V-VII

Методика обучения и воспитания (математика). Частная методика

Часть 1. Арифметика. Алгебра. Начала математического анализа

С.В. Лебедева
СГУ им. Н.Г. Чернышевского
Саратов, 2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Механико-математический факультет

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ (МАТЕМАТИКА). ЧАСТНАЯ МЕТОДИКА

(в вопросах, педагогических задачах и ситуациях)

ЧАСТЬ 1. АРИФМЕТИКА. АЛГЕБРА. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Учебно-методическое пособие

для студентов, обучающихся по направлению 44.03.01 – педагогическое образование, профиль – математическое образование

Саратов, 2016

УДК 51(072.8)(076.5)

Рекомендовано к печати
учебно-методическим советом механико-математического факультета
Саратовского государственного университета имени Н.Г.Чернышевского

Л 33 Лебедева, С. В. Методика обучения и воспитания (математика). Частная методика (в вопросах, педагогических задачах и ситуациях) в 3-х частях. Часть 1. Арифметика. Алгебра. Начала математического анализа: учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки 44.03.01 – педагогическое образование, профиль – математическое образование / С. В. Лебедева – Саратов, 2016. – 160 с.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для:

– организации практических занятий по дисциплинам «Методика обучения и воспитания (математика)», «Частная методика обучения математике»,

– различных видов текущего контроля,

– подготовки к автоматизированному тестированию, предусмотренному рабочей программой курса «Методика обучения и воспитания (математика)»,

– подготовки к государственному экзамену по методике обучения математике.

Тестовая база может стать основой для разработки тестов остаточных знаний, устных опросов и других форм контроля по дисциплинам «Методика обучения и воспитания (математика)» и «Частная методика обучения математике».

База тестовых заданий представлена двумя типами заданий.

Задания первого типа направлены на проверку знаний основных теоретических положений частной методики обучения математики.

В заданиях второго типа описана некоторая педагогическая ситуация, которую студенту предстоит решить, при этом предлагаются возможные объяснения или варианты решения ситуации, из которых необходимо выбрать подходящий. Если при этом выбранный вариант не совпадает с вариантом автора пособия, то студент должен обосновать: (1) свой выбор письменно и предоставить своё решение преподавателю, или (2) устно и инициировать таким образом дискуссию в группе.

Для удобства все вопросы разбиты на темы, соответствующие содержательно-методическим линиям школьного курса математики, что позволяет использовать пособие в качестве содержательной основы для

проведения практических занятий и семинаров по методике обучения математике,

организации консультаций в период прохождения студентами педагогических практик,

самостоятельного изучения отдельных вопросов частной методики.

В приложениях даны решения задач типовых и повышенной сложности, демонстрирующие логику изложения соответствующих вопросов школьного курса математики.

ИЗУЧЕНИЕ ЧИСЕЛ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1. Числовая линия школьного курса математики изучается в:

а) 1-6 классах,
б) 1-8 классах,
в) 1-11 классах,
г) 5-9 классах,
д) 5-11 классах.

2. Числовая линия строится (начальная школа) на основе

а) измерения величин,
б) расположения числа (точки) на координатной прямой,
в) решения уравнений (поиска неизвестных),
г) счета предметов (элементов множества).

3. В начальной школе в рамках числовой линии учащиеся осваивают

а) математический язык, учатся читать математический текст, использовать математические термины для описания явлений окружающего мира,

б) приемы устных и письменных вычислений, прикидки, между их компонентами и результатами,

в) принципы записи и сравнения целых неотрицательных чисел,

г) различные величины и общие принципы их измерения,

д) смысл и свойства арифметических действий, взаимосвязи между ними,

е) смысл понятия натурального числа и нуля,

ж) способы выполнения действий со значениями величин (именованными числами),

з) способы записи выражений и свойств чисел с помощью буквенной символики,

и) способы нахождения неизвестных компонентов сложения, вычитания, умножения и деления.

4. В начальной школе в рамках числовой линии учащиеся знакомятся с

а) математическим языком, учатся читать математический текст, использовать математические термины для описания явлений окружающего мира,

б) приемами устных и письменных вычислений,

в) принципами записи и сравнения целых неотрицательных чисел,

г) различными величинами и общим принципом их измерения,

д) смыслом и свойствами арифметических действий, взаимосвязью между ними,

е) смыслом понятия натурального числа и нуля,

ж) способами выполнения действий со значениями величин (именованными числами),

з) способами нахождения неизвестных компонентов сложения, вычитания, умножения и деления.

5. Выпускникам начальной школы была предложена серия тестовых заданий, максимально широко охватывающих материал начального курса математики. Какие базовые знания, умения и навыки должны продемонстрировать выпускники при выполнении следующего задания: «Дан ряд чисел: 2198, 384, 5036, 53, 3048, 538, 429, 393, 5306, 371. Верны ли утверждения: (а) В этом ряду есть число *пятьсот тридцать шесть*. (б) Трехзначных чисел в этом ряду больше, чем четырехзначных. (в) В этом ряду ровно 4 нечетных числа. (г) Разность самого большого и самого маленького из данных чисел меньше 5000»?

а) анализ математических моделей,

б) анализ математических объектов,

в) владение математическим языком,

г) владение приемами устных и письменных вычислений,

д) владение способами нахождения неизвестных компонентов сложения, вычитания, умножения и деления,

е) осознание смысла понятий натурального числа и нуля,

ж) осознание смысла и свойств арифметических действий, взаимосвязью между ними,

з) применение принципов записи и сравнения целых неотрицательных чисел к решению задач,

и) умение использовать математические термины для описания явлений окружающего мира,

к) умение читать математический текст.

6. Предметные результаты изучения предметной области «Математика и информатика» должны отражать, согласно ФГОС основного общего образования:

а) знакомство с историей развития понятия числа и с методом расширения числовых множеств;

б) овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений;

в) развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел;

г) развитие умений решать текстовые задачи.

7. В Примерной учебной программе по математике (основная школа), конкретизируется цель изучения чисел в ШКМ: «содержание раздела «Арифметика»

а) служит базой для дальнейшего изучения учащимися математики,

б) способствует приобретению практических навыков, необходимых в повседневной жизни,

в) способствует развитию логического мышления,

г) способствует формированию таких приемов умственной деятельности, как систематизация, анализ, конкретизация, обобщение, синтез, классификация,

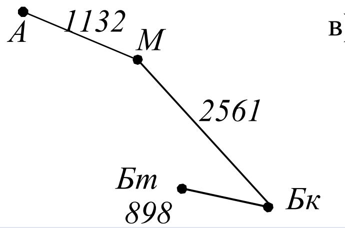
д) способствует формированию умения пользоваться алгоритмами».

8. Укажите неполную модель задачи: «Расстояние по железной дороге от Архангельска до Москвы 1132 км, от Москвы до Баку – 2561 км, а от Баку до Батуми – 898 км. Сколько километров нужно проехать по железной дороге, чтобы из Архангельска приехать в Батуми через Москву и Баку?».

а)

$$\left.\begin{array}{l}\text{А-М – 1132 км}\\ \text{М-Бк – 2561 км}\\ \text{Бк-Бт – 898 км}\end{array}\right\}?$$

б)



в)

№	Населенные пункты	Расстояние (км)
1	Архангельск – Москва	1132
2	Москва – Баку	2561
3	Баку – Батуми	898
4	Архангельск – Москва – Баку – Батуми	?

9. Содержание числовой линии <u>в основной школе</u> изучается в рамках следующих модулей (Примерная ООП основного общего образования):

а) Действительные числа.
б) Деление с остатком.
в) Дроби.
г) Измерения, приближения, оценки**.**
д) Комплексные числа.
е) Натуральные числа.
ж) Положительные и отрицательные числа.
з) Расширение понятия числа.
и) Рациональные числа.
к) Целые числа.
л) Числовые последовательности.

10. Установите соответствие

Историческая схема расширения множества натуральных чисел		$\boldsymbol{N \subset Z \subset Q \subset R \subset C}$
Логическая схема расширения множества натуральных чисел		$\boldsymbol{N \subset Z \subset Z^{+} \subset} Q^{+} \boldsymbol{\subset Q \subset R \subset C}$
Современная методическая схема расширения множества натуральных чисел		$N_0 \subset Q^{+} \subset Q \subset R \subset \mathrm{C}$

11. Модуль «Натуральные числа» включает изучение следующих тем:

а) Натуральный ряд. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Свойства арифметических действий.

б) Числовые выражения, значение числового выражения. Порядок действий в числовых выражениях, использование скобок. Решение текстовых задач арифметическими способами.

в) Делители и кратные. Свойства и признаки делимости. Простые и составные числа. Разложение натурального числа на простые множители. Деление с остатком;

г) Проценты; нахождение процентов от величины и величины по её процентам.

д) Отношение; выражение отношения в процентах.

е) Пропорция; основное свойство пропорции

ж) Степень с натуральным показателем;

12. Модуль «Дроби» включает изучение следующих тем:

а) Часть и целое; нахождение части по известному целому и целого по его известной части. Доли и дроби.

б) Обыкновенные дроби. Основное свойство дроби. Сравнение обыкновенных дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями. Нахождение части от целого и целого по его части.

в) Десятичные дроби. Сравнение десятичных дробей. Арифметические действия с десятичными дробями. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной дроби и обыкновенной в виде десятичной.

г) Проценты; нахождение процентов от величины и величины по её процентам. Отношение; выражение отношения в процентах. Пропорция; основное свойство пропорции.

д) Решение текстовых задач арифметическими способами.

е) Множество рациональных чисел; рациональное число как отношение m/n, где m – целое число, а n – натуральное.

13. Модуль «Рациональные числа» включает изучение следующих тем:

а) Обыкновенные дроби. Основное свойство дроби. Сравнение обыкновенных дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями. Нахождение части от целого и целого по его части.

б) Десятичные дроби. Сравнение десятичных дробей. Арифметические действия с десятичными дробями. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной дроби и обыкновенной в виде десятичной.

в) Положительные и отрицательные числа, модуль числа. Множество целых чисел.

г) Множество рациональных чисел; рациональное число как отношение m/n, где m – целое число, а n – натуральное.

д) Сравнение рациональных чисел. Арифметические действия с рациональными числами; свойства арифметических действий.

е) Степень с целым показателем.

14. Модуль «Действительные числа» включает изучение следующих тем:

а) Множество натуральных чисел.

б) Множество целых чисел.

в) Множество рациональных чисел; рациональное число как отношение m/n, где m – целое число, а n – натуральное.

г) Квадратный корень из числа. Корень третьей степени.

д) Понятие об иррациональном числе. Иррациональность числа $\sqrt{2}$ и несоизмеримость стороны и диагонали квадрата. Десятичные приближения иррациональных чисел.

е) Множество действительных чисел; представление действительных чисел бесконечными десятичными дробями. Сравнение действительных чисел.

ж) Координатная прямая. Изображение чисел точками координатной прямой. Числовые промежутки (интеграция с линией «Аналитическая геометрия»).

15. Модуль «Измерения, приближения, оценки» включает изучение следующих тем:

а) Размеры объектов окружающего мира (от элементарных частиц до Вселенной), длительность процессов в окружающем мире. Выделение множителя – степени десяти в записи числа.

б) Шкалы и величины.

в) Приближённое значение величины, точность приближения. Округление натуральных чисел и десятичных дробей. Прикидка и оценка результатов вычислений.

г) Извлечение арифметического корня из натурального числа.

д) Четырёхзначные математические таблицы.

16. Модуль «Числовые последовательности» включает изучение следующих тем:

а) Натуральный ряд и кратные числа.

б) Понятие числовой последовательности. Задание последовательности рекуррентной формулой и формулой n-го члена.

в) Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы n-го члена арифметической и геометрической прогрессий, суммы первых n членов. Изображение членов арифметической и геометрической прогрессий точками координатной плоскости. Линейный и экспоненциальный рост. Сложные проценты.

г) Предел последовательности.

д) Бесконечно убывающая геометрическая последовательность и её сумма.

17. Модуль «Расширение понятия числа» включает изучение следующих тем:

а) Расширение понятия числа: натуральные, целые, рациональные и иррациональные числа, действительные числа.

б) Аксиоматика и свойства действительных чисел.

в) Координатная прямая. Изображение чисел точками координатной прямой. Числовые промежутки (интеграция с линией «Аналитическая геометрия»).

г) Комплексные числа и их геометрическая интерпретация. Основная теорема алгебры (без доказательства).

18. Изучение нового числового множества идет по единой схеме

а) арифметические действия над числами

б) введение новых чисел

в) законы арифметических действий

г) необходимость введения новых чисел

д) применение к решению задач

е) сравнение (геометрическая интерпретация)

Запишите этапы в их логической последовательности

I этап	II этап	III этап	IV этап	V этап	VI этап

19. При введении чисел новой природы используется

а) исследовательский метод

б) объяснительно-иллюстративный метод

в) проблемное обучение

г) репродуктивный метод

20. Целесообразность введения дробных чисел может быть показана учащимся разными способами:

а) в связи с рассмотрением обратных величин;

б) как характеристика изменения (уменьшения) величины в несколько раз;

в) на основе графических представлений, дробные числа как отметки точек на оси;

г) через анализ ситуации, в которой действие деления невыполнимо (например, нахождение значения выражения $23 - 16 : 7$, решение уравнения $2 \cdot x + 19 = 472$);

д) через задачу о делении целого (пирога) на части (число гостей);

е) как средство изображения деления меньшего числа на большее.

21. Целесообразность введения отрицательных чисел может быть показана учащимся разными способами:

а) в связи с рассмотрением величин, которые имеют противоположный смысл (положительный и отрицательный заряды, положительное и отрицательное ускорение, материя и антиматерия и пр.);

б) как средство изображения расстояний на температурной шкале;

в) как характеристика изменений (увеличений и уменьшений) величин;

г) на основе графических представлений, отрицательные числа как отметки точек на оси;

д) через анализ ситуации, в которой действие вычитания невыполнимо (например, нахождение значения выражения $23 - 160 : 4$, решение уравнения $2 \cdot x + 119 = 71$);

е) через задачу на долговые обязательства;

ж) через задачу об изменении уровня воды в реке в течение двух суток (например, во время сильного дождя уровень воды в реке за сутки поднялся на 15 см, в течение следующих суток уровень воды в реке упал на 21 см; каким стал уровень воды в реке по истечении двух суток;

з) с привлечением понятия симметрии числового прямой?

22. Целесообразность введения иррациональных чисел может быть показана учащимся разными способами:

а) на основе графических представлений, иррациональные числа как отметки точек на оси;

б) через анализ ситуации, в которой действие извлечения корня из положительного числа или нахождение степени невыполнимо (например, решение уравнения $2^x = 7$ или $x^2 = 7$);

в) через анализ ситуации, в которой нахождение значения неизвестной величины – аргумента тригонометрической функции – невыполнимо (например, решение уравнения $\sin x = 3/7$);

г) через задачу о нахождении стороны квадрата, площадь которого равна 2;

д) через нахождение длины отрезка, несоизмеримого с единицей масштаба;

е) через определение принадлежности числа π числовому множеству,

ж) через противопоставление бесконечной периодической дроби бесконечной непериодической дроби (например, 0,12345678910111213…).

23. Целесообразность введения комплексных чисел может быть показана учащимся разными способами:

а) по аналогии: есть взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек числовой прямой, установим взаимно однозначное соответствие между парами чисел и точками координатной плоскости; и как следствие: каждую пару действительных чисел, записанных в определенном порядке, логично рассматривать как некоторое новое число (комплексное), изображаемое некоторой точкой координатной плоскости;

б) через анализ ситуации, в которой действие извлечения корня из отрицательного числа невыполнимо (например, решение уравнения $x^2 = -1$);

в) через связь степени алгебраического уравнения от одной неизвестной и числом его корней (основная теорема алгебры): если при положительном дискриминанте уравнение второй степени (квадратное) имеет два корня, а при нулевом дискриминанте два одинаковых (кратных) корня, то естественно предположить, что и при отрицательном дискриминанте квадратное уравнение будет иметь два корня; выяснить, какими числами могут быть представлены эти корни – насущная задача.

24. Сравнение натуральных чисел в курсе основной школы осуществляется (основной метод):

а) методом сравнения разности этих чисел с нулём,
б) по десятичной записи,
в) с использованием координатной прямой,
г) с помощью натурального ряда.

25. Сравнение десятичных дробей в курсе основной школы осуществляется (основной метод):

а) методом сравнения разности этих чисел с нулём,
б) по десятичной записи,
в) с использованием координатной прямой.

26. Сравнение обыкновенных дробей в курсе основной школы осуществляется (основной метод):

а) методом сравнения разности этих чисел с нулём,

б) методом уравнивания знаменателей (приведением к общему знаменателю),

в) методом уравнивания числителей (приведением к общему числителю),

г) на геометрических моделях,

д) с использованием координатной прямой,

е) с помощью графиков соответствующих функций,

ж) сравнением их десятичных записей,

з) сравнением с ½,

и) сравнением частного этих дробей с 1.

27. Сравнение отрицательных рациональных чисел в школьном курсе математики осуществляется (основной метод):

а) с использованием координатной прямой,

б) сравнением абсолютных величин (модулей) данных чисел,

в) сравнением квадратов этих чисел,

г) сравнением разности этих чисел с нулём.

28. Сравнение положительных иррациональных алгебраических чисел в школьном курсе математики осуществляется (основные методы):

а) с использованием координатной прямой,

б) сравнением абсолютных величин (модулей) данных чисел,

в) сравнением приближённых значений,

г) сравнением соответствующих степеней этих чисел,

д) сравнением разности этих чисел с нулём.

29. Сравнение отрицательных иррациональных алгебраических чисел в школьном курсе математики осуществляется (основные методы):

а) с использованием координатной прямой,

б) сравнением абсолютных величин (модулей) данных чисел,

в) сравнением приближённых значений,

г) сравнением соответствующих степеней этих чисел,

д) сравнением разности этих чисел с нулём.

30. Сравнение иррациональных трансцендентных чисел в школьном курсе математики осуществляется (основные методы):

а) методом оценки (слева и справа) каждого из чисел и сравнением, при необходимости, с промежуточным числом (например, методом бисекции),

б) на основе свойств соответствующих функций и тождественных преобразований данных чисел (числовых выражений),

в) сравнением абсолютных величин (модулей) данных чисел,

г) сравнением разности этих чисел с нулём.

31. В школьном курсе математики определяются следующие арифметические операции:

а) сложение,
б) вычитание,
в) умножение,
г) деление,
д) возведение в натуральную степень,
е) возведение в рациональную степень,
ж) возведение в иррациональную степень,
з) извлечение корня натуральной степени,
и) нахождение показателя степени.

32. В школьном курсе математики определяются следующие арифметические операции как обратные:

а) сложение,
б) вычитание,
в) умножение,
г) деление,
д) возведение в натуральную степень,
е) возведение в рациональную степень,
ж) возведение в иррациональную степень,
з) извлечение корня натуральной степени,
и) нахождение показателя степени.

33. При изучении свойств (законов) арифметических действий выполняют следующую последовательность шагов:

а) «проверка» законов для «новых» чисел,

б) мотивация изучения законов операций с помощью поиска путей рационального счета,

в) обобщение законов в словесной и буквенной форме,

г) применение законов и свойств для упрощения выражений и рационального счета.

Запишите этапы в их логической последовательности

I этап	II этап	III этап	IV этап

34. В структуре числовой линии можно выделить пять типов задач:

а) Нахождение длин, углов, площадей и объёмов.

б) Нахождение значения числового выражения на множестве рациональных чисел и упрощение числового выражения на множестве иррациональных чисел.

в) Нахождение числа комбинаторных соединений.

г) Нахождение числа по координате точки и точки по числу.

д) Определение принадлежности числа числовому множеству.

е) Построение графика функции натурального аргумента.

ж) Решение уравнений и неравенств.

з) Сравнение чисел, определение принадлежности числа некоторому числовому промежутку.

и) Текстовые задачи «о числах» (в т.ч. на прогрессии, делимость, округление).

к) Текстовые практические (сюжетные) задачи, решаемые арифметическим методом (т.е. «по действиям»).

35. Знания о натуральных числах обогащаются в 5/6 классе:

а) определением натурального числа как мерой конечного множества,

б) определением натурального числа с помощью аксиоматики Пеано,

в) понятием числовой последовательности,

г) элементами теории делимости.

36. Элементарная теория делимости в 5/6 классах вводится с целью:

а) изучения основной теоремы арифметики;

б) обучения дедуктивному доказательству (доказываются свойства делимости и следствия из них, вводятся в рассмотрение и решаются задачи на доказательство);

в) овладения ещё одним способом решения практических задач (Задача 1: «Из 210 бордовых, 126 белых, 294 красных роз собрали букеты, причём в каждом букете количество роз одного цвета поровну. Какое наибольшее количество букетов сделали из этих роз и сколько роз каждого цвета в одном букете?» и задача 2: «В портовом городе начинаются три туристских теплоходных рейса, первый из которых длится 15 суток, второй – 20 и третий – 12 суток. Вернувшись в порт, теплоходы в этот же день снова отправляются в рейс. Сегодня из порта вышли теплоходы по всем трём маршрутам. Через сколько суток они впервые снова вместе уйдут в плавание? Какое количество рейсов сделает каждый теплоход?»);

г) расширения математического кругозора учащихся (вводятся новые термины, понятия, рассматриваются свойства этих понятий, демонстрируются доказательства этих свойств и их применение к решению задач);

д) создания теоретической основы для изучения обыкновенных дробей (НОД – основное свойство дроби – сложение дробей с разными знаменателями).

37. Учитель организовал эвристическую беседу по теме «Сложение и вычитание натуральных чисел» (5 класс). Восстановите последовательность вопросов этой беседы.

а) Вспомните и перечислите компоненты вычитания // Уменьшаемое, вычитаемое, разность.

б) Вспомните и перечислите компоненты сложения // Слагаемое, слагаемое, сумма.

в) Используя компоненты сложения, сформулируйте свойства (законы) сложения. // (1) Сочетательный закон: чтобы прибавить к числу сумму двух чисел, можно сначала прибавить первое слагаемое, а потом к полученной сумме – второе слагаемое, то есть $a+(b+c) = (a+b)+c$. (2) От перестановки слагаемых сумма не изменяется: 5+57+146 = 146+57+5, в общем случае, $a+b+c = c+b+a$ или $a+b+c = b+a+c$ и т.п.

г) Итак, у нас есть пять, пятьдесят семь и сто сорок шесть предметов. Как нам узнать, сколько у нас всего предметов? // Сложить сами предметы и пересчитать их или сложить соответствующие предметам числа.

д) Итак, у нас есть три группы предметов, в одной – пять, в другой – пятьдесят семь, а всего 208 предметов. Как нам узнать, сколько предметов в третьей группе? // Возможный удовлетворительный ответ: 146 предметов, так как до этого, мы складывали 5, 57 и 146 и получили 208, в задаче есть три (5, 57 и 208) из этих четырёх чисел, значит не хватает числа 146. Правильный ответ: надо из общего числа предметов вычесть известные количества, то есть 208–5–57 = 146.

е) Как выполнить вычитание 208–5–57? // (1) Последовательно вычитая указанные числа, то есть 208–5–57 = (208–5)–57 = 203–57 = 203–3–54 = 200–54 = = 200–50–4 = 150–4 = 146 или 208–57–5 = (208–57)–5 = 151–5 = 151–1–4 = = 150–4 = 146, или 208–5–57 = ((205+3)–5)–57 = ((205–5)–57)+3) = 200–57+3 = = 143+3 = 146; (2) вычитая сумму указанных чисел: 208–5–57 = 208–(5+57) = = 208–62 = 146.

ж) Как называется эта операция? // Вычитание

з) Как связаны операции сложения и вычитания?// Если известно, что a+b = c, то a = c–b и b = c–a. Другими словами, операции сложения и вычитания – взаимно обратные, то есть(c–b)+b = c или (c+b)–b = c. Если из данного числа сначала вычесть некоторое число, а затем прибавить это же число, то в результате получится данное (исходное) число. Если к данному числу сначала прибавить некоторое число, а затем вычесть это же число, то в результате получится данное (исходное) число.

и) Как сложить три числа, например, 5, 57 и 146? // (1) Можно складывать числа последовательно, например, 5+57+146 = 62+146 = 208; (2) можно сложить сначала сотни, потом десятки, затем единицы: 5+57+146 = = 100+(50+40)+(5+7+6) = 100+90+18 = 100+(90+10)+8 = 100+100+8 = 200+8 = 208;

$$\begin{array}{r} {}^{1}{}^{1} \\ 146 \\ +\ 57 \\ 5 \\ \hline 208 \end{array}$$

(3) можно складывать в обратном порядке, сначала единицы, затем десятки, затем сотни – такой способ называют сложением столбиком; (4) можно «досчитывать до полных десятков, сотен, тысяч и т.д.», например, $\underline{146 + \mathbf{54}} + \underline{\mathbf{3} + 5} = \underline{200} + \underline{8} = 208$ или $146 + \mathbf{5} + 57 = \underline{146 + \mathbf{4}} + \underline{\mathbf{1} + 57} = \underline{150} + \underline{58} = 208$ и т.п.

к) Какая запись удобнее? // Для человека в его повседневной жизни удобнее записывать числа арабскими цифрами в десятичной системе счисления (5, 57, 146), для финансовых работников – цифрами и словами, для компьютера – числовые данные вводятся с помощью 0 и 1 (пятёрке соответствует набор 101, 57 – 111001, 146 – 10010010).

л) Какие ещё есть варианты вычисления этого выражения? // … = **134567+543+60409–569–11207** =

м) Какой будет разность, если уменьшаемое и вычитаемое равны? // Разность будет равна нулю: $a-a=0$.

н) Какой способ лучше? // У каждого свои предпочтения.

о) Можно ли в сложном числовом выражении менять местами компоненты, например, 134567–569+543–11207+60409? // Да, если при этом слагаемое останется слагаемым (то есть со знаком «+»), а вычитаемое – вычитаемым (то есть со знаком «–»), то есть **134567–569+543–11207+60409** = = **134567**–11207**+60409**–569**+543** = (**134567–11207**)+(**60409–569**)**+543.**

п) Натуральных чисел много, как их запомнить? // Самое маленькое натуральное число – 1, оно соответствует одному предмету, если предметов два, то используют цифру 2; 2 = 1+1. Если предметов три, то используют цифру 3; 3 = 1+1+1 = 2+1, так же определяются значения цифр 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Этим цифрам соответствуют однозначные числа, их и запоминают. Многозначные числа разбивают на классы и разряды, в каждом – одна из 10 цифр, запоминают названия классов и разрядов.

р) Почему существует такое разнообразие способов сложения? // Сложение обладает рядом свойств, которые позволяют применять любой удобный для нас способ.

с) Сформулируйте свойства (законы) вычитания. // (1) От перестановки мест вычитаемых разность не меняется: $a–b–c = a–c–b$. (2) Вычесть из данного числа последовательно несколько чисел (вычитаемых), значит вычесть из этого числа сумму вычитаемых: $a–b–c = a–(b+c)$.(3) Вычесть из данного числа сумму несколько чисел, значит вычесть из этого числа сначала одно слагаемое, а затем другое слагаемое суммы: $a–(b+c) = a–b–c = a–c–b$.(4) Чтобы из суммы вычесть число, можно вычесть его из одного слагаемого, а к полученной разности прибавить другое слагаемое: $(a+b)–c = (a–c)+b = a+(b–c)$.

т) У нас есть пять, пятьдесят семь и сто сорок шесть предметов. Как мы можем записать их количество?// словами, цифрами (буквами) латинского алфавита (V,LVII, CXLVI), арабскими цифрами в десятичной системе счисления (5, 57, 146), можно зарисовать соответствующее количество палочек, точек, других символов.

у) Что будет, если из числа вычесть ноль? // От вычитания нуля число не изменяется: $a-0=a$.

ф) Что будет, если к числу прибавить ноль? // От прибавления нуля число не изменяется: $a+0=a$.

х) Что проще сложить сами предметы и пересчитать их или сложить соответствующие предметам числа? // Сложить соответствующие предметам числа.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

38. Оцените ответы у доски учеников по традиционной 5-балльной шкале:

Ученик	Решение	Оценка
А	Округлим число 86,275 до десятых. Подчеркнем цифру 2, зачеркнём цифры 7 и 5: $86{,}\underline{2}\cancel{75}$. За подчеркнутой цифрой 2 стоит 75 (кончается на 5), поэтому цифру 2 увеличиваем на 1. Получаем 86,3. Записываем: $86{,}275 \approx 86{,}3$	
Б	Округлим число 6,67391 до сотых. Подчеркнем цифру 7, отбрасываем цифры 3, 9 и 1, которые следуют за разрядом сотых: $6{,}6\underline{7}391 \approx 6{,}67$. За подчеркнутой цифрой 7 стоит цифра 3, поэтому цифру 7 оставляем без изменения.	
В	Округлим число 8 154 до сотен. Подчеркиваем цифру 1, отбрасываем цифры 5 и 4, которые за ней следуют, получаем 81 сотню: $8\,\underline{1}54 \approx 81$ сотен $= 8100$.	
Г	Округлим число 128 911 до тысяч. Представим число суммой тысяч и единиц: $128\,911 = 128\,000 + 911$; так как $911 \geq 500$, то $911 \approx 1000$, значит (продолжаем равенство), $128\,911 = 128\,000 + 911 \approx 128\,000 + 1000 = 129\,000$. Итак, $128\,911 \approx 129\,000$	
Д	По записи $345265 \approx 345300$ можно сказать, что число 345 265 округляли до сотых. По записи $237{,}281 \approx 237{,}280$ можно сказать, что число 237,281 округляли до десятых. По записи $12{,}529 \approx 12{,}500$ можно сказать, что число 12,529 округляли до сотых. По записи $10236 \approx 10000$ можно сказать, что число 10236 округляли до десяти тысяч. По записи $69{,}56 \approx 70{,}00$ можно сказать, что число 69,56 округляли до десятков, получили 70, то есть 7 десятков.	
Е	В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 800 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 9 недель? 1. Узнаем, сколько листов бумаги расходуется в офисе за 9 недель: $800 \times 9 = 7\,200$. 2. Узнаем, сколько пачек бумаги расходуется за 9 недель: $7\,200 : 500 = 72 : 5 = 14{,}4$. 3. Это значит, что расходуется 14 целых пачек и часть 15-ой пачки, то есть полученный результат требуется округлить до целых с избытком: $14{,}4 \approx 15$. Ответ. В офис нужно купить минимум 15 пачек бумаги.	
Ж	Длина прямоугольника 14,7 см, его ширина – 6,8 см, найдём площадь: $14{,}7 \cdot 6{,}8 = 99{,}96 \approx 100{,}0$ см^2	

39. На уроке повторения материала по разделу «Обыкновенные дроби» в 5 классе ученики решают задачу: «На сайте производится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Всего проголосовало 11 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 38?».

Дайте качественную оценку (хорошо, отлично, превосходно) результатам деятельности школьников по решению задачи.

Ученик	Решение	Оценка
А	$\frac{1}{11}=0{,}0909\ldots\approx 0{,}09=9\%;$ $\quad \frac{2}{11}=0{,}1919\ldots\approx 0{,}18=18\%$ $\frac{3}{11}=0{,}2727\ldots\approx 0{,}27=27\%;$ $\quad \frac{4}{11}=0{,}3636\ldots\approx 0{,}36=36\%$ Ответ. Не может.	
Б	$\frac{1}{11}=0{,}0909\ldots\approx 0{,}0909=9{,}09\%\approx 9\%$ $\frac{2}{11}=0{,}1919\ldots\approx 0{,}1818=18{,}18\%\approx 18\%$ $\frac{3}{11}=0{,}2727\ldots\approx 0{,}2727=27{,}27\%\approx 27\%$ $\frac{4}{11}=0{,}3636\ldots\approx 0{,}36=36{,}36\%\approx 36\%$ $\frac{5}{11}=0{,}4545\ldots\approx 0{,}45=45{,}45\%\approx 45\%$ Ответ. Рейтинг футболиста выражается одной из правильных дробей со знаменателем 11, приближённые значения которых, выраженные в %, округлённых до целого числа равны 9, 18, 27, 36, 45 и т.д. Как видно, число 38 не попадает в этот ряд.	
В	$\frac{1}{11}=0{,}0909\ldots\approx 0{,}0909=9{,}09\%\approx 9\% \quad 91\%\approx\frac{10}{11}$ $\frac{2}{11}=0{,}1919\ldots\approx 0{,}1818=18{,}18\%\approx 18\% \quad 82\%\approx\frac{9}{11}$ $\frac{3}{11}=0{,}2727\ldots\approx 0{,}2727=27{,}27\%\approx 27\% \quad 73\%\approx\frac{8}{11}$ $\frac{4}{11}=0{,}3636\ldots\approx 0{,}36=36{,}36\%\approx 36\% \quad 64\%\approx\frac{7}{11}$ $\frac{5}{11}=0{,}4545\ldots\approx 0{,}45=45{,}45\%\approx 45\% \quad 55\%\approx\frac{6}{11}$ Ответ. Рейтинг футболиста может быть одним из чисел 0, 9, 18, 27, 36, 45, 55, 64, 73, 82, 91, 1 и не может равняться 38.	

40. На уроке повторения материала по разделу «Обыкновенные дроби» в 5 классе ученики решают задачу: «На сайте производится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трёх футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинг одинаков?».

После того, как ученик выяснили, что рейтинг каждого футболиста должен быть равен 33, учитель предложил переформулировать задачу. Какая из следующих формулировок адекватна самой задаче и позволяет её решить.

а) Найти три десятичные дроби, целые части которых равны 33, а дробные части в сумме равны 100.

б) Найти три десятичные дроби, целые части которых равны 33, десятые не превосходят 4, а в сумме дробные части равны 100.

в) Найти три десятичные дроби, целые части которых равны 33, десятые не превосходят 4, а в сумме дробные части равны 100, 1000, 1000 и т.д.

г) Найти три таких числа, чтобы в сумме они давали 100, а их округление до целого числа было равно 33.

41. На уроке повторения материала по разделу «Обыкновенные дроби» в 5 классе ученики решают задачу: «На сайте производится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трёх футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинг одинаков?».

Ученики ответили положительно и привели в качестве аргументов следующие варианты решения. Какие из аргументов следует признать?

а) Голоса посетителей распределились следующим образом: за I футболиста проголосовало 16681 человек, за II – 16661, за III – 16658.

б) За I футболиста проголосовало 33248 человек из 100000, за II – 33331 из 100000, за III – 33421 человек из 100000.

в) Рейтинг – 33, число голосов (в %): 33,11; 33,34 и 33,55.

г) Рейтинг футболистов 33, число голосов: 33, 19%, 33,4%, 33,41%.

д) Футболисты имеют рейтинг 33, число голосов – 32, 9; 33, 45 и 33,49 (%).

е) Футболисты имеют рейтинг 33, число голосов – 33,3%, 33,4% и 33,2%.

42. Достаточно ли примеров для устного счёта по теме «Сложение и вычитание обыкновенных дробей с одинаковым знаменателем» (5 класс, начало урока ЗИМ): $\frac{9}{20}+\frac{4}{20}$, $\frac{13}{14}-\frac{11}{14}$, $\frac{5}{14}+\frac{4}{14}$, $\frac{19}{20}-\frac{8}{20}$, $\frac{11}{20}+\frac{6}{20}$, $\frac{17}{20}-\frac{8}{20}$?

___

___

___

43. В 5 классе при изучении темы «Деление на десятичную дробь» учитель начал со следующей индивидуальной самостоятельной работы (в форме математического диктанта):

1) Увеличьте 1,45 так, чтобы эта дробь стала целым числом. Во столько же раз увеличьте 3,335.

2) Разделите 333,5 на 145.

Один из учеников выполняет задание на отвороте доски, все остальные – в тетрадях. Учитель запланировал после проверки результата деления записать рядом пример деления на десятичную дробь: $3{,}335 : 1{,}45$. Далее в ходе коллективной работы обобщить результаты, вместе с учениками выяснить, нельзя ли свести деление на десятичную дробь 1,45 к делению на целое число 145. Учитель надеялся, что некоторые учащиеся догадаются, что надо перенести в делимом и делителе запятую на два знака, т.е. делимое и делитель умножить на 100; после этого выполнение деления $3{,}335 : 1{,}45$ сводится к делению $333{,}5 : 145$. Под конец планировалось еще раз выяснить, почему истинно равенство $3{,}335 : 1{,}45 = 333{,}5 : 145$ и сформулировать правило деления на десятичную дробь.

Однако, ученик, работавший у доски, записал такую цепочку равенств:

Учитель	Ученик
1) Увеличьте 1,45 так, чтобы эта дробь стала целым числом. Во столько же раз увеличьте 3,335. 2) Разделите 333,5 на 145.	$1{,}45 \cdot 2 \cdot 10 = 29$ $3{,}335 \cdot 20 = 66{,}7$ $333{,}5 : 145 = 2{,}3$

Два других ученика предоставили такие результаты выполнения самостоятельной работы.

$1{,}45 \cdot 40 = 58$

$3{,}335 \cdot 40 = 133{,}4$

$333{,}5 : 145 = 2{,}3$

$1{,}45 \cdot 80 = 116$

$3{,}335 \cdot 80 = 266{,}8$

$333{,}5 : 145 = 2{,}3$

Остальные учащиеся предоставили решения, как и планировал учитель: $1{,}45 \cdot 100 = 145$; $3{,}335 \cdot 100 = 333{,}5$; $333{,}5 : 145 = 2{,}3$.

Как следует поступить учителю в этом случае?

Насколько целесообразна и эффективна такая самостоятельная работа?

44. В 5 классе при изучении темы «Деление на десятичную дробь» учитель начал с организации рефлексирующего наблюдения.

Задание: посмотрите на столбцы таблицы и скажите, как свести деление на десятичную дробь к делению на натуральное число? Для каждого случая дайте свой ответ (запишите в пустых ячейках таблицы – последняя строка).

229,6 : 71,6 = 3,1	*3,335 : 1,45 = 2,3*	*1291,77 : 0,093 = 13890*
2296 : 716 = 3,1	*333,5 : 145 = 2,3*	*1291770 : 93 = 13890*
Умножить компоненты деления на 10	*Умножить компоненты деления на 100*	*Умножить компоненты деления на 1000*

После обсуждения гипотез и формулировки выводов, учителю следует предложить учащимся:

а) задать вопросы учителю по изученному материалу;

б) привести свои примеры преобразования деления на десятичную дробь к делению на натуральное число;

в) прочитать соответствующий текст учебника;

г) упражнения на усвоение материала, связанные с усвоением алгоритма преобразования, например: «Верно ли равенство: *3,717 : 0,59 = 3717 : 59?*»;

д) упражнения на усвоение материала, связанные с усвоением алгоритма деления на десятичную дробь, например: «Верно ли выполнено деление: *3,717 : 0,59 = 371,7 : 59 = 6,3?*»;

е) систему задач на закрепление материала (выполнение деления на десятичную дробь);

ж) самостоятельную работу по решению задач на выполнение деления на натуральное число и десятичную дробь;

з) самостоятельную работу контролирующего характера по решению задач на выполнение деления на натуральное число и десятичную дробь;

и) дидактическую игру «Эстафета» (пример задания для первой команды:

126,405 : 500 = □□□□□□□□

□□□□□□□□ : 0,25 = □□□□□□□□

□□□□□□□□ : 0,15 = □□□□□□□□

□□□□□□□□ : 100 = □□□□□□□□

□□□□□□□□ : 0,004 = □□□□□□□□

□□□□□□□□ : 0,3 = □□□□□□□□

□□□□□□□□ : 0,2 = □□□□□□□□

□□□□□□□□ : 5,3 = □□□□□□□□);

к) проблемную задачу: всегда ли при делении на десятичную дробь требуется умножение на 10, 100, 1000 и т.д., на примере равенств:

8,72 : 0,5 = (8,72 · 2) : (0,5 · 2) = 17,44 : 1 = 17,44;

8,72 : 0,5 = (8,72 · 10) : (0,5 · 10) = 87,2 : 5 = 17,44.

л) ____
____

45. При проектировании урока ИНМ по теме «Делители и кратные» в соответствии с учебником Математика-6 авторского коллектива под руководством А.Г. Мерзляка учитель выбирает оптимальную форму организации деятельности учащихся.

Глава 1. Делимость натуральных чисел

Изучив материал этой главы, вы узнаете, как, не выполняя деления, определить, делится ли данное натуральное число нацело на: 2, 3, 5, 9, 10.

Познакомитесь с простыми и составными числами, научитесь раскладывать натуральные числа на простые множители.

Вы узнаете, что называют наибольшим общим делителем и наименьшим общим кратным нескольких натуральных чисел.

§ 1. Делители и кратные

Остаток при делении числа 30 на 5 равен 0, так как $30 = 5 \cdot 6$. В этом случае говорят, что число 30 **делится нацело** на 5. Число 5 называют **делителем** числа 30, а число 30 – **кратным** числа 5.

Натуральное число a делится нацело на натуральное число b, если найдётся натуральное число c такое, что справедливо равенство $a = b \cdot c$.

