например, $y(x) = e^x$ является решением уравнения

$$y'(x) = y(x) \tag{4}$$

• *Общим решением* дифференциального уравнения порядка n называется решение, зависящее (помимо переменной) от n произвольных постоянных, которые принято обозначать $C_1, C_2, ..., C_n$.

Например, $y(x) = C \cdot e^x$ является общим решением уравнения (4).

• *Частным решением* дифференциального уравнения называется решение, которое получается из общего при конкретных значениях постоянных C_k.

Например, $y(x) = 3 \cdot e^x$ является частным решением уравнения (4).

• *Задача Коши.*

На практике, как правило, надо найти какое-то одно решение, описывающее данный процесс, следовательно необходимы дополнительные условия для определения постоянных C_k.

$$\text{Система} \quad \begin{cases} \text{дифференциальное уравнение порядка } n \\ n \text{ условий, позволяющих найти } \mathrm{C}_1, ..., C_n \end{cases}$$

называется *задачей Коши.*

Для решения задачи Коши следует сначала найти общее решение исходного уравнения. Затем подставив это решения в условия, найти конкретные значения постоянных C_1, ... C_n. После, подставив в общее решение найденные значения постоянных, записать решение. которое и является решением задачи Коши.

Замечание. В классической теории доказано много теорем, позволяющих судить о существовании, единственности и устойчивости решения, но в рамках курса "Высшая математика" эти вопросы обсуждаться не будут.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

В этом разделе будут рассматриваться дифференциальные уравнения первого порядка, в которых можно выразить производную, то есть записать их в виде:

$$y'(x) = F(x;y) \quad \text{или} \quad x'(y) = F(x;y)$$

Привычнее воспринимать, что именно y является функцией, зависящей от переменной x, то есть уравнение в первом виде. Однако бывают ситуации, когда уравнение, записанное в первом виде не возможно отнести ни к одному из простейших типов, и выбрать для него нужный алгоритм решения. Но если его преобразовать ко второму виду, то есть, по сути, учесть, что $y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)}$, то оно становится уравнением простейшего типа.

Типы уравнений и алгоритмы решений будут приводится для первого вида. Понятно, что для второго надо просто поменять местами переменные.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

• *Уравнения с разделяющимися переменными*, это уравнения, которые могут быть записаны в виде:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

То есть производная равна произведению множителей, из которых один зависит только от x, а другой только от y.

• <u>Алгоритм решения уравнения с разделяющимися переменными</u>

Для решения уравнения с разделяющимися переменными следует:

1. Записать производную через дифференциалы:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

2. Разделить переменные, чтоб с одной стороны равенства были только выражения с y, а с другой только с x. (При этом dy и dx должны оказаться в числителях, но не в знаменателях):

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

3. Проинтегрировать получившееся равенство:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx.$$

Найти обе первообразные, не забыть в одной из них написать "$+C$". Получившееся равенство дает зависимость y от x и содержит произвольную постоянную, следовательно является общим решением исходного уравнения.

4. При делении мы могли потерять решения. Поэтому необходимо определить, при каких y и x обращаются в ноль выражения, на которые делили и подстановкой проверить, не являются ли они решениями уравнения. Это так называемые *особые решения.*

5. Записать в ответ решения, полученные в п.3 и 4.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Пример

Решить уравнение $x^2y^2y' + 1 = y$.

Решение. Выразим производную:

$$y' = \frac{y-1}{x^2y^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{y-1}{y^2}.$$

Первый множитель зависит только от x, второй только от y, значит это уравнение с разделяющимися переменными.

Применим алгоритм нахождения общего решения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{y-1}{y^2} \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{y^2}{y-1}\,dy = \frac{dx}{x^2} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int \frac{y^2}{y-1}\,dy = \int \frac{dx}{x^2} \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C.$$

Проверим особые решения. Преобразовывая уравнение мы делили на $y-1$ и на x^2.

Подставим в исходное уравнение $y = 1: \ x^2 \cdot 1 \cdot 1' + 1 = 1 \implies 0 + 1 = 1$ – верное равенство, значит $y = 1$ – решение.

Подставим в исходное уравнение $x = 0: \ 0 + 1 = y$ – не верно, значит $x = 0$ – не решение.

Ответ: $\dfrac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\dfrac{1}{x} + C$, $y = 1$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

• *Однородные уравнения*, это уравнения, которые могут быть записаны в виде:

$$y'(x) = F\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

То есть при $x = y$, все переменные кроме производной сократятся.

• *Метод решения однородного уравнения первого порядка.*

ТЕОРЕМА. Замена $y = t \cdot x$, где $t(x)$ – новая неизвестная функция, преобразовывает однородное уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

ДОК-ВО. Выполним указанную замену. Получим $t'x + t = F(t)$ или $t' = \frac{1}{x} \cdot \Big(F(t) - t\Big)$ – уравнение с разделяющимися переменными.

• <u>Алгоритм решения однородного уравнения</u>

Для решения однородного уравнения следует:

1. Выполнить замену $y = t \cdot x$. При этом $y' = t'x + t$.

2. Записать производную через дифференциалы: $t' = \frac{dt}{dx}$ и умножить все уравнение на dx.

(Если в исходном уравнении была не производная, а dy и dx, то так же надо сделать замену $y = t \cdot x$, тогда $dy = x \cdot dt + t \cdot dx$.)

3. Перенести все слагаемые с множителем dt в одну сторону, а с множителем dx в другую.

4. С каждой стороны вынести общие множители за скобки и сократить. После этого должно получиться уравнение с разделяющимися переменными.

5. Использую алгоритм решения уравнения с разделяющимися переменными, найти зависимость между t и x.

6. Выполнить обратную замену: $t = \frac{y}{x}$, записать ответ.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Пример 1

Решить уравнение: $xy' - y = x\sin^2\dfrac{y}{x}$.

Решение. Выразим производную:

$$y' = \sin^2\frac{y}{x} + \frac{y}{x} \text{ – однородное уравнение.}$$

Выполним замену $y = t \cdot x$ и упростим выражение:

$$t'x + t = \sin^2 t + t \implies$$

$$t'x = \sin^2 t \text{ – уравнение с разделяющимися переменными.}$$

Решим получившееся уравнение:

$$\frac{dt}{\sin^2 t} = \frac{dx}{x} \implies$$

$$\int\frac{dt}{\sin^2 t} = \int\frac{dx}{x} \implies$$

$$-\operatorname{ctg} t = \ln|x| + C.$$

Выполнив обратную замену, запишем ответ.

Ответ: $-\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x} = \ln|x| + C$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Пример 2

Решить уравнение: $(x^2 - y^2)dx + (xy + x^2)dy = 0$.

Решение. Если положить $y = x$, то все уравнение можно будет сократить на x^2 и после этого переменных, кроме дифференциалов не останется. Значит, это однородное уравнение. Выполним замену $y = t \cdot x$ и упростим выражение:

$$(x^2 - t^2x^2)dx + (x^2t + x^2)(x\,dt + t\,dx) = 0$$

$$(1 - t^2)dx + (t + 1)(x\,dt + t\,dx) = 0$$

$$\Big(1 - t^2 + (t + 1)t\Big)\,dx + (t + 1)x\,dt = 0$$

$$(1 + t)\,dx + (t + 1)x\,dt = 0$$

$$dx + x\,dt = 0$$

получили уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{dx}{x} = -dt \qquad \Longrightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int dt \qquad \Longrightarrow$$

$$\ln|x| = -t + C$$

Выполним обратную замену: $\ln|x| = -\dfrac{y}{x} + C$.

Ответ: $y = x(C - \ln|x|)$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

• *Линейные уравнения первого порядка* это уравнения, которые могут быть записаны в виде:

$$y' = a(x)y + f(x)$$

Если $f(x) \neq 0$, то это неоднородное линейное уравнение.

Если $f(x) = 0$, то это однородное линейное уравнение.

• *Вид общего решения неоднородного линейного уравнения*

ТЕОРЕМА. Общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

О.Р.Н.У.=О.Р.О.У.+Ч.Р.Н.У.

ДОК-ВО. Пусть y_1 – общее решение линейного однородного уравнения, то есть

$$y_1' = a(x)y_1$$

и y_1 содержит произвольную постоянную C.

Пусть y_2 – решение линейного неоднородного уравнения, то есть

$$y_2' = a(x)y_2 + f(x)$$

Подставим $y = y_1 + y_2$ в исходное уравнение:

$$(y_1 + y_2)' = a(x)(y_1 + y_2) + f(x) \quad \text{или}$$
$$y_1' + y_2' = a(x)y_1 + a(x)y_2 + f(x)$$

Подставляя сюда y_1' и y_2', получаем тождество, значит $y = y_1 + y_2$ – решение неоднородного уравнения, а так как y_1, а значит и y содержит произвольную постоянную C, $y = y_1 + y_2$ – общее решение неоднородного уравнения.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

• *Нахождение общего решения однородного линейного уравнения*

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$y' = a(x)y$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Найдем его решение:

$$\frac{dy}{y} = a(x)\,dx \quad \Longrightarrow$$

$$\ln|y| = \int a(x)\,dx + \text{const} \quad \Longrightarrow$$

$$|y| = e^{\int a(x)\,dx} e^{\text{const}} \quad \Longrightarrow$$

$$y = C \cdot e^{\int a(x)\,dx},$$

где C – произвольная постоянная.

Отметим, что особое решение $y = 0$ является частным случаем общего решения при $C = 0$, поэтому отдельно его не выписывают.