Если натуральное число a делится нацело на натуральное число b, то число a называют кратным числа b, а число b — делителем числа a.

Числа 1, 2, 3, 6, 10, 15, 30 также являются делителями числа 30, а число 30 является кратным каждого из этих чисел.

Заметим, что число 30 не делится нацело, например, на число 7. Поэтому число 7 не является делителем числа 30, а число 30 не кратно числу 7.

Как лучше говорить: «Число a делится нацело на число b», «Число b является делителем числа a», «Число a кратно числу b», «Число a является кратным числа b»? Всё равно, любой выбор будет верным.

Легко записать все делители числа 6. Это числа 1, 2, 3 и 6. А можно ли перечислить все кратные числа 6? Числа $6 \cdot 1$, $6 \cdot 2$, $6 \cdot 3$, $6 \cdot 4$, $6 \cdot 5$ и т. д. кратны числу 6. Получается, что чисел, кратных числу 6, бесконечно много. Поэтому всех их перечислить нельзя.

Вообще, ***для любого натурального числа a каждое из чисел $a \cdot 1$, $a \cdot 2$, $a \cdot 3$, $a \cdot 4$, ... является кратным числа a.***

Наименьшим делителем любого натурального числа a является число 1, а наибольшим — само число a.

Среди чисел, кратных a, наибольшего нет, а наименьшее есть – это само число a.

4

Каждое из чисел 21 и 36 делится нацело на 3, и их сумма, число 57, также делится нацело на 3.

Вообще, *если каждое из чисел a и b делится нацело на число k, то и сумма $a + b$ также делится нацело на число k.*

Каждое из чисел 4 и 8 не делится на 3, а их сумма, число 12, делится нацело на 3.

Каждое из чисел 9 и 7 не делится на 5, и их сумма, число 16, не делится нацело на 5.

Вообще, *если ни число a и ни число b не делятся нацело на число k, то их сумма $a + b$ может делиться, а может и не делиться нацело на число k.*

Число 35 делится нацело на число 7, а число 17 на число 7 не делится нацело. Сумма 35 + 17 нацело на число 7 также не делится.

Вообще, *если число a делится нацело на число k, а число b не делится нацело на число k, то сумма $a + b$ не делится нацело на число k.*

1. В каком случае:
1) число b является делителем числа a;
2) число b кратно числу a?

2. Какое число является делителем любого натурального числа?

3. Какое число является наибольшим делителем натурального числа a?

4. Какое число является наименьшим кратным натурального числа a?

5. Сколько существует кратных данного натурального числа a?

Решаем устно

1. Вычислите:
1) 0,6 + 0,4; 3) 0,6 – 0,4; 5) 0,6 · 4; 7) 6 : 4;
2) 0,6 + 0,04; 4) 0,6 – 0,04; 6) 0,6 · 0,4; 8) 0,6 : 4.
2. Чему равно частное при делении 54 на 9?
3. Чему равен делитель, если делимое равно 98, а частное – 7?
4. Чему равно делимое, если делитель равен 24, а частное – 5?
5. Дима купил 8 тетрадей, а Петя – 5 таких же тетрадей. Сколько стоит одна тетрадь, если Петя заплатил на 24 р. меньше, чем Дима?
6. При делении двух двузначных чисел в частном получается 9, а в остатке – 8. Чему равно делимое?

Упражнения

1. Верно ли утверждение:
1) число 6 является делителем числа 24;

5

а) Беседа: материал вполне пригоден (не сложен, изобилует примерами, не содержит новой символики) для организации эвристической беседы по его содержанию.

б) Лекция: большое число дидактических единиц даёт возможность на этом материале прочитать ученикам лекцию.

в) Объяснение материала: даже беглый логико-дидактический анализ позволяет сделать вывод: учащиеся самостоятельно освоить содержание этого параграф не в состоянии.

г) Самостоятельная работа с текстом учебника: наличие мотивационного блока, шрифтовое выделение, 5 контрольных вопросов, 6 устных упражнений и целый блок упражнений на усвоение позволяют организовать самостоятельное чтение учениками параграфа учебника.

д) Любая из перечисленных выше форм изучения нового материала будет эффективной.

46. Объяснение материала по теме «Делители и кратные» в соответствии с учебником Математика-6 авторского коллектива под руководством А.Г. Мерзляка, учитель начал с математического эксперимента.

«Возьмём число 12 и будем делить его подряд на натуральные числа от 1 до 12. Получим:

12 : 1 = 12	12 : 2 = 6	12 : 3 = 4	12 : 4 = 3
12 : 5 = 2 (ост.2)	12 : 6 = 2	12 : 7 = 1 (ост. 5)	12 : 8 = 1 (ост. 4)
12 : 9 = 1 (ост. 3)	12 : 10 = 1 (ост. 2)	12 : 11 = 1 (ост. 1)	12 : 12 = 1

Результат нашего деления – или частное, или неполное частное и остаток. Запишем наши равенства в два столбца в зависимости от результата.

Тема урока: Делители и кратные

12 : 1 = 12	*12 : 5 = 2 (ост.2)*
12 : 2 = 6	*12 : 7 = 1 (ост. 5)*
12 : 3 = 4	*12 : 8 = 1 (ост. 4)*
12 : 4 = 3	*12 : 9 = 1 (ост. 3)*
12 : 6 = 2	*12 : 10 = 1 (ост. 2)*
12 : 12 = 1	*12 : 11 = 1 (ост. 1)*
Деление нацело	*Деление с остатком*

Говорят, что число 12 делится нацело на числа 1, 2, 3, 4, 6, 12, которые называют делителями числа 12. Само число 12 называют кратным для каждого из этих чисел. Строго этим понятиям даются такие определения.

Опр. 1. Натуральное число a делится нацело на натуральное число b, если найдётся натуральное число c такое, что справедливо равенство $a = b \cdot c$.

Опр. 2. Если натуральное число a делится нацело на натуральное число b, то число a называют кратным числа b, а число b делителем числа a».

Как называется дидактический приём, используемый учителем в ходе математического эксперимента?

а) индукция;
б) классифицирование;
в) локальное упорядочение;
г) подведение под понятие;
д) сериация;
е) систематизация.

47. Объяснение материала по теме «Делители и кратные» в соответствии с учебником Математика-6 авторского коллектива под руководством А.Г. Мерзляка, учитель начал с введения понятий делителя и кратного числа. Далее он вводит рад полезных свойств.

«Продолжаем работать с числом 12 и его делителями.

Число 12 – кратное для числа 2. Есть ли у числа 2 другие кратные? Как узнать? Вспомним компоненты умножения: произведение и два множителя. Кратное 12 – это произведение, а 2 – один из его множителей, значит, чтобы найти кратное, надо 2 умножать на другие натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5 и т.д. Получим следующие кратные числа два: 2, 4, 6, 8, 10 и т.д.

Запишем свойство кратных в общем виде…»

а) Для любого натурального числа a каждое из чисел $a \cdot 1$, $a \cdot 2$, $a \cdot 3$, $a \cdot 4$, … является кратным числа a..

б) Каждое натуральное число, кроме 1, является кратным, по крайней мере для двух натуральных чисел.

в) Наименьшим делителем любого натурального числа является 1, наибольшим – само число.

г) Наименьшим кратным любого натурального числа является само число, наибольшего кратного нет.

48. Объяснение материала по теме «Делители и кратные» в соответствии с учебником Математика-6 авторского коллектива под руководством А.Г. Мерзляка, учитель начал с введения понятий делителя и кратного числа. Далее он вводит рад полезных свойств.

«Рассмотрим сумму чисел 12 и 21, т.е. 12 + 21 = 33.

Делители **12** нам известны: 1, 2, **3**, 4, 6, 12.

Выпишем делители **21**: 1, **3**, 7, 21;

и **33**: 1, **3**, 11, 33.

Числа 12 и 21, а также их сумма – число 33 имеют общий делитель 3. Другими словами, числа 12 и 21, а также их сумма – число 33, делятся нацело на 3.

Запишем первое свойство делимости суммы в общем виде…»

а) Если каждое из чисел a и b делится нацело на число k, то и сумма чисел $a + b$ делится нацело на число k.

б) Если ни число a и ни число b не делятся нацело на число k, то их сумма $a + b$ может делиться, а может и не делиться нацело на число k.

в) Если одно из слагаемых и сумма делятся нацело на число k, то и второе слагаемое делится нацело на число k.

г) Если хотя бы одно слагаемое не делится нацело на число k, то сумма не делится нацело на число k.

д) Если число a делится нацело на число k, а число b не делится нацело на число k, то сумма $a + b$ не делится нацело на число k.

49. Объяснение материала по теме «Делители и кратные» в соответствии с учебником Математика-6 авторского коллектива под руководством А.Г. Мерзляка, учитель начал с введения понятий делителя и кратного числа. Далее он вводит рад полезных свойств.

«Рассмотрим сумму чисел 12 и 21, т.е. 12 + 21 = 33.

Делители **12** нам известны: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Выпишем делители **21**: 1, 3, 7, 21;

и **33**: 1, 3, 11, 33.

Числа 12 и 21 не делятся нацело на 11, но их сумма – число 33 – делится нацело на 11.

Числа 12 и 21 не делятся нацело на 10, и их сумма – число 33 – не делится нацело на 10.

Запишем второе свойство делимости суммы в общем виде…»

а) Если каждое из чисел a и b делится нацело на число k, то и сумма чисел $a + b$ делится нацело на число k.

б) Если ни число a и ни число b не делятся нацело на число k, то их сумма $a + b$ может делиться, а может и не делиться нацело на число k.

в) Если одно из слагаемых и сумма делятся нацело на число k, то и второе слагаемое делится нацело на число k.

г) Если хотя бы одно слагаемое не делится нацело на число k, то сумма не делится нацело на число k.

д) Если число a делится нацело на число k, а число b не делится нацело на число k, то сумма $a + b$ не делится нацело на число k.

50. Объяснение материала по теме «Делители и кратные» в соответствии с учебником Математика-6 авторского коллектива под руководством А.Г. Мерзляка, учитель начал с введения понятий делителя и кратного числа. Далее он вводит рад полезных свойств.

Продолжаем работать с числами 12 и 21 и их суммой.

Число 12 делится нацело на 2, а 21 не делятся нацело на 2, их сумма – число 33 – не делится нацело на 2.

Число 12 делится нацело на 4, а 21 не делятся нацело на 4, их сумма – число 33 – не делится нацело на 4.

Число 12 не делится нацело на 7, а 21 делятся нацело на 7, но их сумма – число 33 – не делится нацело на 7.

Обобщим и запишем третье свойство делимости суммы в общем виде…

а) Если каждое из чисел a и b делится нацело на число k, то и сумма чисел $a + b$ делится нацело на число k.

б) Если ни число a и ни число b не делятся нацело на число k, то их сумма $a + b$ может делиться, а может и не делиться нацело на число k.

в) Если одно из слагаемых и сумма делятся нацело на число k, то и второе слагаемое делится нацело на число k.

г) Если хотя бы одно слагаемое не делится нацело на число k, то сумма не делится нацело на число k.

д) Если число a делится нацело на число k, а число b не делится нацело на число k, то сумма $a + b$ не делится нацело на число k.

51. Усвоение материала по теме «Делители и кратные» в соответствии с учебником Математика-6 авторского коллектива под руководством А.Г. Мерзляка учитель начал с логического упражнения «Верно ли утверждение:

1) число 6 является делителем числа 24;
2) число 8 кратно числу 24;
3) число 5 является делителем числа 51;
4) число 9 является делителем числа 99;
5) число 18 кратно числу 3;
6) число 28 кратно числу 8;
7) число 111 кратно числу 11;
8) число 10 является делителем числа 100 и кратным числу 5?».

Какие ответы учеников следует принять в качестве верных?

а) число 6 является делителем числа 24, так как 24 : 6 = 4;

б) число 8 кратно числу 24, так как 24 : 8 = 3;

в) число 5 не является делителем числа 51;

г) число 9 является делителем числа 99, так как есть число 11 такое, что $9 \cdot 11 = 99$;

д) число 18 кратно числу 3, так как 18 делится нацело на 3;

е) число 28 не кратно числу 8, так как 28 не делится нацело на 8;

ж) число 111 кратно числу 11, так как 111 делится нацело на 11;

з) число 10 является делителем числа 100, так как 100 делится на 10, и кратным числу 5, так как 10 делится на 5.

52. При вычислении значения числового выражения выполняют следующую последовательность шагов (на основе анализа структуры выражения):

а) возведение в степень и извлечение корня (в порядке их следования),

б) выполняются действия в скобках,

в) применяются свойства (законы) арифметических действий, при этом возможно изменится и порядок выполнения действий,

г) сложение и вычитание (в порядке их следования),

д) умножение и деление (в порядке их следования).

Запишите этапы в их логической последовательности

I этап	II этап	III этап	IV этап	V этап	VI этап	VII этап	VIII этап

53. Дайте качественную оценку (неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично, превосходно) результатам деятельности школьников по решению задачи: «Вычислите $(10 + 2^3 \cdot 3) + 4^3 – (16 : 2 –1) \cdot 5 – 150 : 5^2$»

Ученик	Решение	Оценка
А	$(10 + 2^3 \cdot 3) + 4^3 – (16 : 2 – 1) \cdot 5 – 150 : 5^2 =$ $= (10 + 8 \cdot 3) + 64 – (16 : 2 – 1) \cdot 5 – 150 : 25 =$ $= (10 + 24) + 64 – (8 – 1) \cdot 5 – 6 =$ $= 34 + 64 – 7 \cdot 5 – 6 =$ $= 34 + 64 – 35 – 6 = 98 – 35 – 6 = 63 – 6 = 57$	
Б	$(10 + 2^3 \cdot 3) + 4^3 – (16 : 2 – 1) \cdot 5 – 150 : 5^2 =$ $= 10 + \underline{24 + 64} – 7 \cdot 5 – 150 : 5 : 5 =$ $= 10 + \underline{88} – 35 – 30 : 5 = 10 + (88 – 35) – 30 : 5 =$ $= 10 + 53 – 6 = 53 + (10 – 6) = 53 + 4 = 57$	
В	$(10 + 2^3 \cdot 3) + 4^3 – (16 : 2 – 1) \cdot 5 – 150 : 5^2 =$ $= 10 + 8 \cdot 3 + 64 – 16 : 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5 – 150 : 25 =$ $= 10 + 24 + 64 – 40 + 5 – 6 =$ $= 10 + 24 + 64 + 5 – 40 – 6 =$ $= 10 + 24 + 64 + 5 – (40 + 6) = 103 – 46 =$ $=103 – 43 – 3 = 60 – 3 = 57$	

54. Дайте качественную оценку (неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично, превосходно) результатам деятельности школьника по решению задачи: «Разложите на простые множители число 1463»

Решение	Оценка
1463 = 1400 + 63, значит, число 1463 делится на **7**; 1463 : 7 = 209; 209 = 190 + **19**, значит число 209 делится на 19; 209 : 19 = **11**. Итак, $1463 = 7 \cdot 11 \cdot 19$.	

55. Составление алгоритма нахождения НОД, используя канонические разложения чисел, учитель начал с актуализации знаний в форме фронтального опроса: (1) Какое число называется наибольшим общим делителем чисел a и b? (2) Проверим, верно ли мы понимаем определение НОД, для этого выясним, верно ли, что: *НОД(33, 66) = 66, НОД(36, 108) = 9, НОД(36, 54) = 9, НОД(123, 312) = 1.*

а) Вопросов недостаточно для составления алгоритма нахождения НОД.

б) Нужно вспомнить алгоритм разложения чисел на простые множителя (каноническое разложение числа).

в) Нужно вспомнить определение простого числа.

г) Нужно вспомнить признаки делимости.

д) Нужно задать вопрос о том, как ученики выполнили задание 2

е) Этих заданий вполне достаточно для изучения нового материала.

56. Оцените по традиционной 5-балльной шкале решения учеников 6 класса, при условии, что задание отнесено к теме «Алгоритм нахождения НОД»:

Ученик	Решение	Оценка
А	*1890 : 126 = 15* $\begin{array}{r|l} -1890 & 126 \\ \underline{126} & 15 \\ -630 & \\ \underline{630} & \\ 0 & \end{array}$	
Б	$1890:126=\dfrac{1890}{126}=\dfrac{210}{14}=\dfrac{105}{7}=15$	
В	$1890:126=\dfrac{945}{63}=\dfrac{315}{21}=\dfrac{105}{7}=15$	
Г	*1890 : 126 = 210 : 14 = 105 : 7 = 15*	
Д	$1890:126=\dfrac{1890}{126}=\dfrac{2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 3^2\cdot 7}=\dfrac{3\cdot 5}{1}=15$	
Е	$НОД\ (1890,\ 126) = НОД\ (2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7,\ 2\cdot 3^2\cdot 7) = 2\cdot 3^2\cdot 7$ $1890 : 126 = 3\cdot 5 = 15$	

57. Оцените целесообразность использования алгоритма нахождения НОД для выполнения деления 1890 на 126:

а) Это хорошая возможность продемонстрировать сферу применимости указанного алгоритма.

б) Пусть познакомятся ещё с одним способом выполнения деления.

в) Пример подходит для демонстрации сферы применимости указанного алгоритма, если учащимся предварительно указывают на способ выполнения деления (применить алгоритм нахождения НОД).

г) Пример не подходит для демонстрации сферы применимости указанного алгоритма.

58. Учитель организовал деятельность учеников 6 класса по теме «Простые и составные числа» следующим образом.

Этап 1.

1. Найдите все делители каждого из чисел, результаты занесите в таблицу:

Число	1	2	3	4	5	6	12	17	43	60
Делители										

2. Если ты с заданием справился, то должен получить:

Натуральное число	1	2	3	4	5	6	12	17	43	60
Количество делителей	1	2	2	3	2	4	6	2	2	12

3. Итак, число 1 имеет один делитель, число 12 – шесть делителей, число 43 – два делителя. В математике выделяют такие натуральные числа, которые имеют только два делителя: 1 и само это число. Натуральное число называется *простым числом*, если оно имеет только два различных делителя единицу и само себя. Число, имеющее более двух делителей, называется *составным числом*. Число **1** не относится ни к простым, ни к составным числам. (Объясните почему?)

Для того, чтобы определить, является ли данное число (например, 567) простым или составным, нужно выяснить, имеет ли это число хотя бы один делитель, отличный от него самого и единицы. Если такого делителя нет, то число простое, в противном случае оно составное.

Этап 2.

4. Определим, какими, простыми или составными, являются числа
(а) 113 и (б) 567.

(а) Известные нам признаки делимости позволили сделать вывод, что 113 не делится на 2, 3, 5, 10, значит, оно не делится и на

2, 4, 6, 8, …, 100

3, 6, 9, 12, …, 111

5, 10, 15, 20, …, 110

10, 20, 30, 40, …, 110

Выберем следующий делитель, не вошедший в эти четыре списка. Это число семь: 113 : **7** = **16** (ост. 1) или 113 = 7 · 16 + 1, или 113 : 16 = 7 (ост. 1) Значит, число 113 не делится на

7, 14, 21, 28, …, 112 и не делится на **16**, 32, 48, 64, 80, 96, 112

Выберем следующий делитель, не вошедший в эти шесть списков. Это число одиннадцать: 113 : **11** = **10** (ост. 3) или 113 : 10 = 11(ост.3). Значит, число 113 не делится на

11, 22, 33, 44, …, 110 и не делится на **10**.

Дальше, проверять не имеет смысла, так как частное меньше выбираемого делителя, а для таких чисел проверку мы уже сделали. Итак, 113 – простое число.

(б) Сумма цифр числа 567 равна 18; 18 делится на 3, следовательно, по признаку делимости на 3, число 567 делится на 3, то есть имеет делитель 3, отличный от 1 и самого себя. 567 – составное число.

Этап 3.

5. Прочитай ещё раз текст и скажи (мысленно), какие числа называются простыми, какие составными.

6. Какие из чисел, приведенных в п.1, простые, какие – составные? Заполни таблицу, используя обозначения: П – простое число, С – составное число.

Натуральное число	1	2	3	4	5	6	12	17	43	60
Вид числа										

7. Определи, какие из чисел 7, 9, 11, 14, 19, 27, 29, 31 простые, а какие составные (используй образец рассуждений из п.4)?

Этап 4.

Чтобы каждый раз не выяснять, является ли конкретное число простым, или же оно составное, учёные решили найти все простые числа, рассуждая примерно так, как в п.4(а). А древнегреческий ученый Эратосфен «автоматизировал» это процесс. Для этого он составил таблицу $10 \times n$, вычеркнул 1 (не является простым числом), выделил первое простое число – **2**, вычеркнул все числа, кратные 2, то есть каждое второе число. После этого, первое незачёркнутое число – **3** – простое, выделил его и вычёркнул каждое третье число (то есть все числа кратные 3). Действуя подобным образом (выделяя после очередного вычёркивания первое незачёркнутое число p (оно будет простым) и вычёркивая затем каждое p-ое число), Эратосфен получил таблицу простых чисел сначала в пределах первой сотни, затем в пределах 1000, а метод которым он пользовался назван в его честь «решетом Эратосфена». Но простых чисел оказалось бесконечно много, что было доказано Евклидом. Несмотря на это издавна ведутся записи, отмечающие наибольшие известные на то время простые числа. По состоянию на 15 ноября 2015 года, наибольшее известное простое число равняется $2^{57\,885\,161} - 1$ и содержит 17 425 170 десятичных цифр.

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

Как называется описанная форма организации деятельности учащихся?

а) исследовательская работа;

б) обучающая самостоятельная работа;

в) проблемное изложение нового материала;

г) самостоятельная работа с учебным текстом;

д) эвристическая беседа.

59. Учитель предложил шестиклассникам задачу: «Ученики $5^А$ класса купили 203 учебника. Каждый купил одинаковое количество книг. Сколько было пятиклассников, и сколько учебников купил каждый из них?». К доске вызвались два ученика, каждый из которых представил своё решение.

Ученик А.
Человек в классе ≈ 20,
значит книг ≈ 10.
Всего 203 книги.
$21 \cdot 13 = 273$
$23 \cdot 11 = 253$
$27 \cdot 9 = 243$
$29 \cdot 7 = 203$
29 учеников купили по 7 книг

Ученик Б.

Учебников у 1 ученика	*Учеников*	*Всего учебников*
x	*y*	*203*

$x \cdot y = 203$

$$\begin{array}{r|l} 203 & 7 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

Ответ. 7 учеников купили по 29 учебников, или 29 учеников купили по 7 учебников.

Учитель попросил класс прокомментировать и оценить решения одноклассников. На какие высказывания учеников следует ориентироваться учителю при выставлении оценок?

а) ***А*** решил быстрее, чем ***Б***, поэтому ***А*** нужно поставить «5», а ***Б*** – «4».

б) У ***А*** решение какое-то нематематическое, приблизительное, он скорее угадал, чем решил, а у ***Б*** и таблица, и уравнение, и решение и ответ. ***Б*** следует поставить «5», а ***А*** – «4».

в) Я вообще не решил задачу, поэтому и ***А***, и ***Б*** следует поставить по «5».

г) У ***Б*** два ответа. Разве такое может быть?

д) Решение ***А*** – логичнее и понятнее, на «5».

е) Если у ***А*** взять начало и ответ, а у ***Б*** – разложение на множители, то за такое решение можно поставить «5».

ж) Давайте дадим им похожую задачу, кто быстрее решит своим методом, тот заслуживает «5».

Учитель, прислушался к мнению последнего ученика и предложил всем учащимся решить задачу: «Ученики $5^А$ класса купили 150 учебника. Каждый купил одинаковое количество книг. Сколько было пятиклассников, и сколько учебников купил каждый из них?», – понравившемся методом. Какими будут результаты?

60. Учитель объясняет ученикам 6 класса решение задачи: «Из 60 апельсинов, 165 орехов и 225 конфет нужно составить наибольшее число одинаковых подарков. Что и в каком количестве войдет в каждый набор?»

	В 1 наборе (шт.)	Количество наборов (шт.) – max	Всего (шт.)
Апельсины	a	x	*60*
Орехи	b		*165*
Конфеты	c		*225*

$ax = 60,\ bx = 165,\ cx = 225 \Rightarrow x$ – наибольший общий делитель чисел *60, 165* и *225*.

$x = НОД(60, 165, 225) = 15.$

$15a = 60,\ 15b = 165,\ 15c = 225.$

$a = 4,\ b = 11,\ c = 15.$

Ответ. В каждом из 15 подарков: 4 апельсина, 11 орехов и 15 конфет.

Один из учеников сказал, что решил задачу проще и быстрее: каждое из чисел по признакам делимости делится на 3 и на 5, значит делится на 15 – это и будет число подарков. Теперь узнаём, сколько в каждом подарке апельсинов 60 : 15 = 4, орехов 175 : 15 = 11 и конфет 225 : 15 = 15.

Оцените это решение.

61. Решите задачу: «Генерал пытался выстроить всех солдат в ряд сначала по 2, а затем по 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10, но каждый раз последний ряд оказывался неполным, так как в нём было 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 солдат соответственно. Какое наименьшее число солдат было в подчинении у генерала?»

62. Одним из вариантов упражнения «Верно ли, что…?» можно считать предъявление ученикам задания, при решении которого допущена ошибка. Требование к поиску ошибки облачается в различные формы, например, при освоении действий с дробями, возможны такие варианты заданий:

– найди ошибку в вычислениях $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, выполни верно, сделай проверку и придумай аналогичное упражнение;

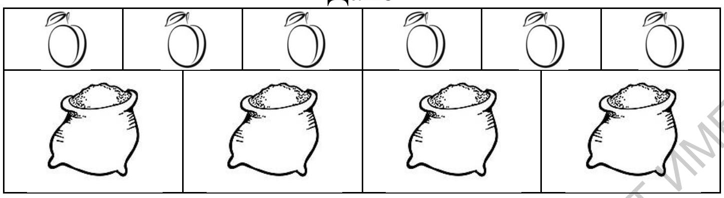
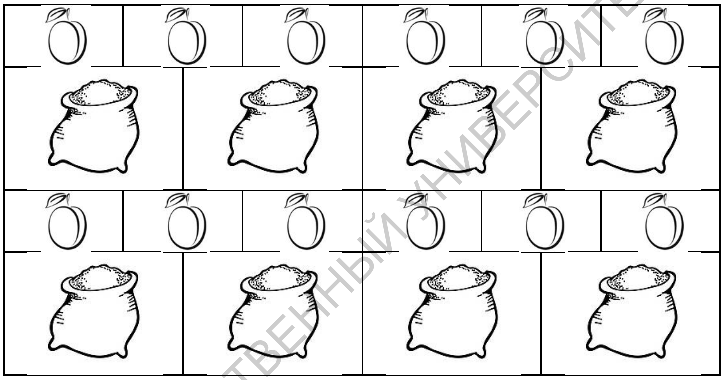
– найди ошибку в вычислениях $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot 12=\frac{13}{12}\cdot 12=13$, вычисли верно и придумай аналогичное упражнение с алгебраическими дробями;

– зачеркни знак, на котором нарушается равенство, объясни, почему это произошло: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot 12=\frac{5}{6}+\frac{12}{4}=\frac{20+72}{24}=\frac{92}{24}=3\frac{10}{24}=3\frac{5}{12}$;

– проверь решение: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot 12=\frac{13}{12}\cdot 12=13$, найди ошибку, и если ошибка возникла из-за неправильной расстановки действий, то расставь скобки в исходном выражении так, чтобы из неверного решения получилось верное;

Продолжите перечень.

63. Дайте качественную оценку (неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично, превосходно) результатам деятельности учащихся 6 класса по решению задачи: «Для варки варенья из вишни на 6 кг ягод берут 4 кг сахарного песку. Сколько килограммов сахарного песку надо взять на 12 кг ягод?».

<table>
<tr><th>Ученик</th><th>Решение</th><th>Оценка</th></tr>
<tr><td>А</td><td>
<table>
<tr><td rowspan="2">Ингредиенты</td><td colspan="2">Ситуации</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td></tr>
<tr><td>Ягоды</td><td>6 кг</td><td>12 кг</td></tr>
<tr><td>Сахарный песок</td><td>4 кг</td><td>?</td></tr>
</table>
Пусть x – количество сахарного песка, тогда
$\frac{6}{4}=\frac{12}{x}$, $x=\frac{4\cdot 12}{6}=8$
</td><td></td></tr>
<tr><td>Б</td><td>
<table>
<tr><td rowspan="2">Ингредиенты</td><td colspan="2">Масса (кг)</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td></tr>
<tr><td>Ягоды</td><td>6</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Сахарный песок</td><td>4</td><td>x</td></tr>
</table>
$\frac{6}{12}=\frac{4}{x}$, $\frac{1}{2}=\frac{4}{x}$, $x=8$
Ответ. Нужно взять 8 кг сахарного песка.
</td><td></td></tr>
<tr><td>В</td><td>
Дано

Решение

Ответ. 8 кг
</td><td></td></tr>
<tr><td>Г</td><td>
1) Узнаем, сколько сахара нужно для варки варенья из 1 кг ягоды?
$4:6=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ (кг)
2) Узнаем, сколько сахара нужно для варки варенья из 12 кг ягоды?
$12\cdot\frac{2}{3}=\frac{24}{3}=8$ (кг).
Ответ. Нужно взять 8 кг сахарного песка.
</td><td></td></tr>
<tr><td>Д</td><td>
1) Узнаем, сколько ягоды на 1 кг сахара нужно для варки варенья?
$6:4=1{,}5$ кг
2) Узнаем, сколько сахара нужно для варки варенья из 12 кг ягоды?
$12:1{,}5=8$ (кг).
Ответ. 8 кг сахара.
</td><td></td></tr>
</table>

64. Дайте качественную оценку (неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично, превосходно) результатам деятельности учащихся 6 класса по решению задачи: «Для варки варенья из вишни на 6 кг ягод берут 4 кг сахарного песку. Сколько килограммов сахарного песку надо взять на 12 кг ягод?».

Ученик	Решение	Оценка
Е	1) Во сколько раз больше взяли ягод во второй раз? 12 : 6 =2. В 2 раза. 2) Во сколько раз увеличится масса сахарного песка с увеличением массы ягод? Увеличится во столько раз, во сколько увеличилось количество ягод, то есть в 2 раза. 3) Сколько килограмм сахарного песку нужно взять во втором случае? $4 \cdot 2 = 8$ (кг).	
Ж	 Переформулируем задачу. Отрезок измеряется двумя способами; при первом способе его длина равна 6 единичным отрезкам, при втором – 4. Чему равна длина другого отрезка при измерении вторым способом, если первый способ измерения дал результат в 12 единичных отрезков? Решение. Его длина, при измерении вторым способом, равна 8 единичным отрезкам. Ответ. На 12 кг ягоды нужно взять 8 кг сахарного песка.	
И	1 следствие 3 кг ягод – 2 кг сахарного песка. ***Дано:*** ***6 кг ягод – 4 кг сахарного песка.*** 1 промежуточный результат: 9 кг ягод – 6 кг сахарного песка. Вывод (ответ): ***12 кг ягод – 8 кг сахарного песка.***	

65. Дана задача: «Найдите скорость автомашин А-И, если 80 км они проезжают: А – за 1 ч; Б – за $\frac{4}{5}$ ч; В – за $\frac{4}{3}$ ч; Г – за $\frac{8}{7}$ ч; Д – за 50 мин; Е – за 65 мин; Ж – за 90 мин; И – за 100 мин.». На какие вопросы учащиеся могут дать ответ без промежуточных вычислений (к ним не относится перевод единиц времени)?

а) какая из машин придёт к финишу первой, если все они будут участвовать в гонках?

б) между машинами А и Б 80 км; через какое время эти машины встретятся, если будут двигаться навстречу друг другу?

в) какая из машин Б или В пройдёт большее расстояние, при условии, что В ехала 3 часа, а Б – 5 часов?

г) машина А проехала тоннель за 1 минуту; за сколько проедет этот тоннель машина Д?

66. В домашнюю работу учеников 6 класса, изучающих делимость чисел, учитель включил задачу: «Вдоль кольцевой дорожки длиной 3600 метров через каждые 40 метров установлены скамейки, каждая из которых окрашена в какой-то цвет. Известно, что если от любой скамейки пройти 160 метров по часовой стрелке, то мы придём к скамейке того же цвета. Найдите максимально возможное число различных цветов скамеек». Те ученики, которые взялись за решение задачи предоставили такое решение: (1) 3600 : 40 = 90 (скамеек на дорожке); (2) 160 : 40 = 4 (цвета). Ответ: скамейки окрашены в 4 различных цвета. Почему учителя не удовлетворили такие решение и ответ.

а) Не построена информационная модель задачи.

б) Не учтено требование «максимально возможное число», поэтому решение нельзя считать верным, а ответ – удовлетворяющим условию задачи.

в) Не учтено условие «вдоль кольцевой дорожки», поэтому решение нельзя считать верным, а ответ – удовлетворяющим условию задачи.

г) Решение не доведено до конца, и поэтому ответ неверен.

д) Решение недостаточно обосновано.

е) Решение никак не привязано к изучаемому материалу.

67. В домашнюю работу учеников 6 класса, изучающих делимость чисел, учитель включил задачу: «Вдоль кольцевой дорожки длиной 3600 метров через каждые 40 метров установлены скамейки, каждая из которых окрашена в какой-то цвет. Известно, что если от любой скамейки пройти 160 метров по часовой стрелке, то мы придём к скамейке того же цвета. Найдите максимально возможное число различных цветов скамеек».

Те ученики, которые взялись за решение задачи предоставили такое решение: (1) 3600 : 40 = 90 (скамеек на дорожке); (2) 160 : 40 = 4 (цвета). Ответ: скамейки окрашены в 4 различных цвета.

Учителя не удовлетворили такие решение и ответ, поэтому в начале следующего урока он совместно с учениками построил информационную модель задачи, взяв за основу циферблат круглых часов. Это дало нужный эффект: несколько учеников дали верный ответ: скамейки могут быть окрашены в 1 или 2 различных цвета; максимальное число цветов – 2.

Дальнейшие действия учителя?

а) Выяснить с учениками причину возникновения ошибки.

б) Выяснить с учениками, какое отношение задача имеет к изучаемому материалу.

в) Выяснить, как требование «максимально возможное число» повлияло на решение.

г) Выяснить, как условие «вдоль кольцевой дорожки» повлияло на решение.

д) Записать верное решение на доске (ученики – в тетрадях).

е) Приступить к следующему этапу урока.

ж) Разработать алгоритм решения подобных задач и предложить ученикам решить аналогичную задачу (для этого в исходной задаче достаточно изменить числовые данные).

68. На уроке математики в канун нового года учитель предложил ученикам 6 класса загадать желание, а затем проверить, исполнится оно или нет. Для этого нужно записать на листе бумаги счастливое число (у каждого – своё), а затем дописывать числа по правилу: либо вдвое большее какого-то на листе, либо равное сумме каких-то двух записанных чисел. Кому удастся получить число 2016, у того желание сбудется. А всем тем, кто объяснит, почему желание сбудется или не сбудется, учитель обещал поставить за урок оценку «5».

Ученики представили свои работы. Кто достоин пятёрки?

<table>
<tr>
<td>а)
$3 \xrightarrow{\cdot 2} 6 \xrightarrow{\cdot 2} 12 \xrightarrow{\cdot 2} 24$
$3 \xrightarrow{+6} 9 \xrightarrow{+12} 21 \xrightarrow{+24} 45$
$45 \xrightarrow{\cdot 2} 90 \xrightarrow{\cdot 2} 180 \xrightarrow{\cdot 2} 360$
$45 \xrightarrow{+90} 135 \xrightarrow{+180} 315 \xrightarrow{+360} 675$
$675 \xrightarrow{\cdot 2} 1350 \xrightarrow{+360} 1710 \xrightarrow{+180} 1890$
$1890 \xrightarrow{+90} 1980 \xrightarrow{+24} 2004 \xrightarrow{+12} 2016$
Желание сбудется.</td>
<td>б)
$5 \xrightarrow{\cdot 2} 10 \xrightarrow{+5} 15$
$\xrightarrow{\cdot 2} 30 \xrightarrow{+15} 45$
Числа оканчиваются на 0 или 5, не оканчиваются на 6, значит 2016 не получить. Жаль, что желание не сбудется.</td>
</tr>
<tr>
<td>в)
Если счастливое число – один из делителей числа 2016, то желание сбудется.
$\begin{array}{l|l} 2016 & 2 \\ 1008 & 2 \\ 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \end{array}$
Сегодня моё счастливое число – 1008.
Проверка: $1008 \cdot 2 = 2016$</td>
<td>г)
Моё счастливое число – *6*.
Если его удвоить, то получиться число *12*, а суммой этих чисел будет число *18*. Все эти числа делятся на *6*. И все другие, получаемые по правилу – тоже, значит, если *2016* делится на *6*, то его можно получить по правилу из первого числа.
2016 – чётно и сумма его цифр – *9* – делится на *3*, значит, по признаку делимости на шесть, *2016* делится на *6*.
Ура! Желание сбудется.</td>
</tr>
<tr>
<td>д)
$4 \xrightarrow{\cdot 2} 8 \xrightarrow{\cdot 2} 16 \xrightarrow{\cdot 2} 32 \xrightarrow{\cdot 2} 64$
$\xrightarrow{\cdot 2} 128 \xrightarrow{\cdot 2} 256 \xrightarrow{\cdot 2} 512 \xrightarrow{\cdot 2} 1024$
$\xrightarrow{+512} 1536 \xrightarrow{+256} 1792 \xrightarrow{+128} 1920$
$\xrightarrow{+64} 1984 \xrightarrow{+32} 2016$
Желание сбудется</td>
<td>е)
7, 14, 21 = 7 + 14
$\begin{array}{r|l} 2016 & 2 \\ 1008 & 2 \\ 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ (63)62 & 2 \\ (31)\ 30 & 2 \\ (15)\ 14 & 2 \\ 7 & \end{array}$
7 нужно умножить на *2* восемь раз, получится *1792.*
2016 – 1792 = 224
$\begin{array}{r|l} 224 & 2 \\ 112 & 2 \\ 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & \end{array}$
14 нужно умножить на *2* четыре раза, получится *224*
Полученные результаты сложить.
Желание сбудется.</td>
</tr>
</table>

69. Усвоению какого понятия числовой линии посвящено упражнение «Заполни таблицу. Ответь на вопросы:

Число	Модуль числа	Расстояние от точки, соответствующей числу, до точки O	Положение точки относительно O
–2	…	…	слева
…	…	15	справа
…	100	…	…
–37	…	37	…
29	…	…	слева
…	52	–52	слева
a	…	…	слева

– Есть ли в каких-нибудь строках лишние данные?

– Есть ли строки, которые можно заполнить несколькими способами?

–Есть ли строки, которые вообще нельзя заполнить?»

а) модуль числа,
б) отрицательное число;
в) противоположные числа;
г) расстояние;
д) числовая (координатная) прямая.

70. Задание «Даны равенства: (а) |–2| = 2; (б) |3| = –3; (в) |–3| = –(–3); (г) –|3| = –3. Проверьте равенства. Если есть ошибка, то исправьте ее и прочитайте равенство, используя слова «модуль» и «расстояние»» при изучении темы «Модуль числа. Противоположные числа» является:

а) занимательным по форме и содержанию (необычная формулировка вызывает познавательный интерес);

б) контролирующим (основные знания, умения и навыки действий по нахождению модуля числа);

в) обучающим (на усвоение понятия «модуль»);

г) развивающим (познавательные УУД).

71. Охарактеризуйте задание: «Налог на доходы физических лиц (НДФЛ) в РФ составляет 13 % от начисленной заработной платы. Сколько рублей получит работник после уплаты НДФЛ, если начисленная заработная плата составляет 30 000 рублей?».

а) Несложная математическая задача, моделирующая реальную или близкую к реальной ситуации.

б) Несложная прикладная задача, моделирующая реальную или близкую к реальной ситуации.

в) Несложная сюжетная задача, моделирующая реальную или близкую к реальной ситуации.

г) Несложная текстовая задача, моделирующая реальную или близкую к реальной ситуации.

72. Для решения задачи: «Налог на доходы физических лиц (НДФЛ) в РФ составляет 13 % от начисленной заработной платы. Сколько рублей получит работник после уплаты НДФЛ, если начисленная заработная плата составляет 30 000 рублей?» достаточно

а) знания определения процента и его свойств,

б) знания определения процента и умений решать три типа задач на проценты,

в) понимания того, что процент – это одна сотая часть некоторой величины,

г) умения переходить от задачи на % к задачам на части,

д) умения представить десятичную дробь в %, и % десятичной дробью.

73. Укажите <u>ошибку</u> в решении задачи: «Налог на доходы физических лиц (НДФЛ) в РФ составляет 13 % от начисленной заработной платы. Сколько рублей получит работник после уплаты НДФЛ, если начисленная заработная плата составляет 30 000 рублей?».

а) $30\,000 \cdot 13\,\% =$

б) $= 30\,000 : 100 \cdot 13 =$

в) $= 300 \cdot 13 = 3\,900$.

г) $30\,000 - 3\,900 =$

д) $= 30\,000 - 4\,000 + 100 =$

е) $=26\,100$.

74. Ученик привёл такое решение задачи: «Свежие фрукты содержат 88 % воды, а высушенные – 30 %. Сколько сухих фруктов получится из 35 кг свежих фруктов?». <u>Решение</u>. (1) 88 – 30 = 58% (на столько % усыхают фрукты); (2) 0,58 · 35 = 20,3 кг (столько воды теряют фрукты при высыхании); (3) 35 – 20,3 = 14,7 кг (масса фруктов после высыхания). Объясните ученику, в чём он ошибся.

75. Для решения задач на изменение состава вещества путём увеличения/уменьшения доли одного из его компонентов учитель предлагает использовать в качестве информационной разрешающей модели следующую таблицу.

Состав вещества	Исходное состояние			Конечное состояние
	%	масса		%
Неизменный компонент (…)				
Изменяющийся компонент (…)				
Всего	100%			100%

Учитель поясняет, в чём преимущество этой модели: любые две строки столбца «Исходное состояние» или «Конечное состояние» образуют пропорцию, поэтому задача указанного типа в конце концов сводится к «решению двух пропорций».

Метод демонстрируется на примере задачи: «Сколько столового 6%-го уксуса получиться из 120 г 70%-ой уксусной эссенции?».

1 этап – заполнение известными данными, выявление требования задачи

Состав вещества	Исходное состояние		Конечное состояние	
	%	г		%
Неизменный компонент (кислота)	*70%*			*6%*
Изменяющийся компонент (вода)				
Всего	100%	*120*	*?*	100%

2 этап – составление первой пропорции, поиск первой неизвестной величины (устно)

Состав вещества	Исходное состояние		Конечное состояние	
	%	г		%
Неизменный компонент (кислота)	*70%*	*1)* ***84***		*6%*
Изменяющийся компонент (вода)				
Всего	100%	*120*		100%

3 этап – составление второй пропорции, поиск второй неизвестной величины (устно)

Состав вещества	Исходное состояние		Конечное состояние	
	%	г		%
Неизменный компонент (кислота)	*70%*	*1)* ***84***		*6%*
Изменяющийся компонент (вода)				
Всего	100%	*120*	*2)* ***1400***	100%

Учитель акцентирует внимание на том, что вторая пропорция включает величину, которую требуется найти, поэтому, решением второй пропорции дан ответ на вопрос задачи.

Ответ. 1400 г столового уксуса.

Поясняется, что если бы требовалось узнать, сколько воды следует добавить, чтобы развести эссенцию до столового уксуса, нужно было бы произвести ещё одно действие: 1400 – 120 = 1280.

Выслушав объяснения учителя, один из учеников предложил убрать из таблицы строку «Изменяющийся компонент», так как она не используется при решении задачи.

Оцените предложение ученика (так, как если бы Вы были на уроке).

____

____

____

____

____

76. Учитель в конце урока по решению задач на изменение состава вещества путём увеличения/уменьшения доли одного из его компонентов (6 класс) дал ученикам проверочную работу, состоящую из одной задачи (ниже показано оформление доски, дающее представление о содержании урока).

Тема урока. Решение задач на процентное содержание вещества.

Состав вещества	*Было*		*Стало*	
	%	*масса*		*%*
Р.вещество				
Вода				
Всего	*100%*			*100%*

Состав вещества	*Было*		*Стало*	
	%	*масса*		*%*
Кислота	*70%*	*1) **84***		*6%*
Вода				
Всего	*100%*	*120*	*2) **1400***	*100%*

№ 764, 765, 766

Проверочная работа

Вариант 1

Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составляло 2%?

Вариант 2

Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько килограммов соли нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составляло 24%?

Д/з № 763, 767, 776

Почти все ученики, выполняющие задание первого варианта решили задачу правильно. Все ученики, выполняющие задание второго варианта решила задачу неправильно.

Как вы думаете, какую ошибку они допустили (приведите возможное ошибочное решение учащихся) и почему?

77. Тем, кто испытывает трудности при составлении математических моделей задач «на смеси и сплавы» учитель предлагает использовать в качестве информационной разрешающей модели следующую таблицу

Состав вещества	**I**		II		I + II	
	в %	масса I	**в %**	масса II	**в %**	масса (**I + II**)
Неизменный компонент (…)						
Изменяющийся компонент (…)						
ВСЕГО	*100%*		*100%*		*100%*	

Продемонстрируйте способ решения задачи с использованием указанной таблицы на примере задачи: «В каких пропорциях нужно смешать 50%-ый раствор и 70%-ый раствор кислоты, чтобы получить 65%-ый раствор кислоты? Какое максимальное количество 65%-ого раствора можно получить, если имеется 250 г 50%-го раствора и неограниченное количество 70%-го? Какое максимальное количество 65%-ого раствора можно получить, если имеется 250 г 70%-го раствора и неограниченное количество 50%-го?».

78. Охарактеризуйте задание: «Найдите значение выражения $\dfrac{0{,}36\cdot 10^9}{0{,}9\cdot 10^7}$»

а) Несложное задание на преобразование и вычисление, проверяющее умения выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приёмы.

б) Несложное задание на вычисление, проверяющее умения выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приёмы.

в) Несложное задание на вычисление, проверяющее умение выполнять устно арифметические действия.

г) Несложное задание на вычисление, проверяющее умения выполнять письменно арифметические действия.

79. Какое решение задачи: «Найдите значение выражения $\dfrac{0{,}36\cdot 10^9}{0{,}9\cdot 10^7}$» – <u>нельзя</u> считать верным?

а) $\dfrac{0{,}36\cdot 10^9}{0{,}9\cdot 10^7}=\dfrac{36\cdot 10^7}{9\cdot 10^6}=\dfrac{36}{9}\cdot\dfrac{10^7}{10^6}=4\cdot 10=40.$

б) $\dfrac{0{,}36\cdot 10^9}{0{,}9\cdot 10^7}=\dfrac{0{,}360000000000}{0{,}90000000}=\dfrac{0{,}3600}{0{,}9}=40.$

в) $\dfrac{0{,}36\cdot 10^9}{0{,}9\cdot 10^7}=\dfrac{0{,}36}{0{,}9}\cdot\dfrac{10^9}{10^7}=0{,}4\cdot 100=40.$

г) $\dfrac{0{,}36\cdot 10^9}{0{,}9\cdot 10^7}=\dfrac{0{,}04\cdot 10^9}{0{,}1\cdot 10^7}=\dfrac{0{,}04\cdot 10^9}{10^6}=0{,}04\cdot 10^3=40.$

д) $\dfrac{0{,}36\cdot 10^9}{0{,}9\cdot 10^7}=0{,}36:0{,}9\cdot 10^{9-7}=0{,}36\cdot 10:0{,}9\cdot 10=3{,}6:9=40$

е) $\dfrac{0{,}36\cdot 10^9}{0{,}9\cdot 10^7}=\dfrac{0{,}6^2\cdot 10^9}{0{,}3^2\cdot 10^7}=\dfrac{0{,}2^2\cdot 10^9}{10^7}=0{,}4\cdot 100=40.$

80. При изучении темы «Квадратный корень из произведения» по учебнику Алгебра-8 (под ред. С.А. Теляковского) учитель может предложить ученикам изучить в п.16: пример перед теоремой 1, теорему 1, примеры 1 и 2; и ответить на вопросы:

§ 6 СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

16. Квадратный корень из произведения и дроби

Сравним значения выражений $\sqrt{81\cdot 4}$ и $\sqrt{81}\cdot\sqrt{4}$:

$$\sqrt{81\cdot 4}=\sqrt{324}=18,\quad \sqrt{81}\cdot\sqrt{4}=9\cdot 2=18.$$

Мы видим, что $\sqrt{81\cdot 4}=\sqrt{81}\cdot\sqrt{4}$. Аналогичным свойством обладает корень из произведения любых двух неотрицательных чисел.

ТЕОРЕМА 1

Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

● Каждое из выражений $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ и $\sqrt{ab}$ имеет смысл, так как $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Покажем, что выполняются два условия:

$$1)\ \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\geqslant 0;\qquad 2)\ (\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=ab.$$

Так как выражения $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ принимают лишь неотрицательные значения, то произведение $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ неотрицательно.
Используя свойство степени произведения, получим

$$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab.$$

Мы показали, что условия 1 и 2 выполняются. Значит, по определению арифметического квадратного корня при любых неотрицательных значениях a и b верно равенство

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.\ ○$$

Доказанная теорема распространяется на случай, когда число множителей под знаком корня больше двух.

Например, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то $\sqrt{abc}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}$. Действительно, $\sqrt{abc}=\sqrt{(ab)c}=\sqrt{ab}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}$.

Таким образом, арифметический квадратный корень обладает следующим свойством:

> корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.

§ 6. Свойства арифметического квадратного корня 89

Рассмотрим теперь арифметический квадратный корень из дроби.

ТЕОРЕМА 2

Если $a \geqslant 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Проведите доказательство самостоятельно.

Итак, справедливо ещё одно свойство арифметического квадратного корня:

> корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из числителя, делённому на корень из знаменателя.

Пример 1. Найдём значение выражения $\sqrt{64\cdot 0{,}04}$.

▶ Воспользуемся теоремой о корне из произведения:

$$\sqrt{64\cdot 0{,}04}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{0{,}04}=8\cdot 0{,}2=1{,}6.\ ◁$$

Пример 2. Вычислим значение выражения $\sqrt{32\cdot 98}$.

▶ Представим подкоренное выражение в виде произведения множителей, каждый из которых является квадратом целого числа, и применим теорему о корне из произведения:

$$\sqrt{32\cdot 98}=\sqrt{(16\cdot 2)\cdot(49\cdot 2)}=\sqrt{16\cdot 49\cdot 4}=4\cdot 7\cdot 2=56.\ ◁$$

Пример 3. Найдём значение выражения $\sqrt{\frac{36}{169}}$.

▶ По теореме о корне из дроби имеем

$$\sqrt{\frac{36}{169}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{169}}=\frac{6}{13}.\ ◁$$

Поменяв в тождествах $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ местами их левые и правые части, получим

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\quad\text{и}\quad\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Этими тождествами пользуются при умножении и делении арифметических квадратных корней.

90 Глава II Квадратные корни

1. Как удобнее вычислить $\sqrt[4]{81}$?
2. Как формулируется теорема?
3. Как кратко записать формулировку теоремы?
4. Зачем в условии теоремы даны ограничения на значения a и b?
5. О каких двух условиях идет речь в теореме?
6. Почему необходимо проверить выполнение этих двух условий?
7. Как осуществляется проверка этих двух условий?
8. Как доказывается случай, когда число множителей больше двух?
9. Чем отличаются первый и второй примеры?
10. Как можно сформулировать правило работы с задачами, аналогичными первому примеру? Приведите свои примеры.
11. Как можно сформулировать правило работы с задачами, аналогичными второму примеру? Приведите свои примеры.

Как форма результативности будет наиболее эффективной?

а) можно разбить учащихся на 2 команды (по гендерному принципу, по вариантам или любым другим способом) и организовать соревнование; в результате, на доске будут записаны два варианта выполнения задания, которые затем можно сравнить;

б) нужно предложить учащимся самостоятельно определиться с тем, будут ли они фиксировать ответы на вопросы в тетради или же выполнят задания устно;

в) ответы на вопросы ученики записывают на доске по мере получения (кто первый ответил, тот и записал), при этом при выполнении 10 и 11 заданий все ученики (работа «по цепочке») приводят свои примеры на доске;

г) по окончании самостоятельной работы с учебником нужно осуществить проверку изученного материала по этим вопросам, при этом отдельные ученики могли бы выполнять функции учителя; таким образом, на доске и в тетрадях появились бы необходимые записи;

д) учащимся целесообразно сразу выполнять необходимые записи (ответы на вопросы и выполнение заданий) в тетради.

81. В систему задач к уроку «Действия с иррациональными числами» учитель включил задание:

«Верны ли равенства:

(а) $\left|\sqrt{5}+5\right|+\left|\sqrt{7}-5\right|=\sqrt{5}-\sqrt{7}$, (б) $\left|\sqrt{7}-3\right|+\left|5-\sqrt{28}\right|=\sqrt{7}-2$,

(в) $\left|\sqrt{11}-3\right|-\left|13-\sqrt{99}\right|=4\sqrt{11}-16$, (г) $\left|\sqrt{8}-3\right|-\left|\sqrt{32}+3\right|=\sqrt{8}$».

Учащиеся попросили объяснить на примере, как решать задачи такого вида. Учитель выбрал для примера задачу (а) и объяснил её решение следующим образом: «Модуль любого числа, кроме нуля, всегда положителен; слева – сумма модулей – положительное число, а справа – число отрицательное; значит между левым и правым числом нельзя поставить знак равенства». Остальные задачи ученикам было предложено решить самостоятельно. Как Вы думаете, какими будут результаты самостоятельной работы учащихся?

а) Результаты будут хорошими (предполагаемые оценки – «4» и «5»), так как учитель всё понятно объяснил.

б) Результаты будут удовлетворительными (предполагаемая оценка – «3»), так как большая часть учеников верно решит только задание (б), в котором слева – сумма модулей.

в) Результаты будут неудовлетворительными (предполагаемая оценка – «2»), так как большая часть учеников не решит ни одно из заданий (б-г), поскольку учитель выбрал неудачный пример для объяснения.

г) Результаты будут неудовлетворительными (предполагаемая оценка – «2»), так как большая часть учеников не решит ни одно из заданий (б-г), поскольку учитель выбрал неудачный метод объяснения.

82. Урок повторения и обобщения материала по теме «Арифметический квадратный корень» учитель начал с изложения следующего материала.

«Часто практическая или прикладная задача не имеет рационального решения, а для нужд практики её иррациональное решение неприемлемо. В этом случае приходится искать приближённое значение с наперед заданной точностью. Пусть решением задачи стало число $23\sqrt{36825}$; исходя из условия и требования задачи нужно искать приближённое значение этой величины с точностью до десятых, а в нашем калькуляторе нет операции извлечения корня. Запишем подкоренное выражение в виде $x^2+a,\ 0<a<x^2,$ тогда $\sqrt{x^2+a}\approx x$. Применим формулу, улучшающую приближение: $\sqrt{x^2+a}\approx x+\dfrac{a}{2x}$.

Итак, $\sqrt{36825}=\sqrt{190^2+725}\approx 190+\dfrac{725}{380}$ – числитель дроби больше её знаменателя, поэтому $\sqrt{36825}=\sqrt{191^2+344}\approx 191+\dfrac{344}{2\cdot 191}=191\dfrac{172}{191}\approx 191{,}90$

$191{,}9^2=36825{,}61,$ а $191{,}8^2=36787{,}24.$ Первое приближённое значение дано с избытком, но более точно, поэтому $23\sqrt{36825}\approx 23\cdot 191{,}9=4413{,}7$».

Далее ученикам было предложено, используя указанный способ, вычислить $\sqrt{360825}$ и $\sqrt{1360827}$.

Насколько эффективен выбранный учителем способ организации изучения нового необязательного к усвоению, но практически значимого материала?

а) Поскольку материал необязательный к усвоению, учитель может использовать любой способ его подачи. Об эффективности в этом случае говорить не приходится.

б) Поскольку материал практически значимый, учителю целесообразно предложить несколько способов приближённого вычисления квадратного корня для того, чтобы у учеников была возможность выбора «самого запоминающегося».

в) Материал недостаточно теоретически обоснован, подкреплён незначительным числом упражнений, поэтому не будет включён в общую систему знаний и вскоре будет забыт. Целесообразно предложить как можно больше упражнений на усвоение (а не ограничиться двумя).

г) Материал недостаточно теоретически обоснован, подкреплён незначительным числом упражнений, поэтому не будет включён в общую систему знаний и вскоре будет забыт. Целесообразно сразу после изложения этого материала выяснить, откуда взялись формулы для приближённого вычисления. Это поможет восстановить их в случае практической необходимости.

д) ____

____

____

____

____

83. В систему задач к этапу контроля над усвоением изучаемого материала (начало урока, устная работа) по теме «Степень с рациональным показателем» учитель включил задание:

«Верны ли неравенства:

(а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, (б) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, (в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$, (г) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$».

Ученик, выполняющий задание (а), привёл следующую цепочку рассуждений: «Возведём неравенство в куб, получим: слева – $\frac{1}{2}$, а справа $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$ или $\sqrt{\frac{1}{27}}$. Так как $\frac{1}{2} > \sqrt{\frac{1}{27}}$, то неравенство (а) верно». Является ли такая аргументация удовлетворительной? Ответ обоснуйте

а) Да, так как ____
____
____.

б) Нет, так как ____
____
____.

84. В систему задач к этапу контроля над усвоением изучаемого материала (начало урока, устная работа) по теме «Степень с рациональным показателем» учитель включил задание:

«Верны ли неравенства:

(а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, (б) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, (в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$, (г) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$».

Ученик, выполняющий задание (б), привёл следующую цепочку рассуждений: «Возведём неравенство в 6 степень, получим: $\left(\frac{3}{2}\right)^{4} > \left(\frac{2}{3}\right)^{9}$. Так как $\left(\frac{3}{2}\right)^{4} > 1 > \left(\frac{2}{3}\right)^{9}$, то неравенство (б) верно». Является ли такая аргументация удовлетворительной? Ответ обоснуйте

а) Да, так как ____
____
____.

б) Нет, так как ____
____
____.

85. В систему задач к этапу контроля над усвоением изучаемого материала (начало урока, устная работа) по теме «Степень с рациональным показателем» учитель включил задание:

«Верны ли неравенства:

(а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, (б) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, (в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$, (г) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$».

Ученик, выполняющий задание (в), привёл следующую цепочку рассуждений: «Возведём неравенство в (– 6) степень, при этом знак неравенства изменится на противоположный, получим: $\left(\frac{1}{2}\right)^{2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$ или $\frac{1}{4} < \frac{1}{27}$. Так как это неравенство неверно, то и (в) неверно». Является ли такая аргументация удовлетворительной? Ответ обоснуйте

а) Да, так как ____.

б) Нет, так как ____.

86. В систему задач к этапу контроля над усвоением изучаемого материала (начало урока, устная работа) по теме «Степень с рациональным показателем» учитель включил задание:

«Верны ли неравенства:

(а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, (б) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, (в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$, (г) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$».

Ученик, выполняющий задание (г), привёл следующую цепочку рассуждений: «Неравенство $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$ равносильно неравенству $\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}} > \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$, а оно неравенству $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, так как из двух дробей с одинаковым числителем больше та, у которой знаменатель меньше. Возведём неравенство в 6 степень, получим: $\left(\frac{3}{2}\right)^{4} < \left(\frac{2}{3}\right)^{9}$. Так как $\left(\frac{3}{2}\right)^{4} > 1$, а $\left(\frac{2}{3}\right)^{9} < 1$, то неравенство $\left(\frac{3}{2}\right)^{4} < \left(\frac{2}{3}\right)^{9}$ неверно, значит и (г) неверно». Является ли такая аргументация удовлетворительной? Ответ обоснуйте

в) Да, так как ____.

г) Нет, так как ____.

87. Понимание формулы проверяется серией вопросов. Так, при освоении формулы общего члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$; – учащимся предлагается ответить на вопросы:

1) Какие величины участвуют в формуле?

2) Как выразить из формулы каждую из входящих в нее величин?

3) Каков характер зависимости величин между собой? // Например, зависимость a_n от n– линейная.

4) Как устроена формула (симметричность, размерность)?

5) Какие следствия можно получить из этой формулы? // В нашей формуле можно получить для n такое выражение: $n = \frac{a_{n+1} - a_1}{d}$.

6) Как применить полученные следствия к решению задач, например, к задаче: «В арифметической прогрессии $a_1 = 3, d = 0{,}02$. Какой номер имеет член прогрессии, равный 5?».

7) Как можно обобщить формулу? // В нашем случае можно предложить такое обобщение: $a_q = a_p + d(q-p)$, где p и q – номера членов прогрессии. Из этой формулы легко выразить разность прогрессии: $d = \frac{a_q - a_p}{q-p}$.

8) Как применить полученное обобщение к решению задач, например, к задаче: «Чему равна разность арифметической прогрессии, если $a_{30} = 2{,}3$ и $a_{100} = 3{,}7$?».

9) Возможны ли интерпретации формулы? // Для нашей формулы: если встать на высоту a_1 над землей, d – высота ступеньки лестницы, то a_n– высота, на которой находится человек, поднявшись на $(n-1)$ ступеньку.

10) Где можно применить формулу?

11) Как доказать формулу?

Примените эту схему к формуле суммы первых n членов арифметической прогрессии.

88. Закрепление понятия арифметической прогрессии осуществляется:

а) при вторичном обращении к понятию кратных чисел;

б) при вторичном обращении к теории делимости;

в) при выводе и использовании формулы n-го члена для решения как прямых, так и обратных задач, причем арифметическая прогрессия может быть задана разными способами (перечислением своих членов, первым членом и разностью, любыми двумя членами);

г) при выводе и использовании формулы суммы n первых членов;

д) при изучении линейной функции;

е) при изучении метода математической индукции;

ж) при решении задач, где предварительно требуется доказать, что заданная последовательность чисел является арифметической прогрессией, а затем уже найти недостающие члены прогрессии или сумму заданных чисел;

з) при сравнении её с геометрической прогрессией.

89. Решается задача: «Содержит ли арифметическая прогрессия: 2; 9;... число 156?». Сначала выясняется идея решения, которая позволяет составить план решения. Какой вопрос позволяет сформулировать идею решения:

а) Как на языке последовательности сказать иначе, что последовательность содержит (или не содержит) какое-то число? // Это значит, что число является (или не является) членом последовательности.

б) Чем определяется место члена последовательности? // Номером члена последовательности.

в) Каким числом является номер члена последовательности? // Натуральным.

г) Если нам удастся определить номер числа 156 в арифметической прогрессии, то как мы ответим на вопрос задачи? // Прогрессия содержит число 156.

д) Что известно об арифметической прогрессии и достаточно ли этих данных для ответа на этот вопрос? // В прогрессии известны первый и второй члены, значит, прогрессия задана полностью, поэтому, данных достаточно.

е) Что позволит найти номер члена прогрессии? // Формула n-го члена; в ней известны n-ый член и первый, разность прогрессии можем найти по условию задачи. Значит, сможем найти число n.

ж) ____
____
____
____

90. Решается задача: «Содержит ли арифметическая прогрессия: 2; 9;... число 156?». Сначала составляется информационная математическая модель задачи, которая позволяет составить план решения. Какая модель лучше всего позволяет сформулировать идею решения задач подобного типа:

а) 2, 9, **16**, 23, 30, 37, 44, 51, 58, 65,
72, 79, **86**, 93, … на 70 больше
+70 = 156

б) $a_1 = 2,\ a_2 = 9,\ a_n = a_1 + (n-1)d,\ a_n = 156$, если $n \in N$.

в) $156 = 2 + 7(n-1)$. Если $n \in N$, то 156 – содержится в данной последовательности.

г) $\begin{cases} a_2 = a_1 + d \\ a_n = a_1 + d(n-1) \\ n \in N \end{cases}$

91. Понимание задачи проверяется с помощью следующих вопросов

1) Откуда взялась эта задача? Почему мы решаем именно ее?

2) Какой факт утверждается? Можно ли переформулировать задачу?

3) Какими условиями обеспечивается результат в задаче? Все ли условия использованы при решении? Являются ли эти условия необходимыми?

4) Какие следствия возможны из полученного результата?

5) Можно ли обобщить полученный результат?

6) Можно ли получить его как-то иначе?

Примените эту схему к задаче: «Содержит ли арифметическая прогрессия: 2; 9;... число 156?».

____
____
____
____
____
____
____
____

92. Учащимся для самостоятельного решения дана задача: «Приведите пример трёхзначного числа, сумма цифр которого равна 19, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9». Какое указание к решению, в случае необходимости, должен дать учитель?

а) Вспомните свойства и признаки делимости на 3 и на 9.

б) Выпишите все трёхзначные числа, сумма цифр которого равна 19.

в) Выпишите суммы квадратов трёх цифр, которые делятся на 3.

г) Выясните, в каком случае сумма квадратов трёх цифр делится на 3, но не делится на 9.

д) Начните перебор всех возможных вариантов (метод исчерпывающих проб).

е) Начните с уменьшения множества цифр с 10 до 9, 8 и т.д..

ж) Составьте математическую модель задачи.

93. Учащимся для самостоятельного решения дана задача: «Приведите пример трёхзначного числа, сумма цифр которого равна 19, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9». Ученик предоставил такое решение. Как следует оценить его работу?

Задача.

$7+5+7=19$

$7^2+5^5+7^2=123$

$123:3=41$

$123:9=13$ (ост.6)

Ответ. 757

а) Оценить работу нельзя, так как неясно, как получен результат.

б) Оценка – «3». Нет решения, а только проверка.

в) Оценка – «4». Ученик выполнил требование задачи (привёл пример числа), но не объяснил, как нашёл решение.

г) Оценка – «5». Ученик выполнил требование задачи (привёл пример числа) и доказал, что найденное число удовлетворяет требованиям задачи.

94. Учащимся для самостоятельного решения дана задача: «Пять чисел *a, b, c, d, f* равны 5, 26, 13, 10 и 16, но, возможно, в другом порядке. Известно, что числа $\frac{a+b}{2}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c+d}{4}$ – целые. Найдите $c + 2d + 3f$». Ученик предоставил такое решение. Как следует оценить его работу?

Задача.

ост	5	10	13	16	26
: 2	1	0	3	0	0
: 3	2	1	1	1	2
: 4	1	2	1	0	2
	d	a	c	b	f

$c+2d+3f=13+2\cdot5+3\cdot26=101$

а) Оценить работу нельзя, так как неясно, как получен результат.

б) Оценка – «2». Решение неверно.

в) Оценка – «3». Решение выполнено формально: ученик не продемонстрировал необходимые знания и умения.

г) Оценка – «4». Ученик выполнил требование задачи (нашёл нужную сумму), но не объяснил письменно, как нашёл решение.

д) Оценка – «5». Ученик выполнил требование задачи (нашёл нужную сумму) на основании построенной информационной модели.

95. Наиболее целесообразной моделью задачи: «Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 148 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 4 км/ч, за 10 секунд. Найдите длину поезда в метрах»; – позволяющей найти и реализовать план её решения, является

а) алгебраическая модель,
б) графическая модель процесса описанного в задаче,
в) динамическая модель процесса описанного в задаче,
г) краткая запись условия задачи,
д) табличная модель.

96. Учитель проверяет решение текстовой задачи из домашней работы: «Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 148 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 4 км/ч, за 10 секунд. Найдите длину поезда в метрах». Для этого он просит учеников озвучить ответ и получает следующие варианты. Ученик А: «1480». Ученик Б: «Приблизительно 411 метров». Ученик В: «$411^{1}/_{9}$ м». Ученик Г: «Приблизительно 400 метров». Как учителю следует поступить?

а) Собрать тетради с домашней работой и оценить деятельность каждого ученика по решению задачи.

б) Назвать правильный ответ и потребовать от тех, у кого получился иной ответ, решить задачу заново.

в) Выяснить, у учеников А, Б, В и Г, идею решения задачи, после чего обратить внимание класса на то решение, которое привело к верному результату. Записать это решение на доске (вызвать ученика).

г) Выяснить, учитывали ли учащиеся при решении задачи движение пешехода, и попросить решить задачу с учётом этого условия.

д) Выяснить, учитывали ли учащиеся при решении задачи разную размерность величин, и попросить решить задачу с учётом этого требования.

е) Выяснить, какие информационные модели использовали ученики в процессе поиска решения задачи, указать на наиболее перспективную модель и попросить решить задачу с использованием этой модели.

ж) Выяснить, учитывали ли учащиеся при решении задачи движение пешехода, разную размерность величин; выяснить, какие информационные модели использовали ученики в процессе поиска решения задачи. Организовать беседу по поиску решения задачи.

з) Вызвать учеников А, Б, В и Г к доске для демонстрации решений, разобрать каждое на предмет ошибок, недочётов и сильных сторон решения.

и) Объяснить решение задачи, дать на дом аналогичную.

к) Объяснить решение задачи, решить аналогичную задачу на уроке.

л) Обратиться к этой задаче в конце урока, выяснить причины затруднений, указать на верный ответ и потребовать от тех, у кого получился иной ответ, решить задачу заново.

м) ____
____

97. Для решения задачи: «Первого числа каждого нечётного месяца, начиная с января, Пётр Васильевич клал на свой беспроцентный банковский счёт 30 тысяч рублей, а первого числа каждого чётного месяца, начиная с февраля, снимал 15 тысяч рублей. Первого числа какого месяца на счету Петра Васильевича оказалось ровно 90 тысяч рублей?» – достаточно

а) правильно интерпретировать условие задачи и не делать ошибок в вычислениях;

б) правильно интерпретировать требование задачи и не делать ошибок в вычислениях;

в) составить адекватную информационную модель задачи;

г) составить адекватную математическую модель задачи.

98. В начале урока, в качестве «разминки» учитель предложил классу задачу: «Первого числа каждого нечётного месяца, начиная с января, Пётр Васильевич клал на свой беспроцентный банковский счёт 30 тысяч рублей, а первого числа каждого чётного месяца, начиная с февраля, снимал 15 тысяч рублей. Первого числа какого месяца на счету Петра Васильевича оказалось ровно 90 тысяч рублей?». Все ученики с ней справились, но часть учеников получила один ответ, а другая часть – другой. Почему?

а) Задача имеет два решения (и один, и другой ответы – верные).

б) Задача имеет одно из двух решений в зависимости от интерпретации текста задачи (задача «с параметром»).

в) Задача не имеет решения.

г) Одна из «групп» допустила вычислительную ошибку.

д) Одна из «групп» допустила логическую ошибку.

99. В контрольную работу по теме «Геометрическая прогрессия» в качестве задания со звёздочкой (задание повышенной сложности не обязательное для выполнения) включена задача: «У князя Гвидона было 5 сыновей. Из его потомков 2012 имели ровно 3 сыновей и не имели дочерей, а остальные умерли бездетными. Сколько было потомков у князя Гвидона?». Все ученики с ней справились, получив верный ответ и предоставив следующее решение: $2012 \cdot 3 + 5 = 6041$. Как следует поступить учителю?

а) Всем поставить «5»

б) Задача решена неправильно, хотя ответ и верен, поэтому нужно обсудить идею решения и предоставить ученикам её самостоятельно реализовать.

в) На следующем уроке вызвать к доске желающего получить «5» и попросить его пояснить решение.

г) Поскольку все получили верный ответ, то задача не является задачей повышенной сложности, поэтому её следует причислить к типовой и оценивать не отдельно, а в совокупности с другими задачами контрольной работы.

д) Поставить «5» только отличникам (т.к. ясно, что решил кто-то из них, а остальные – списали).

е) Поставить «5» только тем, кто объяснил смысл равенства.

100. Исследовательская работа учеников 9 класса представлена проблемой: «Какие значения может принимать первый член арифметической прогрессии с разностью 1, если S_{2016} – наименьшая среди всех сумм S_n». Ученикам предлагалось наметить и реализовать план решения. По окончанию работы учитель проанализировал результаты и выяснил, что все работы, в зависимости от плана решения, можно разделить на три группы.

Как Вы думаете, какой группе (каждому ученику, выбравшему соответствующий путь решения) удастся реализовать свой план до конца?

а) I группа учеников – самая многочисленная – работала с формулами суммы первых n членов арифметической прогрессии.

б) II группа – самая малочисленная – работала с графиками самой последовательности и суммы её первых членов.

в) III группа работала с частными случаями арифметических прогрессий с разностью 1.

101. Исследовательская работа учеников 9 класса представлена проблемой: «Какие значения может принимать первый член арифметической прогрессии с разностью 1, если S_{2016} – наименьшая среди всех сумм S_n». Ученикам предлагалось наметить и реализовать план решения. Дайте качественную оценку (превосходно, отлично, очень хорошо, хорошо, средне, удовлетворительно, плохо) и комментарий к работе ученика.

План исследования.

1. Попробовать составить АП по данным условиям.
2. Если получится, то по образцу составить требуемую АП.
3. Если не получится, то применить формулу для S_n.

Исследование.

1. *1; 2; 3; 4; 5; …*

Суммы: $S_1=1$, $S_2=3$, $S_3=7$, $S_4=11$,.. – увеличиваются, значит, АП не может начинаться с положительного числа

***–5**; – 4; – 3; – 2; – 1; 0; 1; 2; …*

Суммы: $S_1= -5$, $S_2= -9$, $S_3= -12$, $S_4= -14$, $\mathbf{S_5= -15}$, $S_6= -15$, $S_7= -14$, $S_8= -12$, …

– сначала уменьшаются, достигается минимум, затем const, затем увеличиваются. Почти подходит, если убрать const.

***– 4,5**; – 3,5; – 2,5; – 1,5; – 0,5; 0,5; 1,5; 2,5;…*

Суммы:

$S_1= -4{,}5$, $S_2= -8$, $S_3= -10{,}5$, $S_4= -12$, $\mathbf{S_5= -12{,}5}$, $S_6= -12$, $S_7= -10{,}5$, $S_8= -8$, …

*Другой пример: **– 3,5**; – 2,5; – 1,5; – 0,5; 0,5; 1,5; 2,5; 3,5…*

Суммы:

$S_1= -3{,}5$, $S_2= -6$, $S_3= -7{,}5$, $\mathbf{S_4= -8}$, $S_5= -7{,}5$, $S_6= -6$, $S_7= -3{,}5$, $S_8= 0$, …

2. *Чтобы условие min выполнялось для S_{2016} нужно, чтобы первый член АП был больше (– 2016) и меньше (– 2015).*

Оценка ____________________.

Комментарий ____

____

Приведите своё решение задачи

102. Исследовательская работа учеников 9 класса представлена проблемой: «Какие значения может принимать первый член арифметической прогрессии с разностью 1, если S_{2016} – наименьшая среди всех сумм S_n». Ученикам предлагалось наметить и реализовать план решения. Дайте качественную оценку (превосходно, отлично, очень хорошо, хорошо, средне, удовлетворительно, плохо) и комментарий к работе ученика.

План исследования.

1. Составить алгебраическую модель задачи, применив формулу для S_n.
2. Решить получившуюся систему неравенств.
3. Записать ответ.

Исследование.

1. $S_{2016} = \frac{2a_1 + 2015}{2} \cdot 2016 < \frac{2a_1 + 2014}{2} \cdot 2015 = S_{2015}$

$S_{2016} = \frac{2a_1 + 2015}{2} \cdot 2016 < \frac{2a_1 + 2016}{2} \cdot 2017 = S_{2017}$

2. *Решим сначала первое, а затем второе неравенство.*

$$\frac{2a_1 + 2015}{2} \cdot 2016 < \frac{2a_1 + 2014}{2} \cdot 2015$$
$$(2a_1 + 2015) \cdot 2016 < (2a_1 + 2014) \cdot 2015$$
$$2 \cdot 2016 \cdot a_1 + 2015 \cdot 2016 < 2 \cdot 2015 \cdot a_1 + 2014 \cdot 2015$$
$$2a_1 < 2014 \cdot 2015 - 2015 \cdot 2016 = -2015(2016 - 2014)$$
$$a_1 < -2015$$
$$\frac{2a_1 + 2015}{2} \cdot 2016 < \frac{2a_1 + 2016}{2} \cdot 2017$$
$$(2a_1 + 2015) \cdot 2016 < (2a_1 + 2016) \cdot 2017$$
$$2 \cdot 2016 \cdot a_1 + 2015 \cdot 2016 < 2 \cdot 2017 \cdot a_1 + 2016 \cdot 2017$$
$$2015 \cdot 2016 - 2016 \cdot 2017 < 2 \cdot 2017 \cdot a_1 - 2 \cdot 2016 \cdot a_1$$
$$(2015 - 2017) \cdot 2016 < 2a_1$$
$$-2016 < a_1$$

3. *Ответ:* $-2016 < a_1 < -2015$.

Оценка ___________________.

Комментарий ____

____

____

____

____

103. В контрольную работу по теме «Геометрическая прогрессия» в качестве задания со звёздочкой (задание повышенной сложности не обязательное для выполнения) включена задача: «На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух записанных чисел, Таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две – третье и т.д. Через какое наименьшее время на доске может появится число 784?». Оцените решение ученика.

I число которое может появиться на доске, это число *14*. Вторым может быть число *21* (сумма *7* и *14*) или *28* (удвоенное *14*). Нам нужно быстрее получить *784*, поэтому выбираем удвоение: $7 \cdot 2^n < 784,\ 2^n < 112,\ n = 6$. На VI минуте получим число $7 \cdot 2^6 = 448$. Получили геометрическую прогрессию: *7, 14, 28, 56, 112, 224, 448*. Теперь найдём сумму *448* и стоящего перед ним числа, т.е. $448 + 224 = 672$ (VII минута), на VIII минуте завершаем процесс: $672 + 112 = 784$.

а) Рассуждения логичны, построена необходимая алгебраическая модель, оценка «5».

б) Рассуждения логичны, но единой алгебраической модели нет, оценка «4».

в) Рассуждения логичны, но в построении алгебраической модели не было необходимости, оценка «4».

г) Рассуждения не всегда логичны, оценка «3».

д) Решение неверно, оценка «2».

104. В домашнюю работу по теме «Последовательности» в качестве задания повышенной сложности включена задача: «Дана неубывающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$, такая, что $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Известно, что $a_7 = 120$. Найдите a_8». Оцените решение ученика.

<u>Решение</u>. $120 = a_7 = a_6 + a_5 = 2a_5 + a_4 = 2(a_4 + a_3) + (a_3 + a_2) =$
$= 2a_4 + 3a_3 + a_2 = 2(a_3 + a_2) + 3(a_2 + a_1) + a_2 = 2a_3 + 6a_2 + 3a_1 = 8a_2 + 5a_1.$

$120 = 8a_2 + 5a_1 \Rightarrow a_1 \vdots 8$ и $a_2 \vdots 5 \Rightarrow a_1 = 8$ и $a_2 = 10$

(a_n): *8, 10, 18, 28, 46, 74, 120,* ***194****, …*

Ответ. $a_8 = 194$.

а) Рассуждения логичны, проведены необходимые преобразования алгебраической модели, анализ преобразованной модели, верно интерпретирован результат; оценка «5».

б) Рассуждения логичны, но единой алгебраической модели нет, вместо этого применяется метод подбора корней уравнения $120 = 8a_2 + 5a_1$; оценка «4».

г) Рассуждения не всегда последовательны, нет указания на применяемые свойства делимости, нет результатов применения метода исчерпывающих проб при решении уравнения $120 = 8a_2 + 5a_1$; оценка «3».

д) Решение неверно; оценка «2».

105. Учитель объясняет классу один из подходов к решению задач на выявление закономерностей на примере задачи: «В ряд выписаны числа от 1 до 2016 в порядке возрастания. Можно ли между ними расставить знаки «+» и «–» так, чтобы значение полученного выражения было точным квадратом натурального числа?»

Последовательность	Числовой ряд	Сумма
1	1	$1 = 1^2$
1, 2	– 1 + 2	$1 = 1^2$
1, 2, 3	– 1 + 2 + 3	$4 = 2^2$
1, 2, 3, 4	**1 + 2 – 3** + 4	$4 = 2^2$
1, 2, 3, 4, 5	**1 + 2 – 3** + 4 + 5	$9 = 3^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6	**1 + 2 + 3** + 4 + 5 **– 6**	$9 = 3^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	**1 + 2 + 3** + 4 + 5 **– 6** + 7	$16 = 4^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8	$36 = 6^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9		слайд 1

Будем рассуждать по индукции – слайд 1 (жирным выделены выражения, значения которых равны нулю).

Чисел становится всё больше, манипулировать с ними – всё сложнее. Нельзя ли свести дальнейшие манипуляции к уже полученным результатам? Рассмотрим числа, следующие за первыми 8 числами ряда: 9, 10, 11, 12: $9 + 12 = 10 + 11$,

значит 9 и 12 берём с одним знаком, а 10 и 11 – с противоположным, то есть

$$9 - 10 - 11 + 12 = 0 \text{ или}$$
$$-9 + 10 + 11 - 12 = 0.$$

Этим же свойством обладают любые четыре последовательно взятые натуральные числа, например, $2013 - 2014 - 2015 + 2016 = 0$.

Значит, следуя нашему методу, который действует для натурального ряда, состоящего более чем из 4 натуральных чисел, будем отбрасывать четвёрки чисел, начиная справа (то есть с «конца ряда»), оставляя в начале ряда не более 8 чисел (для рядов от 9 и более членов). Попробуем (с учётом предыдущих результатов – выделены цветом) один из вариантов – слайд 2.