• *Нахождение частного решения неоднородного линейного уравнения методом вариации произвольной постоянной*

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y' = a(x)y + f(x)$$

Как было показано $y = C \cdot e^{\int a(x)\,dx}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения. Заменим в этом решении

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

константу C на функцию $C(x)$ и подставим получившееся выражение в исходное уравнение:

$$\left(C(x)\cdot e^{\int a(x)\,dx}\right)' = a(x)\left(C(x)\cdot e^{\int a(x)\,dx}\right) + f(x) \implies$$

$$C'(x)\cdot e^{\int a(x)\,dx} + C(x)\cdot\left(e^{\int a(x)\,dx}\right)' =$$

$$= a(x)C(x)\cdot e^{\int a(x)\,dx} + f(x) \implies$$

$$C'(x)\cdot e^{\int a(x)\,dx} + C(x)\cdot e^{\int a(x)\,dx}a(x) =$$

$$= a(x)C(x)\cdot e^{\int a(x)\,dx} + f(x) \implies$$

$$C'(x)\cdot e^{\int a(x)\,dx} = f(x)$$

Из последнего равенства можно выразить $C'(x)$ и, проинтегрировав, найти $C(x)$.

Тогда получим $y = C(x)\cdot e^{\int a(x)\,dx}$ – частное решение линейного неоднородного уравнения.

• Алгоритм решения линейного уравнения первого порядка

Для решения линейного неоднородного уравнения

$$y' = a(x)y + f(x)$$

следует:

1. Выписать соответствующее однородное уравнение: $y' = a(x)y$ и найти его решение методом разделения переменных.

2. Привести решение к виду $y = C\cdot g(x)$ – это О.Р.О.У.

3. Заменить в О.Р.О.У. постоянную C на функцию $C(x)$ и подставить получившийся y в исходное (неоднородное) уравнение.

4. Упростить и выразить $C'(x)$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

5. Найти $C(x)$: $\quad C(x) = \int C'(x)\,dx$

6. Подставить найденное $C(x)$: $\quad y = C(x) \cdot g(x)$ – это Ч.Р.Н.У.

7. Записать ответ: $y =$О.Р.О.У.+Ч.Р.Н.У.

Пример

Решить уравнение: $xy' = y + x^2$.

Решение. Выразим y': $\quad y' = \dfrac{y}{x} + x$ – это линейное неоднородное уравнение, здесь $f(x) = x$.

Запишем соответствующее однородное уравнение $\;y' = \dfrac{y}{x}$ и найдем его решение методом разделения переменных:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Longrightarrow$$

$$\ln y = \ln x + c \quad \Longrightarrow$$

$$y = e^{\ln x} e^{c} \quad \Longrightarrow$$

$$y = Cx \text{ – О.Р.О.У.}$$

Заменим постоянную на функцию и подставим $y = C(x)x$ в исходное уравнение:

$$x\Big(C(x)x\Big)' = C(x)x + x^2$$

Упростим и выразим $C'(x)$:

$$x\Big(C'(x)x + C(x)\Big) = C(x)x + x^2$$

$$C'(x)x^2 + C(x)x = C(x)x + x^2$$

$$C'(x) = 1 \implies C(x) = x \implies y = x^2 - \text{ Ч.Р.Н.У.}$$

Ответ: $y = Cx + x^2$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

• *Уравнения Бернулли* это уравнения, которые могут быть записаны в виде:

$$y' = a(x)y + f(x)y^n,$$

причем $n \neq 1$, так как при $n = 1$ получаем линейное однородное уравнение первого порядка.

• *Метод решения уравнения Бернулли.*

ТЕОРЕМА. При замене $y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-n}}$ (где $z(x)$ новая неизвестная функция) уравнение Бернулли становится линейным неоднородным уравнением первого порядка.

ДОК-ВО. Выполним указанную замену и преобразуем исходное уравнение:

$$\left(z(x)^{\frac{1}{1-n}}\right)' = a(x)\left(z(x)^{\frac{1}{1-n}}\right) + f(x)\left(z(x)^{\frac{1}{1-n}}\right)^n$$

$$\frac{1}{n-1} \cdot z(x)^{\frac{1}{1-n}-1} \cdot z(x)' = a(x)z(x)^{\frac{1}{1-n}} + f(x)z(x)^{\frac{n}{1-n}}$$

Поделим все уравнение на $z(x)^{\frac{n}{1-n}}$:

$$\frac{1}{n-1} \cdot z(x)' = a(x)z(x) + f(x)$$

Получили линейное уравнение.

• Алгоритм решения уравнения Бернулли

Для решения уравнения Бернулли

$$y' = a(x)y + f(x)y^n$$

следует:

1. Выполнить замену $y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-n}}$ и упростить уравнение.

2. Решить получившееся линейное неоднородное уравнение.

3. Выполнив обратную замену, записать ответ.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Пример

Решить уравнение: $y' = \dfrac{y}{2x} + \dfrac{x^2}{2y}$.

Решение. Это уравнение Бернулли, причем $n = -1$. Необходимая замена $y = z^{1/2}$. Тогда

$$\left(z^{1/2}\right)' = \frac{z^{1/2}}{2x} + \frac{x^2}{2z^{1/2}}$$

$$\tfrac{1}{2}z^{-1/2} \cdot z' = \frac{z^{1/2}}{2x} + \frac{x^2}{2z^{1/2}} \qquad \Big/ \cdot 2z^{1/2}$$

$$z' = \frac{z}{x} + x^2 \text{ – линейное уравнение}$$

Найдем общее решение однородного уравнения $z' = \dfrac{z}{x}$:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \implies$$

$$\ln z = \ln x + \text{const} \implies z = Cx \text{ – О.Р.О.У.}$$

Найдем решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной:

$$\Big(C(x) \cdot x\Big)' = C(x) + x^2 \implies$$

$$C'(x)x + C(x) = C(x) + x^2 \implies$$

$$C'(x) = x \implies C(x) = \tfrac{1}{2}x^2 \text{ и } z = \tfrac{1}{2}x^3 - \text{Ч.Р.Н.У.}$$

Следовательно, решение линейного уравнения

$$z = Cx + \tfrac{1}{2}x^3$$

Выполнив обратную замену, запишем ответ.

Ответ: $y = \sqrt{Cx + \frac{1}{2}x^3}$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

• *Уравнением в полных дифференциалах* называется уравнение вида
$$M(x;y)\,dx + N(x;y)\,dy = 0, \quad \text{где} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

• *Метод решения уравнения в полных дифференциалах.*

ТЕОРЕМА. Если $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, то найдется функция $u(x;y)$ такая, что
$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x;y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x;y)$$
(без док-ва).

Таким образом левая часть уравнения может быть записана в виде
$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \quad \text{или} \quad du = 0$$
И решение уравнения $u(x;y) = C$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, то такой функции $u(x;y)$ не существует, так как с одной стороны должно быть
$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x;y) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}$$
С другой стороны
$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x;y) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$
И так как $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, получаем, что $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, а для дифференцируемой функции смешанная производная не зависит от порядка дифференцирования, следовательно, в этом случае дифференцируемой функции $u(x;y)$ не существует.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

- <u>Алгоритм решения уравнения в полных дифференциалах</u>

Для решения уравнения в полных дифференциалах

$$M(x;y)\,dx + N(x;y)\,dy = 0,$$

$$\text{где}\quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

надо найти функцию $u(x;y)$ такую, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x;y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x;y).$$

Используя эти равенства, найдем функцию u:

1. Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x;y) \quad \Longrightarrow$$

$$u(x;y) = \int M(x;y)\,dx + C(y),$$

где $C(y)$ неизвестная пока функция.

2. Найдем указанный в п.1. неопределенный интеграл и подставим получившееся выражение для $u(x;y)$ в условие

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x;y).$$

3. Проведем преобразования и выразим $C'(y)$.

4. Найдем $C(y) = \displaystyle\int C'(y)\,dy$.

5. Подставим найденное выражение для $C(y)$ в выражение для $u(x;y)$, полученное в п.1.

6. Подставим полученное выражение для $u(x;y)$ в ответ: $u(x;y) = C$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Пример

Решить уравнение: $(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0$.

Решение. Поскольку

$$\frac{\partial(x+y+1)}{\partial y}=1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial(x-y^2+3)}{\partial x}=1$$

это уравнение в полных дифференциалах. Найдем u.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+y+1 \implies$$

$$u(x;y)=\int(x+y+1)\,dx=\frac{1}{2}x^2+(y+1)x+C(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x-y^2+3 \implies$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{2}x^2+(y+1)x+C(y)\right)}{\partial y}=x-y^2+3 \implies$$

$$x+C'(y)=x-y^2+3 \implies$$

$$C'(y)=-y^2+3 \implies$$

$$C(y)=\int(-y^2+3)dy=-\frac{1}{3}y^3+3y$$

Следовательно, $u(x;y)=\frac{1}{2}x^2+(y+1)x-\frac{1}{3}y^3+3y$.

Ответ. $\frac{1}{2}x^2+(y+1)x-\frac{1}{3}y^3+3y=$ C.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Можно доказать, что если $M(x;y)$ и $N(x;y)$ дифференцируемые функции, то существует бесконечно много функций $P(x;y)$ таких, что

$$\frac{\partial(M\cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(N\cdot P)}{\partial x},$$

то есть, домножив исходное уравнение на $P(x;y)$, получим уравнение в полных дифференциалах. Такие функции $P(x;y)$ называются интегрирующими множителями.

Следовательно, любое уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной можно свести к уравнению в полных дифференциалах. однако на практике этот способ решения мало применим, так как нет простого метода нахождения интегрирующего множителя.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

• *Линейное неоднородное уравнение* – это уравнение вида:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(x), \qquad (1)$$

где $f(x) \neq 0$,
a_k – известные коэффициенты,
$y(x)$ – искомая функция.

• *Линейное однородное уравнение* – это уравнение вида

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (2)$$

где a_k – известные коэффициенты,
$y(x)$ – искомая функция.