Последовательность	Числовой ряд	Сумма
1	1	$1 = 1^2$
1, 2	– 1 + 2	$1 = 1^2$
1, 2, 3	– 1 + 2 + 3	$4 = 2^2$
1, 2, 3, 4	1 + 2 – 3 + 4	$4 = 2^2$
1, 2, 3, 4, 5	1 + 2 – 3 – 4 + 5	$1 = 1^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6	– 1 + 2 + 3 – 4 – 5 + 6	$1 = 1^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	– 1 + 2 + 3 + 4 – 5 – 6 + 7	$4 = 2^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1 + 2 – 3 + 4 + 5 – 6 – 7 + 8	$4 = 2^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	1 + 2 – 3 + 4 + 5 + 5 – 6 – 7 + 8	$9 = 3^2$
	1 + 2 – 3 – 4 + 5 + 6 – 7 – 8 + 9	$1 = 1^2$
		слайд 2

И наконец, дадим положительный ответ на вопрос нашей задачи, предоставив пару вариантов её решения. 2016 : 4 = 504, значит, согласно нашему способу:

$$1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + 9 - 10 - 11 + 12 + \ldots + 2013 - 2014 - 2015 + 2016 = 4 = 2^2$$

или

слайд 3

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - 10 - 11 + 12 + \ldots + 2013 - 2014 - 2015 + 2016 = 36 = 6^2$$

Оцените способ подачи материала.

а) Объяснение излишне подробно, большую его часть ученики в состоянии воспроизвести самостоятельно. Нужно было ограничиться одной идеей решения.

б) Объяснение наглядно, доступно и в полной мере даёт представление о подходе к решению задач, подобных данной.

в) Общая идея ясна, но совершенно не ясно, почему выбран именно этот способ действия.

106. Тестовое задание на сравнение чисел ученики выполнили следующим образом. Отметьте решение, заслуживающее оценки «отлично».

<table>
<tr>
<td>Ученик А
$log_5 3$ и $\frac{2}{3}$
$\frac{lg3}{lg5}$ и $\frac{2}{3}$
$3lg3$ и $2lg5$
$lg3^3$ и $lg5^2$
$lg27$ и $lg25$
$lg27 > lg25 \Rightarrow log_5 3 > \frac{2}{3}$</td>
<td>Ученик Б
$log_5 3$ и $\frac{2}{3}$
$log_5 3$ и $\frac{2}{3} log_5 5$
$log_5 3$ и $log_5 5^{\frac{2}{3}}$
$log_5 3$ и $log_5 \sqrt[3]{25}$
$log_5 \sqrt[3]{27}$ и $log_5 \sqrt[3]{25}$
$log_5 \sqrt[3]{27} > log_5 \sqrt[3]{25} \Rightarrow log_5 3 > \frac{2}{3}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Ученик В
$log_5 3$ и $\frac{2}{3}$
$log_5 3 - \frac{2}{3} =$
$= \frac{log_5 27 - 2}{3} =$
$= \frac{log_5 27 - log_5 25}{3} > 0 \Leftrightarrow log_5 3 > \frac{2}{3}$</td>
<td>Ученик Г
$log_5 3$ и $\frac{2}{3}$
$log_5 3 = \frac{lg 3}{lg 5} = \frac{lg 3}{lg \frac{10}{2}} = \frac{lg 3}{1 - lg 2} =$
$= \frac{3 lg 3}{3 - lg 8} > \frac{3 lg 3}{3} =$
$= \frac{lg 27}{3} > \frac{lg 25}{3} = \frac{2 lg 5}{3} > \frac{2}{3}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Ученик Д
$log_5 3$ и $\frac{2}{3}$
Сравним $5^{log_5 3}$ и $5^{\frac{2}{3}}$
$5^{log_5 3} = 3 = 3^{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}} = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt{27}\right)^{\frac{2}{3}} > \left(\sqrt{25}\right)^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{2}{3}}$.
Так как $5^{log_5 3} > 5^{\frac{2}{3}}$, то и $log_5 3 > \frac{2}{3}$.</td>
</tr>
</table>

Обоснуйте свой выбор.

107. Учитель предложил алгоритмическое предписание для решения задач типа: «Выразить $log_6 16$ через $log_{12} 27 = a$».

Предписание

1. Представьте все числа в каноническом виде.

2. Используя свойства логарифмов, перейдите к любому простому основанию x.

3. Используя свойства логарифмов, перейдите от логарифма произведения/частного к сумме/разности логарифмов.

4. Осуществите преобразования, выделив в явном виде нужные величины.

Поможет ли это предписание решить данную задачу. Проиллюстрируйте свой ответ.

108. Учитель предложил алгоритмическое предписание для решения задач типа: «Выразить $log_6 16$ через $log_{12} 27 = a$».

Предписание

1. Перейдите к десятичным или натуральным логарифмам.

2. Используя свойства логарифмов, упростите получившиеся выражения.

3. Осуществите преобразования, выделив в явном виде нужные величины.

Поможет ли это предписание решить данную задачу. Проиллюстрируйте свой ответ.

109. Ученик у доски доказывает равенство $4^{log_5 7}=7^{log_5 4}$. Оцените оформление решения.

$$4^{log_5 7}=7^{log_5 4};\ log_5 7=log_4 7^{log_5 4};\ log_5 7=log_5 4\cdot log_4 7;\ log_5 7=log_5 7.$$

а) Из записи не ясна связь между равенствами: вместо двоеточия лучше использовать знак равносильности «⇔».

б) Из записи не ясна цель преобразований: необходимо чётко выделить требование задачи.

в) Цепочка равенств в полной мере отражает процесс доказательства равенства.

г) Необходимо указать, на основании чего осуществляется переход от одного равенства к другому.

д) Поскольку решение демонстрационное, необходимо подробное обоснование каждого этапа решения.

110. Ученик у доски доказывает равенство $4^{log_5 7}=7^{log_5 4}$. Оцените оформление решения.

1	$4^{log_5 7}=7^{log_5 4}$	доказать
		анализ
2	$log_5 4=log_7 4^{log_5 7}$	следует из предыдущего по определению логарифма, приложенному к выражению $b=7^a$
3	$log_5 4=log_5 7\cdot log_7 4$	следует из предыдущего по свойству логарифма: $log_a b^n=nlog_a b$
4	$log_5 4=log_5 4.$	следует из предыдущего по свойству логарифма: $log_a b\cdot log_b c=log_a c$
		доказательство
5	$log_5 4=log_5 4.$	известно (верное равенство)
6	$log_5 4=log_5 7\cdot log_7 4$	представим левую часть в виде произведения, согласно свойству $log_a b\cdot log_b c=log_a c$
7	$log_5 4=log_7 4^{log_5 7}$	представим левую часть в виде логарифма с основанием 7, согласно свойству $log_a b^n=nlog_a b$
8	$4^{log_5 7}=7^{log_5 4}$	по определению логарифма, $a=log_7 b \Leftrightarrow b=7^a$

а) Очень громоздко: вместо «прямого и обратного ходов» лучше использовать знак равносильности «⇔».

б) Очень подробно и ясно, что откуда берётся – хорошая иллюстрация синтетического доказательства.

в) Очень громоздко: вместо «прямого и обратного ходов» лучше использовать цвето-шрифтовое выделение: $4^{log_5 7}=7^{log_5 4} \Leftrightarrow log_5 7=log_4 7^{log_5 4}$.

г) Поскольку решение демонстрационное, то подробное обоснование каждого этапа решения не только допустимо, но и вполне оправдано.

ИЗУЧЕНИЕ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

111. Изучение содержательно-методической линии «Тождественные преобразования» на уровне основного общего образования согласно ФГОС ООО должно обеспечивать

а) знание основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

б) овладение приемами выполнения тождественных преобразований выражений;

в) овладение символьным языком алгебры;

г) умение применять тождественные преобразования, используя широкий набор способов и приемов, для решения задач из различных разделов курса.

112. Изучение содержательно-методической линии «Тождественные преобразования» среднего полного общего образования должны отражать:

а) знание основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

б) овладение приемами выполнения тождественных преобразований выражений;

в) овладение символьным языком алгебры;

г) умение применять тождественные преобразования, используя широкий набор способов и приемов, для решения задач из различных разделов курса.

113. Содержательно-методическая линия объединяет следующие модули (согласно Фундаментальному ядру содержания общего образования):

а) Алгебраические дроби и действия над ними.

б) Доказательство тождеств.

в) Метод математической индукции.

г) Многочлены (Многочлены и действия над ними. Квадратный трехчлен. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочлена на множители).

д) Преобразование иррациональных выражений (алгебраических и трансцендентных, в том числе тригонометрических)

е) Равносильные преобразования уравнений, неравенств и их систем.

ж) Тождественные преобразования (Числовое значение буквенного выражения. Тождественные преобразования. Допустимые значения переменных).

114. Пропедевтика тождественных преобразований связана с

а) введением в курс математики 5-6 классов алгебраической символики;

б) введением в курс математики 5-6 классов первых формул и тождеств;

в) знакомством с возможностями, которые открываются при использовании букв;

г) накопление опыта работы с алгебраическим языком;

д) обобщением понятия числа – введением понятия алгебраического выражения;

е) проведением вычислений в общем виде.

115. В 5 классе решали задачу: «Купили a тетрадей по 50 копеек и 2 ручки по 3 рубля. Сколько заплатили за покупку?». Учащиеся по тексту составили математическую модель: $a \cdot 50 + 2 \cdot 300 = 50a + 600$ (копеек), – «углядели» в этой записи уравнение и пытались решить его, а не записать ответ в общем виде. Для лучшего осознания учениками решения задачи в общем виде, учитель предложил осуществлять замену нескольких числовых значений буквами, а затем сформулировать задачу. Например, по выражению: $a \cdot 50 + b \cdot 300 = 50a + 300b$ (копеек), – были составлены задачи:

а) Купили a тетрадей по 50 копеек и b ручек по 3 рубля. Сколько заплатили за покупку?

б) Купили a тетрадей по 50 копеек и 300 ручек по b копеек. Сколько заплатили за покупку?

в) Купили 50 тетрадей по a копеек и b ручек по 3 рубля. Сколько заплатили за покупку?

г) Купили 50 тетрадей по a копеек и 300 ручек по b копеек. Сколько заплатили за покупку?

Какая из задач наиболее адекватна данной математической модели?

116. В 5 классе решали задачу: «Купили a тетрадей по 50 копеек и 2 ручки по 3 рубля. Сколько заплатили за покупку?». Учащиеся по тексту составили математическую модель: $a \cdot 50 + 2 \cdot 300 = 50a + 600$ (копеек), – «углядели» в этой записи уравнение и пытались решить его, а не записать ответ в общем виде. Для лучшего осознания учениками решения задачи в общем виде, учитель предложил ученикам решить задачу: «Купили a тетрадей по 50 копеек и b ручек по 3 рубля. Какое максимальное число комплектов «тетрадь + ручка», по указанным ценам, можно купить на 100 рублей при условии, что сдача с покупки должна быть минимальной или равняться нулю?».

а) Арифметический метод: комплект «тетрадь + ручка» стоит $0{,}5 + 3 = 3{,}5$ (рубля). На 100 рублей можно купить 28 комплектов, при этом сдача составит 2 рубля, то есть, 100 : 3,5 =28 (ост.2).

б) Задача требует решения в целых числах неравенства: $0{,}5a + 3b \le 100$; при этом учащиеся могут использовать метод исчерпывающих проб (действия с неравенствами ученикам интуитивно понятны, поскольку, записывая неравенства, они мысленно оперируют с реальными предметами): допустим, что покупается 1 ручка, то есть $b = 1$, тогда $0{,}5a + 3 \le 100$, $0{,}5a \le 97$, $a \le 194$, проверяем: $0{,}5 \cdot 194 + 3 \cdot 1 = 97 + 3 = 100$, сдача равна нулю, и т.д.

в) Метод оценки: ручки дороже, их будет куплено меньше, то есть $b < a$, тогда $3{,}5b < 0{,}5a + 3b$. Задача требует решения в целых числах неравенства: $3{,}5b < 100$.

г) Метод оценки: тетради дешевле, их будет куплено больше, то есть $a > b$, тогда $3{,}5a > 0{,}5a + 3b$. Задача требует решения в целых числах неравенства: $3{,}5a \le 100$.

д) Рассуждения: на 100 рублей можно купить максимум 33 ручки, при этом, на сдачу можно купить 2 тетради, всего комплектов – 2 (мало), уменьшим число ручек на 1, получим 32 ручки и 8 тетрадей, всего комплектов – 8, и т.д.

117. В 6 классе при изучении положительных и отрицательных чисел учитель предлагает ученикам разнообразные упражнения, содержательной основой которых становится таблица перевода математических утверждений на алгебраический язык.

1) Чтобы сложить два числа одинаковых знаков, надо сложить их модули и поставить перед суммой знак слагаемых. 2) Сумма положительных чисел есть положительное число, а сумма отрицательных чисел есть число отрицательное.	$(-a) + (-b) = -(a + b)$
3) Чтобы сложить два числа разных знаков и с разными модулями, надо из большего модуля вычесть меньший и перед разностью поставить знак слагаемого с большим модулем.	$(-a) + b = b - a$ $(-a) + b = -(a - b)$ $a + (-b) = -(b - a)$
4) Сумма противоположных чисел равна нулю.	$a + (-a) = 0$
5) Сума двух целых чисел не зависит от порядка слагаемых. 6) От перестановки слагаемых сумма не меняется	$(-a) + b = b + (-a)$ $-a + b = b - a$ $(-a) + (-b) = (-b) + (-a)$ $-a - b = -b - a$ $a + b = b + a$
7) Чтобы к сумме двух целых чисел прибавить третье целое число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего – результат будет тот же.	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a + b)+(-c) = a + (b - c)$ $(a - b)+c = a + (c - b)$ $(-a - b) + c = -a + (c - b)$
8) Разность чисел *a* и *b* есть сумма числа *a* и числа, противоположного числу *b*. 9) Чтобы из одного числа вычесть другое число, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.	$a - b = a + (-b)$ $a - (-b) = a + b$ $(-a) - b = -a + (-b)$ $(-a) - (-b) = -a + b$
10) Произведением двух целых не равных нулю чисел называют произведение их модулей, взятое со знаком «+», если эти числа одинаковых знаков, и со знаком «–» , если они разных знаков.	$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
11) Произведение любого целого числа и нуля равно нулю.	$a \cdot 0 = 0$ $0 \cdot a = 0$
12) Переместительные и сочетательные законы умножения верны для любых целых чисел.	$a \cdot b = b \cdot a$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
13) Частное чисел равно частному их модулей, взятому со знаком «+», если эти числа одинаковых знаков, и со знаком «–», если они разных знаков.	$(-a) : (-b) = a : b$ $(-a) : b = a : (-b) = -(a : b)$
14) Частное от деления нуля на любое целое, не равное нулю число а равно нулю.	$0 : a = 0$
15) Для любых целых чисел выполняется распределительный закон умножения.	$c \cdot (a + b) = (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $c \cdot (a - b) = (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$ $-c \cdot (a + b) = (a + b) \cdot (-c) = -a \cdot c - b \cdot c$ $-c \cdot (a - b) = (a - b) \cdot (-c) = -a \cdot c + b \cdot c$
16) Если сумма заключена в скобки, перед которыми стоит знак «+», то при раскрытии скобок знаки слагаемых оставляют без изменения.	$k + (a + b - c) = k + a + b - c$
17) Если сумма заключена в скобки, перед которыми стоит знак «–», то при раскрытии скобок знаки слагаемых меняют на противоположные	$k - (a + b - c) = k - a - b + c$ $-(-a) = a$

С какой целью организуется подобная работа? Укажите 3 возможные.

а) Ввести алгебраическую символику.

б) Познакомить с возможностями, которые открываются при использовании букв.

в) Формировать умение использовать алгебраический язык.

г) Обобщить понятие числа.

д) Обобщить понятия суммы и разности – сформировать понятие алгебраической суммы.

е) Научить проводить вычисления в общем виде.

ж) Обучить формальному доказательству алгебраических утверждений.

118. Учитель обосновывает свой отказ от геометрической интерпретации действий с целыми числами в пользу раннего введений алгебраических тождеств следующим образом: «Я могу показать на числовой прямой только сложение чисел с разными знаками, но не могу продемонстрировать вычитание без установления соответствующих равенств, например, (– 7) – (– 4) = – 7 + 4». Прав ли он?

а) Да. Если общность использования какого-то метода теряется, то он в обучении не эффективен.

б) Да, метод не очень удачен, поскольку с 5 класса у учеников «+» ассоциируется с движением в положительном направлении, «–» – с движением в противоположном направлении, а на координатном луче возможны и операция сложения (движение в положительном направлении) и операция вычитания (движение в противоположном положительному направлении); в 6 классе «+» означает положительное число, «–» – отрицательное число, а на координатной прямой становится возможной только операция сложения.

в) Да. Учитель вправе применять те методы обучения, которые считает нужными, возможными и эффективными.

г) Нет. Ранняя формализация затрудняет изучения математики в 6 классе.

д) Нет. Работать надо в соответствии со школьными учебниками (а в учебнике 6 класса Виленкина Н.Я. и др. вычитание целых чисел на координатной прямой не рассматривается) вне зависимости от наличия в них логико-дидактических неувязок.

е) Нет. Детям нужна наглядность, а её может обеспечить только геометрическая интерпретация действий с целыми числами.

ж) Нет. Не реализуется интеграция с линией аналитической геометрии, а это на современном этапе недопустимо.

з) Нет. Отказ от вычитания на координатной прямой позволяет обобщить понятия суммы и разности – сформировать понятие алгебраической суммы.

119. На уроке повторения и обобщения материала по теме «Сложение и вычитание положительных и отрицательных чисел» учитель предложил ученикам выполнить действия над числами любым способом.

Выберите запись и рассуждения, которые характеризуют базовый уровень усвоения материала.

а) Для того чтобы сложить два целых числа с разными знаками, нужно из модуля большего числа вычесть модуль меньшего и перед результатом поставить знак большего по модулю числа. $-107+42 = -(\lvert -107\rvert - \lvert 42\rvert) =$ $= -(107-42) = -65$	б) Применим формулу $-a+b=-(a-b)$ и получим: $-107+42=-(107-42)=-65$
в) (–107) это (–100) и (–7), 42 это 40 и 2. (–100) и 40 это (–60). (–7) и 2 это (–5). (–60) и (–5) будет (–65). $-107+42 = -100-7+40+2 =$ $= -100+40-7+2 = -60-5 = -65$	г) Поменяем местами слагаемые, каждое идёт со своим знаком. Представим 107 суммой 42 и 65. Произведём вычитание суммы из числа. 42 – 42 = 0. Остаётся (–65). $-107+42 = 42-107 = 42-(42+65) =$ $= 42-42-65 = -65$

120. На уроке повторения и обобщения материала по теме «Сложение и вычитание положительных и отрицательных чисел» учитель предложил ученикам выполнить действия над числами любым способом.

Выберите запись и рассуждения, которые характеризуют углубленный уровень усвоения материала.

а) Для того чтобы сложить два целых числа с разными знаками, нужно из модуля большего числа вычесть модуль меньшего и перед результатом поставить знак большего по модулю числа. $-107+42=-(\lvert -107\rvert-\lvert 42\rvert)=$ $=-(107-42)=-65$	б) Применим формулу $-a+b=-(a-b)$ и получим: $-107+42=-(107-42)=-65$
в) (–107) это (–100) и (–7), 42 это 40 и 2. (–100) и 40 это (–60). (–7) и 2 это (–5). (–60) и (–5) будет (–65). $-107+42=-100-7+40+2=$ $=-100+40-7+2=-60-5=-65$	г) Поменяем местами слагаемые, каждое идёт со своим знаком. Представим 107 суммой 42 и 65. Произведём вычитание суммы из числа. 42 – 42 = 0. Остаётся (–65). $-107+42=42-107=42-(42+65)=$ $=42-42-65=-65$

121. На уроке повторения и обобщения материала по теме «Сложение и вычитание положительных и отрицательных чисел» учитель предложил ученикам выполнить действия над числами любым способом.

Выберите запись и рассуждения, которые характеризуют специфический стиль математический деятельности, основанный на рационализации.

а) Для того чтобы сложить два целых числа с разными знаками, нужно из модуля большего числа вычесть модуль меньшего и перед результатом поставить знак большего по модулю числа. $-107+42=-(\lvert -107\rvert-\lvert 42\rvert)=$ $=-(107-42)=-65$	б) Применим формулу $-a+b=-(a-b)$ и получим: $-107+42=-(107-42)=-65$
в) (–107) это (–100) и (–7), 42 это 40 и 2. (–100) и 40 это (–60). (–7) и 2 это (–5). (–60) и (–5) будет (–65). $-107+42=-100-7+40+2=$ $=-100+40-7+2=-60-5=-65$	г) Поменяем местами слагаемые, каждое идёт со своим знаком. Представим 107 суммой 42 и 65. Произведём вычитание суммы из числа. 42 – 42 = 0. Остаётся (–65). $-107+42=42-107=42-(42+65)=$ $=42-42-65=-65$

122. На уроке повторения и обобщения материала по теме «Сложение и вычитание положительных и отрицательных чисел» учитель предложил ученикам выполнить действия над числами любым способом.

Выберите запись и рассуждения, которые характерны для устного счёта.

а) Для того чтобы сложить два целых числа с разными знаками, нужно из модуля большего числа вычесть модуль меньшего и перед результатом поставить знак большего по модулю числа. $-107+42=-(\lvert -107\rvert-\lvert 42\rvert)=$ $=-(107-42)=-65$	б) Применим формулу $-a+b=-(a-b)$ и получим: $-107+42=-(107-42)=-65$
в) (–107) это (–100) и (–7), 42 это 40 и 2. (–100) и 40 это (–60). (–7) и 2 это (–5). (–60) и (–5) будет (–65). $-107+42=-100-7+40+2=$ $=-100+40-7+2=-60-5=-65$	г) Поменяем местами слагаемые, каждое идёт со своим знаком. Представим 107 суммой 42 и 65. Произведём вычитание суммы из числа. 42 – 42 = 0. Остаётся (–65). $-107+42=42-107=42-(42+65)=$ $=42-42-65=-65$

123. Начало систематического курса алгебры (7 класс) включает следующие четыре основные направления изучения:

а) алгебраический язык как предмет специального изучения;

б) буквенные выражения;

в) введение и изучение операций над алгебраическими объектами и их свойств;

г) введение основных понятий алгебры (степень, одночлены. многочлены, алгебраические дроби) на основе понятия алгебраического выражения;

д) методы доказательства тождеств;

е) понятие алгебраического выражения – обобщение понятия числа;

ж) тождества и тождественные преобразования.

124. Охарактеризуйте задание: «Найдите v_0 из равенства $v = v_0 + at$, если $v = 25$, $a = 6$, $t = 3$.

а) Задача (прикладная) из курса физики на вычисление значения некоторой величины, решаемая математическими методами.

б) Несложная задача на вывод формулы.

в) Несложная прикладная задача на составление уравнения.

г) Несложная математическая задача на подстановку и вычисление значения данного выражения.

д) Несложное задание на выполнение расчёта по данной формуле.

125. Основной итог пропедевтического (5-6 классы) и начального (7 класс) курсов алгебры:

а) в алгебре любое тождество требует доказательства;

б) значениями букв в алгебре могут быть и другие, не числовые, объекты, в частности, степени, одночлены, многочлены и, возможно, еще какие-то другие;

в) любую задачу можно перевести на алгебраический язык – в этом суть аналитического метода математики;

г) применение тождеств облегчает вычисления;

д) решение многих математических задач аналитическим методом предполагает выполнение тождественных преобразований алгебраических выражений.

126. Существует два подхода к изучению линии тождественных преобразований. Подход, при котором больше внимания уделяется букве и операциям над буквенными выражениями, на выражение смотрят формально, не задумываясь над тем, что скрывается под буквами, а все преобразования опираются на правила действий и свойства действий, называется

____

127. Существует два подхода к изучению линии тождественных преобразований. Подход, при котором входящие в выражения буквы понимаются как переменные, а тождественные преобразования опираются на условие равенства функций (равенство значений функций при всех допустимых значениях переменной), называется

____

128. К основным методическим проблемам изучения содержания линии тождественных преобразований традиционно относят следующие две:

а) большое разнообразие тождественных преобразований, затрудняющее ориентацию в целях их выполнения;

б) мотивация тождественных преобразований через разъяснение их целесообразности;

в) наличие различны трактовок термина «тождество»;

г) освоение разнообразных методов доказательства тождеств;

д) проведение вычислений в общем виде;

е) теоретическое обоснование тождеств.

129. Выделите пять основных приёмов управления деятельностью учащихся при изучении тождественных преобразований.

а) Алгоритмизация деятельности учащихся при использовании изученных тождеств.

б) Детальный разбор ошибок с выявлением их сущности и причин возникновения.

в) Диагностика сформированности умений, связанных с тождественными преобразованиями.

г) Использование разных способов тождественных преобразований или способов доказательства тождества.

д) Оперативный контроль и коррекция процесса формирования умений, связанных с тождественными преобразованиями (текущий контроль), выявление пробелов и организация необходимой помощи учащимся в их устранении.

е) Организация анализа рациональности тех или иных преобразований в том или ином случае.

ж) Организация домашней работы.

з) Организация поиска ошибок.

и) Организация поиска решения задач, связанных с тождественными преобразованиями.

к) Проведение вычислений в общем виде.

130. Культура выполнения тождественных преобразований характеризуется следующими признаками (укажите 4 наиболее важных):

а) Аккуратность в записи преобразований.

б) Быстрота и безошибочность тождественных преобразований.

в) Знание большого числа тождеств.

г) Прочное знание свойств и операций над числами и выражениями.

д) Умение найти ошибку в преобразовании, указать на не-тождественность преобразований.

е) Умение правильно обосновывать преобразование.

ж) Умение доказывать тождества различными методами.

з) Умение следить за изменением ОДЗ в цепочке преобразований.

131. Введение схемы разложения многочлена на множители методом группировки происходит в ходе выполнения конкретного задания: «Разложить на множители многочлен $ax + 2a - 3x - 6$». Рассматривая конкретный пример, учитель в процессе беседы с учащимися выделяет этапы его выполнения. Выделите центральный этап беседы.

а) Можно ли данный многочлен разложить на множители методом вынесения за скобки общего множителя? // Нет, так как нельзя каждый член многочлена представить в виде произведения двух множителей, один из которых будет один и тот же.

б) Будем искать другой метод. Выделим члены, к которым можно применить способ разложения на множители путем вынесения общего множителя за скобки // ax и $2a$, $(-3x)$ и (-6) или второй вариант ax и $(-3x)$, $2a$ и (-6).

в) Выделенные члены объединим в группы, заключив в скобки // $(ax + 2a) + (-3x - 6)$ или второй вариант $(ax - 3x) + (2a - 6)$.

г) Вынесем за скобки общий множитель в каждой группе // $a(x+2) - 3(x+2)$ или второй вариант $x(a-3) + 2(a-3)$.

д) Вынесем за скобки общий многочлен полученного выражения // в обоих случаях получаем произведение $(x + 2) \cdot (a - 3)$.

е) Итак, $ax + 2a - 3x - 6 = (x + 2) \cdot (a - 3)$.

132. Дайте качественную оценку (хорошо, отлично, превосходно) результатам деятельности школьников по решению задачи: «Найдите значение выражения: $p^2q^2 + pq - q^3 - p^3$ при $p = 0,5$ и $q = -0,5$»

Ученик	Решение	Оценка
А	$p^2q^2 + pq - q^3 - p^3 = (p^2q^2 + pq) - (q^3 + p^3) =$ $= pq(pq + 1) - (q + p)(p^2 + q^2 - pq) = A$ При $p = 0,5$ и $q = -0,5$ выражение $A = pq(pq + 1) =$ $= -0,25(1 - 0,25) = -0,25 \cdot 0,75 = -0,1875$	
Б	$p^2q^2 + pq - q^3 - p^3 = (p^2q^2 - p^3) + (pq - q^3) =$ $= p^2(q^2 - p) + q(p - q^2) = p^2(q^2 - p) - q(q^2 - p) =$ $= (p^2 - q)(q^2 - p) = A$ При $p = 0,5$ и $q = -0,5$ выражение $A = (0,25 - 0,5)(0,25 + 0,5) = 0,25^2 - 0,5^2 =$ $= 0,0625 - 0,25 = -0,1875$	
В	$p = 0,5$ и $q = -0,5 = -p$ При $q = -p$ получаем $p^2q^2 + pq - q^3 - p^3 = p^2(-p)^2 + p(-p) - (-p)^3 - p^3 =$ $= p^4 - p^2 + p^3 - p^3 = p^4 - p^2 = A$ При $p = 0,5$ выражение $A = 0,0625 - 0,25 = -0,1875$	

133. Этап актуализации знаний урока по теме «Формулы сокращенного умножения» (7 класс) учитель решил провести в форме исследовательской работы, направленной на выявление общей формулы квадрата суммы и разности двучлена, аргументируя это тем, что «исследовательская работа не только вызывает огромный интерес у ребят, но и развивает их умение работать в коллективе».

Учитель, сообщая цель урока, обращает внимание учащихся на то, что ещё в глубокой древности было подмечено, что некоторые многочлены можно умножать короче, быстрее, чем все остальные. Так появились формулы сокращённого умножения. И сегодня ученикам предстоит сыграть роль исследователей в «открытии» двух из этих формул.

Для исследовательской работы учащиеся объединяются в динамические группы. Номер задания соответствует номеру группы. Учащимся предложено выполнить умножение двучлена на двучлен из 2-го столбца таблицы (1 этап оформления доски). После того, как ученики справились с заданием, они записывают полученный ответ в 4-й столбце (2 этап оформления доски).

1 этап

Тема урока: Формулы сокращённого умножения.
Ход исследования
1. Заполните 4 столбец таблицы.

1	2	3	4
1	$(x+y)(x+y) =$		
2	$(c+d)(c+d)=$		
3	$(p+q)(p+q)=$		
4	$(2+x)(2+x)=$		
5	$(n+5)(n+5)=$		
6	$(m+3)(m+3)=$		
7	$(8+k)(8+k)=$		

2. Как выражение из 2 столбца записать короче? – Запишите в 3 столбец таблицы.

2 этап

Тема урока: Формулы сокращённого умножения.
Ход исследования
1. Заполните 4 столбец таблицы.

1	2	3	4
1	$(x+y)(x+y) =$		$=x^2+2xy+y^2$
2	$(c+d)(c+d)=$		$=c^2+2cd+d^2$
3	$(p+q)(p+q)=$		$=p^2+2pq+q^2$
4	$(2+x)(2+x)=$		$=4+4x+x^2$
5	$(n+5)(n+5)=$		$=n^2+10n+25$
6	$(m+3)(m+3)=$		$=m^2+6m+9$
7	$(8+k)(8+k)=$		$=64+16k+k^2$

2. Как выражение из 2 столбца записать короче? – Запишите в 3 столбец таблицы.

3 этап

Тема урока: Формулы сокращённого умножения.
Ход исследования
1. Заполните 4 столбец таблицы.

1	2	3	4
1	$(x+y)(x+y) =$	$(x+y)^2$	$=x^2+2xy+y^2$
2	$(c+d)(c+d)=$	$(c+d)^2$	$=c^2+2cd+d^2$
3	$(p+q)(p+q)=$	$(p+q)^2$	$=p^2+2pq+q^2$
4	$(2+x)(2+x)=$	$(2+x)^2$	$=4+4x+x^2$
5	$(n+5)(n+5)=$	$(n+5)^2$	$=n^2+10n+25$
6	$(m+3)(m+3)=$	$(m+3)^2$	$=m^2+6m+9$
7	$(8+k)(8+k)=$	$(8+k)^2$	$=64+16k+k^2$

2. Как выражение из 2 столбца записать короче? – Запишите в 3 столбец таблицы.

Когда учащиеся заполнили таблицу, учитель просит их выяснить, есть ли нечто общее в условиях и ответах предложенных упражнений и можно ли выражения во 2-м столбце записать короче (3 этап оформления доски). Получив ответ, учитель обращает внимание на то, что они фактически уже приступили к исследованию темы урока. Класс переходит к обсуждению полученных результатов. Ученики замечают, что во всех случаях результатом умножения служит трёхчлен, у которого первый член представляет квадрат первого слагаемого данного двучлена, второй – удвоенное произведение первого и второго слагаемых, а третий – квадрат второго слагаемого. Такой анализ делает каждая группа, и каждый вариант проговаривается вслух. В конце концов, учащиеся без труда записывают общую формулу квадрата суммы двучлена. И быстро «открывают» формулу разности квадрата двучлена.

Проанализируйте содержание и организацию этой работы и выберите те утверждения (выводы), которые характеризуют эффективность работы класса:

а) Такая исследовательская работа вызовет огромный интерес у школьников, и несомненно поспособствует развитию их умения работать в коллективе

б) Ученики решали не проблемную задачу (специфическое содержание этапа актуализации знаний), требующую новых знаний и умений, а типовую задачу (умножения двух многочленов).

в) Несмотря на то, что проблемой задачи сформулировано не было, на материале типовой задачи было организовано настоящее исследование (*эксперимент – постановка задачи – гипотезы по её решению – вывод: новое знание – математическое обоснование результатов эксперимента*).

г) Каждый ученик (группа) решил(а) по одной типовой задаче, причём результаты решения могли быть записаны по-разному, например, 7 группа могла предложить такие варианты записи:

$(8+k)(8+k)=$		$=64+16k+k^2$
		$=k^2+16k+64$
		$=64+k^2+16k$

Как в этом случае ученики, изучая таблицу, должны прийти к выводу: «во всех случаях результатом умножения служит трёхчлен, у которого первый член представляет квадрат первого слагаемого данного двучлена, второй – удвоенное произведение первого и второго слагаемых, а третий – квадрат второго слагаемого»?

д) Вопрос: «Можно ли выражения во 2-м столбце записать короче?» сформулирован некорректно и не является основой для исследования.

е) Содержание работы представлено действиями с выражениями двух видов: (1) двучлен – сумма двух переменных, (2) двучлен – сумма переменной и натурального числа. Подобная «невариативность» не позволит ученикам в полной мере оценить общность формулы, провести дальнейшее исследование, даже самое элементарное, например, вычислить произведение $(8+k)(k+8)$.

ж) Вызывает сомнение, что ученики «быстро «открывают» формулу разности квадрата двучлена» и смогут применить эту формулу для выражения $(8-k)(k-8)$.

Продолжите печень выводов, характеризующих эффективность работы класса на этапе актуализации знаний

134. Этап актуализации знаний урока по теме «Формулы сокращенного умножения» (7 класс) учитель решил провести в форме коллективного исследования, основанного непосредственно на рефлексирующем наблюдении (мысленном анализе) за действиями учителя, выполняющего последовательно четыре преобразования с двучленом, представленным суммой 8 и k.

Учитель. Представим каждое из произведений в виде многочлена в стандартном виде, то есть:

$$(8+k)(8+k) = 64 + 8k + 8k + k^2 = k^2 + 16k + 64 \quad (1)$$

$$(8+k)(k+8) = 8k + k^2 + k8 + 64 = k^2 + 16k + 64 \quad (2)$$

$$(k+8)(k+8) = k^2 + k8 + k8 + 64 = k^2 + 16k + 64 \quad (3)$$

$$(k+8)(8+k) = k8 + 64 + k^2 + 8k = k^2 + 16k + 64 \quad (4)$$

Первое произведение можно представить в виде степени (объясните, почему?): $(8+k)(8+k) = (8+k)^2$ (5)

В квадратном трёхчлене свободный член можно записать в виде квадрата: $k^2 + 16k + 64 = k^2 + 16k + 8^2$ (6)

Результаты наблюдения учащиеся записывают самостоятельно в тетради, затем, по требованию учителя озвучивают. Все сформулированные умозаключения фиксируются на доске и подвергаются анализу (и сущность и сама формулировка). Затем, формулируется первый обобщающий вывод: $(k+8)^2 = k^2 + 16k + 64$. Его словесная формулировка такова:

____

____

____

____

После этого выясняется, как измениться результат, если вместо 8 записать одночлен, например, $8k^2$ или $8m^2$. Учащимся предоставляется возможность самостоятельного выбора одночленов для экспериментов с формулой квадрата суммы. На этом этапе происходит усвоение нового теоретического положения – формулы квадрата суммы.

Затем, формулируется второй обобщающий вывод: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Его словесная формулировка такова:

____

____

____

____

Перед классом ставится ряд задач-вопросов: как изменится значение каждого выражения 1-4, если в одной из скобок поставить знак «минус», в двух скобках поставить знак «минус». Коллективное исследование этих вопросов (формулировка и проверка гипотез) позволяют с опережением прийти к новым формулам сокращённого умножения – разности квадратов и квадрату разности.

Выпишите основной недостаток в рассуждениях учителя.

____

____

____

135. Многие из утверждений, выражаемых формулами сокращенного умножения, допускают

а) наглядно-геометрическую иллюстрацию,

б) не полностью строгие рассуждения, требующие использования метода математической индукции для придания им полной строгости,

в) полностью строгие рассуждения, использующие условия разрешимости уравнений вида $\Psi(x) = a$, где Ψ – изучаемая элементарная функция,

г) полностью строгие рассуждения, опирающиеся на основные свойства арифметических действий и не использующие других свойств числовой системы.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & a+ & b & +\ c \\
\times & & & a+ & b & +\ c \\
\hline
 & & & ac+ & bc & +\ c^2 \\
+ & ab\ + & & b^2+ & bc & \\
a^2+ & ab\ + & & ac & & \\
\hline
a^2 & +\ 2ab & +\ b^2 & +2ac & +\ 2bc & +\ c^2
\end{array}$$

136. При изучении формулы квадрата суммы трёх слагаемых учитель предложил следующую информационную модель. С какой целью?

а) Для демонстрации ещё одного способа записи умножения двух многочленов аналогичного умножению чисел столбиком.

б) Для предоставления учащимся возможности осуществлять умножение многочленов удобным для них способом.

в) Для реализации внутрипредметных связей.

г) Для усиления мотивации к изучению тождественных преобразований.

	a	b	c	d
a	a^2	ab	ac	
b	ab	b^2	bc	
c	ac	bc	c^2	
d				

137. При изучении формулы квадрата суммы трёх и более слагаемых учитель предложил следующую информационную модель. С какой целью?

а) Для демонстрации ещё одного способа записи умножения двух многочленов аналогичного нахождению площади прямоугольника.

б) Для демонстрации одного из ранних методов алгебры (Древняя Греция, геометрия как основа математики и определение алгебраических операций для геометрических величин – интеграция с линией «Математика в историческом развитии»).

в) Для демонстрации связи между алгеброй и геометрией.

г) Для предоставления учащимся возможности осуществлять умножение многочленов удобным для них способом.

д) Для реализации принципа наглядности.

е) Для усиления мотивации к изучению тождественных преобразований.

138. Формирование навыков тождественных преобразований более быстро протекает, если учитель добивается от учащихся

а) воспроизведения изученных формул,

б) воспроизведения правил и алгоритмов, основанных на применении изученных формул,

в) выделения выражения для преобразования из данного (например, $1003 \cdot 997 - 9$),

г) записи формул для конкретных выражений, (например, нужно записать формулу квадрата суммы выражений x и $\frac{1}{x}$),

д) определения ОДЗ преобразуемого выражения,

е) определения ОДЗ получившихся тождеств,

ж) усвоения разнообразных способов доказательства тождеств,

з) устного выполнения некоторых преобразований в процессе решения задач,

и) устного выполнения некоторых преобразований при устном счете.

139. Дайте качественную оценку (хорошо, отлично, превосходно) результатам деятельности школьников (7 класс) по решению задачи: «Разложите на множители: $x^2 + 6x + 5$»

Ученик	Решение	Оценка
А	$x^2 + 6x + 5 = x^2 + 6x + 6 - 1 = x^2 - 1 + 6x + 6 =$ $= (x^2 - 1) + (6x + 6) = (x - 1)(x + 1) + 6(x + 1) =$ $= (x - 1 + 6)(x + 1) = (x + 5)(x + 1)$	
Б	$x^2 + 6x + 5 = x^2 + 5x + x + 5 = x^2 + x + 5x + 5 =$ $= (x^2 + x) + (5x + 5) = x(x + 1) + 5(x + 1) =$ $= (x + 5)(x + 1)$	
В	Замечаем, что коэффициенты многочлена $ax^2 + bx + c$ связаны отношением $b = a + c$, поэтому $ax^2 + bx + c =$ $= ax^2 + (a + c)x + c = ax^2 + ax + cx + c =$ $= ax(x + 1) + c(x + 1) = (ax + c)(x + 1);$ $x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1).$ Можно сделать так: $c = b - a$, тогда $ax^2 + bx + c =$ $= ax^2 + bx + b - a = ax^2 - a + bx + b =$ $= a(x^2 - 1) + b(x + 1) = a(x - 1)(x + 1) + b(x + 1) =$ $= (a(x - 1) + b)(x + 1) = (ax + b - 1)(x + 1)$, – но первый вариант короче.	

$$2x^2+5x-3=(x+3)(\ldots+\ldots)$$
$$2x^2+5x-3=(x+3)(2x+a)$$
$$\underline{2x^2+5x}-3=2x^2+6x+xa+3a$$
$$-3=x+xa+3a$$
$$\underline{0}\cdot x\ \underline{\underline{-3}}=\underline{(1+a)}\cdot x+\underline{\underline{3a}}$$
$$0=1+a \quad и \quad -3=3a$$
$$a=-1$$
$$2x^2+5x-3=(x+3)(2x-1)$$

140. Учитель продемонстрировал образец решения задачи вида: «Найдите второй множитель в разложении многочлена $x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(\ldots)$». Сообщил, что метод, который он применил, называется методом неопределённых коэффициентов, и попросил, на основании приведённого решения разработать алгоритм решения аналогичных задач. Учащиеся с неохотой приступили к выполнению задания, но были и такие, кто отказался выполнять это задание исходя из следующих соображений: «Зачем применять какой-то непонятный метод, когда достаточно просто найти корни квадратного трёхчлена (решить соответствующее квадратное уравнение), а затем разложить этот многочлен на множители». Какие аргументы в пользу изучения нового метода должен привести учитель?

141. Какие способы решения задач вида: «Найдите второй множитель в разложении многочлена $x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(\ldots)$» может продемонстрировать учитель?

а) выделение полного квадрата (куба, кварты и пр.) числа,
б) деление многочлена на двучлен (другой многочлен меньшей степени),
в) метод неопределённых коэффициентов,
г) нахождение корней многочлена с использованием дискриминанта,
д) нахождение рациональных корней многочлена по схеме Горнера.

Продемонстрируйте его.

142. Урок изучения формул сокращённого умножения – квадрат и куб двучлена – учитель начал с повторения алгоритма умножения многочленов и различных способов записи этого умножения. В ходе беседы выяснили, что $(a+b)^n = (((a+b)\cdot(a+b))\cdot(a+b))\cdot\ldots\cdot(a+b) = \ldots = (a+b)^{n-1}\cdot(a+b)$.

Другими словами, чтобы представить $(a+b)^n$ в стандартном виде необходимо $(a+b)$ умножить на $(a+b)$, результат умножить на $(a+b)$ и т.д. А умножение на двучлен $(a+b)$ сводится к умножению каждого члена многочлена на a, умножению каждого члена многочлена на b и суммированию полученных результатов. Договорились умножение на a обозначать синей стрелкой, а умножение на b – красной, представляя результат в виде схемы. Получилось следующее.

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

$$a^2 + ab + ab + b^2$$

$$\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{2\,ab} + \boldsymbol{b^2}$$

$$a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

$$\boldsymbol{a^3} + \boldsymbol{3a^2b} + \boldsymbol{3ab^2} + \boldsymbol{b^3}$$

$$a^4 + a^3b + 3a^3b + 3a^2b^2 + 3a^2b^2 + 3ab^3 + ab^3 + b^4$$

$$\boldsymbol{a^4} + \boldsymbol{4a^3b} + \boldsymbol{6a^2b^2} + \boldsymbol{4ab^3} + \boldsymbol{b^4}$$

Насколько целесообразен такой методический приём?

а) Нецелесообразен, поскольку отнимает много времени от непосредственного изучения возможности применения формул квадрата и куба суммы.

б) Нецелесообразен для урока изучения нового материала, но вполне возможен на уроке повторения и обобщения материала.

в) Нецелесообразен, поскольку не отличается общностью: позволяет вывести формулы квадрата и куба суммы, но не позволяет вывести формулы квадрата и куба разности.

г) Целесообразен в математических классах и классах с углубленным изучением математики.

д) Целесообразен, поскольку позволяет реализовать внутрипредметные связи (интеграция со стохастической линией школьного курса математики).

е) Целесообразен, если результаты будут обобщены и использованы в дальнейшем при изучении математики.

ж) Целесообразен, поскольку демонстрирует ещё один способ моделирования процесса решения.

143. Урок изучения формул сокращённого умножения – квадрат и куб двучлена – учитель начал с повторения алгоритма умножения многочленов и различных способов записи этого умножения. В ходе беседы выяснили, что $(a+b)^n=(((a+b)\cdot(a+b))\cdot(a+b))\cdot\ldots\cdot(a+b)=\ldots=(a+b)^{n-1}\cdot(a+b)$.

Другими словами, чтобы представить $(a+b)^n$ в стандартном виде необходимо $(a+b)$ умножить на $(a+b)$, результат умножить на $(a+b)$ и т.д. А умножение на двучлен $(a+b)$ сводится к умножению каждого члена многочлена на a, умножению каждого члена многочлена на b и суммированию полученных результатов. Договорились умножение на a обозначать синей стрелкой, а умножение на b – красной, представляя результат в виде схемы. Получилось следующее.

$$\boldsymbol{a} \quad + \quad \boldsymbol{b}$$

$$a^2 + ab + ab + b^2$$

$$\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

$$\boldsymbol{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

$$a^4 + a^3b + 3a^3b + 3a^2b^2 + 3a^2b^2 + 3ab^3 + ab^3 + b^4$$

$$\boldsymbol{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$

Сформулировав всевозможные гипотезы, а затем и выводы относительно использования этого способа для вывода формул сокращённого умножения, левая часть которых представлена степенью двучлена, учитель предложил учащимся в качестве домашнего задания задачу: «Все мужчины династии Горохов живут ровно 70 лет, и заводят по сыну ровно в 30 и ровно в 40 лет, которые продолжают династию. Сколько всего живых мужчин будут в династии Горохов на 301-й год со дня рождения основателя династии?».

Какое отношение эта задача имеет к теме урока?

а) Никакого, это просто занимательная задача, включённая в домашнюю работу с целью усиления мотивации к предмету.

б) Решается с использованием формул сокращённого умножения.

в) Решается по той же схеме, которая позволила выводить формулы сокращённого умножения, левая часть которых представлена степенью двучлена.

г) Сразу сказать не получится (может быть связь и есть), нужно сначала задачу решить.

д) Сюжетная задача не обязательно должна иметь отношение к теме урока, особенно если она включения в домашнее задание.

144. Урок повторения и обобщения материала по теме «Разложение многочленов на множители» учитель начал и разработки алгоритмов решения некоторых типов задач (коллективная работа). Например, алгоритм группировки «по степеням»:

(1) Группировка «по степеням»:

$c^2a - a - c^2 + 1 = (c^2a - c^2) - (a - 1) = \ldots$

(2) Вынесение общего множителя в группах: $\ldots = c^2(a - 1) - (a - 1) = \ldots$

(3) Вынесение общего множителя: $\ldots = (a - 1)(c^2 - 1) = \ldots$

(4) Применение формул сокращённого умножения для дальнейшего разложения на множители разности квадратов: $\ldots = (a - 1)(c - 1)(c + 1)$

Дайте названия другим алгоритмам.

Алгоритм ____

(1) Выделим полный квадрат разности:

$x^4 - 6x^2 - 27 = [(x^2)^2 - 2(x^2) \cdot 3 + 3^2] - 3^2 - 27 = (x^2 - 3)^2 - 36 =$

(2) Запишем в явном виде разность квадратов: $\ldots = (x^2 - 3)^2 - 6^2 = \ldots$

(3) Применим формулу сокращённого умножения для разложения на множители разности квадратов: $\ldots = (x^2 - 3 - 6)(x^2 - 3 + 6) = \ldots$

(4) Упростим выражения, стоящие в скобках: $\ldots = (x^2 - 9)(x^2 + 3) = \ldots$

(5) Воспользуемся ещё раз формулой разности квадратов:

$\ldots = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 3).$

Алгоритм ____

(1) Работаем с правой частью: группируем множители левой части, «подгоняя» под трёхчлен, стоящий в правой части:

$[(x + 1)(x + 4)] \cdot [(x + 2)(x + 3)] + 1 = (\underline{x^2 + 5x} + 5)^2$

(2) Умножением получаем квадратные трёхчлены, отличающиеся на свободный член:

$[x^2 + 5x + 4] \cdot [x^2 + 5x + 6] + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2$

(3) «Организуем» произведение «разности на сумму»

$[(x^2 + 5x + 5) - 1] \cdot [(x^2 + 5x + 5) + 1] + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2$

(4) Применяем к произведению формулу разности квадратов:

$[(x^2 + 5x + 5)^2 - 1] + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2$

(5) Производим действия со свободными членами – выделяем квадрат из получившегося числа:

$(x^2 + 5x + 5)^2 - 1 + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2$

(6) Применяем формулу разности квадратов:

$(x^2 + 5x + 5)^2 = (x^2 + 5x + 5)^2$

Для освоения и возможной коррекции каждого алгоритма разработайте по одному заданию

____

____

____

____

145. Урок коррекции знаний по теме «Преобразование выражений» (8 класс) учитель начал с анализа ошибок, которые учащиеся допустили при выполнении задания: «В выражении $4a^2 - 6ab$ вынести за скобки общий множитель (а) $-2a$, (б) $4b$, (в) $-3a^2$». В ходе беседы выяснили, что ученики испытывают сложности с выделением общего множителя «не являющегося общим делителем» для всех членов многочлена. Чтобы сформировать соответствующее умение учитель предложил ученикам для освоения следующий алгоритм:

(1) Каждый одночлен представить в виде произведения с указанным множителем, для чего умножить и разделить на этот множитель.

(2) Вынести указанный множитель за скобки.

(3) В скобках сократить, при необходимости, дроби.

(4) Указать на изменения в ОДЗ.

На какой из задач (а), (б) или (в) учитель должен продемонстрировать этот алгоритм?

а) На задаче (а), так как она самая простая.

б) Только не на задаче (а), так как она не подходит под тот тип задач (выделение общего множителя «не являющегося общим делителем» для всех членов многочлена), ради которого алгоритм вводится в процесс обучения.

в) На задаче (б), так как общий делитель $4a^2$, $-6ab$ и $4b$ равен 1.

г) На задаче (в), так как общий делитель $4a^2$, $-6ab$ и $-3a^2$ равен a.

д) На любой из задач.

Продемонстрируйте алгоритм.

146. Два ученика решали задачу: «Найти наибольшее значение выражения *ab,* если $2a+b=6$». Оцените результаты их деятельности по традиционной 5-балльной шкале.

Ученик А. Оценка ___________	Ученик Б. Оценка _____________
$2a+b=6 \Leftrightarrow b=6-2a$ $ab=a(6-2a)=-2a^2+6a=$ $=-2\left(a^2-2\cdot\frac{3}{2}a+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)=$ $\underbrace{=-2\underbrace{\left(a+\frac{3}{2}\right)^2}_{\geq 0}}_{\leq 0}+\frac{9}{2}\leq 4{,}5$ *4,5* – наибольшее значение *ab.*	$2a+b=6 \Leftrightarrow 2ab+b^2=6b \Leftrightarrow$ $ab=\frac{-b^2+6b}{2} \Leftrightarrow ab=-\frac{1}{2}b^2+3b$ График функции $f(b)=-\frac{1}{2}b^2+3b$ – парабола с вершиной в точке $b_0=-\frac{-3}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=3$ и ветвями, направленными вниз. Значит в точке $b_0=3$ функция $f(b)$ принимает наибольшее значение $f(3)=-\frac{9}{2}+9=4{,}5$ *4,5* – наибольшее значение *ab.*

147. Учитель предложил ученикам 8 класса выяснить, на какие две части надо разбить данное число, чтобы произведение частей было наибольшим? Учащиеся начали экспериментировать с конкретными числами, многие в качестве объекта для исследования взяли числа 10 и 100. Экспериментальным путём выяснили, что число нужно разделить пополам (на две равные части). Учитель решил обосновать этот результат и привёл такое доказательство:

«Обозначим через *a* данное число, через $\frac{a}{2}+x$ и $\frac{a}{2}-x$ – части, на которые разбито число *a,* где число *x* показывает, на какую величину эти части отличаются от половины числа *a*. Составим произведение этих частей: $\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}-x\right)=\frac{a^2}{4}-x^2$. Очевидно, что это произведение будет увеличиваться при уменьшении *x,* то есть при уменьшении разности между частями, на которые разбито число *a*. Наибольшим произведение будет при $x=0$, то есть в случае, когда обе части равны $\frac{a}{2}$».

После того, как было записано обоснование, учитель спросил: «Есть ли вопросы по доказательству?». И тут же услышал: «Почему Вы сразу же, уже при обозначении, выбрали число $\frac{a}{2}$? Вы знали ответ и подогнали под него доказательство?».

Ответьте любознательному ученику на его вопрос.

____

____

____

148. Обоснуйте этапы решения задачи: «Определить коэффициенты квадратного трехчлена ax^2+bx+c, зная, что его большее значение равно 25 при $x=\frac{1}{2}$ и сумма кубов его корней равна 19».

№	Содержание этапа	Обоснование
1	$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$	
2	При $x=-\frac{b}{2a}$ трехчлен имеет наибольшее значение $c-\frac{b^2}{4a}$.	
3	$\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2};$	
4	$a=-b;$	
5	$c-\frac{b^2}{4a}=25;$	
6	$4c+b=100;$	
7	$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=19;$	
8	$x_1^3+x_2^3=\left(\frac{-b}{a}\right)^3-\frac{3c}{a}\left(\frac{-b}{a}\right)=19;$	
9	$x_1x_2=\frac{c}{a};$	
10	$x_1+x_2=-\frac{b}{a};$	
11	$\frac{b^3}{b^3}+\frac{3bc}{b^2}=19;$	
12	$\frac{3bc}{b}=18;$	
13	$b=\frac{c}{6};$	
14	$4c+\frac{c}{6}=100;$	
15	$25c=600;$	
16	$c=24;$	
17	$b=\frac{24}{6}=4;$	
18	$a=-4$	

Можно ли такое решение использовать в качестве образца ответа? ____________

149. Учитель предложил такое решение задачи: «Определить коэффициенты квадратного трехчлена $ax^2+bx+c,$ зная, что его большее значение равно 25 при $x=\frac{1}{2}$ и сумма кубов его корней равна 19».

№	Содержание этапа	Обоснование
1	$P(x)=ax^2+bx+c.$	Дано
2	$P_{max}\left(\frac{1}{2}\right)=25.$	Дано
3	Пусть x_1 и x_2 – корни $P(x)$, тогда $x_1^3+x_2^3=19.$	Дано
4	$a<0.$	Из (2) по свойству квадратного трёхчлена: если квадратный трехчлен имеет наибольшее значение, то его старший коэффициент отрицателен
5	$P_{max}\left(-\frac{b}{2a}\right)=c-\frac{b^2}{4a}.$	Теорема о наибольшем значении квадратного трёхчлена
6	$-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}.$	Из (1) и (5) по свойству равенства
7	$-\frac{b}{a}=1.$	Из (6) по свойству равенства
8	$\frac{P(x)}{a}=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}.$	Из (1) и (4) по свойству равенства
9	$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\ x_1x_2=\frac{c}{a};$	Из (8) по теореме Виета
10	$x_1+x_2=1;\ x_1x_2=\frac{c}{a};$	Из (7) и (9) по свойству равенства
11	$(x_1+x_2)^3=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2).$	Теорема о кубе бинома
12	$1=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2.$	Из (10) и (11) по свойству равенства
13	$1=19+3x_1x_2.$	Из (3) и (12) по свойству равенства
14	$x_1x_2=-6.$	Из (13) после алгебраических преобразований
15	$\frac{c}{a}=-6.$	Из (9) и (14) по свойству равенства
16	$\frac{P(x)}{a}=x^2-x-6.$	Из (7), (8) и (15) по свойству равенства
17	$\frac{P\left(\frac{1}{2}\right)}{a}=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)-6.$	Из (2) и (16) по свойству равенства

18	$\frac{25}{a} = -\frac{25}{4}$	Из (2) и (17) после алгебраических преобразований
19	$a = -4$	Из (18) по свойству пропорции
20	$\frac{P(x)}{-4} = x^2 - x - 6.$	Из (16) и (19) по свойству равенства
21	$P(x) = -4x^2 + 4x + 24.$	Из (20) по свойству равенства

Можно ли такое решение использовать в качестве образца ответа? ____________
Можно ли сократить число этапов решения? За счёт чего? ____________________
____
____

Сформулируйте свойства равенства, на которые ссылается учитель:
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

Есть ли другие способы решения задачи? Приведите соответствующее решение.

150. Исследовательские работы обобщающего характера приучают учащихся видеть в необычных ситуациях уже известные им законы и являются серьезным шагом к привитию навыков самообразования, важность которого нужно постоянно подчеркивать учащимся. В ходе выполнения таких работ учащиеся постепенно освобождаются от готовых образцов, сложившихся установок, разрабатывают новые способы решения. Примером такой работы может быть расширяющееся задание по исследованию свойств квадратного трёхчлена $T(x) = kx^2 - 2kx+1$:

а) При каких значениях k трехчлен имеет два действительных корня?

б) При каких значениях k трехчлен имеет два положительных корня?

в) При каких значениях k один из корней равен 1?

г) Составьте трехчлен с корнями, каждый из которых на 1 больше соответствующего корня данного квадратного трехчлена.

д) При каких значениях k данный трехчлен положителен при всех действительных значениях x?

е) При каких значениях k наибольшее значение $T(x)$ равно нулю?

ж) При каких значениях k сумма кубов корней трехчлена достигает экстремальных значений?».

Сформулируйте указания к проведению исследования.

Выражение	Ограничение
Алгебраическая дробь $\frac{f(x)}{g(x)}=0$	$g(x)\neq 0$
Иррациональное алгебраическое $\sqrt[2n]{f(x)}$	$f(x)\geq 0$
Степень с дробным показателем $\left(f(x)\right)^{\frac{m}{n}}$	$f(x)\geq 0$ при $\frac{m}{n}>0$, $f(x)>0$ при $\frac{m}{n}<0$
Тригонометрическое: $\operatorname{tg} f(x)$, $\operatorname{ctg} f(x)$, $\arcsin f(x)$ и $\arccos f(x)$	$\cos f(x)\neq 0$, $\sin f(x)\neq 0$, $\lvert f(x)\rvert\leq 1$
Логарифмическое $\log_{g(x)} f(x)$	$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ g(x)\neq 1 \end{cases}$

151. Из шести основных типов выражений школьного курса алгебры несколько требуют ограничений на переменную, которые определяют ОДЗ уравнения, неравенства, системы или совокупности. Учитель предлагает ученикам 8 класса составить памятку (см. таблицу) и пользоваться ею при решении алгебраических задач. Насколько удачен этот методический приём?

а) Очень удачен: уже с 8 класса у учеников будет нужное справочное средство, позволяющее им безошибочно определять ОДЗ указанных выражений.

б) Удачен: нет ничего плохого в том, что справочный материал содержит избыточную информацию; вот телефонный справочник содержит миллион номеров, и никто не жалуется, что в какой-то момент из этого миллиона требуется найти всего один.

в) Не совсем удачен; лучше заполнять такую памятку из года в год, по мере изучения соответствующих уравнений.

г) Неудачен, поскольку, ученикам сначала нужно только умение определять ОДЗ алгебраической дроби, а им предлагаются всевозможные выражения, смысл многих им даже не понятен.

д) Можно использовать или не использовать такую памятку, главное, чтобы ученики понимали суть выполняемых действий и процедур, знали те теоретические положения, которые лежат в их основе.

152. Учащиеся должны уяснить, что всякий раз, когда возникает необходимость в тождественном преобразовании, мы имеем дело с выражением, область определения которого задана. При выполнении преобразования она может расширяться или сужаться. Этого можно избежать, если

а) определить ОДЗ исходного выражения,

б) определить ОДЗ полученного в ходе преобразования выражения,

в) осуществлять преобразования на области определения исходного выражения,

г) осуществляя преобразования исходного выражения, указывать множество, на котором это преобразование возможно,

д) осуществить проверку.

153. Оцените результаты деятельности школьников (8 класс) по решению задачи: «Найдите значение выражения $\frac{x+2}{x(x+3)}-\frac{1}{3x+9}$ при $x=-3;-\frac{1}{3};0;\frac{1}{3};3$».

Ученик	Решение	Отметка
А	$x=-3$ ОДЗ данного выражения не включает числа 0 и (– 3), поэтому при (– 3) выражение не имеет смысла.	
Б	$x=-\frac{1}{3}$ Преобразуем выражение: $\frac{x+2}{x(x+3)}-\frac{1}{3x+9}=$ $=\frac{x+2}{x(x+3)}-\frac{1}{3(x+3)}=\frac{3x+6-x}{3x(x+3)}=\frac{2(x+3)}{3x(x+3)}=\frac{2}{3x}$. Подставим $x=-\frac{1}{3}$ и получим *(– 2)*.	
В	$x=0$ При подстановки нуля в выражение $\frac{2}{3x}$, знаменатель дроби обращается в ноль. Решений нет.	
Г	$x=\frac{1}{3}$ Преобразуем выражение на множестве R\{– 3; 0}: $\frac{x+2}{x(x+3)}-\frac{1}{3x+9}=\frac{3x+6-x}{3x(x+3)}=\frac{2(x+3)}{3x(x+3)}=\frac{2}{3x}$. Подставим $x=\frac{1}{3}$ из ОДЗ в выражение $\frac{2}{3x}$, и получим *2*.	
Д	$x=3$ Если $x=3$, то $\frac{x+2}{x(x+3)}-\frac{1}{3x+9}\overset{ОДЗ: x\neq 0, x\neq -3}{=}$ $=\frac{3x+6-x}{3x(x+3)}=\frac{2(x+3)}{3x(x+3)}\overset{x\neq -3}{=}\frac{2}{3x}=\frac{2}{9}$.	

154. Урок изучения нового материала «Квадратный корень из произведения» учитель начал с актуализации знаний:

– Как называется выражение $\sqrt{a}$?

– Что называется арифметическим квадратным корнем из числа *a*?

– При каком значении *a* выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл?

– Найдите значение выражения $\sqrt{16}$.

– Найдите значение выражения $\sqrt{25}$.

– Найдите значение выражения $\sqrt{16}\cdot\sqrt{25}$.

– Найдите значение выражения $\sqrt{16\cdot 25}$.

Его дальнейшие действия?

а) Мы получили равные результаты (правые части), значит, и левые части будут равны: $\sqrt{16}\cdot\sqrt{25}=\sqrt{16\cdot 25}$. Итак, корень из произведения двух чисел равен произведению корней из этих чисел. Это свойство арифметического квадратного корня мы сейчас будем применять при решении примеров.

б) Проведите аналогичные действия с арифметическими корнями из чисел: (а) 121 и 225; (б) 36 и 1/4, (г) 0,25 и 144. Результаты обобщите, сформулировав гипотезу относительно корня из произведения и произведения корней двух чисел. Попробуем доказать это утверждение.

в) Оказывается, это верно не только для чисел 16 и 25, а для любых двух неотрицательных чисел. Сформулируем и докажем теорему: «Если $a \geq 0,\ b \geq 0$, то $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ (Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей»).

г) Как вы думаете, $\sqrt{a\cdot b\cdot c}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}$? Докажите (приведите пример).

155. На уроке изучения нового материала «Квадратный корень из произведения» этап усвоения заключается в выполнении упражнения: «Найдите значение выражения $\sqrt{25\cdot 81},\ \sqrt{4\cdot 25\cdot 100},\ \sqrt{14400},\ \sqrt{0{,}0144},$ $\sqrt{313^2-312^2}$ ». Как учителю лучше организовать усвоение (работу с упражнением)?

а) «Можно ли сказать, что три примера связаны с доказанной теоремой?» // В первых двух примерах дан корень из произведения, а в третьем случае подкоренное выражение можно представить в виде произведения, значит, можно применить доказанную теорему.

б) Вызвать к доске трёх учеников, чтобы выполнили задание, а затем спросить у класса, всё ли им понятно.

в) Задать общие вопросы (как выполнили первое задание, какую теорему применили и т.п.)

г) Под диктовку учеников закончить равенства.

д) Сформулировать правило извлечения корня из большого числа, заканчивающегося нулями.

е) Сформулировать правило извлечения корня из десятичной дроби.

156. На уроке изучения нового материала «Квадратный корень из произведения» содержание этапа закрепления представлено задачами:

а) вида-1: «Вычислите $\sqrt{36\cdot 81}$, $\sqrt{16\cdot 169\cdot 196}$, $\sqrt{504100}$, $\sqrt{0{,}3136}$, $\sqrt{0{,}16\cdot 49}$ и т.п.».

б) вида-1: «Вычислите $\sqrt{36\cdot 81}$, $\sqrt{16\cdot 169\cdot 196}$, $\sqrt{504100}$, $\sqrt{0{,}3136}$, $\sqrt{0{,}16\cdot 49}$ и т.п.», вида-2: «Вычислите $\sqrt{36}\cdot\sqrt{256}$, $\sqrt{9}\cdot\sqrt{0{,}36}\cdot\sqrt{36}$»

в) вида-1: «Вычислите $\sqrt{36\cdot 81}$, $\sqrt{16\cdot 169\cdot 196}$, $\sqrt{504100}$, $\sqrt{0{,}3136}$, $\sqrt{0{,}16\cdot 49}$ и т.п.», вида-2: «Вычислите $\sqrt{36}\cdot\sqrt{256}$, $\sqrt{9}\cdot\sqrt{0{,}36}\cdot\sqrt{36}$,», вида-3: «Вычислить $\sqrt{50{,}41}\cdot\left(23{,}4-\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\right)+0{,}76$, $\sqrt{0{,}3136}\cdot\sqrt{0{,}16\cdot 49}$ и т.п.»

г) вида-1: «Вычислите $\sqrt{36\cdot 81}$, $\sqrt{16\cdot 169\cdot 196}$, $\sqrt{504100}$, $\sqrt{0{,}3136}$, $\sqrt{0{,}16\cdot 49}$ и т.п.», вида-2: «Вычислите $\sqrt{36}\cdot\sqrt{256}$, $\sqrt{9}\cdot\sqrt{0{,}36}\cdot\sqrt{36}$,», вида-3: «Вычислить $\sqrt{50{,}41}\cdot\left(23{,}4-\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\right)+0{,}76$, $\sqrt{0{,}3136}\cdot\sqrt{0{,}16\cdot 49}$, $\sqrt{265^2-264^2}$ и т.п.», вида-4: «Извлеките корень $\sqrt{27}$, $\sqrt{1000}$, $\sqrt{0{,}016}$ и т.п.»

д) вида-1: «Вычислите $\sqrt{36\cdot 81}$, $\sqrt{16\cdot 169\cdot 196}$, $\sqrt{504100}$, $\sqrt{0{,}3136}$, $\sqrt{0{,}16\cdot 49}$ и т.п.», вида-2: «Вычислите $\sqrt{36}\cdot\sqrt{256}$, $\sqrt{9}\cdot\sqrt{0{,}36}\cdot\sqrt{36}$,», вида-3: «Вычислить $\sqrt{50{,}41}\cdot\left(23{,}4-\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\right)+0{,}76$, $\sqrt{0{,}3136}\cdot\sqrt{0{,}16\cdot 49}$ и т.п.», вида-4: «Извлеките корень $\sqrt{27}$, $\sqrt{1000}$, $\sqrt{0{,}016}$ и т.п.», вида-5: «Решите уравнение $\sqrt{36x}=54$ и $\sqrt{-36x}=54$».

157. В 8 классе изучаются преобразования иррациональных алгебраических числовых и буквенных выражений, решаются следующие типовые задачи:

а) доказательство тождеств, содержащих иррациональные выражения,
б) избавление от иррациональности в знаменателе,
в) определение ОДЗ иррациональных выражений,
г) построение графиков функций, содержащих переменную под знаком радикала,
д) преобразование числовых иррациональных выражений,
е) применение формул сокращенного выражения к преобразованию (упрощению записи) иррациональных чисел,
ж) решение простейших иррациональных уравнений и неравенств,
з) упрощение буквенных иррациональных выражений.

158. В систему задач к этапу контроля над усвоением изучаемого материала (начало урока, устная работа) по теме «Степень с рациональным показателем» учитель включил задание: «Верно ли равенство: $\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^5}=x^3$?».

Поскольку желающих выполнить задание не оказалось, учитель решил задать вспомогательные вопросы: «Можно ли упростить выражение, стоящее в левой части равенства, в правой части равенства? Можно ли перейти от данного равенства к равносильному, более простому? Как это можно сделать?». Ученики предложили следующие варианты:

(1) Привести радикалы к одной степени, например, к шестой: $\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^5}=\sqrt[6]{x^9}\cdot\sqrt[6]{x^4}\cdot\sqrt[6]{x^5}$, а затем, используя свойства корней, привести к одному корню, то есть $\sqrt[6]{x^9}\cdot\sqrt[6]{x^4}\cdot\sqrt[6]{x^5}=\sqrt[6]{x^9\cdot x^4\cdot x^5}$.

(2) Записать радикалы в виде степени с рациональным показателем: $\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^5}=x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{5}{6}}$, а затем применить свойство произведения степеней.

(3) Вынести x из первого корня $\left(\sqrt{x^3}=x\sqrt{x}\right)$, затем всё равенство разделить на x.

(4) Записать правую часть в виде корня, например, $x^3=\sqrt[2]{x^6}$, и разделить получившееся равенство на $\sqrt{x^3}$.

(5) Записать правую часть в виде корня, например, $x^3=\sqrt[3]{x^9}$, и разделить получившееся равенство на $\sqrt[3]{x^2}$.

(6) Записать правую часть в виде корня, например, $x^3=\sqrt[6]{x^{18}}$, и разделить получившееся равенство на $\sqrt[6]{x^5}$.

(7) Избавиться от радикалов, для чего возвести данное равенство в 6 степень.

Как учителю организовать дальнейшую работу?

а) Разбить учащихся на семь групп (формально, например, по алфавиту), предложить каждой группе реализовать свой вариант решения, дать на это 2 минуты, затем проверить результат (верно/неверно) у первого выполнившего задание представителя каждой группы.

б) Разбить учащихся на три группы (формально, например, по рядам). I группа реализует варианты (1)-(4)-(7), II – варианты (2)-(5)-(7), III – (3)-(6)-(7), дать на это 5 минут, затем обсудить получившиеся результаты.

в) Предложить каждому реализовать понравившуюся идею решения, дать на это 2 минуты, а затем проверить результат (верно/неверно) по каждому варианту решения.

г) Предложить каждому реализовать понравившуюся идею решения, дать на это 2 минуты, затем проверить результат (верно/неверно) по каждому варианту решения; остальные варианты решения задачи включить в домашнюю работу.

д) Проверить результат выполнения задания; выяснить, чем задание «проверить равенство $\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^5}=x^3$» отличается по процедуре/методам выполнения от задания «упростить выражение $\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^5}$»?

159. Обучение упрощению буквенных иррациональных выражений лучше проводить, используя формальную запись решения в виде «утверждение – аргументация». Оцените работу ученика.

Утверждение	Аргументация
$a<0$	дано, условие 1
$\frac{1}{2a}\cdot\sqrt{32a^2}=$	дано
$=\frac{\sqrt{32a^2}}{2a}=$	свойство умножения дроби на число
$=\frac{\sqrt{32}\cdot\sqrt{a^2}}{2a}=$	свойство арифметического корня из произведения
$=\frac{\sqrt{2^5}\cdot\sqrt{a^2}}{2a}=$	представление числа 32 в виде степени с основанием 2
$=\frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2}}{2a}=$	свойство извлечения корня из степени
$=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2}}{a}=$	основное свойство дроби
$=\frac{2\sqrt{2}\cdot\lvert a\rvert}{a}=$	определение арифметического квадратного корня
$=\frac{2\sqrt{2}\cdot(-a)}{a}=$	из условия 1, по свойству (определению) модуля
$=-2\sqrt{2}$	по основному свойству дроби и следствию из условия 1: $a\neq 0$

а) Рассуждения последовательны и безошибочны, оценка «5».

б) Рассуждения безошибочны, но излишне подробны, оценка «4».

в) Рассуждения безошибочны, но недостаточно подробны, оценка «4».

г) Рассуждения привели к правильному ответу, но не всегда безупречны (например, указано «свойство умножения дроби на число», а на самом деле на выражение с переменной), оценка «4».

д) Рассуждения привели к правильному ответу, но зачастую неточны, оценка «3».

е) Решение неверно, оценка «2».

160. Учитель, объясняя, как упростить выражение $\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$, предлагает, обозначив выражение через *a*, сначала возвести в квадрат получившееся равенство, а затем извлечь корень из обеих его частей:

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}=?$$
$$\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}=a$$
$$\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^2=a^2$$
$$3+\sqrt{8}-2\sqrt{3+\sqrt{8}}\sqrt{3-\sqrt{8}}+3-\sqrt{8}=a^2$$
$$6-2\sqrt{3+\sqrt{8}}\sqrt{3-\sqrt{8}}=a^2$$
$$6-2\sqrt{\left(3+\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)}=a^2$$
$$6-2\sqrt{9-8}=a^2$$
$$4=a^2,\quad 2^2=a^2,\quad a=2$$
$$\text{Итак},\quad \sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}=2$$

Имеет ли этот метод ограничение в сфере применимости? Ответ аргументируйте, приведите примеры.

Является ли решение полностью аргументированным, или же остались этапы решения, не обоснованные должным образом?

161. Учитель практикует подход к закреплению материала линии тождественных преобразований, который он назвал ТМО «теория – метод – ответ». Ниже дан образец ответа, оформленный в форме памятки.

Памятка: как упростить иррациональное выражение…

Надо знать :

$a=\left(\sqrt{a}\right)^2$ *для любого неотрицательного a;*

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$.

$$\frac{a-b}{a-2\sqrt{a}}\cdot\frac{a-2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2}+\sqrt{a}}\right)=$$

Сначала применяем первую формулу

$$\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2}+\sqrt{a}}\right)=$$

теперь применяем вторую формулу

$$\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2}+\sqrt{a}}\right)=$$

в знаменателе первой дроби выносим общий множитель $\sqrt{a}$*, получаем,*

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-2\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2}+\sqrt{a}}\right)=$$

записываем произведение двух первых дробей в виде дроби :

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2}+\sqrt{a}}\right)=$$

сокращаем получившуюся дробь и получаем :

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-2\right)}\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2}+\sqrt{a}}\right)=$$

в скобках представляем число $\sqrt{2}$ *в виде дроби со знаменателем* $\sqrt{2}+\sqrt{a}$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-2\right)}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2}+\sqrt{a}}\right)=$$

в скобках находим разность дробей

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-2\right)}\cdot\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{a}\right)-\sqrt{2a}}{\sqrt{2}+\sqrt{a}}=$$

записываем произведение дробей в виде дроби :

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{a}\right)-\sqrt{2a}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{a}\right)}=$$

сокращаем получившуюся дробь и получаем :

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{a}\right)-\sqrt{2a}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-2\right)}=$$

преобразуем $\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{a}\right)-\sqrt{2a}\right)$ *– умножим, приведём подобные слагаемые – получим 2,*

запишем результат :

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)\cdot 2}{\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-2\right)}=\frac{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-2\right)}=\frac{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)}{a-2\sqrt{a}}$$

это и будет ответом. Можно ещё в числителе перемножить скобки.

Оцените методический приём учителя.

____

____

____

____

____

____

162. Для лучшего усвоения содержания линии тождественных преобразований рекомендуется периодически выполнять преобразования, аргументируя каждый шаг. Используя этот приём, восстановите доказательство тождества $1+\frac{2}{x-1}=\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$.

№	Утверждение	Аргументация	В общем виде
1	$1+\frac{2}{x-1}=$		$ОДЗ\left(\frac{x}{y}\right)=(-\infty;y)\cup(y;+\infty)$
2	$=\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}=$		$x=\frac{xy}{y}$
3	$=\frac{x-1+2}{x-1}=$		$\frac{x}{y}+\frac{z}{y}=\frac{x+z}{y}$
4	$=\frac{x+1}{x-1}=$		
5	$=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=$		$ax+ay=a(x+y)$
6	$=\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}.$		$\frac{ax}{ay}=\frac{x}{y},\ a\neq 0$
7	При $x=0,\ 1+\frac{2}{x-1}=-1.$		
8	Для любого $x\neq 1,\ x\neq 0$ выполняется равенство $1+\frac{2}{x-1}=\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$. При $x=0,\ 1+\frac{2}{x-1}=-1.$		

Используйте следующие аргументы: $0\in ОДЗ$, следует проверить случай, когда $x=0$. Вынесение общего множителя $x\neq 0$. Дано. ОДЗ: $x\neq 1$. Определение суммы двух дробей с одинаковым знаменателем. Основное свойство дроби. Представление натурального числа в виде обыкновенной дроби. Проверка случая, когда $x=0$. Сложение рациональных чисел.

163. В 9 классе

а) завершается изучение модуля «Преобразование иррациональных выражений»: рассматриваются иррациональные трансцендентные выражения и способы их преобразования (преобразования на множестве),

б) закрепляются и совершенствуются умения учащихся осуществлять тождественные преобразования,

в) проверяются умения осуществлять тождественные преобразования в ходе решения уравнений и неравенств,

г) проверяются умения осуществлять тождественные преобразования в ходе решения задач с параметрами,

д) проверяются умения осуществлять тождественные преобразования в ходе решения прикладных задач (например, задач с физическим содержанием).

164. Охарактеризуйте задание: «Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $270° < \alpha < 360°$.

а) Задание на преобразование и вычисление, проверяющее умения проводить по известным формулам и правилам преобразование буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

б) Задание на вычисление, проверяющее умения проводить по известным формулам и правилам преобразование буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

в) Задание на преобразование, проверяющее умения проводить по известным формулам и правилам преобразование буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

г) Задание на знание основного тригонометрического тождества.

165. В 10 классе

а) завершается изучение модуля «Преобразование иррациональных выражений»: рассматриваются иррациональные трансцендентные (тригонометрические, логарифмические и показательные) выражения и их преобразования (преобразования на множестве),

б) закрепляются и совершенствуются умения учащихся осуществлять тождественные преобразования,

в) проверяются умения осуществлять тождественные преобразования в ходе решения уравнений и неравенств,

г) проверяются умения осуществлять тождественные преобразования в ходе решения задач с параметрами,

д) проверяются умения осуществлять тождественные преобразования в ходе решения прикладных задач (например, задач с физическим содержанием).

166. Оцените результаты деятельности школьников по решению задачи: «Докажите тождество $\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=(tg\,x+ctg\,x)^2$».

Ученик	Решение	Отметка
А	$(tg\,x+ctg\,x)^2=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2=\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}\right)^2=$ $=\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$	
Б	$(tg\,x+ctg\,x)^2=tg^2 x+ctg^2 x+2tg\,x\cdot ctg\,x=$ $=tg^2 x+ctg^2 x+2=(tg^2 x+1)+(ctg^2 x+1)=$ $=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$	
В	$\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}=$ $=(tg^2 x+1)+(ctg^2 x+1)=tg^2 x+ctg^2 x+2=$ $=tg^2 x+ctg^2 x+2tg\,x\cdot ctg\,x=(tg\,x+ctg\,x)^2$	
Г	$\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=(tg^2 x+1)\cdot(ctg^2 x+1)=$ $=tg^2 x+ctg^2 x+tg^2 x\cdot ctg^2 x+1=tg^2 x+ctg^2 x+2=$ $=(tg\,x+ctg\,x)^2$	
Д	$\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=(tg\,x+ctg\,x)^2 \Leftrightarrow$ $\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot(tg\,x+ctg\,x)^2=1\Leftrightarrow$ $\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot(tg^2 x+ctg^2 x+2tg\,x\cdot ctg\,x)=1\Leftrightarrow$ $\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+2\right)=1\Leftrightarrow$ $\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=1\Leftrightarrow$ $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=1\Leftrightarrow 1=1(ист.)$	

167. Запишите три вопроса базового повторения к изучению показательной функции.

168. В старшей школе перед изучением показательной функции следует обобщить понятие степени, при этом, следует привлечь внимание учащихся к тому главному, что имеет значение при обобщении понятия степени.

Выделите основной вопрос содержания обобщения понятия степени в этом случае.

а) Восстановить в памяти и полностью довести до понимания, что a^n есть сокращенная запись $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ множителей}$, и поэтому символ a^n имеет смысл при натуральном n. Поэтому правила действий могут применяться лишь тогда, когда не только компоненты, но и результат действия оказывается степенью с натуральным показателем, $a^n : a^n$ пока не выполнимо по правилу деления степеней.

б) Следует ограничиться повторением основного свойства степени и следствий из него; обратить внимание, при каких значениях букв могут выполняться правила действий со степенями: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ и $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ для любых действительных a и натуральных m и n; $a^m : a^n = a^{m-n}$ для любых действительных $a \neq 0$ и натуральных m и n, причём $m > n$.

в) Следует повторить все свойства степени и способы доказательства этих свойств.

г) Выяснить, какой смысл следует придать (вложить) в новые символы a^0, a^{-n}, $a^{\frac{m}{n}}$, a^{α}, то есть как определить их, сохранив неизменными имеющиеся правила действий, сделав ненужными ограничения, которые вытекали из первоначального определения степени с натуральным показателем и обратить внимание на новые ограничения.

169. Учитель при обобщении понятия степени привёл следующие рассуждения, определяя степень с нулевым показателем.

«Как определить выражение a^0, чтобы правило умножения степеней осталось в силе?..

Умножим по этому правилу a^0 на a^m, вопреки запрету (показатели должны быть натуральными), получим: $a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m$.

Проанализируем результат: при $a^m \neq 0$ произведение двух множителей a^0 и a^m может равняться одному из них – a^m – тогда и только тогда, когда другой – a^0 – равен 1.

Значит известное правило умножения степеней сохраняется лишь в том случае, когда для любых действительных $a \neq 0$ выражение a^0 будем считать равным 1.