• *Понятие характеристического уравнения.*

Если в уравнениях (1) или (2) коэффициенты a_k числа, но не функции (именно такие и только такие уравнения будут рассматриваться в этом параграфе), то с уравнением (2) связывают так называемое *характеристическое уравнение*

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0 = 0 \qquad (3)$$

Например:
$y'' - 5y' + 6y = e^x$ – линейное неоднородное уравнение второго порядка,
$y'' - 5y' + 6y = 0$ – соответствующее ему однородное уравнение,
$t^2 - 5t + 6 = 0$ – характеристическое уравнение.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

• *Вид общего решения неоднородного линейного уравнения*

ТЕОРЕМА. Общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$\text{О.Р.Н.У.}=\text{О.Р.О.У.}+\text{Ч.Р.Н.У.}$$

ДОК-ВО. (Аналогичное утверждение уже было доказано для линейных уравнений первого порядка. Для уравнений n-го порядка доказательство проводится по той же схеме.)

Пусть y_1 – общее решение линейного однородного уравнения, то есть

$$a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_1' + a_0 y_1 = 0$$

и y_1 содержит n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Пусть y_2 – решение линейного неоднородного уравнения, то есть

$$a_n y_2^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_2' + a_0 y_2 = f(x)$$

Подставим $y = y_1 + y_2$ в исходное уравнение:

$$a_n(y_1+y_2)^{(n)}+a_{n-1}(y_1+y_2)^{(n-1)}+\ldots+a_1(y_1+y_2)'+a_0(y_1+y_2) =$$

$$= \left(a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_1' + a_0 y_1\right) +$$

$$+ \left(a_n y_2^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_2' + a_0 y_2\right) =$$

$$= 0 + f(x) = f(x),$$

значит $y = y_1 + y_2$ – решение неоднородного уравнения, а так как y_1, а значит и y содержит содержит n произвольных постоянных, $y = y_1 + y_2$ – общее решение неоднородного уравнения.

Таким образом, чтобы найти общее решение неоднородного уравнения, надо найти общее решение соответствующего однородного уравнения и частное решение исходного неоднородного уравнения.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

НАХОЖДЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

• *Функции, являющиеся решениями линейного однородного уравнения (случай простого корня характеристического уравнения).*

ТЕОРЕМА 1. Если t_0 – корень характеристического уравнения

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0 = 0,$$

то $y(x) = e^{t_0 x}$ – решение однородного уравнения

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

ДОК-ВО. Подставим $y(x) = e^{t_0 x}$ в однородное уравнение:

$$a_n \left(e^{t_0 x}\right)^{(n)} + a_{n-1} \left(e^{t_0 x}\right)^{(n-1)} + ... + a_1 \left(e^{t_0 x}\right)' + a_0 \left(e^{t_0 x}\right) = 0.$$

Откуда

$$a_n e^{t_0 x} t_0^n + a_{n-1} e^{t_0 x} t_0^{n-1} + ... + a_1 e^{t_0 x} t_0 + a_0 e^{t_0 x} = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$e^{t_0 x} \left(a_n t_0^n + a_{n-1} t_0^{n-1} + ... + a_1 t_0 + a_0\right) = 0.$$

Выражение в скобках равно нулю, так как t_0 корень характеристического уравнения. Следовательно, $y(x) = e^{t_0 x}$ обращает линейное однородное уравнение в истинное равенство, то есть является его решением.

Таким образом, зная k корней характеристического уравнения, можно выписать k решений линейного однородного уравнения.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

• *Функции, являющиеся решениями линейного однородного уравнения (случай кратного корня характеристического уравнения).*

Напомним, корень многочлена называется кратным, если он обращает в ноль не только многочлен, но и его производные, до m-го порядка включительно. В этом случае говорят, что корень имеет кратность m.

ТЕОРЕМА 2. Если t_0 – корень кратности m характеристического уравнения

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0 = 0,$$

то

$$\begin{gathered} y_1(x) = e^{t_0 x}, \\ y_2(x) = x e^{t_0 x}, \\ y_3(x) = x^2 e^{t_0 x}, \\ ... \\ y_m(x) = x^{m-1} e^{t_0 x} \end{gathered}$$

– решения однородного уравнения

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

(Без док-ва).

Таким образом, зная кратный корень характеристического уравнения, можно выписать столько решений линейного однородного уравнения, какова кратность корня.

Теоремы 1 и 2 указывают метод нахождения частных решений однородного уравнения. Следующая теорема дает метод нахождения общего решения.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

• *Вид общего решения линейного однородного уравнения.*

ТЕОРЕМА 3. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ – решения линейного однородного уравнения, то

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x),$$

где C_1, C_2, ..., C_n – произвольные постоянные, так же решение линейного однородного уравнения.

ДОК-ВО. Пусть y_k, $k = 1, 2, ..., n$ – решение линейного однородного уравнения, то есть

$$a_n y_k^{(n)} + a_{n-1} y_k^{(n-1)} + ... + a_1 y_k' + a_0 y_k = 0.$$

Подставим $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$ в исходное уравнение:

$$\begin{gathered}
a_n(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n)^{(n)} + \\
+ a_{n-1}(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n)^{(n-1)} + ... \\
+ a_1(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n)' + \\
+ a_0(C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = \\
= C_1 \Big(a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + ... + a_1 y_1' + a_0 y_1 \Big) + \\
+ C_2 \Big(a_n y_2^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + ... + a_1 y_2' + a_0 y_2 \Big) + ... \\
+ C_n \Big(a_n y_n^{(n)} + a_{n-1} y_n^{(n-1)} + ... + a_1 y_n' + a_0 y_n \Big) = 0,
\end{gathered}$$

так как каждая скобка равна нулю.

Значит $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$ – так же решение однородного уравнения, а так как y содержит содержит n произвольных постоянных, то это общее решение.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Таким образом, чтобы найти общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка, в котором должно быть n произвольных постоянных, надо найти n (с учетом кратности) корней характеристического уравнения, выписать в соответствии с теоремами 1 и 2 соответствующие этим корням частные решения (так называемую фундаментальную систему решений), а затем, применив теорему 3, записать общее решение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть все коэффициенты линейного однородного уравнения действительные числа. Тогда кони характеристического уравнения будут либо так же действительные числа, либо пары комплексно сопряженных корней $a \pm ib$. Им соответствуют решения

$$y(x) = e^{(a \pm ib)x} = e^{ax}(\cos bx \pm i \sin bx).$$

А значит, частными решениями будут так же функции

$$y(x) = e^{ax} \cos bx \quad \text{и} \quad y(x) = e^{ax} \sin bx.$$

Именно в таком виде принято записывать решения линейного однородного уравнения с действительными коэффициентами.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

• Алгоритм нахождения общего решения линейного однородного уравнения с действительными коэффициентами.

Для нахождения общего решения линейного однородного уравнения
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$
следует:

1. Выписать характеристическое уравнение
$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0 = 0$$
и найти его корни.

2. Выписать фундаментальную систему решений по правилу:

а) для каждого действительного корня $t_k = a$ кратности m надо выписать m решений:
$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{ax} \\ y_2(x) &= xe^{ax} \\ y_3(x) &= x^2 e^{ax} \\ &\dots \\ y_m(x) &= x^{m-1} e^{ax} \end{aligned}$$

б) для каждой пары комплексно-сопряженных корней $t_k = a \pm ib$ кратности m надо выписать $2m$ решений:
$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{ax} \cos bx & y_2(x) &= e^{ax} \sin bx \\ y_3(x) &= xe^{ax} \cos bx & y_4(x) &= xe^{ax} \sin bx \\ y_5(x) &= x^2 e^{ax} \cos bx & y_6(x) &= x^2 e^{ax} \sin bx \\ &\dots & &\dots \\ y_{2m-1}(x) &= x^{m-1} e^{ax} \cos bx & y_{2m}(x) &= x^{m-1} e^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

3. Выписать общее решение однородного уравнения (О.Р.О.У.):
$$y(x) = C_1 y_1(x) + ... + C_n y_n(x).$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Пример 1

Решить уравнение $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение. Выпишем характеристическое уравнение и решим его:

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \implies (t-2)(t-3) = 0 \implies \left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = 3. \end{array}\right.$$

Получили два действительных не кратных корня.

Выпишем фундаментальную систему решений:

$$y_1(x) = e^{2x} - \text{ для первого корня,}$$
$$y_2(x) = e^{3x} - \text{ для второго корня.}$$

Выпишем общее решение: $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Ответ. $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Пример 2

Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Решение. Выпишем характеристическое уравнение и решим его:

$$t^2 - 6t + 9 = 0 \implies (t-3)^2 = 0 \implies t = 3.$$

Получили действительный корень кратности 2.

Выпишем фундаментальную систему решений:

$$y_1(x) = e^{3x} \qquad y_2(x) = xe^{3x}.$$

Выпишем общее решение: $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

Ответ. $y(x) = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Пример 3

Решить уравнение $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Решение. Выпишем характеристическое уравнение и решим его:

$$t^2 - 6t + 13 = 0 \implies t = 3 \pm 2i.$$

Получили два комплексных сопряженных корня.

Выпишем фундаментальную систему решений:

$$y_1(x) = e^{3x}\cos 2x \qquad y_2(x) = e^{3x}\sin 2x$$

и общее решение: $y(x) = C_1 e^{3x}\cos 2x + C_2 e^{3x}\sin 2x$.

Ответ. $y(x) = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

Пример 4

Решить уравнение $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.

Решение. Выпишем характеристическое уравнение и решим его:

$$t^3 - 2y^2 - 3y = 0 \implies t(t^2 - 2t - 3) = 0 \implies$$

$$t(t+1)(t-3) = 0 \implies \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = -1, \\ t = 3. \end{array}\right.$$

Получили три действительных не кратных корня.

Выпишем фундаментальную систему решений:

$$y_1(x) = e^{0x} = 1 \quad y_2(x) = e^{-x} \quad y_3(x) = e^{3x}$$

и общее решение: $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$.