Запишем определение: $a^0 = 1$ при $a \neq 0$.

Теперь правило деления степеней: $a^m : a^n = a^{m-n}$ – будет выполняться для любых действительных $a \neq 0$ и натуральных m и n, таких, что $m \geq n$, так как выражение a^0 имеет смысл: $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0 = 1$».

Правильно ли он поступил?

а) Рассуждения излишне формализованы и неестественны для школьников. Проще было бы ввести определение степени с натуральным показателем по аналогии с ***расширения понятия числа*** (от натурального к целому положительному, 6 класс): $a^m \cdot 1 = a^m \Rightarrow a^m \cdot a^x = a^m \Rightarrow a^{m+x} = a^m \Rightarrow$ $\boldsymbol{m + x = m \Rightarrow x = 0} \Rightarrow a^0 = 1$.

б) Рассуждения не нужны вовсе, лучше использовать дедуктивный подход (наиболее целесообразный для старшей школы) и сразу (формально) дать нужное определение.

в) Лучше было бы использовать дедуктивный подход (наиболее целесообразный для старшей школы) и сразу (формально) дать нужное определение, а затем убедиться в том, что все свойства степени выполняются для a^0.

г) Реализуя проблемный подход к обучению, учитель поступил целесообразно. Кроме того он продемонстрировал учащимся принцип перманентности в построении научной теории.

170. Определите степень с отрицательным показателем.

171. Учитель при обобщении понятия степени привёл следующие рассуждения, определяя степень с рациональным показателем.

«Рассмотрим $2^{\frac{1}{2}} = x$. Возведём равенство в квадрат, сохраняя основное свойство степени (считая, что основное свойство степени выполняется), получим: $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^2, \quad x > 0$.

Преобразуем левую часть: $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$.

По свойству равенства: $2 = x^2, \quad x > 0$, значит $2^{\frac{1}{2}} = x = \sqrt{2}$.

Итак, $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

Рассмотрим $2^{\frac{2}{3}} = x$. Проведём аналогичные рассуждения и получим:

$$x > 0, \quad \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = x^3 \Leftrightarrow 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = x^3 \Leftrightarrow 2^2 = x^3 \Leftrightarrow 2^{\frac{2}{3}} = x = \sqrt[3]{2^2}.$$

Обобщая эти результаты, можно записать:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \frac{m}{n} - дробь, m \in Z, n \in N, a > 0.$$

Примем это предложение за определение степени с рациональным показателем».

Правильно ли он поступил?

а) Действия учителя можно считать методически грамотными.

б) Рассуждения построены на индуктивной основе, которая характерна для начальных этапов обучения математике. Необходимо было использовать дедуктивный подход и сразу ввести определение степени с рациональным показателем.

в) Реализуя проблемный подход к обучению, учитель поступил целесообразно. Кроме того он в очередной раз продемонстрировал учащимся принцип перманентности в построении научной теории.

г) Совсем не важно, как введено определении степени с рациональным показателем. Важно, чтобы ученики убедились в том, что при расширении (обобщении) понятия степени выполнялись правила действий со степенями, а этого проделано не было.

д) Учитель «обобщая результаты», даёт определение для любого целого m, однако случай с отрицательным m (например, $2^{\frac{-3}{4}} = x$) рассмотрен не был.

172. Особенностью циклов заданий, связанных с тождествами для показательной функции обусловлены тем, что:

а) они появляются позже тождеств, связанных с преобразованиями многочленов, и изучаются с использованием уже сформированных навыков проведения тождественных преобразований;

б) показательная функция расширяет область чисел, которые могут быть обозначены и названы индивидуально;

в) соответствующие тождества изучаются в связи с изучением функционального материала;

г) цель таких заданий – в освоении особенностей записей, включающих символы новых операций и функций, и в развитии навыков математической речи.

173. Ученик 11 класса выполняет задание: «Упростить выражение $2^{2x} \cdot 3^x + 12^x - 2^{x+1} \cdot 6^x$». Выразите свой отношение к способу решения.

$$
\begin{aligned}
&2^{2x} \cdot 3^x + 12^x - 2^{x+1} \cdot 6^x = \\
&= 2^x (2^x \cdot 3^x + 6^x - 2 \cdot 6^x) = \\
&= 2^x (2^x \cdot 3^x - 6^x) = \\
&= 2^x (6^x - 6^x) = 0
\end{aligned}
$$

а) Решение верно, оценка – «5».

б) Решение верно, но не рационально: вынесение общего множителя – лишнее. Оценка – «5».

в) Решение не рационально: вынесение общего множителя – лишнее. Оценка – «4».

г) Решение верно, но пропущен ряд преобразований, основанных на свойствах показательной функции; решение не для демонстрации; оценка – «4».

д) Решение не полно, кроме того, ученику просто повезло, что в скобках получился 0, в ином случае данный способ завёл бы в тупик. Оценка – «3».

е) Решение неверно, оценка – «2».

174. Ученик 11 класса выполняет задание: «Упростить выражение $2^{2x} \cdot 3^x + 12^x - 2^{x+1} \cdot 6^x$». Выразите свой отношение к способу решения.

$$
\begin{aligned}
&2^{2x} \cdot 3^x + 12^x - 2^{x+1} \cdot 6^x = \\
&= (2^2)^x \cdot 3^x + 12^x - 2^x \cdot 2 \cdot 6^x = \\
&= 4^x \cdot 3^x + 12^x - 2 \cdot 2^x \cdot 6^x = \\
&= 12^x + 12^x - 2 \cdot 12^x = \\
&= 2 \cdot 12^x - 2 \cdot 12^x = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

а) Решение верно, оценка – «5».

б) Решение верно, но излишнее подробно (третья и четвёртая строки не нужны). Оценка – «5».

в) Решение излишнее подробно: третья и четвёртая (или четвёртая и пятая) строки не нужны (т.к. очевидны). Оценка – «4».

г) Решение излишнее подробно: третья и четвёртая (или четвёртая и пятая) строки не нужны (т.к. очевидны). Оценка – «3».

д) Решение неверно, оценка – «2».

175. Учитель в начале урока дал задание на повторение найти значение выражения $log_{a^3b^4}\sqrt[3]{a^2b}$, если $log_a b=\frac{1}{4}$.

Два ученика вызвались к доске. Результаты их деятельности представлены ниже.

Учение А	Ученик Б
$log_{a^3b^4}\sqrt[3]{a^2b}=\frac{log_a\sqrt[3]{a^2b}}{log_a\left(a^3b^4\right)}=$ $=\frac{log_a\left(a^2b\right)}{3log_a\left(a^3b^4\right)}=\frac{2+\frac{1}{4}}{9+\frac{12}{4}}=\frac{9}{48}$	$log_a b=\frac{1}{4}\Leftrightarrow log_b a=4$ $log_{a^3b^4}\sqrt[3]{a^2b}=\frac{log_b\sqrt[3]{a^2b}}{log_b\left(a^3b^4\right)}=\frac{log_b\left(a^2b\right)^{\frac{1}{3}}}{log_b a^3+log_b b^4}=$ $=\frac{\frac{1}{3}\left(log_b a^2+log_b b\right)}{3log_b a+4}=\frac{\frac{1}{3}\left(2log_b a+1\right)}{3log_b a+4}$ Если $log_b a=4$, то $log_{a^3b^4}\sqrt[3]{a^2b}=\frac{\frac{1}{3}(8+1)}{3\cdot 8+4}=\frac{3}{28}$

Объясните разницу в результатах. Как учителю лучше организовать проверку решений?

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Выставите ученикам оценки, объясните своё решение (выбор оценки).

Ученик А. Оценка – «___»	Ученик Б. Оценка – «___»
____________________	____________________
____________________	____________________
____________________	____________________
____________________	____________________
____________________	____________________
____________________	____________________
____________________	____________________
____________________	____________________
____________________	____________________

ИЗУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

176. Согласно ФГОС предметные результаты изучения уравнений и неравенств в системе основного образования должны отражать:

а) использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

б) овладение приёмами решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств;

в) овладение символьным языком алгебры,

г) овладение умениями моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

д) сформированность знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

е) сформированность понятийного аппарата по разделу «Уравнения и неравенства» курса математики.

177. Согласно ФГОС предметные результаты изучения уравнений и неравенств на уровне среднего-полного образования должны отражать:

а) владение стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем;

б) использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

в) овладение символьным языком алгебры;

г) осознание значения уравнений и неравенств в повседневной жизни человека;

д) сформированность знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

е) сформированность понятийного аппарата по разделу «Уравнения и неравенства» курса математики;

ж) сформированность умений моделировать реальные ситуации (уравнения и неравенства как математические модели реальных ситуаций), исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат.

178. Одно из основных направлений изучения линии уравнений и неравенств в ШКМ, в рамках которого излагается ряд математических фактов, образующих в свей совокупности локальную (школьную) теорию уравнений и неравенств, называется

____

179. Одно из основных направлений изучения линии уравнений и неравенств в ШКМ, в рамках которого происходит освоение алгоритмов решения уравнений/ неравенств/систем конкретных видов, называется

____

180. Одно из основных направлений изучения линии уравнений и неравенств в ШКМ связанное с решением текстовых задач (математических, прикладных и практических) путём построения соответствующих алгебраических моделей (уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств), называется

____

181. Подход к определению понятия уравнения, при котором уравнением с одним неизвестным называется равенство вида $f(x) = g(x)$, а корнем уравнения называется число x_0, если это число принадлежит области допустимых значений неизвестного и справедливо числовое равенство $f(x_0)=g(x_0)$, именуется

____

182. Подход к определению понятия уравнения, при котором уравнением называется равенство, содержащее неизвестное число, а корнем уравнения называется значение неизвестного числа, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство, именуется

____

183. Выделите основные группы понятий линии уравнений и неравенств:

а) равенство – тождество – уравнение – неравенство;

б) уравнение – неизвестное – корень уравнения – решить уравнение;

в) неравенство – неизвестное – решение неравенства – решить неравенство;

г) числовые промежутки – множества решений;

д) система – совокупность;

е) система уравнений/неравенств – неизвестные – решение системы – решить систему;

ж) совокупность уравнений /неравенств – решение совокупности – решить совокупность;

з) метод решения – алгебраический – функциональный – графический;

и) ОДЗ – равносильность – следствие – равносильные преобразования;

к) метод математического моделирования – модель – алгебраическая модель;

л) параметр – уравнение/неравенство с параметром.

184. Выделите два основных этапа решения уравнения (неравенства):

а) Анализ входящих в уравнение (неравенство) функций, определение ОДЗ и числа корней (решений) – аналитический этап.

б) Преобразование данного уравнения (неравенства) к простейшему виду(системе или совокупности простейших уравнений и различных условий) – эвристический этап.

в) Решение простейшего уравнения (неравенства) по известным формулам, алгоритмам или правилам (обобщённым способы) – алгоритмический этап.

г) Проверка решения, исследование решения с целью обобщения, поиска более рационального решения – исследовательский этап.

185. В 5 классе на уроке закрепления изучаемого материала по теме «Решение задач с помощью уравнений» учитель предложил классу следующее задание: «Обозначь наименьшую из величин x и построй математическую модель задачи. Найди x и ответь на поставленный вопрос: Три девицы под окном пряли поздно вечерком. Вторая девица спряла в два раза больше пряжи, чем первая, а третья – в три раза больше, чем первая. Все вместе они спряли 4 кг 800 г пряжи. Сколько пряжи спряла в этот вечер каждая девица?»

С какой целью в содержание урока включено такое задание?

а) удерживание цели обучения до получения результата;
б) планирование хода решения учебной задачи;
в) корректировка деятельности при обнаружении ошибочных действий;
г) контроль деятельности учащихся;
д) проведение рефлексии собственной учебной деятельности.

186. В 5 классе на уроке закрепления изучаемого материала по теме «Решение уравнений» учитель предложил классу следующее задание: «Два ученика решали уравнение 5(x+2)=25. I ученик решал так: 5(x+2)=25; 5x+2=25; 5x=25 – 2; 5x=23; x=23:5; x=4,6. II ученик решал так: 5(x+2)=25; 5x+10=25; 5x=25 – 10; 5x=15; 5x=15; x=15:5; x=3. Найдите верное решение. Объясните свой выбор. Сделайте проверку».

С какой целью в содержание урока включено такое задание?

а) удерживание цели обучения до получения результата;
б) планирование хода решения учебной задачи;
в) корректировка деятельности при обнаружении ошибочных действий;
г) контроль деятельности учащихся;
д) проведение рефлексии собственной учебной деятельности.

187. На этапе повторения и обобщения материала по теме «Уравнения» учащимся 5 класса можно предложить следующую пару заданий: (1) решить уравнение x + 432 = 500, (2) решить уравнение x + y = 500. С лёгкостью решив первое уравнение, ученики, как правило, возмущаются: «Мы такое не проходили!..». Выберите наиболее перспективное направление организации деятельности учащихся:

а) объяснить учащимся, как решаются уравнения с двумя неизвестными;

б) организовать пресс-конференцию по указанной проблеме, то есть предложить задавить учителю вопросы, отвечая на которые, он поможет осознать новую математическую действительность;

в) рассказать ученикам про Математика, который никогда не останавливается на достигнутом, а всегда спрашивает сам себя: «Что будет, если …», тем самым двигая науку вперёд, а затем предложить «примерить на себя» роль Математика;

г) серией вопросов организовать исследование (сравнительный анализ) двух уравнений.

188. Формирование обобщённого способ решения системы линейных уравнений методом подстановки учитель начал с демонстрации примера решения системы $\begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases}$.

Описание этапов решения	Выполнение
1. Из первого уравнения системы выражаем y	$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases}$
2. Подставим найденное выражение вместо y во второе уравнение системы	$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x + (3x - 5) - 7 = 0 \end{cases}$
3. Преобразуем полученное (второе) уравнение	$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 5x - 12 = 0 \end{cases}$
4. Из второго уравнения найдём значение x	$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ x = \dfrac{12}{5} \end{cases}$
5. Подставим найденное значение x в первое уравнение	$\begin{cases} y = 3 \cdot \dfrac{12}{5} - 5 \\ x = \dfrac{12}{5} \end{cases}$
6. Из первого уравнения найдём значение y	$\begin{cases} y = \dfrac{11}{5} \\ x = \dfrac{12}{5} \end{cases}$
7. Запишем ответ (используя числовой формат условия)	Результат – десятичные дроби, записанные в виде неправильных обыкновенных дробей. В условии нет неправильных дробей, следовательно их нужно записать в виде десятичных дробей (с запятой). Ответ: $x = 2{,}4$, $y = 2{,}2$.

Насколько удачно выбран пример для демонстрации?

а) Удачно.

б) Не совсем удачно: в ответе появляются дробные числа.

в) Не совсем удачно: уравнения записаны в стандартном виде.

г) Не удачно: пример больше подходит для демонстрации решения системы методом сложения.

189. Закрепление теоремы Виета и ей обратной осуществляется при отработке навыков их применения при решении упражнений следующих видов:

а) проверка правильности вычисления корней;

б) подбор целых корней приведенного квадратного уравнения с целыми коэффициентами;

в) определение знаков корней уравнения (если они существуют), не решая его;

г) доказательство того, что уравнение не может иметь корни одинаковых (разных) знаков;

д) разложение квадратного трёхчлена на множители;

е) нахождение, не решая квадратного уравнения, значения суммы квадратов корней, суммы величин, обратных корням и т.п. задачи;

ж) построение графика квадратичной функции;

з) решение квадратного неравенства;

и) решение системы уравнений вида $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$.

190. Усвоение способа записи решения неравенств с помощью указания интервалов на числовой оси осуществляется при решении упражнений следующего вида: «Установите соответствие между неравенствами и их решениями». Учитель предложил ученикам 8 класса 4 таких упражнения. Оптимальна ли предлагаемая система упражнений для усвоения способа записи?

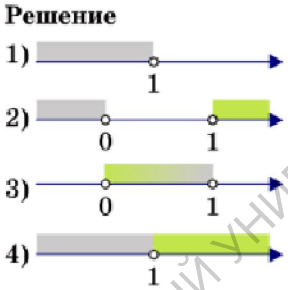
Неравенство

А) $2x(x-1) < 0$

Б) $\frac{x-1}{3} < 0$

В) $4(x-1)^2 > 0$

Г) $5x(x-1) > 0$



а) Да, четырёх упражнений вполне достаточно для усвоения.

б) Да, представлены все возможные способы записи решения неравенств.

в) Нет, представлены не все возможные способы записи решения неравенств.

г) Да, рассмотрены все виды неравенств, известные ученикам на данный момент.

д) Нет, рассмотрены не все виды неравенств, известные ученикам на данный момент.

е) Да, если упражнения даются для самостоятельного выполнения.

ж) Нет, если упражнения предлагаются для фронтальной работы в классе с числом учеников более, чем 12.

Данное уравнение	Уравнение-следствие	Проверяемые неравенства
$\frac{f(x)}{g(x)}=0$	$f(x)=0$	$g(x)\neq 0$
$\sqrt{f(x)}=g(x)$	$f(x)=(g(x))^2$	$g(x)\geq 0$ (неравенство $f(x)\geq 0$, задающее ОДЗ данного уравнения, проверять не нужно: оно выполняется для всех найденных значений переменной, поскольку при каждом из них $f(x)=g^2(x)$, а $g^2(x)\geq 0$)
$\log_{a(x)} f(x)=b$	$f(x)=(a(x))^b$	$a(x)>0$, $a(x)\neq 1$ (неравенство $f(x)>0$ проверять не нужно: оно следует из того, что $a(x)>0$, и, значит, $f(x)=(a(x))^b>0$)
$\lvert f(x)\rvert=g(x)$	$f(x)=\pm g(x)$	$g(x)\geq 0$

191. Один из основных методов решения уравнений в школьном курсе алгебры – переход от данного уравнения к уравнению-следствию. Переход к уравнению-следствию, как правило, связан с расширением ОДЗ, которое обычно происходит после какого-либо преобразования. Вместо непосредственной подстановки найденных корней в данное уравнение можно подставлять корни лишь в неравенства, невыполнение которых и приводит у появлению посторонних корней. Учитель предлагает ученикам 8 класса составить памятку (см. таблицу) и пользоваться ею при решении алгебраических задач. Насколько удачен этот методический приём?

а) Очень удачен: уже с 8 класса у учеников будет нужное справочное средство, позволяющее им безошибочно решать типовые уравнения.

б) Удачен: нет ничего плохого в том, что справочный материал содержит избыточную информацию; вот телефонный справочник содержит миллион номеров, и никто не жалуется, что в какой-то момент из этого миллиона требуется найти всего один.

в) Не совсем удачен; лучше заполнять такую памятку из года в год, по мере изучения соответствующих уравнений.

г) Неудачен, поскольку, ученикам сначала нужно только умение решать дробно-рациональные уравнения, а в памятке предлагаются всевозможные уравнения, смысл многих выражений, в них содержащихся, ученикам даже не понятен.

д) Неудачен, поскольку, ученики, привыкая к формальному решению (по алгоритму, заданному таблицей-памяткой) типовых задач, не могут приступить к решению нетиповой задачи.

е) Можно использовать или не использовать такую памятку, главное, чтобы ученики понимали суть выполняемых действий и процедур, знали те теоретические положения, которые лежат в их основе.

192. Метод равносильных преобразований является основным методом решения уравнений, неравенств и их систем. Он обладает следующим преимуществом перед методом перехода к уравнению-следствию:

а) не изменяет множества решений, то есть не ведёт к потере корней или приобретению посторонних корней,

б) не требует проверки найденных решений путём их подстановки в исходное уравнение (неравенство, систему),

в) позволяет не запутаться при рассмотрении разных случаев решения, связанных с разбиением ОДЗ на подмножества,

г) формален, поэтому не требует анализа данных.

Данное уравнение	Уравнение-следствие	Проверяемые неравенства
$\frac{f(x)}{g(x)}=0$	$f(x)=0$	$g(x)\neq 0$
$\sqrt{f(x)}=g(x)$	$f(x)=(g(x))^2$	$g(x)\geq 0$ (неравенство $f(x)\geq 0$, задающее ОДЗ данного уравнения, проверять не нужно: оно выполняется для всех найденных значений переменной, поскольку при каждом из них $f(x)=g^2(x)$, а $g^2(x)\geq 0$)
$\log_{a(x)} f(x)=b$	$f(x)=(a(x))^b$	$a(x)>0$, $a(x)\neq 1$ (неравенство $f(x)>0$ проверять не нужно: оно следует из того, что $a(x)>0$, и, значит, $f(x)=(a(x))^b>0$)
$\lvert f(x)\rvert=g(x)$	$f(x)=\pm g(x)$	$g(x)\geq 0$

Данное уравнение	Равносильная система
$\frac{f(x)}{g(x)}=0$	$\begin{cases} g(x)\neq 0, \\ f(x)=0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)}=g(x)$	$\begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)=(g(x))^2 \end{cases}$
$\log_{a(x)} f(x)=b$	$\begin{cases} a(x)>0, \\ a(x)\neq 1, \\ f(x)=(a(x))^b \end{cases}$
$\lvert f(x)\rvert=g(x)$	$\begin{cases} g(x)\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{cases}$

193. Один из основных методов решения уравнений в школьном курсе алгебры – метод равносильных преобразований. Учитель предлагает ученикам сравнить два метода, проанализировав таблицы, и выбрать каждому для себя наиболее приемлемый. Не допускает ли учитель методическую ошибку.

а) Нет. Так или иначе, каждый ученик выберет для себя один из предложенных методов решения.

б) Нет. Так как на выбор метода оказывает непосредственное влияние частота его использования при решении задач в классной работе, а не разовое предложение учителя.

в) Да, если процесс сравнения методов будет идти бесконтрольно, и ученики за внешней стороной не увидят сути методов, не выявят их достоинства и недостатки. Нет, если учитель сможет сформировать убеждение в том, что каждый метод имеет свою сферу применимости.

г) Да. Не верна сама постановка задачи: «выбрать каждому для себя наиболее приемлемый». Выбор метода зависит не от предпочтения ученика, а от ситуации, описанной в задаче.

194. Один из основных приёмов решения уравнений в школьном курсе алгебры – введение новой переменной. Суть этого метода по отношению к уравнению $f(x) = g(x)$ в том, чтобы:

а) найти функции $t=\varphi(x)$ (называется подстановкой) и $y=h(t)$, для которых при любом x из ОДЗ уравнения выполняется условие: $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow h(t)=0$;

б) найти функции $t=\varphi(x)$ (называется подстановкой) и $y=h(t)$, для которых при любом $x\in D(f)\cap D(g)$ выполняется условие: $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow h(\varphi(x))=0$;

в) найти функцию $y=h(t)$ (называется подстановкой), для которой выполняется условие: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(y)=g(y)$;

г) найти функцию $y=h(t)$ (называется подстановкой), для которой на всей области допустимых значений уравнения выполняется условие: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(y)=g(y)$.

В этом случае достаточно решить уравнение относительно новой переменной, а затем для каждого его корня решить уравнение ____________(*). Совокупность всех полученных таким образом корней x уравнения (*), принадлежащих ОДЗ исходного уравнения, будет искомым множеством решений исходного уравнения.

$1 : x = (x - 1) : 6$

$x \neq 0,\ x(x - 1) = 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$\underline{x = -2,\ x = 3}$

$1 : (-2) = (-2 - 1) : 6 \qquad 1 : 3 = (3 - 1) : 6$

$-1/2 = -1/2 \qquad 1/3 = 1/3$

Ответ. $x = -2,\ x = 3$

195. Ученик 8 класса решает уравнение. Выразите свой отношение к проверке корней уравнения, которая фигурирует в решении.

а) Найденные значения неизвестной являются корнями данного уравнения, решение проведено без вычислительных ошибок, аккуратно; вне зависимости от того, сделал проверку ученик или не сделал, он должен получить оценку «5».

б) Такие «решения» ученики проводят, начиная с начальной школы, в 5-6 классах, когда у них формируется привычка выполнять действие контроля в ходе решения задач, и это характеризует развитие критичности мышления. Ученик заслуживает похвалы и оценки «5».

в) Неизвестно, основано ли решение на равносильных преобразованиях, так как знак равносильности в записи решения отсутствует. Но зато есть условие – ограничение на неизвестную величину $(x \neq 0)$, и уж если и проверять, то на соответствие этому условию, а не прямой подстановкой найденных значений в исходное уравнение. Ученик не заслуживает высшей оценки.

г) Проверка не нужна, так как решение основано на равносильных преобразованиях, но если ученик этого не осознаёт, то пусть лучше проверку выполняет, но оценку «5» в этом случае ему ставить не следует.

д) Требование проверки решения уравнения должно сохраняться лишь до введения понятия равносильных уравнений (вводится в курсе алгебры 7 класса). С этого момента учащиеся должны понимать, что использование равносильных преобразований позволяет обходиться без проверки найденного значения неизвестной. А контроль над правильностью вычислений должен проводиться устно. Ученик не заслуживает оценки «5».

е) Ученик устно нашёл корни квадратного уравнения, значит и осуществить проверку результатов решения мог бы устно, значит он или специально или по привычке включил проверку в решение. Следует дать ученику уравнение: $1 : x = (x - 1) : 5;$ – и посмотреть, будет ли он выполнять проверку результатов прямой подстановкой в исходное уравнение. В любом случае, ученик не заслуживает оценки «5».

196. Урок закрепления умений решать уравнения и неравенства учитель начинает с устной работы: «Чтобы при решении уравнений, неравенств и их систем не произошла потеря корней или приобретение посторонних корней необходимо при каждом преобразовании внимательно следить за ОДЗ, не допуская её сужения или расширения, то есть выполнять равносильные преобразования. Какие из перечисленных мною преобразований равносильны, а какие – нет:

(1) Перенос слагаемого из одной части уравнения или неравенства в другую.

(2) Приведение подобных слагаемых.

(3) Умножение обеих частей неравенства на положительное число.

(4) Умножение обеих частей неравенства на отрицательное число.

(5) Умножение обеих частей уравнения одно и то же число.

(6) Возведение обеих частей уравнения или неравенства в квадрат.

(7) Возведение обеих частей уравнения или неравенства в куб?

(8) Замена компонента уравнения (неравенства) на равное».

Оцените содержание устной работы.

а) Соответствует цели: вспомнить, какие преобразования равносильны, а какие – нет.

б) Задания не подходят для устной фронтальной работы, поскольку большая часть вопросов требует конкретизации (дополнительных условий).

в) Задания подходят для устной работы при условии, что ученики приведут примеры, подтверждающие их правоту.

г) Вопрос и задания не подходят для устной фронтальной работы, поскольку сформулированы в общем виде и предполагают выбор одного из двух ответов: «равносильно» или «не равносильно», которые не ясно как аргументировать.

д) Подобная устная работа бессмысленна, поскольку не позволяет обратиться ни к теории (для этого необходимо воспроизводить формулировки теорем), ни к практике (для этого нужны конкретные примеры).

е) Содержание устной работы вредно для обучения решению уравнений и неравенств, поскольку формирует ошибочные ассоциации, зафиксированные в заданиях.

197. Учитель спрашивает у учеников, является ли приведение подобных слагаемых равносильным преобразованием, и получив утвердительный ответ, предлагает решить уравнение $x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8$. Укажите наиболее вероятные последствия.

а) Многие ученики решат задание, используя приведение подобных слагаемых как равносильное преобразование, допустят ошибку.

б) Ученики решат задание, используя приведение подобных слагаемых, но одни допустят ошибку, считая это преобразование равносильным, а другие сделают проверку и получат правильный ответ.

в) Ученики решат задание, используя приведение подобных слагаемых как равносильное преобразование, при этом часть допустит ошибку при записи решения, часть – решит задание с ошибкой.

198. Известно, что учащиеся часто забывают, умножив обе части неравенства на (-1). Организуя работу над ошибками учитель может выбрать один из приёмов, который продемонстрируем на решении неравенства $-x > -1$:

а) Первый путь – «лобовой». Учитель записывает: $-x > -1 \Leftrightarrow x > 1;$ и объясняет, почему запись неверна.

б) Второй путь – «вопросительный». Учитель записывает: $-x > -1 \Leftrightarrow x > 1;$ и задаёт вопрос: верна ли запись?

в) Третий путь – «софистический». Учитель записывает исходное неравенство: $-x > -1$. Затем записывает неравенство, которое может быть получено из данного без смены знака неравенства: $x > 1$. А потом складывает оба неравенства и получает такое: $0 > 0$. После этого ошибка становится очевидной.

г) Четвёртый путь – «поисковый». Учитель записывает серию логических предложений, например:

$-x > -1 \Rightarrow x > 1;$	$x > 1 \Rightarrow -x > -1;$	$-x > -1 \Leftrightarrow x > 1;$
$-x > -1 \Rightarrow x < 1;$	$x > 1 \Rightarrow -x < -1;$	$-x > -1 \Leftrightarrow x < 1;$
$-x < -1 \Rightarrow x > 1;$	$x < 1 \Rightarrow -x > -1;$	$-x < -1 \Leftrightarrow x > 1;$
$-x < -1 \Rightarrow x < 1;$	$x < 1 \Rightarrow -x < -1;$	$-x < -1 \Leftrightarrow x < 1;$ –

и просит выявить истинные и ложные утверждения, обосновав свой выбор.

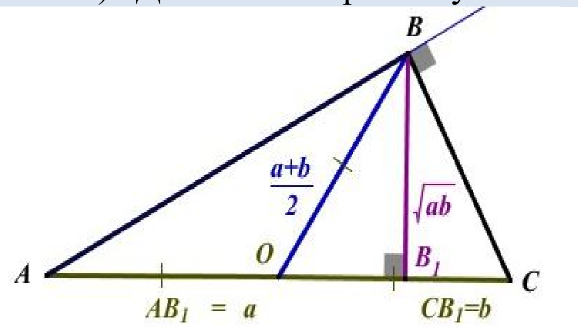
д)

Укажите наиболее эффективный путь преодоления указанной ошибки или предложите свой вариант.

199. На уроке алгебры в 9 классе доказано неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\ (a \geq 0, b \geq 0)$. После чего ученикам предлагается система задач-следствий:

а) В каком случае достигается знак равенства?

б) Дать геометрическую иллюстрацию неравенства. В данной задаче возможна такая интерпретация: a и b – отрезки, на которые высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу, $\sqrt{ab}$ – длина этой высоты, $\frac{a+b}{2}$ – длина медианы к гипотенузе. Здесь $AO = OC$, $AB_1 = a$, $CB_1 = b$.



в) Из двух положительных чисел, произведение которых постоянно, найти такие, сумма которых является наименьшей.

г) Из двух положительных чисел, сумма которых постоянна, найти такие, произведение которых является наибольшим.

д) Обобщите неравенство на 3, 4, ..., любое число неотрицательных слагаемых.

е) Рассмотрите всевозможные «полезные» частные случаи, например, можно взять $b = \frac{1}{a}$ и получить…?

Укажите порядок предъявления задач ученикам.

1	2	3	4	5	6

200. В.Н. Рыжик предлагает проверять понимание определения с помощью таких вопросов:

1) Каков характер определения: описательное или конструктивное?

2) Что определяется: объект или свойство?

3) Для описательных определений: из какого множества выбирается определяемый объект?

4) Можешь ли ты сказать определение своими словами?

Примените эту схему к определению биквадратного уравнения.

201. Подведите итоги самостоятельной работы учащихся по решению системы $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ 8x^2+4y^2=36x \end{cases}$. В комментарии опишите ошибки и недочёты.

а)

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ 8x^2+4y^2=36x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2+4y^2=36\cdot 4 \\ 8x^2+4y^2=36x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ 36\cdot 4=36x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32+y^2=36 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=2 \\ x=4 \end{cases}.$$

б)

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ 8x^2+4y^2=36x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ 2x^2+y^2=9x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ 36=9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y|=2 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=\pm 2 \\ x=4 \end{cases}.$$

в)

$$\begin{cases} y^2=36-2x^2 \\ 8x^2+4y^2=36x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2=36-2x^2 \\ 8x^2+4\left(36-2x^2\right)=36x \end{cases}$$

$$8x^2+144-8x^2=36x$$

$$144=36x$$

$$x=4, \quad y^2=36-2\cdot 4^2=4$$

$$y^2-4=0, (y-2)\cdot(y+2)=0$$

$$y=2, \quad y=-2$$

Ответ. -2 и 2.

г)

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ 8x^2+4y^2=36x \end{cases}$$

$$8x^2+4y^2=\left(2x^2+y^2\right)x$$

$$8x^2+4y^2=2x^3+xy^2$$

$$8x^2-2x^3=xy^2-4y^2$$

$$2x^2(4-x)=y^2(x-4)$$

$$-2x^2(x-4)=y^2(x-4)$$

$$-2x^2=y^2$$

$$y^2+2x^2=0$$

$$x=y=0$$

д)

$\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ 8x^2+4y^2=36x \end{cases}$ Из I уравнения следует:

x – положителен меньше 6,

y – чётное меньше 6 $\to$ $y=\pm 2$ или $y=\pm 4$

1) $y=\pm 2$

$$\begin{cases} 2x^2+4=36 \\ 8x^2+16=36x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=16 \\ 128+16=36x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2=16 \\ 144=36x \end{cases} \Leftrightarrow x=4$$

Ответ. $(4; -2)$, $(4; 2)$

2) $y=\pm 4$

$$\begin{cases} 2x^2+16=36 \\ 8x^2+64=36x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=10 \\ 80+64=36x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2=10 \\ 144=36x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=10 \\ x=4 \end{cases}$$

Система решений не имеет.

Отметки:

а)	б)	в)	г)	д)

Комментарий к решению.

а) ______________________________________

____

____

б) ______________________________________

____

____

в) ______________________________________

____

____

г) ______________________________________

____

____

д) ______________________________________

____

____

202. Оцените ответ у доски (деятельность учителя и ученика).

$x^4 = (x - 20)^2$

Ученик: «Извлечём квадратный корень из обеих частей уравнения: $x^2 = x - 20$».

Учитель: «Полученное уравнение равносильно данному?».

Ученик: ???[1]

Учитель: «Вспомни, как извлекается корень из чётной степени».

Ученик: $\sqrt{x^{2n}} = x^n$.

Учитель: «Всегда ли выполняется это равенство?».

Ученик: «Да».

Учитель: «Проверь равенство для $n = 1, x = -1$».

Ученик: « $\sqrt{(-1)^2} = -1$. Равенство не выполняется: корень не может быть отрицательным».

Учитель: «Исправь равенство $\sqrt{x^{2n}} = x^n$ так, чтобы получилось тождество».

Ученик: ???

Учитель: «Вопрос классу: как из равенства $\sqrt{x^{2n}} = x^n$ «получить» тождество?».

Ученик-2: $\sqrt{x^{2n}} = \left| x^n \right|$

Учитель: «Используй это тождество».

Ученик: $\left| x^2 \right| = \left| x - 20 \right|$. ???

Учитель: «Посмотри, можно ли избавиться от модуля в левой части уравнения?».

Ученик: $x^2 = \left| x - 20 \right|$

$x^2 = x - 20$ или $x^2 = 20 - x$

$x^2 - x + 20 = 0$ или $x^2 + x - 20 = 0$

$D = -79 < 0$ $D = 81 > 0$

корней нет $x = -5, x = 4$ (по теореме Виета) – ответ.

Ученик-2: «Я получил ответ другим способом».

Учитель: «Запиши на доске».

$x^4 = (x - 20)^2$

$| x^2 | = | x - 20 |$

$x^2 = | x - 20 |$

$x^2 = x - 20$ *или* $x^2 = -x + 20$

$x^2 - x + 20 = 0$ *или* $x^2 + x - 20 = 0$

$D = -79 < 0$ $D = 81 > 0$

корней нет $\underline{x = -5, x = 4}$

$x^4 = (x - 20)^2$

$x^4 - (x - 20)^2 = 0$

$(x^2 - x + 20)(x^2 + x - 20) = 0$

$x^2 + x - 20 = 0$

$\underline{x = -5, x = 4}$

[1] Знаки вопроса в этом случае означают молчание.

203. Ученик у доски решает уравнения: $\frac{3x^2+17x+84}{x^2-x}=2$ и $\frac{2x^2+7x-4}{x^2-16}=1$.

$$\frac{3x^2+17x+84}{x^2-x}=2$$
$$3x^2+17x+84=2(x^2-x)$$
$$3x^2+17x+84-2x^2+2x=0$$
$$x^2+19x+84=0$$
$$x=-7,\ x=-12$$

$$\frac{2x^2+7x-4}{x^2-16}=1$$
$$2x^2+7x-4=x^2-16$$
$$x^2+7x+12=0$$
$$x=-3,\ x=-4$$

Учитель ставит оценку «4» и обосновывает её: «Первое уравнение решено верно, а второе – с ошибкой». Прав ли учитель?

а) Прав, действительно, первое уравнение решено верно, а второе – с ошибкой.

б) Прав в оценке, но не прав, позволяя ошибке остаться на доске без исправления.

в) Прав в обосновании (первое уравнение решено верно, а второе – с ошибкой), но не прав в оценке: ученик заслуживает только тройки.

г) Не прав: это не контрольная работа, а ответ у доски, поэтому ошибке на доске не место, ведь она оказалась в тетрадях (и умах) большинства учащихся класса.

д) Не прав: приведённые решения – прекрасная возможность выяснить, почему один и тот же способ в одном случае не привёл, а в другом – привел к ошибке.

е) Не прав: учитель сам допустил множество методических ошибок.

204. Система задач к уроку закрепления материала по теме «Решение иррациональных уравнений» представлена 8 иррациональными уравнениями с общим требованием «решить уравнение», 8 иррациональными уравнениями с общим требованием «найдите корни уравнения», 6 иррациональными уравнениями с общим требованием «докажите, что уравнение не имеет корней». Учитель включает ещё одно уравнение: $\sqrt{2x-1}(12x^2-13x+3)=0.$ Выберите наиболее подходящие требования:

а) Верно ли, что уравнение имеет три действительных корня?

б) Верно ли, что уравнения $\sqrt{2x+1}(12x^2-13x+3)=0$ и $\sqrt{2x-1}(12x^2-13x+3)=0$ имеют одинаковое количество корней?

в) Докажите, что уравнение не имеет корней.

г) Найдите корни уравнения.

д) Решите уравнение.

е) Сколько действительный корней имеет уравнение?

205. Подведите итоги самостоятельной работы учащихся по решению системы $\begin{cases}(x-6)(y-5)=0\\ \dfrac{y-2}{x+y-8}=3\end{cases}$. В комментарии опишите ошибки и недочёты.

а)

$$\begin{cases}(x-6)(y-5)=0\\ \dfrac{y-2}{x+y-8}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6,\ y=5\\ \dfrac{5-2}{6+5-8}=3\ (ложн.)\end{cases}$$

Решений нет.

б)

$$\begin{cases}(x-6)(y-5)=0\\ \dfrac{y-2}{x+y-8}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=6\\ y=5\end{array}\right.\\ \dfrac{y-2}{x+y-8}=3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=6\\ \dfrac{y-2}{x+y-8}=3\end{cases}\\ \begin{cases}y=5\\ \dfrac{y-2}{x+y-8}=3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=6\\ \dfrac{y-2}{y-2}=3(ложн)\end{cases}\\ \begin{cases}y=5\\ \dfrac{3}{x-3}=3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\ x=4\end{cases}$$

в)

$$\begin{cases}(x-6)(y-5)=0\\ \dfrac{y-2}{x+y-8}=3\end{cases}.$$

$(x-6)(y-5)=0$

$x=6\quad или\quad y=5$

1) $\underline{x=6}$

$\dfrac{y-2}{6+y-8}=3,\quad \dfrac{y-2}{y-2}=3,$

$y-2=3(y-2)$

$y-2=3y-6$

$2y=4$

$\underline{y=2}$

2) $\underline{y=5}$

$\dfrac{5-2}{x+5-8}=3,\quad \dfrac{3}{x-3}=3,$

$3=3(x-3)$

$3=3x-9$

$3x=12$

$\underline{x=4}$

Ответ. *(6, 2), (4, 5)*

г)

$$\begin{cases}(x-6)(y-5)=0\\ \dfrac{y-2}{x+y-8}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-6)(y-5)=0\\ \dfrac{y-2}{x+y-8}-3=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-6)(y-5)=0\\ \dfrac{y-2-3(x+y-8)}{x+y-8}=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-6)(y-5)=0\\ \dfrac{-3x-2y+22}{x+y-8}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6,\ y=5\\ -3x-2y+22=0\\ x+y-8\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=6,\ -3x-2y+22=0\\ y=5,\ -3x-2y+22=0\\ x+y-8\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=6,\ -18-2y+22=0\\ y=5,\ -3x-10+22=0\\ x+y-8\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6,\ y=2\\ y=5,\ x=4\\ x+y-8\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=6,\ y=2,\ 6+2-8=0(ист.)\\ x=4,\ y=5,\ 4+5-8=0(ложн.)\end{cases}$$

Ответ. *(4, 5)*

Отметки:

а)	б)	в)	г)

Комментарий к решению.