Ответ. $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Пример 5

Решить уравнение $y''' + 2y'' + y' = 0$.

Решение. Выпишем характеристическое уравнение и решим его:

$$t^3 + 2y^2 + y = 0 \implies t(t^2 + 2t + 1) = 0 \implies$$

$$t(t+1)^2 = 0 \implies \left[\begin{array}{l} t = 0 \quad \text{(простой корень)}, \\ t = -1 \ \text{(кратный корень)}. \end{array}\right.$$

Выпишем фундаментальную систему решений:

$$y_1(x) = e^{0x} = 1 - \text{ для первого корня},$$

$$y_2(x) = e^{-x} \text{ и } y_3(x) = xe^{-x} - \text{ для второго корня}.$$

и общее решение: $y(x) = C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x}$.

Ответ. $y(x) = C_1 + e^{-x}(C_2 + C_3x)$.

Пример 6

Решить уравнение $y''' + 4y'' + 13y' = 0$.

Решение. Выпишем характеристическое уравнение и решим его:

$$t^3 + 4t^2 + 13t = 0 \implies t(t^2 + 4t + 13) = 0 \implies \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = -2 \pm 3i. \end{array}\right.$$

Выпишем фундаментальную систему решений:

$$y_1(x) = e^{0x} = 1 - \text{ для действительного корня},$$

$$\left.\begin{array}{l} y_2(x) = e^{-2x}\cos 3x \\ y_3(x) = e^{-2x}\sin 3x \end{array}\right\} - \text{ для комплексных корней}.$$

и общее решение: $y(x) = C_1 + C_2e^{-2x}\cos 3x + C_3e^{-2x}\sin 3x$.

Ответ. $y(x) = C_1 + e^{-2x}(C_2\cos 3x + C_3\sin 3x)$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

• *Нахождение частного решения неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов.*

Для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и с правой частью, состоящей из сумм и произведений функций e^{ax}, $\cos bx$, $\sin bx$, $p_0+p_1x+p_2x^2+...+p_mx^m$ частное решение можно искать методом неопределенных коэффициентов, алгоритм которого следующий:

Алгоритм нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения с особой правой частью.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'+a_0y = e^{ax}\Big(P(x)\cos bx+Q(x)\sin bx\Big),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены.

Для нахождения частного решения этого уравнения следует:

1. Выписать характеристическое уравнение
$$a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1t + a_0 = 0$$
и найти его корни.
2. Определить a, b и m – наибольшую из степеней многочленов.
Если в правой части отсутствует множитель e^{ax}, то $a = 0$.
Если нет тригонометрических множителей, то $b = 0$.
Если нет многочленов, то $m = 0$.
3. Определить вид частного решения:
а) если $a + ib$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение имеет вид:

$$y(x) = e^{ax}\Big(\big(p_0 + p_1x + ... + p_mx^m\big)\cos bx+ \\ + \big(q_0 + q_1x + ... + q_mx^m\big)\sin bx\Big)$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

б) если $a+ib$ является корнем характеристического уравнения кратности s, то частное решение имеет вид:

$$y(x) = x^s e^{ax}\Big(\big(p_0 + p_1x + \ldots + p_m x^m\big)\cos bx + \\ + \big(q_0 + q_1x + \ldots + q_m x^m\big)\sin bx\Big)$$

4. Подставить выписанный $y(x)$ в исходное уравнение и, приравняв коэффициенты при подобных членах, найти все коэффициенты $p_1, \ldots\ p_m$ и $q_1, \ldots\ q_m$.
5. Подставив в выписанный ранее $y(x)$ найденные значения коэффициентов $p_1, \ldots\ p_m$ и $q_1, \ldots\ q_m$, выписать частное решение неоднородного уравнения (Ч.Р.Н.У.).

<u>Пример</u>

Найти частное решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = x^2e^{2x}$.

Решение. Правая часть уравнения является произведением многочлена и экспоненты, поэтому можно применить метод неопределенных коэффициентов.

Характеристическое уравнение $t^2 - 4t + 3 = 0$ имеет корни $t = 1$, $t = 3$. По виду правой части определяем значения параметров:

$a = 2$ – коэффициент в степени экспоненты ,

$b = 0$ так как нет тригонометрических функций ,

$m = 2$ – степень многочлена x^2.

Так как $a+ib = 2$ – не является корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y(x) = e^{2x}\Big((p_0 + p_1x + p_2x^2)\cos 0 + (q_0 + q_1x + q_2x^2)\sin 0\Big) = \\ = e^{2x}(p_0 + p_1x + p_2x^2).$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Найдем y' и y'':

$$y' = 2e^{2x}(p_0 + p_1x + p_2x^2) + e^{2x}(p_1 + 2p_2x)$$

$$y'' = \Big(4e^{2x}(p_0 + p_1x + p_2x^2) + 2e^{2x}(p_1 + 2p_2x)\Big) + \\ + \Big(2e^{2x}(p_1 + 2p_2x) + e^{2x}2p_2\Big) = \\ = 4e^{2x}(p_0 + p_1x + p_2x^2) + 4e^{2x}(p_1 + 2p_2x) + e^{2x}2p_2.$$

Подставим y, y' и y'' в исходное уравнение:

$$\Big(4e^{2x}(p_0 + p_1x + p_2x^2) + 4e^{2x}(p_1 + 2p_2x) + e^{2x}2p_2\Big) - \\ - 4\Big(2e^{2x}(p_0 + p_1x + p_2x^2) + e^{2x}(p_1 + 2p_2x)\Big) + \\ + 3e^{2x}(p_0 + p_1x + p_2x^2) = x^2e^{2x}$$

После того, как раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и сократим на e^{2x}, получим:

$$(-p_0 + 2p_2) - p_1x - p_2x^2 = x^2 \implies$$

$$\begin{cases} -p_0 + 2p_2 = 0 \\ -p_1 = 0 \\ -p_2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} p_0 = -2 \\ p_1 = 0 \\ p_2 = -1 \end{cases} \implies \\ \implies y(x) = e^{2x}(-2 - x^2) - \text{Ч.Р.Н.У.}$$

Ответ. $y(x) = e^{2x}(-2 - x^2)$

Замечание. В разобранном примере требовалось найти частное решение неоднородного уравнения. Если бы стояла задача "решить уравнение", необходимо было бы еще выписать общее решение однородного уравнения (О.Р.О.У.): $y_0(x) = C_1e^x + C_2e^{3x}$ (так как корни характеристического уравнения $t = 1$, $t = 3$) и записать ответ: О.Р.Н.У.=О.Р.О.У.+Ч.Р.Н.У., т.е.

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{3x} + e^{2x}(-2 - x^2).$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

• *Метод вариации произвольных постоянных*

Алгоритм нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения с произвольной правой частью.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Для нахождения частного решения этого уравнения может быть применен *метод вариации произвольных постоянных*, который заключается в следующем:

1. Выпишем фундаментальную систему решений, как и при нахождении общего решения однородного уравнения:

$$\begin{aligned} &y_1(x) = \dots, \\ &y_2(x) = \dots, \\ &\dots \\ &y_n(x) = \dots \end{aligned}$$

2. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\ y_1 \ + \ \dots + C_n'(x) y_n = 0, \\ C_1'(x)\ y_1' \ + \ \dots + C_n'(x) y_n' = 0, \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)} + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0, \\ \ldots\ldots \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x); \end{cases}$$

3. Найдем ее решение:

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dots, \\ C_2'(x) = \dots, \\ \ldots\ldots \\ C_n'(x) = \dots \end{cases}$$

4. Интегрированием найдем $C_1(x), \dots, C_n(x)$.

5. Выпишем частное решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + \dots + C_n(x) y_n(x).$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Пример

Найти частное решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = \dfrac{e^{4x}}{1+e^{2x}}$.

Решение. Применим метод вариации произвольных постоянных.

Характеристическое уравнение $t^2 - 5t + 6 = 0$ имеет корни $t = 2$, $t = 3$. Следовательно, фундаментальная система решений

$$y_1(x) = e^{2x}$$
$$y_2(x) = e^{3x}$$

Составим и решим систему, указанную в методе:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)e^{3x} = 0 \\ C_1'(x)(e^{2x})' + C_2'(x)(e^{3x})' = \dfrac{e^{4x}}{1+e^{2x}} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)e^{x} \\ -C_2'(x)e^{x}(x) \cdot 2e^{2x} + C_2'(x)3e^{3x} = \dfrac{e^{4x}}{1+e^{2x}} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}} \\ C_2'(x) = \dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}} \end{cases}$$

Найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{de^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})$$
$$C_2(x) = \int \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{de^{x}}{1+e^{2x}} = \operatorname{arctg} e^{x}$$

Выпишем частное решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) \cdot e^{2x} + \operatorname{arctg} e^{x} \cdot e^{3x}.$$

Ответ. $y(x) = \ln\sqrt{1+e^{2x}} \cdot e^{2x} + \operatorname{arctg} e^{x} \cdot e^{3x}$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Замечание. В разобранном примере требовалось найти частное решение неоднородного уравнения. Если бы стояла задача "решить уравнение", необходимо было бы еще выписать общее решение однородного уравнения (О.Р.О.У.):

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

(так как корни характеристического уравнения $t = 2$, $t = 3$) и записать ответ: О.Р.Н.У.=О.Р.О.У.+Ч.Р.Н.У., т.е.

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \ln\sqrt{1+e^{2x}} \cdot e^{2x} + \operatorname{arctg} e^x \cdot e^{3x}.$$

• *Принцип наложения решений*

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = \\ = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_m(x) \quad (4)$$

ТЕОРЕМА. Если

$y_1(x)$ – решение уравнения $a_n y^{(n)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f_1(x)$

$y_2(x)$ – решение уравнения $a_n y^{(n)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f_2(x)$

. . . . .

$y_m(x)$ – решение уравнения $a_n y^{(n)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f_m(x)$,

то $y(x) = y_1(x) + y_2(x) + ... + y_m(x)$ – решение уравнения (4).

ДОК-ВО самостоятельно (проверить утверждение подстановкой).

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Пример

Решить уравнение $y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x}\cos 2x$.

Решение.

1) Найдем общее решение однородного уравнения:

$$y''' - 6y'' + 9y' = 0. \qquad (1)$$

Составим и решим характеристическое уравнение и выпишем фундаментальную систему решений

$$t^3 - 6t^2 + 9t = 0 \implies t(t-3)^2 = 0 \implies$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \text{ (кратный корень)} \end{cases} \implies \begin{cases} y_1(x) = 1 \\ y_2(x) = e^{3x},\ y_2(x) = xe^{3x} \end{cases}$$

$$\implies z_1(x) = C_1 + C_2e^{3x} + C_3xe^{3x} \text{ – О.Р.О.У. (1)}$$

2) Найдем частное решение неоднородного уравнения:

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}. \qquad (2)$$

По виду правой части определяем значения параметров:

$a = 3$ – коэффициент в степени экспоненты ,

$b = 0$ так как нет тригонометрических функций ,

$m = 1$ – степень многочлена x.

Так как $a + ib = 3$ – является корнем характеристического уравнения кратности 2, частное решение неоднородного уравнения имеет вид: $y(x) = x^2e^{3x}(p_0 + p_1x)$.

Подсчитаем y', y'' и y''', подставим в уравнение (2) и приравняем коэффициенты при подобных слагаемых в левой и правой части уравнения. Найдем $p_0 = -1/18$, $p_1 = 1/18$.

$$\implies z_2(x) = x^2e^{3x}\left(-\tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{18}x\right) \text{ – Ч.Р.Н.У. (2)}$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

3) Найдем частное решение неоднородного уравнения:

$$y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x} \cos 2x. \qquad (3)$$

По виду правой части определяем значения параметров:

$a = 3$ – коэффициент в степени экспоненты ,

$b = 2$ – коэффициент в тригонометрической функции,

$m = 0$ так как нет многочленов.

Так как $a + ib = 3 + 2i$ – не является корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного уравнения имеет вид: $y(x) = e^{3x}(p_0 \cos 2x + q_0 \sin 2x)$.

Подсчитаем y', y'' и y''', подставим в уравнение (3) и приравняем коэффициенты при подобных слагаемых в левой и правой части уравнения. Найдем $p_0 = -3/52$, $p_1 = -1/26$.

$\Longrightarrow \quad z_3(x) = e^{3x}\left(-\frac{3}{52}\cos 2x - \frac{1}{26}\sin 2x\right)$ – Ч.Р.Н.У. (3)

Общим решением исходного уравнения является

$$y(x) = z_1(x) + z_2(x) + z_3(x).$$

Ответ.

$$y(x) = C_1 + e^{3x}\left(C_2 + C_3 x - \frac{x^2}{18} + \frac{x^3}{18} - \frac{3}{52}\cos 2x - \frac{1}{26}\sin 2x\right).$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ*

Задание 1. Решить уравнение с разделяющимися переменными (без поиска особых решений).

1. $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$
2. $(1+y^2)dx+xydy=0$
3. $e^{-y}(1+y')=1$
4. $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$
5. $2x\sqrt{1-y^2}=y'(1+x^2)$
6. $xydx+(x+1)dy=0$
7. $\sqrt{y^2+1}dx=xydy$
8. $2x^2yy'+y^2=2$
9. $y'-xy^2=2xy$
10. $xx'+y=1$

Ответы.

1. $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=C$
2. $x^2(1+y^2)=C$
3. $e^x=C(1-e^{-y})$
4. $1+e^y=C(1+x^2)$
5. $\arcsin y=C+\ln(1+x^2)$
6. $y=C(x+1)e^{-x}$
7. $\ln|x|=C+\sqrt{y^2+1},\ x=0$
8. $y^2-2=Ce^{1/x}$
9. $(Ce^{-x^2}-1)y=2$
10. $x^2+y^2-2y=C$

---

* Задания для практических занятий взяты из сборников:
[1] А.Ф.Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Уч. пособие для вузов. – М.: Наука. 1992. – 128 с.
[2] М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И.Макаренко. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями: Учеб. пособие. – Едиториал УРСС, 2002. – 256 с.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Задание 2. Для уравнения с разделяющимися переменными найти решение задачи Коши.

1. $(x^2-1)y'+2xy^2=0, \qquad y(0)=1$
2. $y'=3\sqrt[3]{y^2}, \qquad y(2)=0$
3. $xy'+y=y^2, \qquad y(1)=0,5$
4. $y'\sin x-y\cos x=0, \qquad y(\pi/2)=1$
5. $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0, \qquad y(0)=1$

Ответы.

1. $y\ln(1-x^2)=1-y$
2. $y=(x-2)^3$
3. $y(1+x)=1$
4. $y=\sin x$
5. $\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-x^2}=1$

Задание 3. Решить однородное уравнение (без поиска особых решений).

1. $(x+2y)dx-xdx=0$
2. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$
3. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$
4. $2x^3y'=y(2x^2-y^2)$
5. $xy'-y=x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$
6. $(x^2+y^2)y'=2xy$
7. $y^2+x^2y'=xyy'$
8. $xy'=y-xe^{y/x}$
9. $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$
10. $(y+\sqrt{xy})dx=xdy$

Ответы.

1. $x+y=Cx^2$
2. $\ln(x^2+y^2)=C-2\operatorname{arctg}(y/x)$
3. $x(y-x)=Cy$
4. $x^2=y^2\ln Cx$
5. $\sin(y/x)=Cx$
6. $y^2-x^2=Cy$
7. $y=Ce^{y/x}$
8. $\ln Cx=e^{-y/x}$
9. $\ln\frac{x+y}{x}=Cx$
10. $2\sqrt{xy}=x\ln Cx$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Задание 4. Решить линейное уравнение первого порядка.

1. $xy' - 2y = 2x^4$
2. $(2x+1)y' = 4x + 2y$
3. $y' + y\operatorname{tg} x = \sec x$
4. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$
5. $x^2y' + xy = 1 = 0$
6. $y = x(y' - x\cos x)$
7. $2x(x^2 + y)dx = dy$
8. $(xy' - 1)\ln x = 2y$
9. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$
10. $(x + y^2)dy = ydx$
11. $(2e^y - x)y' = 1$
12. $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)y' = 1$

Ответы.

1. $y = Cx^2 + x^4$
2. $y = (2x+1)(C + \ln|2x+1|) + 1$
3. $y = \sin x + C\cos x$
4. $y = e^x(\ln|x| + C)$
5. $xy = C - \ln|x|$
6. $y = x(C + \sin x)$
7. $y = Ce^{x^2} - x^2 - 1$
8. $y = C\ln^2 x - \ln x$
9. $xye^x = x^3 + C$
10. $x - y^2 = Cy$
11. $x = e^y + Ce^{-y}$
12. $x = (C - \cos y)\sin y$

Задание 5. Решить уравнение Бернулли.

1. $y' + 2y = y^2e^x$
2. $(x+1)(y' + y^2) = -y$
3. $y' = y^4\cos x + y\operatorname{tg} x$
4. $xy^2y' = x^2 + y^3$
5. $xydy = (y^2 + x)dx$
6. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$
7. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$
8. $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$
9. $y'x^3\sin y = xy' - 2y$
10. $(2x^2y\ln y - x)y' = y$

Ответы.

1. $y(e^x + Ce^{2x}) = 1$
2. $y(x+1)(\ln|x+1| + C) = 1$
3. $y^{-3} = C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x$
4. $y^3 = Cx^3 - 3x^2$
5. $y^2 = Cx^2 - 2x$
6. $y = x^4\ln^2 Cx$
7. $y^{-2} = x^4(2e^x + C)$
8. $y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}$
9. $x^2(C - \cos y) = y$
10. $xy(C - \ln^2 y) = 1$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Задание 6. Убедившись, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его решение.

1. $2xydx + (x^2 - y^2dy = 0$
2. $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$
3. $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$
4. $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$
5. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}\,dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}\,dy = 0$
6. $2x\big(1 + \sqrt{x^2 - y}\big)\,dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$
7. $(1 + y^2 \sin 2x)\,dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0$
8. $3x^2(1 + \ln y)\,dx = \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy$
9. $(\sin xy + xy\cos xy)\,dx + x^2\cos xy\,dy = 0$
10. $(x^3 + xy^2)\,dx + (x^2y + y^3)\,dy = 0$

Ответы.

1. $3x^2y - y^3 = C$
2. $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C$
3. $xe^{-y} - y^2 = C$
4. $4y\ln x + y^4 = C$
5. $x + \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{5}{y} = C$
6. $x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} = C$
7. $x - y^2\cos^2 x = C$
8. $x^3(1 + \ln y) - y^2 = C$
9. $x\sin xy = C$
10. $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = C$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Задание 7. Определить тип уравнения (уравнение может относится к нескольким типам), выбрать метод решения и найти общее решение уравнения (без поиска особых решений).