а) ____

____

б) ____

____

в) ____

____

г) ____

____

206. Цель урока изучения нового материала по теме «Неравенство второй степени с одной переменной» (9 класс): ввести понятие неравенства второй степени с одной переменной, дать определение; познакомить с алгоритмом решения неравенств на основе свойств квадратичной функции; сформировать умение решать неравенства данного вида. Учитель организует актуализацию знаний в форме беседы. Оптимальна ли предлагаемая система вопросов для реализации цели урока?

(1) Что называется квадратным трёхчленом?

(2) Что надо сделать, чтобы найти корни квадратного трёхчлена?

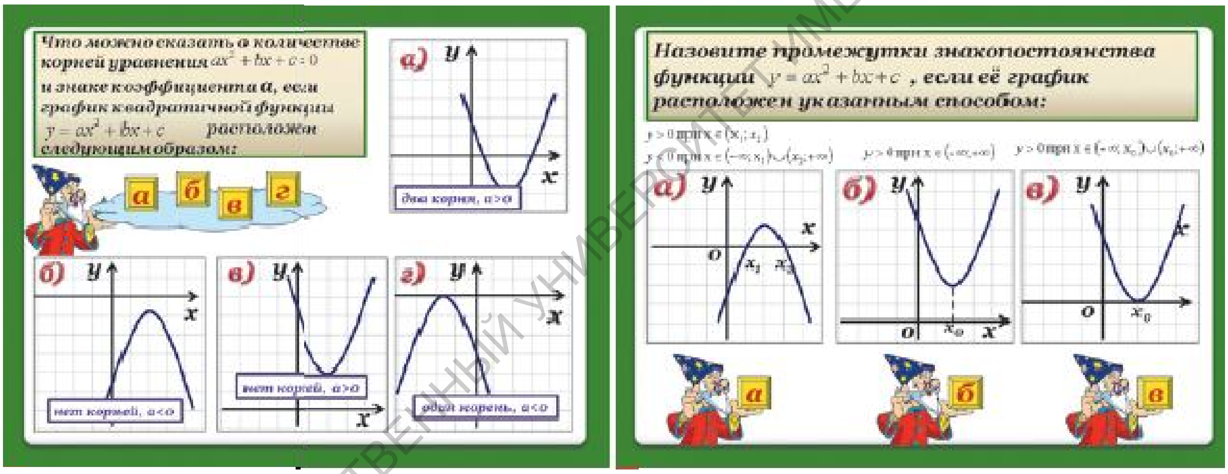
(3) Как называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$?

(4) Что является графиком квадратичной функции?

(5) От чего зависит направление ветвей параболы?

(6) Что можно сказать о количестве корней уравнения и знаке коэффициента a, если график квадратичной функции расположен следующим образом (см. ниже соответствующий рисунок)?

(7) Назовите промежутки знакопостоянства функции, если её график расположен указанным способом.



а) Вопросов достаточно (позволяют опросить минимум 11 человек), и они позволяют рассмотреть все аспекты новой темы (ввести понятие неравенства второй степени с одной переменной, дать определение; познакомить с алгоритмом решения неравенств на основе свойств квадратичной функции; сформировать умение решать неравенства данного вида).

б) Вопросов достаточно, но в (6) и (7) рассмотрены не все случаи расположения параболы в координатной плоскости.

в) Вопросы разрознены, учащимся не ясны связи между новым понятием и имеющимися знаниями, поскольку учителем не сформулирована проблемная задача и не создана проблемная ситуация. Поэтому число вопросов (их может быть и больше) существенной роли не играет, т.к. они позволяют только вспомнить ряд теоретических положений алгебры, но не позволяют наметить пути использования для получения новых знаний.

г) Если в итоге всё сводится к знакомству «с алгоритмом решения неравенств на основе свойств квадратичной функции», то вопросы 1, 2 и 6 – излишни, не обязательны. Их желательно заменить вопросом о нахождении вершины параболы: её расположение в системе координат существенно (позволяет избегать в 4 случаях из 6 вычисления дискриминанта).

д) Первая задача «ввести понятие неравенства второй степени с одной переменной, дать определение» не требует вообще никакой актуализации знаний, поскольку определение неравенства указанного вида является номинальным (как и все основные определения в курсе алгебры 9 класса). Вторая методическая задача – «познакомить с алгоритмом решения неравенств на основе свойств квадратичной функции». Однако знакомство начинается с предъявления алгоритма, что тоже не требует актуализации. Значит, центральной следует считать задачу формирования умения «решать неравенства данного вида», которая требует актуализации знаний, но для того, чтобы её организовать нужно предложить ученикам «неравенства данного вида», чего сделано не было. Предлагаемая система вопросов не оптимальна.

е) Промежутки знакопостоянства не требуют построения графика функции, а только анализа формулы её задающей (метод интервалов), поэтому из системы вопросов не совсем ясно, о каком методе (алгоритме) идёт речь (графическом, функциональном, методе интервалов или аналитическом). Определить оптимальность системы вопросов беседы на этапе актуализации знаний не представляется возможным.

207. Оцените решение неравенства: $x^2+(x^2-5)(x^2-4)\le 4$.

Решение.

$$x^2+(x^2-5)(x^2-4)\le 4 \iff (x^2-4)+(x^2-5)(x^2-4)\le 0 \iff (x^2-4)^2\le 0 \iff$$
$$x^2-4=0 \iff x^2=4 \iff x=\pm 2$$

а) Решение рационально, логично; оценка «5».
б) Решение рационально, но переходы не всегда обоснованы; оценка «4».
в) Решение не рационально, но логика решения не нарушена; оценка «4».
г) Решение не рационально, переходы не всегда обоснованы; оценка «3».
д) Решение не верно; оценка «2».

208. Решите неравенство $x^2+(x^2-5)(x^2-4)>4$.

209. Учитель просит учеников указать номера тех неравенств, которые не имеют отрицательных решений: (1) $(x+2)^2(7x^{18}-9x^5-5)\ge 0;$ (2) $2x^2-7x+6<0;$ (3) $2+7x^8-18x^{17}<0;$ (4) $x^2-56789x-98765\le 0;$ (5) $x^2-7777x+77777<0.$ Какие ответы учеников учитель должен оценить как безупречные?

а) Неравенство (1) имеет отрицательное решение (-2), т.к. при подстановки (-2) в неравенство оно обращается в верное утверждение.

б) Неравенство (2) не имеет отрицательных решений, т.к. при подстановки в неравенство любого отрицательного числа оно обращается в ложное утверждение.

в) Неравенство (2) не имеет отрицательных решений, т.к. при подстановки в неравенство любого отрицательного числа второй член квадратного трёхчлена становится положительным и в сумме с другими положительными членами даёт положительное число (большее нуля).

г) Решением неравенство (2) является интервал $(1,5;\ 2)$, не содержащий отрицательных чисел.

д) Неравенство (3) не имеет отрицательных решений, т.к. при подстановки в неравенство любого отрицательного числа слагаемое $(-18x^{17})$ становится положительным и в сумме с другими положительными слагаемыми даёт положительное число.

е) Предположим, что $x<0,$ тогда $x^{17}<0;\ -18x^{17}>0\ (*)$

$$x^8>0;\ \ 7x^8>0;\ 2+7x^8>0\ (**)$$

Сложим эти неравенства с * и получим $2+7x^8-18x^{17}>0,$ что противоречит условию $2+7x^8-18x^{17}<0.$ Следовательно предположение неверно, и неравенство (3) не имеет отрицательных решений.

ж) Так как абсцисса вершины параболы $y=x^2-56789x-98765$ положительна, а $y(0)=-98765$, т.е. отрицательна, и ветви параболы направлены вверх, то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках с отрицательной и положительной абсциссами, а значит неравенство (4) имеет отрицательные решения.

з) Уравнение $x^2-56789x-98765=0$ имеет два корня – $x_{1,2}=\dfrac{56789\mp\sqrt{56789^2+4\cdot 98765}}{2}$, один x_1 отрицательный, а другой x_2 – положительный, а значит неравенство (4) принимает решение на интервале $(x_1;\ x_2)$ и имеет отрицательные решения.

и) Неравенство (4) имеет отрицательные решения, например, $x=-1$.

к) Уравнение $x^2-7777x+77777=0$ имеет два положительных корня – $x_{1,2}=\dfrac{7777\mp\sqrt{7777^2-4\cdot 77777}}{2}$, а значит неравенство (5) принимает решение на интервале $(x_1;\ x_2)$ и не имеет отрицательных решений.

210. На вопрос: «Какие у вас идеи по методу решения неравенства $\frac{59}{\sqrt{4x^2+7}} > \frac{47}{\sqrt{5x^2+9}}$?» – учитель получил следующие ответы:

а) 59 = 47 + 12, представим левую часть неравенства суммой двух дробей и проанализируем результат.

б) Запишем дроби в виде арифметических квадратных корней и сравним подкоренные выражения.

в) Знаменатели, а значит и дроби положительны, сравним из как сравнивали бы положительные рациональные числа (чем больше числитель и меньше знаменатель, тем дробь больше).

г) Используем свойство пропорции.

д) Найдём ОДЗ.

е) Приведём дроби к общему знаменателю.

ж) Перенесём дробь из правой части в левую.

Выберите наиболее перспективные идеи.

211. На вопрос: «Для каких значений неизвестной выполняется неравенство $\frac{59}{\sqrt{4x^2+7}} > \frac{47}{\sqrt{5x^2+9}}$?» – учитель получил следующие ответы:

а) Неравенство не имеет решений.

б) Неравенство справедливо при всех $x \neq 0$.

в) Неравенство справедливо при любом действительном x.

г) Неравенство справедливо только при $x = 0$.

Укажите верные ответы учеников.

212. Перечислите типичные ошибки, которые допускают учащиеся при решении неравенства $x^2 + \sqrt{x^2 - 81} \le 81 + \sqrt{x^2 - 81}$.

а) Замена $y = \sqrt{x^2 - 81}$ и $y^2 + 81 = x^2$.

б) Переход к неравенству $x^2 \le 81$ без учёта ОДЗ.

в) Сужение ОДЗ до множества $x^2 > 81$.

г) Неравносильный переход от равносильной данному неравенству системы $\begin{cases} x^2 \le 81 \\ x^2 \ge 81 \end{cases}$ к системе $\begin{cases} x \le 9 \\ x \ge 9 \end{cases}$.

213. Решите неравенство $x^2 + \sqrt{x^2 - 81} \le 81 + \sqrt{x^2 - 81}$.

214. Подведите итоги самостоятельной работы учащихся по решению неравенства $(x-3)^2<\sqrt{5}(x-3)$. В комментарии опишите ошибки и недочёты.

а) $(x-3)^2<\sqrt{5}(x-3)$

Замена $y=x-3;$

$y^2<\sqrt{5}y \Leftrightarrow y^2-\sqrt{5}y<0 \Leftrightarrow y\left(y-\sqrt{5}\right)<0$

$0<y<\sqrt{5}$

$0<x-3<\sqrt{5}$

Ответ. $3<x<\sqrt{5}+3$

б) $(x-3)^2<\sqrt{5}(x-3)$

$x^2-6x+9<\sqrt{5}x-3\sqrt{5}$

$x^2-\left(6+\sqrt{5}\right)x+\left(9+3\sqrt{5}\right)<0$

$D=\left(6+\sqrt{5}\right)^2-4\left(9+3\sqrt{5}\right)=$

$=36+12\sqrt{5}+5-36-12\sqrt{5}=5$

$x_1=\dfrac{6+\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2}=3$

$x_2=\dfrac{6+\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2}=3+\sqrt{5}$

в) $(x-3)^2<\sqrt{5}(x-3)$

$(x-3)^2-\sqrt{5}(x-3)<0$

$(x-3)\left(x-3-\sqrt{5}\right)<0$

$(x-3)\left(x-\left(3+\sqrt{5}\right)\right)<0$

$\begin{cases} x-3<0 \\ x-\left(3+\sqrt{5}\right)>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-3>0 \\ x-\left(3+\sqrt{5}\right)<0 \end{cases}$

$\begin{cases} x<3 \\ x>3+\sqrt{5} \end{cases}$ или $\begin{cases} x>3 \\ x<3+\sqrt{5} \end{cases}$

Первая система не имеет решений

Ответ. $x\in\left(3;3+\sqrt{5}\right)$

г) $(x-3)^2<\sqrt{5}(x-3)$

$x-3<\sqrt{5}$

$\underline{\underline{x<\sqrt{5}+3}}$

д) $(x-3)^2<\sqrt{5}(x-3)$

Если $x-3>0$, *то* $x-3<\sqrt{5}$.

$\underline{3<x<\sqrt{5}+3}$

Если $x-3<0$, *то* $x-3>\sqrt{5}$.

Решений нет.

Ответ. $x\in\left(3;3+\sqrt{5}\right)$

Отметки:

а)	б)	в)	г)	д)

Комментарий к решению.

а) ____

____

____

____

б) ____

____

____

____

в) ____

____

____

____

г) ____

____

____

____

215. В систему задач на закрепление метода интервалов (9 класс) учитель включил систему неравенств $\begin{cases} x^2+(x^2-5)(x^2-4)\le 4 \\ x^{27}+2x^{26}+7x+13\le 0 \end{cases}$. Насколько это оправдано?

а) Это задание повышенной сложности, поэтому её можно рекомендовать успешным в освоении математики учащимся для самостоятельного решения на любом уроке по теме «Решение систем неравенств с одной переменной» (8 класс) и на любом уроке алгебры в 9 классе.

б) Это олимпиадная задача, поэтому её лучше отнести к уроку повторения и обобщения материала.

в) Это типовая для курса алгебры задача, в которой решается одно из неравенств системы, а затем полученное решение подставляется во второе неравенство, полученные результаты анализируются, и на основе этого определяется решение системы. Решение таких задач обязательно при закреплении материала темы.

г) Это учебная развивающая задача, в которой решается одно из неравенств системы, а затем полученное решение подставляется во второе неравенство, полученные результаты анализируются, и на основе этого определяется решение системы. Коллективное решение такой задачи желательно при закреплении материала темы.

д) Эту задачу нельзя включать в систему задач на закрепление метода интервалов (9 класс), поскольку к этой теме она имеет опосредованное отношение.

216. Какая идея решения системы неравенств: $\begin{cases} x^2+(x^2-5)(x^2-4)\le 4 \\ x^{27}+2x^{26}+7x+13\le 0 \end{cases}$; – будет наиболее эффективной?

а) Решить второе неравенство; выяснить, является ли решение второго неравенства решением первого; сделать вывод о решении системы.

б) Решить первое неравенство; выяснить, является ли решение первого неравенства решением второго; сделать вывод о решении системы.

в) Решить первое неравенство; оценить принадлежность решения второго неравенства некоторому числовому множеству, с учётом этого определить решение системы неравенств.

г) Решить первое неравенство; решить второе неравенство; найти пересечение решений первого и второго неравенств и, таким образом, сделать вывод о решении системы.

217. В ходе изучения способов решения показательных уравнений учитель предложил ученикам задание: выяснить способ решения каждого конкретного уравнения. Для этого он предоставил 15 уравнений:

$$\frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^{x} \qquad \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{x},$$

$$3 \cdot 4^{x} + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} \qquad 2^{x+1} + 2^{x-1} + 2 = 28$$

$$25^{x} - 6 \cdot 5^{x} + 5 = 0 \qquad 125^{x} + 20^{x} = 2^{3x+1}$$

$$2 \cdot 81^{x+1} - 36^{x+1} - 3 \cdot 16^{x+1} = 0 \qquad 5^{2x-4} = 49^{2-x}$$

$$3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2x+12} = 0 \qquad \frac{5^{x+1} + 3^{x}}{3^{x} - 5^{x}} = 1$$

$$\frac{1}{3^{x}+5} = \frac{1}{3^{x+1}-1} \qquad 6^{x} - 8 \cdot 3^{x} - 9 \cdot 2^{x} + 72 = 0$$

$$\left(x^2 + x - 57\right)^{3x^2+3} = \left(x^2 + x - 57\right)^{10x} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot 0{,}125 = \sqrt{2} \cdot 0{,}0625^{x}$$

$$\sqrt{x} \cdot \left(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}\right) = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18$$

и перечень способов их решения:
– переход к одному основанию,
– переход к одному показателю,
– вынесение общего множителя,
– переход к квадратному (кубическому) введением новой переменной,
– разложение на множители,
– рассматривать как однородные относительно показательной функции,
– рассматривать как дробно-рациональные относительно показательной функции,
– рассматривать как показательно-степенные,

Какую форму представления задания учителю следует выбрать?

а) задание с открытой формой записи ответа (Уравнение $5^{2x-4} = 49^{2-x}$ целесообразно решать способом ___________________________),

б) индивидуальное учебное исследование,

в) на установление соответствия,

г) самостоятельная работа с дополнительным условием к результату: попробуйте решить уравнение каждым из указанных способов, результаты обобщите,

д) с выбором варианта ответа,

е) учебное исследование организованное в парах,

ж) фронтальный опрос.

218. Какая идея решения задачи: «Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{12-7x} = 36$» – будет наиболее эффективной?

а) В левой части использовать свойства степени и привести уравнение к виду $a^x = b$

б) Представить обе части в виде степеней с одинаковым основанием, а затем перейти к рассмотрению показателей.

в) Решить уравнение графически.

г) Уравнение – показательное, значит его решение сводится к равносильному логарифмическому.

219. В.Н. Рыжик предлагает проверять понимание определения с помощью таких вопросов:

1) Каков характер определения: описательное или конструктивное?

2) Что определяется: объект или свойство?

3) Для описательных определений: из какого множества выбирается определяемый объект?

4) Можешь ли ты сказать определение своими словами?

Примените эту схему к определению тригонометрического уравнения.

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

220. Перечислите типичные ошибки, которые допускают учащиеся при решении уравнения $2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin 2x=0$.

а) Путаница в формулах приведения (либо в названии функции, либо в знаке).

б) При возведении в квадрат остаётся знак минус (опускаются скобки при выполнении 1 шага – применение формулы приведения).

в) Применение формулы синуса двойного угла.

г) Выбор «безошибочного» метода решения алгебраического уравнения относительно функции $\sin x$.

д) Решение простейших тригонометрических уравнений.

е) Незнание (путаница) табличных значений тригонометрических функций.

221. Выявите логику решения уравнения $cos2x + sin^2 x = 0,25$ на промежутке $\left[3\pi; \frac{9\pi}{4}\right]$.

а) определение ОДЗ,

б) применение основного тригонометрического тождества,

в) применение формулы косинуса двойного угла,

г) решение неполного квадратного уравнения $f^2(x)=a$ относительно тригонометрической функции,

д) решение простейших тригонометрических уравнений,

е) запись решения уравнения в общем виде,

ж) построение тригонометрической окружности,

з) отбор корней из указанного промежутка,

и) проверка решения (подстановка найденных корней в исходное уравнение).

222. Оцените по традиционной 5-балльной шкале результаты решения тригонометрического уравнения; укажите ошибки:

Ученик	Решение	Оценка
А	$2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin 2x=0$ $2\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x\cdot\cos x = 0 \quad \vert : 2\cos^2 x \neq 0$ $\sqrt{3}tg^2 x - tg\, x = 0 \quad \vert : tg\, x \neq 0$ $\sqrt{3}tg\, x - 1 = 0; \quad tg\, x = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad x = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n, n \in Z$ Ответ. $x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$	
Б	$2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin 2x=0$ $2\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x\cdot\cos x = 0 \quad \vert : 2\cos^2 x \neq 0$ $\sqrt{3}tg^2 x - tg\, x = 0 \quad \vert\ замена \quad tg\, x = y$ $\sqrt{3}y^2 - y = 0; \quad y\left(\sqrt{3}y - 1\right) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} tg\, x = 0 \\ tg\, x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in Z \\ x = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi m, m \in Z \end{array}\right.$ Ответ. $x_1 = \pi n, n \in Z, x_2 = \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z.$	

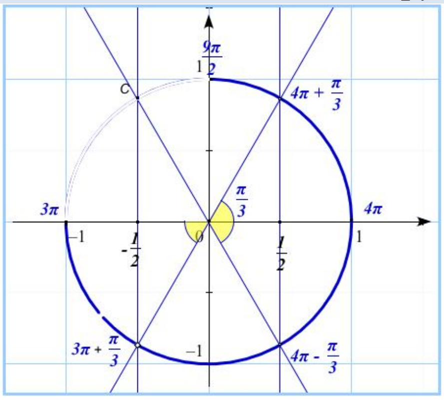
223. Оцените по традиционной 5-балльной шкале результаты решения тригонометрического уравнения; укажите ошибки:

Ученик	Решение	Оценка
В	$2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin 2x=0$ $2\sqrt{3}\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x=0$ $\sin x\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)=0;\quad \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=0\end{array}\right.;$ $\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in Z\\ \cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x=0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in Z\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0\end{array}\right.;$ $\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in Z\\ x-\frac{\pi}{6}=\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in Z\\ x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$ Ответ. $x_1=\pi n,\ n\in Z,\ x_2=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$	
Г	$2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin 2x=0$ $2\sqrt{3}\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x=0\quad \vert : 2\sin^2 x\neq 0$ $\sqrt{3}-ctg\,x=0;\quad \sqrt{3}=ctg\,x;\quad x=arcctg\sqrt{3}+\pi n,\ n\in Z$ Ответ. $x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$	
Д	$2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin 2x=0$ $2\sqrt{3}\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x=0$ $\sin x\cdot\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)=0;$ $\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sqrt{3}\sin x-\cos x=0\ \vert : \cos x\neq 0,\end{array}\right.;$ *если бы* $\cos x=0$ *то и* $\sin x=0,$ *чего не может быть* $\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in Z\\ \sqrt{3}tg\,x-1=0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in Z\\ tg\,x=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in Z\\ x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$ Ответ. $x_1=\pi n,\ x_2=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ n\in Z,\ k\in Z.$	

224. Оцените по 5-балльной шкале результаты выполнения задания: «Решите уравнение $cos2x + sin^2 x = 0,25$ на промежутке $\left[3\pi; \frac{9\pi}{4}\right]$».

$cos2x + sin^2 x = 0,25 \Leftrightarrow cos^2 x - sin^2 x + sin^2 x = 0,25 \Leftrightarrow cos^2 x = 0,25 \Leftrightarrow$
$|cos x| = 0,5 \Leftrightarrow \cos x = \pm 0,5$

Отметим на числовой окружности значения, соответствующие $\cos x = \pm 0,5$.



Это углы (числа) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

На $\left[3\pi; \frac{9\pi}{4}\right]$ *уравнение имеет три корня:* $3\pi + \frac{\pi}{3}$, $4\pi - \frac{\pi}{3}$, $4\pi + \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}$.

а) Всё верно, оценка «5».

б) Уравнение не решено в общем виде, оценка «4».

в) Уравнение не решено в общем виде, поиск корней осуществлялся перебором, оценка «3».

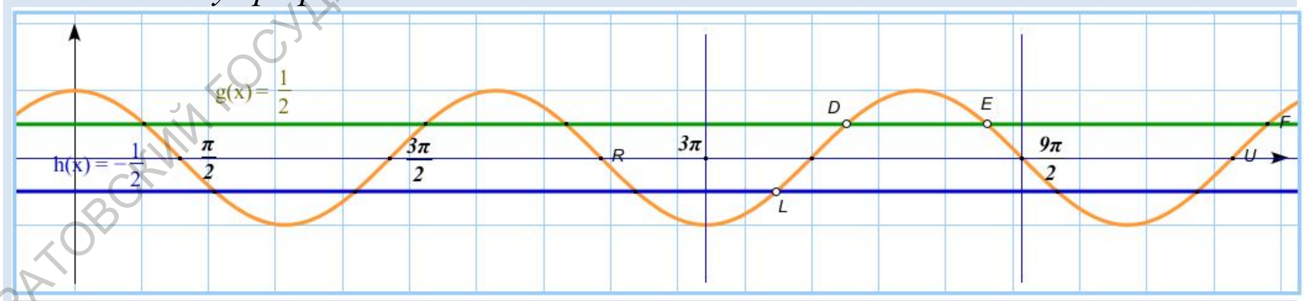
г) Решение неверно, оценка «2».

225. Оцените по 5-балльной шкале результаты выполнения задания: «Решите уравнение $cos2x + sin^2 x = 0,25$ на промежутке $\left[3\pi; \frac{9\pi}{4}\right]$»:

$cos2x + sin^2 x = 0,25 \Leftrightarrow cos^2 x - sin^2 x + sin^2 x = 0,25 \Leftrightarrow cos^2 x = 0,25 \Leftrightarrow$
$|cos x| = 0,5 \Leftrightarrow \cos x = \pm 0,5.$

$\cos\frac{\pi}{3} = 0,5; \quad \cos\frac{2\pi}{3} = -0,5; \quad \cos\frac{4\pi}{3} = -0,5; \quad \cos\frac{5\pi}{3} = 0,5.$

Решим задачу графически



Ответ: $\frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}$.

а) Всё верно, оценка «5».

б) Уравнение не решено в общем виде, оценка «4».

в) Из решения не ясно, как найдены значения корней, оценка «3».

г) Решение неверно, оценка «2».

226. По теме «Решение тригонометрических уравнений» учитель решил провести 15-минутную дифференцированную самостоятельную работу контролирующего характера,

Карточка № 1 (3 балла). Задания, проверяющие (а) знание формул корней простейших тригонометрических уравнений и умения: (б) умение проводить тождественные преобразования алгебраических выражений относительно тригонометрических функций, (в) решать простейшие тригонометрические уравнения и записывать ответ в общем виде:

а) $3\sin 5x-2=0$; б) $2\cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$.

Карточка № 2 (5 баллов). Задания, проверяющие: знание (а) знание формул корней простейших тригонометрических уравнений, (б) методов/способов решения тригонометрических уравнений, (в) умение выполнять тригонометрические преобразования, г) умение выполнять алгебраические преобразования тригонометрических выражение, (д) умение решать простейшие тригонометрические уравнения и записывать ответ в общем виде:

а) $\sin 2x-\sin x=0$; б) $\cos^2 x=\cos x+2$.

Как ему лучше организовать работу?

а) Весь класс следует разделить на две группы в зависимости от уровня развития математических способностей. Слабые учащиеся решают задания из карточки № 1, сильные – из карточки № 2. В случае затруднений ученики должны отвести кружком те элементы знаний/умений, которые вызвали затруднения.

б) Работу нужно предварить активизирующим функцию самоконтроля вводным заданием: вам предстоит выбрать контрольную карточку, по которой вы можете проверить знания и умения, комплексное применение которых вызывает трудности. Учащийся может выбрать одну или две карточки, проконтролировав и математические знания и умения, и своё собственное представление об их качестве.

в) Сначала все учащиеся пробуют решать задания карточки № 2, если кто-то испытывает затруднения, то обращается к карточке № 1, а затем вновь – к заданиям карточки № 2. Самостоятельная работа заканчивается самооценкой работы с указанием тех элементов знания/умений, которые не сформированы должным образом.

г) Сначала все учащиеся решают задания карточки № 1 (при успешном выполнении – оценка «3»), а затем, те кто успеет, одно (на выбор) из карточки № 2 (на оценку «4» или «5»). Самостоятельная работа заканчивается самооценкой (или взаимооценкой) работы с указанием тех элементов знания/умений, которые сформированы (или не сформированы).

227. Оцените решение задачи: «Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{12-7x}=36$».

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{12-7x}=36; \quad \frac{1}{6^{12-7x}}=36; \quad 6^{12-7x}\cdot 36=1; \quad 6^{12-7x}\cdot 6^2=1;$$
$$6^{12-7x+2}=1; \quad 6^{14-7x}=1; \quad 14-7x=0; \quad x=2$$

а) Всё правильно; оценка – «5».

б) Всё правильно, но очень долго; оценка – «4».

в) Всё правильно, но решение нерационально; оценка – «4».

г) Решение нерационально; оценка – «3».

д) Использован не тот алгоритм, который изучался на уроках, алгоритм не освоен; оценка – «2».

228. Учитель начинает работу в классе по выполнению задания: «Решите систему неравенств $\begin{cases} 36^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^{x-1}+1\geq 0 \\ x\cdot \log_4\left(5-3x-x^2\right)\geq 0 \end{cases}$» – с составления плана решения. Какой план наиболее перспективен?

а) Используя череду равносильных преобразований, найти решение системы.

б) Решить более простое (логарифмическое) неравенство. Решить первое неравенство на числовом промежутке – решении второго неравенства.

в) Решить более простое (показательное) неравенство. Решить второе неравенство на числовом промежутке – решении первого неравенства.

г) Решить первое неравенство. Решить второе неравенство. Найти общий числовой промежуток – пересечение решений первого и второго неравенств.

д) Решить сначала системы соответствующих уравнений (чтобы избежать потери корней в случае равенства), а затем систему строгих неравенств.

229. Решая неравенство $x\cdot \log_4\left(5-3x-x^2\right)\geq 0$ ученики допускают следующие типичные ошибки:

а) Не определяют или не учитывают ОДЗ.

б) В качестве следствия рассматривают одну систему, как правило, при условии $x\geq 0$.

в) В ходе решения теряют случай равенства (т.е. на каком-то этапе переходят к строгим неравенствам).

г) Неверно решают неравенства $5-3x-x^2\geq 0$, $5-3x-x^2\leq 0$ (путаница со знаками или расположением ветвей параболы).

д) Неверное определение взаимного расположения корней на числовой прямой и, как следствие, потеря /приобретение корней при пересечении/объединении множеств решений.

230. Оцените, по 5-балльной шкале, деятельность учеников по решению неравенства $36^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0.$

а) Оценка – «___»

$36^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0$

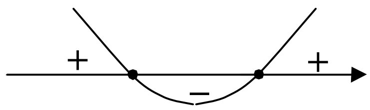
$6^{2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0$

$6^{2x-1}-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0$

$\left(6^{x-1}\right)^2-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0$

$y=6^{x-1},\quad y^2-7y+1\ge 0,\quad D=45$

$x=\dfrac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}$



Ответ.

$x\in\left(-\infty;\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$

б) Оценка – «___»

$36^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0$

$\dfrac{36^x}{6}-7\cdot\dfrac{6^x}{6}+1\ge 0$

$y=6^x,\quad \dfrac{y^2}{6}-\dfrac{7}{6}\cdot y+1\ge 0$

$y^2-7y+6\ge 0,\quad D=25,$

$6^x=y=\dfrac{7\pm 5}{2};$

$y\le 1$ или $y\ge 6;$

$6^x\le 1$ или $6^x\ge 6;$

$6^x\le 6^0$ или $6^x\ge 6^1;$

$x\le 0$ или $x\ge 1$

Ответ. $x\le 0$ или $x\ge 1$

в) Оценка – «___»

$36^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0$

$6^{2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0$

$\left(6^{x-\frac{1}{2}}\right)^2-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0$

$\left(6^{x-1+\frac{1}{2}}\right)^2-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0$

$\left(6^{x-1}\cdot 6^{\frac{1}{2}}\right)^2-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0$

$6\cdot\left(6^{x-1}\right)^2-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0,\quad D=25,$

$6^{x-1}=\dfrac{7\pm 5}{2}$

$\left[\begin{array}{l}6^{x-1}\le 1,\\ 6^{x-1}\ge 6\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x-1\le 0,\\ x-1\ge 1\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x\ge 0\end{array}\right.$

Ответ. $x\in[0;1]$

г) Оценка – «___»

$36^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0$

$6^{2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0$

$\left(6^{x-\frac{1}{2}}\right)^2-7\cdot 6^{x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}+1\ge 0$

$\left(6^{x-\frac{1}{2}}\right)^2-\dfrac{7}{\sqrt{6}}\cdot 6^{x-\frac{1}{2}}+1\ge 0$

$D=\dfrac{49}{6}-4=\dfrac{25}{6},\quad 6^{x-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{7}{\sqrt{6}}\pm\frac{5}{\sqrt{6}}}{2}$

$\left[\begin{array}{l}6^{x-\frac{1}{2}}\le\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ 6^{x-\frac{1}{2}}\ge\dfrac{6}{\sqrt{6}}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}6^{x-\frac{1}{2}}\le 6^{-\frac{1}{2}}\\ 6^{x-\frac{1}{2}}\ge 6^{\frac{1}{2}}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x\ge 1\end{array}\right.$

Ответ. $x\in(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$

231. Решая неравенство $36^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^{x-1}+1\geq 0,$ ученики допускают следующие типичные ошибки:

а) Не определяют ОДЗ.

б) При замене переменных неправильно определяют коэффициенты получившегося квадратного неравенства.

в) Заменяют решение квадратного неравенства решением соответствующего квадратного уравнения.

г) Забывают возвращаться к исходной переменной.

д) Решают простейшие показательные неравенства без учёта основания показательной функции.

е) Записывают решение исходного неравенства, путая объединение и пересечение промежутков.

232. Ученики, решив первое неравенство системы $\begin{cases} 36^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^{x-1}+1\geq 0 \\ x\cdot log_4\left(5-3x-x^2\right)\geq 0 \end{cases}$, получили $\left[\begin{array}{l} x\leq 0 \\ x\geq 1 \end{array}\right.$. Какими должны быть их следующие действия?

а) Найти ОДЗ второго (логарифмического) неравенства и пересечь его с числовыми промежутками $\left[\begin{array}{l} x\leq 0 \\ x\geq 1 \end{array}\right.$, используя изображение числовой оси.

б) Перейти к равносильной второму неравенству системе $\begin{cases} x\geq 0 \\ log_4\left(5-3x-x^2\right)\geq 0 \end{cases}$.

в) Перейти к равносильной второму неравенству совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 0 \\ log_4\left(5-3x-x^2\right)\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ log_4\left(5-3x-x^2\right)<0 \end{cases} \end{array}\right.$.

г) Перейти к равносильной совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 1 \\ log_4\left(5-3x-x^2\right)\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 0 \\ log_4\left(5-3x-x^2\right)\leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

д) Перейти к равносильной совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 1 \\ 5-3x-x^2\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 0 \\ 5-3x-x^2\leq 1 \\ 5-3x-x^2>0 \end{cases} \end{array}\right.$.

233. Понимание объекта (понятия) проверяется с помощью вопросов:

1) Какими свойствами обладает этот объект?

2) Какими признаками обладает этот объект?

3) Какие из его свойств являются характерными?

Если свойство является одновременно и признаком, то оно становится характерным свойством объекта и может быть положено в основу его определения.

4) Какие определения можно дать этому объекту?

5) Зачем появилось это понятие?

6) Где оно применяется?

Примените эту схему к понятию логарифмического уравнения.

234. Учитель решил продемонстрировать аналитический (неформальный) метод решения систем неравенств, содержащих различные функции, на примере $\begin{cases} 13^{x-6}+\ln^2(x-7)\geq 13 \\ 7+\sqrt{13-x}\geq 7^{x-12} \end{cases}$. Насколько удачен выбор примера для этой цели?

а) Пример выбран удачно: формальное решение не позволит школьникам получить числовой промежуток удовлетворяющий данной системе неравенств, а демонстрируемый метод даст нужное решение.

б) Пример выбран не совсем удачно: он сложен для восприятия и последующего анализа.

в) Пример выбран неудачно: у учеников не будет никаких идей по поводу его решения, и учитель не сможет использовать проблемный подход к демонстрации метода решения.

235. Учитель решил продемонстрировать аналитический (неформальный) метод решения систем неравенств, содержащих различные функции, на примере $\begin{cases} 13^{x-6} + \ln^2(x-7) \ge 13 \\ 7 + \sqrt{13-x} \ge 7^{x-12} \end{cases}$. Какое объяснение безошибочно и наиболее целесообразно для этого?

а) Поскольку $\ln^2(x-7)$ определён при $x > 7$, а $\sqrt{13-x}$ определён при $x \le 13$, следовательно ОДЗ данной системы неравенств – промежуток (7; 13]. Если $x > 7$, то $13^{x-6} > 13$, а $\ln^2(x-7) \ge 0.$ поэтому $13^{x-6} + \ln^2(x-7) > 13$ и первое неравенство данной системы выполнено при любом $x > 7.$ Если $x \le 13,$ то $\sqrt{13-x} \ge 0,$ $7 + \sqrt{13-x} \ge 7,$ а $7^{x-12} \le 7.$ поэтому второе неравенство данной системы выполнено при любом $x \le 13.$ Таким образом, именно ОДЗ данной системы неравенств является её решением. Ответ: $(7; 13]$.

б) Поскольку данная система неравенств содержит различные функции, то указать точное её решение можно только если оно является ОДЗ или конечным множеством чисел (в противном случае, графическим методом можно приближённо определить решение данной системы).

Найдём ОДЗ; это числовой промежуток $(7; 13]$. Посмотрим, как на этом промежутке ведут себя функции, входящие в неравенства системы.

$$7 < x \le 13$$

-6	-7	-12	$\cdot(-1)$
$1 < x-6 \le 7$	$0 < x-7 \le 6$	$-5 < x-12 \le 1$	$-13 \le -x < -7$
потенцирование, основание больше 1	***логарифмирование, основание больше 1***	***потенцирование, основание больше 1***	$+13$
$13 < 13^{x-6} \le 13^7$	$0 \le \ln(x-7) \le \ln 6$	$7^{-5} < 7^{x-12} \le 7$	$0 \le 13-x < 6$
↓	***возведение в квадрат неотрицательных величин***	↓	***извлечение арифметического корня из неотрицательных величин***
$13 < 13^{x-6} \le 13^7$	$0 \le \ln^2(x-7) \le \ln^2 6$	↓	$0 \le \sqrt{13-x} \le \sqrt{6}$
суммирование		↓	$+7$
$\mathbf{13 \le 13^{x-6} + \ln(x-7)} \le 13^7 + \ln 6$		$7^{-5} < 7^{x-12} \le 7$	$7 \le 7 + \sqrt{13-x} \le 7 + \sqrt{6}$

$$a \le b,\ b \le c \to a \le c$$

$$7^{-5} < 7^{x-12} \le 7 + \sqrt{\mathbf{13-x}} \le 7 + \sqrt{6}$$

На ОДЗ выполняются и первое, и второе неравенства системы, поэтому ОЛЗ данной системы неравенств является её решением. Ответ: $(7; 13]$.

в) Рассмотрим первое неравенство системы: слева – степень 13 в сумме с некоторым неотрицательным числом, справа – 13, значит, чтобы левая часть была больше правой, необходимо, чтобы степень 13 была не менее 1, то есть $x - 6 \ge 1$; другими словами, $x \ge 7.$ С другой стороны логарифм имеет смысл при $x > 7$. Следовательно, первое неравенство выполняется при любом $x > 7$.

Рассмотрим второе неравенство системы: слева – сумма 7 и арифметического корня, справа – степень 7, значит, чтобы левая часть была больше правой, необходимо, чтобы степень 7 была не более 1, то есть $x - 12 \le 1$; другими словами, $x \le 13.$ С другой стороны арифметический корень имеет смысл при $x \le 13.$ Следовательно, второе неравенство выполняется при любом $x \le 13$.

Пересечём решения первого и второго неравенств: $(7; +\infty] \cap (-\infty; 13] = (7; 13]$.

Ответ: $(7; 13]$.

236. В начале урока по закреплению умений решать логарифмические неравенства учитель организует устную работу, а которую включает следующее задание: «Продолжите суждения:

1) Равенство $log_a f(x)+log_a g(x) = log_a (f(x)\cdot g(x))$ выполняется …

2) Левая часть равенства $log_a f(x)+log_a g(x) = log_a (f(x)\cdot g(x))$ определена при …

3) Правая часть равенства $log_a f(x)+log_a g(x) = log_a (f(x)\cdot g(x))$ определена при …

4) ОДЗ правой части равенства $log_a f(x)+log_a g(x) = log_a (f(x)\cdot g(x))$ … ОДЗ его левой части.
шире / у́же

5) ОДЗ левой части равенства $log_a f(x)+log_a g(x) = log_a (f(x)\cdot g(x))$ … ОДЗ его правой части
шире / у́же

6) Переход от суммы логарифмов к логарифму произведения может привести к … решения.
приобретению / потере

7) Переход от логарифма произведения к сумме логарифмов может привести к … решения.
приобретению / потере

8) Для того, чтобы при переходе от суммы логарифмов к логарифму произведения не получить посторонние решения необходимо …

9) Для того, чтобы при переходе от логарифма произведения к сумме логарифмов не потерять решения необходимо …

10) Равенство $log_a f(x) - log_a g(x) = log_a \frac{f(x)}{g(x)}$ выполняется …

11) Левая часть равенства $log_a f(x) - log_a g(x) = log_a \frac{f(x)}{g(x)}$ определена при …

12) Правая часть равенства $log_a f(x) - log_a g(x) = log_a \frac{f(x)}{g(x)}$ определена при …

13) ОДЗ правой части равенства $log_a f(x) - log_a g(x) = log_a \frac{f(x)}{g(x)}$ … ОДЗ его левой части.

шире / у́же

14) ОДЗ левой части равенства $log_a f(x) - log_a g(x) = log_a \frac{f(x)}{g(x)}$ … ОДЗ его правой части

шире / у́же

15) Переход от разности логарифмов к логарифму частного может привести к … решения.
приобретению / потере

16) Переход от логарифма частного к разности логарифмов может привести к … решения.
приобретению / потере

17) Для того, чтобы при переходе от разности логарифмов к логарифму частного не получить посторонние решения необходимо …

18) Для того, чтобы при переходе логарифма частного к разности логарифмов не потерять решения необходимо …»

Достаточно ли этих вопросов для организации базового повторения?

а) более чем достаточно; их число можно сократить вдвое (оставить или 1-9, или 10-18),

б) достаточно,

в) достаточно для того, чтобы вспомнить основные свойства логарифмов, но недостаточно для того, чтобы решать задачи: не вспомнили основные методы решения неравенств, свойства логарифмической функции и др.

г) вопросы формальные, поэтому их недостаточно; необходимо включить конкретные примеры логарифмических уравнений и неравенств, подтверждающих правоту суждений,

237. Помимо традиционных методов решения логарифмических неравенств учитель решил уделить внимание методу знакотождественных множителей, основанному на применении следующих теорем:

1) $pq > 0 \Leftrightarrow (pr)\cdot(qr) > 0$ $(r \neq 0)$.

2) $a > 0,\ b > 1 \Rightarrow (\log_b a)(a - 1) > 0$.

3) $a > 0,\ b > 0,\ c > 1 \Rightarrow (\log_c a - \log_c b)(a - b) > 0$.

4) Утверждения 1-3 применимы к неравенствам, правая часть которых равна нулю, а левая представляет собой произведение или частное нескольких множителей.

Насколько это целесообразно?

а) Знакомство с новым методом позволит ученикам решать новые типы неравенств.

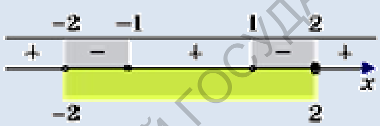
б) Чтобы осваивать что-то новое, нужно хорошо усвоить ранее изученные методы и способы, выяснить их достоинства и недостатки, сферу применимости, а большинство школьников этого сделать не в состоянии. Поэтому новый метод, выходящий за рамки школьной программы, можно рекомендовать только для математических классов и школ.

в) Новый метод требует большой работы, прежде всего доказательства указанных теорем, формирования основных умений и т.п., на одном уроке это сделать не получится, поэтому учитель, конечно может показать на примере, как применяется этот метод, но освоят его (до состояния применения) единицы. Демонстрация метода целесообразна на уроке повторения и обобщения материала.

г) Весь необязательный для изучения материал ученики должны осваивать самостоятельно по программам дополнительного образования или на элективных курсах.

238. Учитель, демонстрируя метод знакотождественных множителей, показывает решение неравенства $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x) \le 0$.

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x) \le 0 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+2)}{\lg(2-x)}\cdot\frac{\lg(3-x)}{\lg(x+3)} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x+1)(2-x)}{(1-x)(x+2)} \le 0\\ -2 < x < 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \le 0\\ -2 < x < 2\end{cases}$$



Ответ. $x \in (-2; -1] \cup (1; 2)$.

Каким образом учителю лучше всего организовать работу по изучению учащимися этого метода?

а) Дать задание: обосновать каждый шаг решения.

б) Предложить из перечня неравенств выбрать те, которые можно решить указанным методом (упражнение на распознавание).

в) Дать для решения не менее трёх аналогичных неравенств.

г) Включить не менее трёх аналогичных неравенств в домашнюю работу.

д) При решении неравенств, где это возможно, предлагать использовать помимо традиционных способов решения метод знакотождественных множителей.

239. Для решения задачи: «Если в каждый пакет положить по 2 кг крупы, то для всей крупы не хватает 10 пакетов, а если положить по 3 кг крупы, то останется 20 свободных пакетов. Сколько крупы и сколько пакетов было?» – учитель предлагает составить её информационную модель. Какая модель оптимальна для того, чтобы наметить план решения?

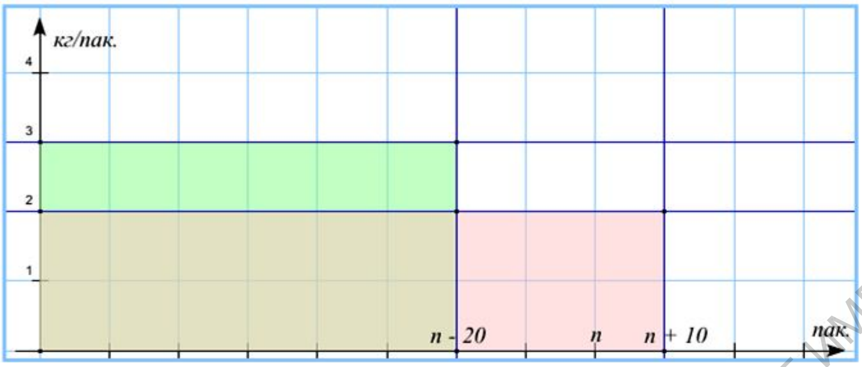
а) Краткая запись

Пакетов – ? шт. – x

Крупы: 2 кг/пак. × □ пак. = 3 кг/пак. × □ пак.

↑нужно ещё 10 пак. ↑ лишних – 20 пак.

б) Геометрическая, основанная на равенстве площадей



в) Табличная-1

Ситуации	В одном пакете	Пакетов	Всего крупы
Было		?	?
1 фасовка	2 кг	? на 10 б.	
2 фасовка	3 кг	? на 20 м.	

г) Табличная-2

В одном пакете	Пакетов	Всего крупы
2 кг	нужно ещё 10	?
3 кг	20 лишних	

240. Для решения задачи: «Расстояние между пристанями А и В равно 48 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним – моторная лодка, которая прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и проплыла ещё треть расстояния от В до А. К этому времени плот прошёл 25 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч»; – учитель предлагает составить её информационную модель.

Какая модель оптимальна для того, чтобы наметить план решения?

а) Краткая запись

б) Схематическая модель – чертёж.

в) Табличная модель.

г) Математическая алгебраическая модель – уравнение.

д) Математическая алгебраическая модель – система уравнений и неравенств (условий) с одной неизвестной.

е) Математическая алгебраическая модель – система уравнений с двумя неизвестными.

241. Анализируя информационную модель задачи: «Расстояние между пристанями А и В равно 48 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним – моторная лодка, которая прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и проплыла ещё треть расстояния от В до А. К этому времени плот прошёл 25 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч»; – ученики составляют её математическую модель:

а) Числовое выражение

б) Математическая алгебраическая модель – уравнение.

в) Математическая алгебраическая модель – система уравнений с двумя неизвестными.

г) Математическая алгебраическая модель – система уравнений неравенств (условий) с одной неизвестной.

д) Математическая алгебраическая модель – система уравнений и неравенств (условий) с двумя неизвестными.

242. В ходе решения (преобразования математической модели) задачи: «Расстояние между пристанями А и В равно 48 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним – моторная лодка, которая прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и проплыла ещё треть расстояния от В до А. К этому времени плот прошёл 25 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч»; – ученики пришли к результату: скорость лодки равна или 1 км/ч или 15 км/ч.

Какой результат им следует интерпретировать как ответ на вопрос задачи? Ответ обоснуйте.

а) 1 км/ч

б) 1 км/ч и 15 км/ч – задача неопределенная

в) 15 км/ч

г) Решения нет – задача неопределенная.

Обоснование ____

____
____
____
____
____
____
____
____

243. Оцените, по 5-балльной шкале, деятельность учеников по решению задачи: «Два велосипедиста одновременно отправляются в 60-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым».

а) Оценка – «___»

Пусть скорость 1-го велосипедиста – x (км/ч), тогда скорость 2-го – $(x\ +10)$(км/ч). Получаем уравнение

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=3$$
$$20x+200-20x=x^2+10x$$
$$x^2+10x-200=0$$
$$x=-20 \quad или \quad x=10$$

Ответ. *10 км/ч.*

б) Оценка – «___»

Пусть скорость 2-го велосипедиста – x (км/ч), тогда скорость 1-го – $(x\ +10)$(км/ч). Получаем уравнение

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=3$$
$$20x+200-20x=x^2+10x$$
$$x^2+10x-200=0$$
$$x=-20 \quad или \quad x=10$$

Ответ. *10 км/ч.*

в) Оценка – «___»

Пусть скорость 1-го велосипедиста – x (км/ч), тогда скорость 2-го – $(x\ -10)$(км/ч). Получаем уравнение

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x-10}=3 \Leftrightarrow \frac{20}{x}-\frac{20}{x-10}=1$$
$$20x-200-20x=x^2-10x$$
$$x^2-10x+200=0$$
$$x=20 \quad или \quad x=-10$$
$$Т.к.\ x>0,\ то\ x=20.$$
$$20-10=10$$

Ответ. *10 км/ч.*

г) Оценка – «___»

Пусть скорость 2-го велосипедиста – x (км/ч), тогда скорость 1-го – $(x\ +10)$(км/ч). Получаем уравнение

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=3, \quad x>0$$
$$20x+200-20x=x^2+10x$$
$$x^2-10x+200=0$$
$$x=20 \quad или \quad x=-10$$
$$20-10=10$$

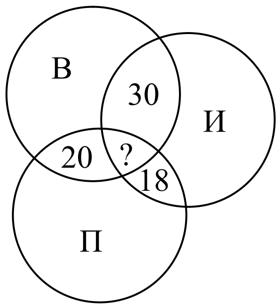
Ответ. *10 км/ч.*

д) Оценка – «___»

	v (км/ч)	t (ч) $_{t>0}$	s (км)
I	$\frac{60}{t}$	t	60
II	$\frac{60}{t}-10$ / $\frac{60}{t+3}$	$t+3$	60

$$\frac{60}{t}-10=\frac{60}{t+3}\overset{t>0}{\Rightarrow} t^2+3t-18=0\overset{t>0}{\Rightarrow} t=3$$
$$60:(3+3)=10$$

Ответ. *10 км/ч.*



244. Для решения задачи: «Игорь и Паша красят забор за 18 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 20 часов, а Володя и Игорь – за 30 часов. За сколько минут мальчики покрасят забор, работая втроём?». – ученик построил следующую информационную модель (см. рисунок). Реакция учителя:

а) Для чего используются диаграммы Эйлера-Венна? Можно ли их использовать для моделирования данной задачи?

б) Можно было бы обойтись и без этого рисунка, а сразу составлять математическую модель задачи.

в) Несколько необычно… Составляй теперь математическую модель.

г) Посмотри внимательно: верно ли ты определил величины? Не следует ли использовать обратные величины?

д) Что значат изображённые круги и их пересечения?

е) Эта модель не позволит верно решить задачу. Стирай с доски! Начинай составлять таблицу «Производительность – время – объём работы».

245. Задачу: «Игорь и Паша красят забор за 18 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 20 часов, а Володя и Игорь – за 30 часов. За сколько минут мальчики покрасят забор, работая втроём?». – вызвались решать у доски сразу два ученика. Результаты их деятельности представлены ниже.

$\begin{cases} t_1+t_2=18, \\ t_2+t_3=20, \\ t_3+t_1=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2=18-t_1, \\ t_3=20-(18-t_1), \\ 2+t_1+t_1=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2=4, \\ t_3=16, \\ t_1=14 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow t_1+t_2+t_3=34.$ —	$\begin{cases} p_1+p_2=\frac{1}{18}, \\ p_2+p_3=\frac{1}{20}, \\ p_3+p_1=\frac{1}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1+p_2=\frac{1}{18}, \\ p_2+p_3=\frac{1}{20}, \\ p_3+p_1=\frac{1}{30}, \\ p_1+p_2+p_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\right)=\frac{25}{360} \end{cases} \Leftrightarrow$ $t_1+t_2+t_3=\frac{360}{25}=\frac{72}{5}=14{,}4$

Каким образом учителю следует организовать дальнейшую работу?

а) Выставить оценки ученикам, решавшим задачу на доске и тем ученикам, кто решил задачу самостоятельно и показал тетрадь с решением до того, как оно появилось на доске.

б) Поскольку из решений не ясно, каким образом была составлена математическая модель, следует обязать учеников описать этап разработки модели (описать неизвестные величины и взаимосвязи между ними: пусть t_1, t_2, t_3 – соответственно…,).

в) Поскольку из решений не ясно, дан ли ответ на вопрос задачи, следует обязать учеников описать этап интерпретации результатов (сформулировать ответ).

г) Реализовать (б) и (в).

д) Обратиться к классу с вопросами: «В каком случае задача решена верно?», «Какие ошибки были допущены?», «Как следует исправить ошибки?».

е) Организовать взаимоконтроль решающих у доски.

ж) Организовать оппонирование

ИЗУЧЕНИЕ ФУНКЦИЙ

246. Изучение содержательно-методической линии «Функции и графики» (далее, функционально-графическая линии – ФГЛ) на уровне основного общего образования согласно ФГОС основного и среднего (полного) общего должно обеспечить:

а) овладение системой функциональных понятий и методов;

б) овладение умением характеризовать поведение функций, использовать полученные знаний для описания и анализа реальных зависимостей;

в) осознание значения функциональных зависимостей и графического представления этих зависимостей в повседневной жизни человека;

г) формирование представлений об исторических фактах становления понятия функции.

247. Предметные результаты изучения функционально-графическая линии на уровне основного общего образования должны отражать:

а) овладение системой функциональных понятий;

б) овладение умением характеризовать поведение функций;

в) овладение умений строить графики функций, заданных аналитически;

г) развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, описания и анализа реальных зависимостей.

248. Предметные результаты изучения функционально-графическая линии на уровне среднего полного образования должны отражать:

а) владение умением характеризовать поведение функций; использовать полученные знаний для описания и анализа реальных зависимостей;

б) овладение системой функциональных понятий;

в) развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, описания и анализа реальных зависимостей;

г) сформированность представлений об основных понятиях (и их свойствах), идеях и методах математического анализа.

249. Генетическая трактовка понятия функции основана на понятиях:

а) декартова система координат на плоскости,

б) множество,

в) отношение,

г) переменная величина,

д) формула (выражающая одну переменную через некоторую комбинацию других переменных),

е) функциональная зависимость переменных величин,

250. Логическая трактовка понятия функции основана на понятиях:

а) декартова система координат на плоскости,

б) множество,

в) отношение,

г) переменная величина,

д) формула (выражающая одну переменную через некоторую комбинацию других переменных),

е) функциональная зависимость переменных величин,

251. Функционально-графическая линия включает следующие модули (согласно Фундаментальному ядру содержания общего образования):

а) Функции и способы её задания. (Функция и способы её задания. Чтение и построение графиков функций. Основные свойства функции: монотонность, промежутки возрастания и убывания, максимумы и минимумы, ограниченность функций, четность и нечетность, периодичность).

б) Элементарные функции: линейная, квадратичная, многочлен, дробно-линейная, степенная, показательная, логарифмическая. Тригонометрические функции, формулы приведения, сложения, двойного угла. Преобразование выражений, содержащих степенную, тригонометрические, логарифмическую и показательную функции (интеграция с линией тождественных преобразований). Решение соответствующих уравнений и неравенств (интеграция с линией уравнений и неравенств).

в) Композиция функций. Обратная функция.

г) Преобразования графиков функций.

д) Предел функции (Понятие о пределе функции в точке. Теоремы о пределах).

е) Непрерывность. Промежутки знакопостоянства непрерывной функции. Метод интервалов.

ж) Элементы дифференциального исчисления (Понятие о производной функции в точке. Физический и геометрический смысл производной. Использование производной при исследовании функций, построении графиков. Использование свойств функций при решении текстовых, физических и геометрических задач. Решение задач на экстремум).

з) Сложная функция и её свойства. Производная сложной функции.

и) Элементы интегрального исчисления Понятие об определенном интеграле как площади криволинейной трапеции. Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница. Приложения определенного интеграла).

к) Простейшие дифференциальные уравнения. Гармонические колебания.

252. Известно, что для формирования понятия функции привлекаются различные способы задания функций, хотя в дальнейшем все они играют соподчиненную роль аналитическому способу задания.

Нужно ли уделять пристальное внимание рассмотрению разных способов задания?

а) Да, так как это связано с практической потребностью: и таблицы, и графики, как правило, служат для удобного в определенных обстоятельствах представления функций.

б) Да, для усвоения всего многообразия аспектов понятия функции (формула выражает функцию лишь будучи включенной в соответствующую систему представлений и операций, а эта система такова, что различные компоненты понятия функции могут быть отображены наиболее естественно различными средствами).

в) Нет: достаточно знакомства с различными способами задания функций.

г) Нет: табличное и графическое представленные данных – предмет изучения дисциплины «Информатика», а в курсе алгебры на первое место выходит аналитический способ задания функций.

253. Учитель разрабатывает систему заданий-упражнений на установление связей между тремя основными способами задания функции (формулой, графиком, таблицей) <u>к этапу ознакомления</u> с понятием функции:

– Изобразить график функции $y = 4x+1$ на промежутке $[0;\ 2]$.

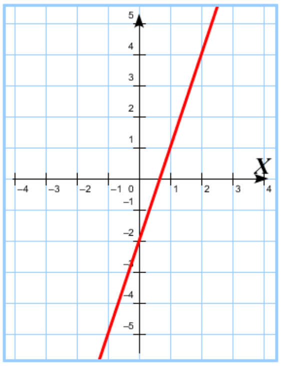
– Проверить, насколько точна таблица квадратов чисел, взяв несколько значений для аргумента и проведя расчет: $x=1,35;\ \ 2,44;\ \ 9,4;\ 7;\ \ 6,25.$

– В таблице представлены результаты наблюдений за атмосферным давлением. Построить график зависимости давления от времени в промежутке $12 \le t \le 18$, соединив эти точки плавной линией.

Какое из перечисленных ниже заданий наилучшим образом впишется в эту систему упражнений?

а) Дан график функции $y = x^2$. На сколько единиц, по какой оси и в каком направлении его необходимо смесить, чтобы получить график функции $y = x^2 + 3$?

б) Даны четыре графика, отражающих результаты наблюдений за температурой в августе 2016 года в городах Саратов, Волгоград, Казань, Самара, и таблица, в которой зафиксированы данные только по одному из этих городов. Данные по какому городу отражены в таблице? Постройте аналогичную таблицу для любого другого города.



в) Как аналитически (то есть формулой) задать функцию, изображённую на графике?

г) Какая функция задана следующей таблицей значений?

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4
y		10	5	2	1	2	6		17

Заполните пустые ячейки таблицы.

254. Предложите свою систему заданий-упражнений на установление связей между тремя основными способами задания функции (формулой, графиком, таблицей) <u>к этапу ознакомления</u> с понятием функции.

255. Урок изучения нового материала по теме «Взаимное расположение графиков линейной функции» учитель начал с устной работы – вводной части к исследованию по теме урока.

Какой вопрос первого задания <u>не удовлетворяет</u> принципу научности?

Задание 1. Ответьте на вопросы.

а) Какие из перечисленных функций являются линейными: (1) $y = 2 - 5x$; (2) $y = 3x$; (3) $y = \frac{x}{2} + 1$; (4) $y = \frac{2}{x} + 1$; (5) $y = x^2$; (6) $y = 5$; (7) $x = 5$.

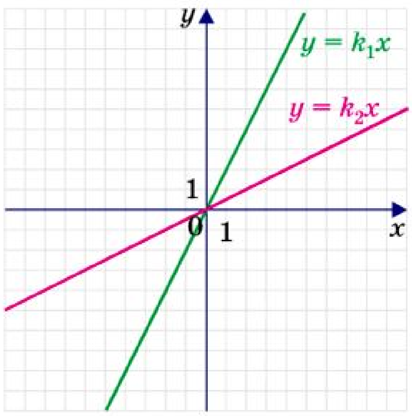
б) Почему функция под номером 7 не является линейной?

в) Сколько точек необходимо для построения графика линейной функции?

Какой ответ должен принять учитель в качестве правильного на вопрос «е» второго задания?

Задание 2. Ответьте на вопросы.

г) Какая функция называется прямой пропорциональностью?



д) Можно ли утверждать, что прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции?

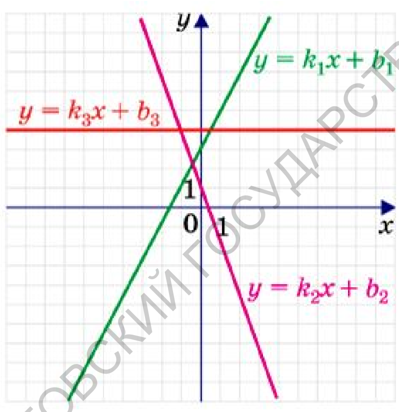
е) Что является графиком прямой пропорциональности? // ______________________________

____

ж) Сколько точек, кроме начала координат, необходимо задать для построения графика прямой пропорциональности?

з) Используя графики, изображённые на рисунке, сравните k_1 и k_2.

Какой вопрос (или задание) должен предварять задачи третьего задания?



Задание 3. Выполните задания.

и) Определите знак коэффициента для каждого графика.

к) Сравните k_1 и k_2.

л) Сравните k_1 и k_3.

м) Сравните k_3 и k_2.

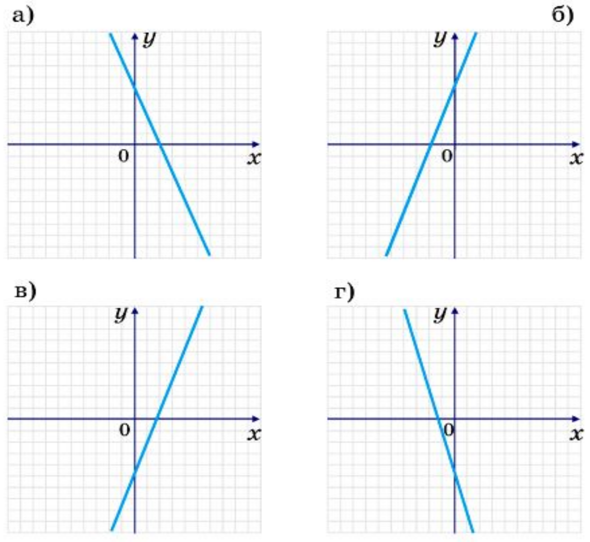
Предваряющий вопрос (задание).

____

____

____

Какой вопрос должен предварять четвертое задание или возникнуть в ходе его выполнения?



Задание 4. На каком рисунке изображён график функции

$$y = -3x - 5?$$

н) Как выяснить, какой график соответствует данному алгебраическому способу задания функции?

о) Какая существует связь между значением b и ординатой точки пересечения прямой и осью ординат?

п) Какая существует связь между значением b и абсциссой точки пересечения прямой и осью абсцисс?

р) Можно ли только по коэффициенту k определить, на каком рисунке изображён график данной функции?

Какой вывод должны сделать ученики после выполнения четвертого задание?

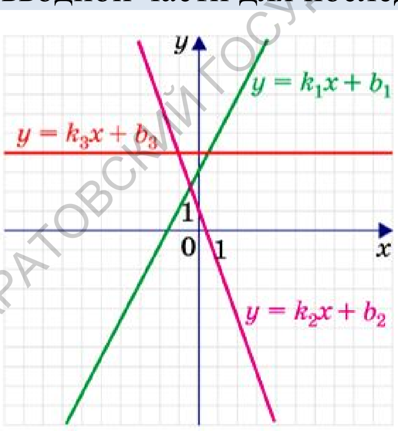
с) Для того, чтобы выяснить, какой график соответствует данному алгебраическому способу задания функции, необходимо подставить в формулу координаты двух любых точек графика, Если в результате получим два верных равенства, то на рисунке изображён график данной функции.

т) Значение b в формуле $y = kx + b$ показывает ординату точки пересечения прямой и осью ординат.

у) Значение b в формуле $y = kx + b$ показывает абсциссу точки пересечения прямой и осью абсцисс?

ф) Только по коэффициенту k определить, на каком рисунке изображён график данной функции нельзя.

Оцените целесообразность включения пятого задания в систему заданий вводной части для последующего исследования по теме урока.



Задание 5. Расположите значения k_1, k_2 и k_3 в порядке возрастания.

х) Задание удачно вписывается в систему вводных заданий?

ц) Задание может быть включено в систему заданий вводной части, но сразу после задания 3 (используется один и тот же чертёж).

ч) Задание может быть включено в систему заданий вводной части вместо задания 3 (используется один и тот же чертёж, задания требуют выполнения одних и тех же действий).

ш) Задание не вписывается в логику систему заданий вводной части.

256. Урок изучения нового материала по теме «Взаимное расположение графиков линейной функции» учитель начал с устной работы – вводной части к исследованию по теме урока. Затем были сформулированы проблемы исследования: (1) Выяснить, при каких значениях коэффициента k графики линейной функции параллельны, а при каких пересекаются. (2) Выяснить, существует ли связь между значением b и координатами точек пересечения графика с осями координат.

Охарактеризуйте эти проблемы.

а) Охарактеризовать проблемы невозможно, так как не ясна цель исследования.

б) Если цель исследования – выяснить и аналитически записать все случаи взаимного расположения двух прямых на плоскости (интеграция с линией аналитической геометрии), то проблема (1) не позволяет рассмотреть все случаи, а проблема (2) вообще не вписывается в схему исследования.

в) Если цель исследования – научиться графическим методом решать системы из двух линейных уравнений с двумя неизвестными (интеграция с линией уравнений и неравенств), то задачи (проблемы) исследования сформулированы некорректно.

г) Вне зависимости от цели исследования, проблема (1) не позволяет перейти к изучению всех случаев взаимного расположения графиков линейной функции (т.е. сформулирована достаточно узко), а проблема (2) должна быть решена при изучении самой линейной функции (то есть до рассматриваемого урока).

257. Урок изучения нового материала по теме «Взаимное расположение графиков линейной функции» учитель начал с устной работы – вводной части к исследованию по теме урока. Затем были сформулированы проблемы исследования: (1) Выяснить, при каких значениях коэффициента k графики линейной функции параллельны, а при каких пересекаются. (2) Выяснить, существует ли связь между значением b и координатами точек пересечения графика с осями координат. Для решения поставленных задач класс разбивается на три группы, каждый ученик получает задания для исследования.

I группа. Постройте графики функций: (а) $y = 5x$, $y = 5x + 3$, $y = 5x - 3$; (б) $y = x$, $y = 2x + 2$; (в) $y = 2$.

II группа. Постройте графики функций: (а) $y = -2x$, $y = -2x - 2$, $y = -2x + 1$; (б) $y = 4x + 1$, $y = -3x$; (в) $y = 2$.

III группа. Постройте графики функций: (а) $y = -x + 2$, $y = 4x + 1$; (б) $y = 6x$, , $y = 6x - 3$, $y = 6x + 2$; (в) $y = -1$.

Позволяет ли предложенная система задач ученикам сформулировать выводы о взаимном расположении графиков при различных значениях коэффициентов k и b?

а) Да, задач более, чем достаточно.

б) Только сильным ученикам этих задач достаточно для формулировки выводов.

в) Нет: по одному примеру (одной ситуации) сделать вывод весьма затруднительно, т.к. этот пример может оказаться частным случаем.

г) Нет, ученикам нужна ориентировочная основа (её логическая структура может быть простой «Если …, то …» или сложной «Если … и …, то …»).

258. Урок изучения нового материала по теме «Взаимное расположение графиков линейной функции» учитель начал с устной работы – вводной части к исследованию по теме урока. Затем были сформулированы проблемы исследования:

(1) Выяснить, при каких значениях коэффициента k графики линейной функции параллельны, а при каких пересекаются.

(2) Выяснить, существует ли связь между значением b и координатами точек пересечения графика с осями координат.

Для решения поставленных задач класс разбивается на три группы, каждый ученик получает задания для исследования (например, для I группы: «Постройте графики функций: (а) $y = 5x$, $y = 5x + 3$, $y = 5x – 3$; (б) $y = x$, $y = 2x + 2$; (в) $y = 2$».

По результатам исследования, в ходе коллективного обсуждения, учащиеся формулируют выводы.

1. Если коэффициенты k_1 и k_2 равны, то графики линейных функций параллельны.

2. Если коэффициенты k_1 и k_2 различны, то графики линейных функций пересекаются.

3. Если $k = 0$, то график линейной функции параллелен оси x.

Стоило ли ради этих выводов затевать исследование в форме индивидуальной, групповой и коллективной работы одновременно?

а) Да, исследование в любом случае полезно.

б) Да, полученные результаты важны для дальнейшего изучения функции.

в) Да, исследовательский метод как нельзя лучше иллюстрирует метод научного познания.

г) Да, материал сложный и требует активных методов обучения, таких, как исследовательская работа.

д) Нет, целесообразней эти три факта усвоить в ходе решения задач на их применение, так как при указанной организации исследования ученикам вообще не понятно, зачем они получали эти знания.

е) Нет, исследование предполагает изучение всевозможных случаев: $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$; $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$; $k_1 \neq k_2$ и $b_1 = b_2$; $k_1 \neq k_2$ и $b_1 \neq b_2$; а также $k_1 \cdot k_2 = – 1$ и случай взаимного расположения трёх графиков, образующих точками пересечения треугольник; случай взаимного расположения четырёх графиков, образующих точками пересечения параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат; – а этого не было сделано.

259. На уроке демонстрации применения свойств квадратичной функции к решению задач учитель предложил ученикам такое задание: «Найдите наибольшее возможное значение числа $abc + ab + bc + ac$, если неотрицательные числа a, b и c удовлетворяют равенству $a + b + c = 12$». Какой подход к решению будет наиболее целесообразным?

а) Возвести равенство в квадрат, а затем выразить сумму произведений и подставить в исходное выражение.

б) Выделить квадратный трёхчлен из имеющихся алгебраических моделей.

в) Выразить из равенства c через a и b, подставить в данное выражение и проанализировать получившейся результат.

г) Рассмотреть имеющиеся алгебраические модели с геометрической точки зрения (объём параллелепипеда, площади его граней и сумма «трёх измерений»).

д) Составить и проанализировать систему $\begin{cases} x = abc + ab + bc + ac \\ a + b + c = 12 \end{cases}$.

260. На уроке закрепления изученного материала по теме «Квадратичная функция и её график» учитель предложил ученикам построить график функции $y = |x|(x-1) - 2x$ и определить, при каких значениях прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки. Как учителю выбрать наиболее эффективную форму работы с заданием?

а) Задание предполагает работу с модулем, раскрытие которого приводит к рассмотрению кусочно-непрерывной функции, что приносит основную долю ошибок, поэтому решать задание нужно у доски с комментарием. Затем можно для самостоятельного решения дать аналогичное задание. Подобное задание следует включить в домашнюю работу.

б) Задание предполагает работу с модулем, что приносит основную долю ошибок, поэтому нужно вызвать сильного ученика к доске, он раскроет знак модуля (рассмотрит два случая: $x < 0,\ y = -x^2 - x$ и $x \geq 0,\ y = x^2 - 3x$), а дальше ученики выполнят задание самостоятельно (построят параболы и найдут прямые $y = m$).

в) Задание требует построения графиков, поэтому его лучше всего решать самостоятельно в тетрадях, но поскольку при построении графиков ученики не отбрасывают лишнюю часть (не умеют или забывают отмечать на чертеже те части парабол, которые не входят в окончательный график), следует организовать самопроверку: по окончании работы продемонстрировать ученикам верное решение, например, при помощи проектора.

г) Задание требует построения графиков, поэтому его лучше всего решать самостоятельно в тетрадях, но поскольку ученики неверно вычисляют координаты вершин парабол (в нашем случае требуется найти ординаты вершин), следует на этом этапе организовать проверку – устный опрос – должно получиться $y = 0{,}25$ и $y = -2{,}25$.

261. На уроке повторения и обобщения материала по теме «Квадратичная функция и её график» учитель предложил ученикам самостоятельную работу, в которую включил следующие задания:

(1) Постройте график функции $y = \dfrac{3{,}5|x| - 1}{|x| - 3{,}5x^2}$ и определите, при каких значениях *m* прямая *y = mx* не имеет с графиком ни одной общей точки.

(2) Постройте график функции $y = \left|x^2 - 6x + 5\right|$ и определите, какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой параллельной оси абсцисс?

(3) Постройте график функции $y = \dfrac{(x-5)(x^2 - 6x + 8)}{x - 2}$ и определите, при каких значениях *m* прямая *y = m* имеет с графиком ровно одну общую точку.

(4) Постройте график функции $y = \begin{cases} 1{,}5x - 3, \text{ если } x < 2, \\ -1{,}5x + 3, \text{ если } 2 \le x \le 3, \\ 3x - 10{,}5, \text{ если } x > 3. \end{cases}$ и определите, при каких значениях *m* прямая *y = m* имеет с графиком ровно две общие точки.

(5) Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 + 8x + 10, \text{ если } x \ge -5, \\ x, \text{ если } x < -5. \end{cases}$ и определите, при каких значениях *m* прямая *y = m* имеет с графиком ровно две общие точки.

Расположите задания в порядке возрастания степени сложности.

____

262. После того, как ученики попросили помощи в решении задачи: «Постройте график функции $y = \dfrac{3{,}5|x| - 1}{|x| - 3{,}5x^2}$ и определите, при каких значениях *m* прямая *y = mx* не имеет с графиком ни одной общей точки» – учитель молча записал на доске: $y = \dfrac{3{,}5|x| - 1}{|x| - 3{,}5x^2} \overset{???}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = -\dfrac{1}{|x|} \\ |x| \ne \dfrac{2}{7} \end{cases}$. С какой целью?

____

____

____

____

____

____

____

____

263. Организуя методом устного опроса проверку решения задачи: «При каких значениях m прямая $y = mx$ не имеет с графиком функции $y = \frac{3,5|x|-1}{|x|-3,5x^2}$ ни одной общей точки» – учитель получил следующие ответы:

(1) Параметр $m = 0$. (2) Параметр $m = \pm 1$.

(3) Параметр $m = \pm\frac{4}{49}$. (4) Параметр $m = \pm\frac{2}{7}$.

(5) Параметр $m = \pm\frac{7}{2}$. (6) Параметр $m = \pm\frac{49}{4}$.

Какие из этих результатов следует признать верными?

---

264. Учитель объясняет ученикам 9 класса решение задачи: «Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{2x+1}{x^2-x+1}$».

При нахождении наибольших и наименьших значений функции $y = f(x)$ рассматривается данное равенство как уравнение с неизвестным x и параметром y, и решается задача: «при каких значениях параметра y уравнение $y = f(x)$ имеет решение».

После преобразования получим квадратное уравнение: $yx^2-(y+2)x+(y-1)=0$, которое имеет решение при условии неотрицательности дискриминанта: $D=(y+2)^2-4y(y-1)=-3y^2+8y+4$, $-3y^2+8y+4\geq 0$, откуда $\frac{4-2\sqrt{7}}{3}\leq y\leq\frac{4+2\sqrt{7}}{2}$.

Слева в неравенстве стоит наименьшее значение y, справа – наибольшее.

Ответ. Наибольшее значение функции $\frac{4+2\sqrt{7}}{2}$, а $\frac{4-2\sqrt{7}}{3}$ – её наименьшее значение.

Какие из следующих задач следует предложить ученикам для усвоения описанного метода:

а) Можно ли указать наибольшее значение функции $y = x-\frac{2}{x}+1$?

б) Можно ли указать наименьшее значение функции $y = \left|x^2+x-2\right|$?

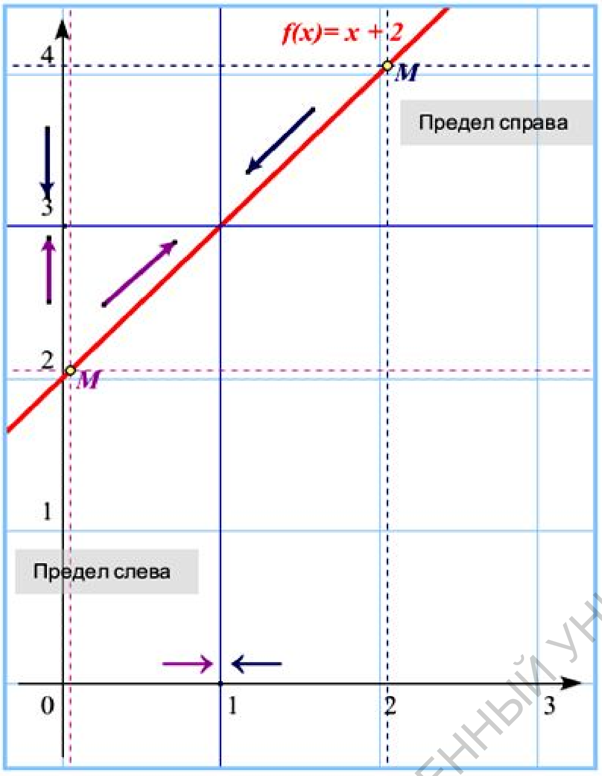
в) Найти наибольшее значение функции $y=\sqrt{2x+1-x^2}$.

г) Найти наименьшее значение функции $y=\frac{x^2+x-2}{2x^2-x+3}$.

265. Учитель излагает новый материал по теме «Понятие о пределе функции»:

Предел функции (предельное значение функции) – одно из основных понятий математического анализа, значение, к которому функция в определённом смысле приближается при приближении аргумента к определённой точке.

Функция *f(x)* имеет предел в точке *b*, если для всех значений *x*, достаточно близких к *a*, значение *f(x)* близко к *b*. Записывают так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.



Покажем на конкретном примере (динамическая модель).

Дана функция $f(x) = x+2$, $x \to 1$. Узнаем, есть ли предел функции *f(x)* в точке $x = 1$?

Подставим значения *x*:

$0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ \ldots$ ($x \to 1$ *слева*);

$1{,}1;\ 1{,}01;\ 1{,}001;\ \ldots$ ($x \to 1$ *справа*)

$f(0{,}9)=2{,}9$	$f(1{,}1)=3{,}1$
$f(0{,}99)=2{,}99$	$f(1{,}01)=3{,}01$
$f(0{,}999)=2{,}999$	$f(1{,}001)=3{,}001$
…	…
$f(x) \to 3$	$f(x) \to 3$

Итак, $\lim\limits_{x \to 1}(x+2) = 3$.

Предел функции на бесконечности описывает поведение значения данной функции, когда её аргумент становится бесконечно большим: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

Основные понятия вводятся на _________________ основе.

Форма изложения – _______________________________

Без обоснования осталось утверждение – ____________________ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

Обоснуйте это утверждение.

____

____

____

266. Урок в 11 классе по теме «Производная в физике и технике» учитель начал с вступительного слова: «Производная относится к числу математических понятий, которые носят межпредметный характер, и широко применяются в физике, химии, биологии, в технике и других отраслях наук. Это в значительной степени повышает роль межпредметных задач при изучении темы: «Производная». Изучение материала по теме урока имеет принципиально важное значение, так как здесь показывается приложение производной к решению различных физических и технических задач, то есть возможности применения элементов дифференциального исчисления в описании и изучении процессов и явлений реального мира.».

Так как предваряющее задание к уроку включало поиск ответов на следующие вопросы: о происхождении термина «производная», физический смысл производной, применение производной в физике; и подбор задачи для класса, в которой выясняется физический смысл производной, то после вступительного слова учитель предлагает ученикам ответить на вопросы и выполнить задания.

Вопрос 1. В чем заключается физический смысл первой производной?

Вопрос 2. В чем заключается физический смысл второй производной?

Задание 1. Устно найти y', если

(а) $y = \sqrt{cos^2 2x + sin^2 2x}$ (б) y = cos 5x

(в) $y = \frac{x^2}{3}$ (г) $y = 3x^4$ (д) $y = \frac{1}{3}x^6$

Задание 2. Решить в тетради: найти скорость и ускорение точки в момент времени $t=1$, если (а) $X(t) = t^3 - 2t^2 + 5$; (б) $X(t) = 5t - t^2 - 1$; (в) $X(t) = -2t^2 + 4 + t$.

Далее, по плану, сообщение учащегося о происхождении производной и решение задач подобранных учащимися.

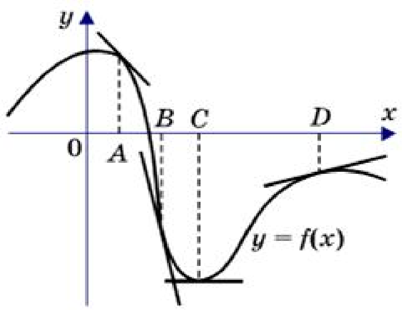
Завершает урок тест «Физический смысл производной» в 4 вариантах.

Вариант 1.

1. Скорость точки, движущейся по прямой по закону $x(t) = {}^1/_3\, t^3 - 5t^2$, равна
(а) ${}^1/_3\, t^3 - 5t^2$; (б) $t^3 - 5t$; (в) $t^2 - 10t$; (г) ${}^1/_3\, t^4 - 5t$.
2. Точка движется по прямой по закону $s(t) = 2t^2 - 2t - 1$. Её мгновенная скорость $v(3)$ равна
(а) 8; (б) 6; (в) 10; (г) 9.
3. Ускорение точки, движущейся по прямой по закону $s(t) = t^3 - 5t^2$ равно:
(а) $2(3t-5)$; (б) $9t^2 - 10$; (в) $3t^2 - 10t$; (г) $6t - 8$.
4. Тело массой m движется по закону $x(t) = 3cos3\pi t$. Сила, действующая на тело в момент времени $t = {}^1/_3$ равна:
(а) 0; (б) $272m$; (в) $