1. $xy' + x^2 + xy - y = 0$
2. $2xy' + y^2 = 1$
3. $x(x-1)y' + 2xy = 1$
4. $y - y' = y^2 + xy'$
5. $(x + 2y^3)y' = y$
6. $x^2 y' = y(x + y)$
7. $(1 - x^2)\,dy + xy\,dx = 0$
8. $2(x - y^2)\,dy = y\,dx$
9. $y'(x - y^2) = 1$
10. $xy' = e^y + 2y'$
11. $2x^3 yy' + 3x^2 y^2 + 7 = 0$
12. $\dfrac{dx}{x} = \left(\dfrac{1}{y} - 2x\right) dy$
13. $x - \dfrac{y}{y'} = \dfrac{2}{y}$
14. $x^2 y' - 2xy = 3y$
15. $dy + (xy - xy^3)\,dx = 0$
16. $(2xy^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$
17. $(1 - x^2)y' - 2xy^2 = xy$
18. $y' + y = xy^3$
19. $(x - xy^4)\,dx = (y + xy)\,dy$
20. $(\sin x + y)\,dy + (y\cos x - x^2)\,dx = 0$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

21. $yy' + y^2 \operatorname{ctg} x = \cos x$
22. $x(x+1)(y'-1) = y$
23. $y(y - xy') = \sqrt{x^4 + y^4}$
24. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$
25. $(x\cos y + \sin 2y)y' = 1$
26. $yy' = xe^{2x} + y^2$
27. $y'\sqrt{x} = \sqrt{y - x} + \sqrt{x}$
28. $xy' = 2\sqrt{y}\cos x - 2y$
29. $y^2(y - xy') = x^3 y'$
30. $x\,dy = (x+y)\,dx$

Ответы.

1. $y = x(Ce^{-x} - 1)$
2. $(Cx+1)y = Cx - 1$
3. $(x-1)^2 y = x - \ln|x| + C$
4. $y(x+C) = x+1$
5. $x = Cy + y^3$
6. $y\ln Cx + x = 0$
7. $y^2 = C(x^2 - 1)$
8. $x = y^2(C - 2\ln|y|)$
9. $x = Ce^y + y^2 + 2y + 2$
10. $-e^{-y} = \ln C(x-2)$
11. $x^3y^2 + 7x = C$
12. $y(xy - 1) = Cx$
13. $y^2 = C(xy - 1)$
14. $y = Cx^2 e^{-3/x}$
15. $y^2(Ce^{x^2} + 1) = 1$
16. $y(x^2 - C) = x$
17. $y(C\sqrt{|x^2 - 1|} - 2) = 1$
18. $y^2(Ce^{2x} + x + 0,5) = 1$
19. $y^2 - 1 = C(x+1)^4 e^{-4x}(y^2 + 1)$
20. $y\sin x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^2}{2} = C$
21. $3y^2 = 2\sin x + C\sin^{-2} x$
22. $(x+1)y = x^2 + x\ln Cx$
23. $y^2 + \sqrt{x^4 + y^4} = C$
24. $y^{2/3} = Ce^{2x} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{6}$
25. $x = Ce^{\sin y} - 2(1 + \sin y)$
26. $y^2 = (x^2 + C)e^{2x}$
27. $\sqrt{y - x} - \sqrt{x} = C$
28. $x\sqrt{y} = \sin x + C$
29. $y^2 + 2x^2 \ln Cy = 0$
30. $y = x(\ln|x| + C)$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Задание 8. Решить линейное однородное уравнение.

1. $y'' - y = 0$
2. $3y'' - 2y' - 8y = 0$
3. $y'' + 2y' + y = 0$
4. $y'' + 4y = 0$
5. $4y'' - 8y' + 5y = 0$
6. $y'' + y' - 2y = 0$
7. $y'' - 2y' = 0$
8. $2y'' - 5y' = 2y = 0$
9. $y'' - 4y' + 5y = 0$
10. $y'' + 2y + 10y = 0$

11. $y''' - 8y = 0$
12. $y^{(4)} - y = 0$
13. $y^{(4)} + 4y = 0$
14. $y''' - y'' - y' + y = 0$
15. $y^{(5)} - 5y^{(4)} + 9y''' = 0$
16. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$
17. $y^{(4)} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$
18. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

Ответы.

1. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
2. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x/3}$
3. $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$
4. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$
5. $y = e^x \left(\cos \dfrac{x}{2} + C_2 \sin \dfrac{x}{2} \right)$
6. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$
7. $y = C_1 + C_2 e^{2x}$
8. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x/2}$
9. $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
10. $y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

11. $y = C_1 e^{2x} + e^{-x} \left(C_2 \cos x\sqrt{3} + C_3 \sin x\sqrt{3} \right)$
12. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$
13. $y = e^x \big(C_1 \cos x + C_2 \sin x \big) + e^{-x} \big(C_3 \cos x + C_4 \sin x \big)$
14. $y = e^x (C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-x}$
15. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{3x}(C_4 + C_5 x)$
16. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$
17. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{-x}(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$
18. $y = e^x (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Задание 9. Найти решения линейных однородных уравнений, удовлетворяющие указанным условиям.

1. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -2$
2. $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 10$
3. $y'' - 2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 3$
4. $y''' - y' = 0, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = -1, \; y''(0) = 1$
5. $y''' + y'' = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = 1$
6. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2, \; y''(0) = 3$

Ответы.

1. $y = (7 - 3x)x^{x-2}$
2. $y = 4e^x + 2e^{3x}$
3. $y = e^x(\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x)$
4. $y = 2 + e^{-x}$
5. $y = x + e^{-x}$
6. $y = e^x(1 + x)$

Задание 10. Для линейного неоднородного уравнения определить вид частного решения и найти общее решение.

1. $y'' + 2y' + y = -2$
2. $y'' + 2y' = -2$
3. $y'' + 9y = 9$
4. $y''' + y'' = 1$
5. $5y''' - 7y'' - 3 = 0$
6. $y^{(4)} - 6y''' + 6 = 0$
7. $3y^{(4)} + y''' = 2$
8. $y'' - 4y' + 4y = x^2$
9. $y'' + 8y' = 8x$
10. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$
11. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$
12. $7y'' - y' = 14x$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

13. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$

14. $y'' = 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}$

15. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$

16. $y'' + y' + y = (x + x^2)e^x$

17. $y'' + 4y' - 2y = 8 \sin 2x$

18. $y'' + y = 4x \cos x$

19. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x$

20. $y'' - y' = -2e^x \sin x$

21. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$

22. $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x} \cos x$

23. $4y'' = 8y' = x \sin x$

24. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$

25. $y'' + y' - 2y = x^2e^{4x}$

26. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$

27. $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$

28. $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x$

29. $y'' - 2y' + y = x^3$

30. $y^{(4)} + y'' = x^2 + x$

31. $y'' + y = x^2 \sin x$

32. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x} \cos x$

33. $y''' - y = \sin x$

34. $y^{(4)} - 2y'' + y = \cos x$

35. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x \cos 2x$

36. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(\sin x + 2 \cos x)$

37. $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$

38. $y'' + 2y' - 3y = x^2e^x$

39. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$

40. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Ответы.

1. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} - 2$
2. $y = C_1 + C_2e^{-2x} - x$
3. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 1$
4. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \dfrac{x^2}{2}$
5. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{7x/5} - \frac{3}{14}x^2$
6. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{6x} + \dfrac{x^3}{6}$
7. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-x/3} + \dfrac{x^3}{3}$
8. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}$
9. $y = C_1 + C_2e^{-8x} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{8}$
10. $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + 4x^2e^{-2x}$
11. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x} - \frac{9}{2}xe^{-3x}$
12. $y = C_1 + C_2e^{x/7} - 7x^2 - 98x$
13. $y = C_1 + C_2e^{-3x} - \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{3}\right)e^{-3x}$
14. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x} + (20x - 5x^2)e^{-2x}$
15. $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-x} + \dfrac{x}{2}$
16. $y = (C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x)e^{-x/2} + \frac{1}{3}(x^2 - x + 1)e^x$
17. $y = C_1e^{-(\sqrt{6}+2)x} + C_2e^{(\sqrt{6}+2)x} - \frac{1}{25}(16 \cos 2x + 12 \sin 2x)$
18. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cos x + x^2 \sin x$
19. $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-x} - \frac{1}{4}xe^{-x} \cos 2x$
20. $y = C_1 + C_2e^x - (\cos x + \sin x)e^x$
21. $y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{5}(6 \sin x - 2 \cos x)e^x$
22. $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-2x} + 5xe^{-2x} \sin x$
23. $y = C_1 + C_2e^{-2x} - \left(\dfrac{x}{10} + \dfrac{1}{50}\right) \cos x + \left(\dfrac{7}{50} - \dfrac{x}{20}\right) \sin x$
24. $y = C_1e^{2x} + C_2e^x - \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)e^x$
25. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \dfrac{1}{18}\left(x^2 - x + \dfrac{7}{18}\right)e^{4x}$
26. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \left(\dfrac{x^2}{2} - x + 1\right)e^{3x}$
27. $y = C_1e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - (x^2 + 3x + 1)$
28. $y = (C_1 + C_2x)e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \dfrac{x^2}{4}e^x$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

29. $y = (C_1 + C_2 x)e^x + x^3 + 6x^2 + 18x + 24$

30. $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} - x^2$

31. $y = \left(C_1 + \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{6}\right)\cos x + \left(C_2 + \dfrac{x^2}{4}\right)\sin x$

32. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \big((6 - x^2)\cos x + 4x \sin x\big)e^{-x}$

33. $y = C_1 e^x + \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-x/2} + \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$

34. $y = (C_1 + C_2 x)e^x + (C_3 + C_4 x)e^{-x} + \frac{1}{4}\cos x$

35. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^3)e^x - \frac{1}{8}e^x \sin 2x$

36. $y = \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{x}{2}\cos x + x \sin x\right)e^{2x}$

37. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (0,1x - 0,12)\cos x - (0,3x + 0,34)\sin x$

38. $y = \left(\dfrac{x^3}{12} - \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{x}{32} + C_1\right)e^x + C_2 e^{-3x}$

39. $y = (C_1 + C_2 x + x^3)e^x$

40. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \left(\dfrac{x}{16} - \dfrac{1}{32}\right)e^{2x}$

Задание 11. Решить линейное неоднородное уравнение, используя принцип суперпозиции для нахождения частного решения.

1. $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$
2. $y'' - 3y' = 18x - 10\cos x$
3. $y'' - 2y' + y = 2 + e^x \sin x$
4. $y'' = 2y' + 2y = (5x + 4)e^x + e^{-x}$
5. $y'' - 2y' + 5y = 10\sin x + 17\sin 2x$
6. $y'' + y' = x^2 - e^{-x} + e^x$

Ответы.

1. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 2x + 1 + e^x$
2. $y = C_1 + C_2 e^{3x} - 3x^2 - 2x + \cos x + 3\sin x$
3. $y = 2 + e^x(C_1 + C_2 x - \sin x)$
4. $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-x} + xe^x + e^{-x}$
5. $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^x + \cos x + 2\sin x + 4\cos 2x + \sin 2x$
6. $y = C_1 + C_2 e^{-x} + xe^{-x} + \dfrac{e^x}{2} + \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 2x$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Задание 12. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации произвольных постоянных для нахождения частного решения.

1. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$
2. $y'' - y = \dfrac{1}{e^x + 1}$
3. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$
4. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$
5. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$
6. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$
7. $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^3 x}$
8. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$
9. $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$
10. $y''' + y'' = \dfrac{x-1}{x^2}$

Ответы.

1. $y = (C_1 - x)\cos x + (C_2 + \ln|\sin x|)\sin x$
2. $y = C_1 e^x + C_2 + (e^x + 1)\ln(1 + e^{-x})$
3. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{\cos 2x}{2\cos x}$
4. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln|\operatorname{tg} \frac{x}{2}|$
5. $y = (C_1 + C_2 x)e^x - e^x \ln\sqrt{1 + x^2} + e^x x \operatorname{arctg} x$
6. $y = (C_1 - x)e^{-x}\cos x + (C_2 + \ln|\sin x|)e^{-x}\sin x$
7. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$
8. $y = C_1 e^x + C_2 - \cos e^x$
9. $y = \sin 2x \ln|\cos x| - x\cos 2x + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$
10. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + 1 - x + x\ln|x|$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Задание 13. Для линейных неоднородных уравнений найти частные решения, удовлетворяющие указанным условиям.

1. $y'' + y = 2(1-x), \quad y(0) = 2, \ y'(0) = -2$
2. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 3$
3. $y'' + 9y = 36e^{3x}, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = 6$
4. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0$
5. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0$
6. $y'' + y' = e^{-x}, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = -1$
7. $y''' - y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x), \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = 2$
8. $y^{(4)} - y = 8e^x, \ y(0) = -1, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = 1, y'''(0) = 0$
9. $y''' - y = 2x, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = 2$
10. $y^{(4)} - y = 8e^x, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 2, \ y''(0) = 4, \ y'''(0) = 6$

Ответы.

1. $y = 2 - 2x$
2. $y = x^2 + e^{3x}$
3. $y = 2e^{3x}$
3. $y = x^2 e^{2x}$
5. $y = e^{2x} - e^{3x} + xe^{-x}$
6. $y = 1 - xe^{-x}$
7. $y = \dfrac{e^x}{2} - \dfrac{e^{-x}}{2} + x^2$
8. $y = \cos x + 2\sin x + e^{-x} + (2x - 3)e^x$
9. $y = 2x - \dfrac{4}{\sqrt{3}} e^{-x/2} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x$
10. $y = 2xe^x$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Задание 14. Решить систему линейных дифференциальных уравнений.

Указание. Для решения первой системы можно применить следующий алгоритм:

1). выразить из первого уравнения y;

2). продифференцировать получившееся выражение;

3). подставить полученные выражения для y и y' во второе уравнение системы;

4). решить получившееся уравнение (линейное однородное уравнение второго порядка);

5). используя найденное выражение для x, найти y.

В остальных случаях действовать аналогично.

1. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - 4x \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' + x - 8y = 0 \\ y' - x - y = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3y - 2x \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = y - x + z \\ z' = x - z \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2z - y \end{cases}$

Ответы.

1. $x = C_1e^t + C_2e^{5t}, \quad y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$
2. $x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}, \quad y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}$
3. $x = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t}, \quad y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$
4. $x = (C_1 \cos t + C_2 \sin t)e^{2t}, \quad y = \Big((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t\Big)e^{2t}$
5. $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$, $y = C_1e^t - 3C_3e^{-t}$, $z = C_1e^t + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}$
6. $x = C_1 + 3C_2e^{2t},\ y = -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t},\ z = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}$
7. $x = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{2t},\ y = (C_1 - 2C_2 + C_2t)e^t,$

   $z = (C_1 - C_2 + C_2t)e^t + C_3e^{2t}$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1. Найти частные решения дифференциальных уравнений первого порядка, удовлетворяющие указанным условиям:

1. $(1+e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 1$

2. $y' \sin x = y \ln y, \quad y(\frac{\pi}{2}) = e$

3. $y' \sin x - y \cos x = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$

4. $(1+y^2)\,dx + xy\,dy = 0, \quad y(1) = 2$

5. $(1+y^2)\,dx = x\,dy, \quad y(1) = 0$

6. $1 + y' = e^y, \quad y(0) = 0$

7. $y \ln y\,dx + x\,dy = 0, \quad y(1) = 1$

8. $y' = e^{x+y}, \quad y(0) = 0$

9. $y' \operatorname{tg} x = y, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 2$

10. $xy' - y = y^3, \quad y(\sqrt{2}) = 1$

11. $y + xy' = 2(1+xy), \quad y(2) = -\frac{1}{2}$

12. $y - xy' = 3(1 + x^2 y'), \quad y(2) = 1$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ЗАДАНИЕ 2. Найти общие решения дифференциальных уравнений первого порядка:

1a). $3y^2y' + y^3 = 1$

b). $xy' = y + x\cos^2(\dfrac{y}{x})$

c). $(\dfrac{\sin 2x}{y} + x)\,dx + (y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2})\,dy = 0$

2a). $(3x^2y + y^3)\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy = 0$

b). $xy' + y = y^2 \ln x$

c). $xy' = y(\ln y - \ln x)$

3a). $y' + 2xy = 2xy^2$

b). $y(x^2 + y^2 + 1)\,dy + x(x^2 + y^2 - 1)\,dx = 0$

c). $x^2\,dy = (y^2 - xy + x^2)\,dx$

4a). $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$

b). $2y'\sin x + y\cos x = y^3 \sin^2 x$

c). $(x^3 + xy^2)\,dx + (x^2y + y^3)\,dy = 0$

5a). $y' - 2ye^x = 2\sqrt{y}e^x$

b). $(3x^2 - 2x - y)\,dx + (2y - x + 3y^2)\,dy = 0$

c). $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

6a). $2xyy'\ln x + y^2 = x\cos x$

b). $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$

c). $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

7a). $\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x} = (\cos x - x\cos y - \dfrac{1}{y})y'$

b). $2x^2y' = x^2 + y^2$

c). $3xy^2y' - 2y^3 = x^3$

8a). $(\sin(xy) + xy\cos(xy))\,dx = -x^2\cos(xy)\,dy$

b). $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

c). $(x^2 + y^2 + 1)\,dy + xy\,dx = 0$

9a). $(x^3 - 3xy^2 + 2)\,dx - (3x^2y - y^2)\,dy = 0$

b). $y' - y\cos x = y^2\cos x$

c). $(4x - 3y)\,dx + (2y - 3x)\,dy = 0$

10a). $xy' + y = -x^2y^2$

b). $(y - x)\,dx + (y + x)\,dy = 0$

c). $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2xy\,dy = 0$

11a). $x + y + (x + 2y)y' = 0$

b). $(x - y)y\,dx = x^2\,dy$

c). $2xyy' - y^2 + x = 0$

12a). $4x^2 + 3xy + y^2 = -(4y^2 + 3xy + x^2)y'$

b). $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0$

c). $xy' = 4y + x^2\sqrt{y}$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ЗАДАНИЕ 3. Найти общие решения линейных неоднородных уравнений:

1. $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$
2. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} + 17\sin 2x$
3. $y'' + 6y' + 9y = 18e^{-3x} + 8\sin x + 6\cos x$
4. $y'' - 2y' + 5y = 10\sin x + 17\sin 2x$
5. $y'' + 2y' + 1 = 3\sin 2x + \cos x$
6. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$
7. $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x}$
8. $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x$
9. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \dfrac{x}{2}$
10. $y'' - 3y' = x + \cos x$
11. $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$
12. $y'' - 3y' = 18x - 10\cos x$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ЗАДАНИЕ 4. Найти частные решение уравнения, удовлетворяющее указанным условиям:

1. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$

2. $y'' - y = \dfrac{1}{e^x + 1}$ $\quad y(0) = 2\ln 2, \quad y'(0) = \ln 2$

3. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$ $\quad y(0) = 1.5, \quad y(\dfrac{\pi}{4}) = 0$

4. $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$ $\quad y(0) = 4, \quad y'(0) = \dfrac{1}{32}$

5. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ $\quad y(1) = 2e, \quad y(-1) = 0$

6. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$ $\quad y(1) = \dfrac{2}{e}, \quad y(-1) = 0$

7. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$ $\quad y(\dfrac{\pi}{2}) = 1, \quad y'(\dfrac{\pi}{2}) = 0$

8. $y'' + y = x \sin x$ $\quad y(0) = 3, \quad y(\dfrac{\pi}{2}) = 0$

9. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$ $\quad y(\dfrac{\pi}{4}) = e^{-\pi/4}\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad y(\dfrac{\pi}{2}) = 1$

10. $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^3 x}$ $\quad y(\dfrac{\pi}{2}) = 3, \quad y'(\dfrac{\pi}{2}) = 2$

11. $y'' + y = 4x \cos x$ $\quad y(0) = 3, \quad y(\dfrac{\pi}{2}) = 1$

12. $y'' - 2y' + y = 2 + e^x \sin x$ $\quad y(0) = 2, \quad y(\pi) = 2 + \pi e^{\pi}$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Сводная таблица изученных типов дифференциальных уравнений первого порядка и методов их решения

(1) $\boxed{y'(x) = f(x)g(y)}$ уравнение с разделяющимися переменными

◇ заменить $y'(x) = \frac{dy}{dx}$;

◇ разделить переменные;

◇ проинтегрировать получившееся равенство.

(2) $\boxed{y'(x) = F\left(\dfrac{y}{x}\right)}$ – однородное уравнение

◇ замена $y = tx$ – получится уравнение типа (1)

(3) $\boxed{y' = a(x)y + f(x)}$ – линейное уравнение первого порядка

◇ решить уравнение $y' = a(x)y$ (уравнение вида (1));

◇ записать решение в виде $y_1 = Cg(x)$

◇ подставить $y_2 = C(x)g(x)$ в исходное уравнение;

◇ упростить и выразить $C'(x)$, найти $C(x)$;

◇ подставив найденное $C(x)$, записать ответ: $y = y_1 + y_2$.

(4) $\boxed{y' = a(x)y + f(x)y^n}$, ($n \neq 1$ – уравнение Бернулли

◇ замена $y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-n}}$ – получится уравнение типа (3)

(5) $\boxed{M(x;y)\,dx + N(x;y)\,dy = 0, \text{ где } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$ – уравнение в полных дифференциалах

◇ $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x;y) \quad \Longrightarrow \quad u(x;y) = \int M(x;y)\,dx + C(y)$;

◇ подставим получившееся $u(x;y)$ в условие $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x;y)$;

◇ выразим $C'(y)$, найдем $C(y)$, поставим в $u(x;y)$;

◇ ответ: $u(x;y) = C$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Линейные уравнения второго порядка с действительными коэффициентами

Основная теорема

Общее решение неоднородного уравнения =
= общее решение однородного уравнения +
+ частное решение неоднородного уравнения

Общее решение однородного уравнения

(1) $\boxed{ay'' + by' + cy = 0}$ – однородное уравнение

Составим характеристическое уравнение $at^2 + bt + c = 0$ и находим его корни.

⋄ Если $D > 0$, получим два действительных корня t_1 и t_2 и $y = C_1 e^{t_1 x} + C_2 e^{t_2 x}$ – общее решение однородного уравнения.

⋄ Если $D = 0$, получим один действительный корень t_0 и $y = (C_1 + C_2 x)e^{t_0 x}$ – общее решение однородного уравнения.

⋄ Если $D < 0$, получим два комплексно-сопряженных корня $t_{1,2} = \lambda \pm i\mu$ и $y = (C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x)e^{\lambda x}$ – общее решение однородного уравнения.

Вид частного решения некоторых неоднородных уравнений

(2) $\boxed{ay'' + by' + cy = \lambda e^{\mu x}}$

Обозначим t_1 и t_2 – корни характеристического уравнения

⋄ Если $\mu \neq t_1$ и $\mu \neq t_2$, то вид частного решения $y = pe^{\mu x}$.

⋄ Если $\mu = t_1$ и $\mu \neq t_2$, то вид частного решения $y = pxe^{\mu x}$.

⋄ Если $\mu = t_1 = t_2$, то вид частного решения $y = px^2 e^{\mu x}$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

(3) $\boxed{ay'' + by' + cy = \lambda \cos \mu x + \eta \sin \mu x}$

◇ Если $b = 0$ и $c = a\mu^2$, то вид частного решения $y = x(p \cos \mu x + q \sin \mu x)$.

◇ Если $b \neq 0$ или $c \neq a\mu^2$, то вид частного решения $y = p \cos \mu x + q \sin \mu x$.

(4) $\boxed{ay'' + by' + cy = P_n(x)}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n

◇ Если $c \neq 0$, то вид частного решения $y = Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n

◇ Если $c = 0$, то вид частного решения $y = xQ_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.

Таблицы неопределенных интегралов

Простейшие интегралы

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$$

$$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2} x} = tgx + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2} x} = -ctgx + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{a^{2}+x^{2}} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c \\ -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + c \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^{2}-a^{2}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{a^{2}-x^{2}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + c \\ -\arccos\frac{x}{a} + c \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2} \pm a^{2}}} = \ln\left|x + \sqrt{x^{2} \pm a^{2}}\right| + c$$

$$\int shxdx = chx + c$$

$$\int chxdx = shx + c$$

$$\int \frac{dx}{ch^{2}x} = thx + c$$

$$\int \frac{dx}{sh^{2}x} = -cthx + c$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Рациональные функции

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + C$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)\cdot(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x+a)\cdot(x+b)} = \frac{1}{a-b}\left(a\cdot\ln|x+a| - b\cdot\ln|x+b|\right) + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-a^2\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+a^2\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2} + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^3} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\cdot\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C \qquad \left(b^2-4ac>0\right)$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + C \qquad \left(b^2-4ac<0\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{x\,dx}{ax+b} = \frac{1}{a^2}\left(b+ax-b\cdot\ln|ax+b|\right) + C$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{ax+b} = \frac{1}{a^3}\left[\frac{1}{2}(ax+b)^2 - 2b(ax+b) + b^2\ln|ax+b|\right] + C$$

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\cdot\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right) + C$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^3}\left(b+ax-2b\cdot\ln|ax+b| - \frac{b^2}{ax+b}\right) + C$$

Иррациональные функции

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\cdot\sqrt{ax+b} + C$$

$$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}(ax+b)^{1.5} + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\cdot\sqrt{ax+b} + C$$

$$\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2}\cdot(ax+b)^{1.5} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x+c)\cdot\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b-ac}}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}\right| + C \qquad (b-ac>0)$$

$$\int \frac{dx}{(x+c)\cdot\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{ac-b}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}}\right) + C \qquad (b-ac<0)$$

$$\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\,dx = \frac{1}{c}\cdot\sqrt{(ax+b)\cdot(cx+d)} - \frac{ad-bc}{c\cdot\sqrt{ac}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a(cx+d)}{c(ax+b)}}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{ax+b}} = \frac{-\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{ax+b}}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\cdot\sqrt{ax+b} + b\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{ax+b}}\,dx$$

$$\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b)\arcsin\left(\sqrt{\frac{x+b}{a+b}}\right) + C$$

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b)\arcsin\left(\sqrt{\frac{b-x}{a+x}}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a\cdot\left(ax^2+bx+c\right)}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) + C$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} + a\cdot\arcsin\left(\frac{a}{x}\right) + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} + a\cdot\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\cdot\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right| + C$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Тригонометрические функции

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C \qquad \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

$$\int \sin^n(x)\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\cdot\cos(x) + \frac{n-1}{n}\cdot\int \sin^{n-2}(x)\,dx$$

$$\int \cos^n(x)\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\cdot\sin(x) + \frac{n-1}{n}\cdot\int \cos^{n-2}(x)\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C \qquad \int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\mathrm{ctg}(x) + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \mathrm{tg}(x) + C$$

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

$$\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$$

$$\int \sin(x)\cos^2(x)\,dx = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + C$$

$$\int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + C$$

$$\int \mathrm{tg}(x)\,dx = -\ln|\cos(x)| + C \qquad \int \mathrm{ctg}(x)\,dx = \ln|\sin(x)| + C$$

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx = \frac{1}{\cos(x)} + C \qquad \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\,dx = \mathrm{tg}(x) - x + C$$

$$\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\,dx = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| - \sin(x) + C$$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx = -\frac{1}{\sin(x)} + C \qquad \int \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\,dx = -\mathrm{ctg}(x) - x + C$$

$$\int \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\,dx = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \cos(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos(x)\sin(x)} = \ln|\mathrm{tg}(x)| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos(x)} = -\frac{1}{\sin(x)} + \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin(x)\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)} + \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos^2(x)} = \mathrm{tg}(x) - \mathrm{ctg}(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^n(x)} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\cos(x)}{\sin^{n-1}(x)} + \frac{n-2}{n-1}\cdot\int \frac{dx}{\sin^{n-2}(x)}\,dx$$

$$\int \mathrm{tg}^n(x)\,dx = \frac{\mathrm{tg}^{n-1}(x)}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\,dx$$

$$\int \mathrm{ctg}^n(x)\,dx = -\frac{\mathrm{ctg}^{n-1}(x)}{n-1} - \int \mathrm{ctg}^{n-2}(x)\,dx$$

$$\int \sin(x)\cos^n(x)\,dx = -\frac{\cos^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

$$\int \sin^n(x)\cos(x)\,dx = \frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

Показательная и логарифмическая функции

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln|a|} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\cdot\ln x} = \ln|\ln x| + C$$

$$\int x^n\cdot\ln x\,dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C$$

$$\int e^{ax}\cdot\ln x\,dx = \frac{e^{ax}\cdot\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx$$

$$\int x^n\ln^m x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln^m x - \frac{m}{n+1}\int x^n\ln^{m-1} x\,dx$$

$$\int \frac{x^n}{\ln^m x}\,dx = -\frac{x^{n+1}}{(m-1)\cdot\ln^{m-1} x} + \frac{n+1}{m-1}\int \frac{x^n}{\ln^{m-1} x}\,dx$$

$$\int \ln x\,dx = x\cdot\ln x - x + C$$

$$\int \arcsin(x)\,dx = x\cdot\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \mathrm{arctg}(x)\,dx = x\cdot\mathrm{arctg}(x) - \ln\sqrt{1+x^2} + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int x\cdot e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$$

$$\int \frac{a^x}{x^n}\,dx = -\frac{a^x}{(n-1)\cdot x^{n-1}} + \frac{\ln(a)}{n-1}\int \frac{a^x}{x^{n-1}}\,dx$$

$$\int \mathrm{sh}(x)\,dx = \mathrm{ch}(x) + C \qquad \int \mathrm{ch}(x)\,dx = \mathrm{sh}(x) + C$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО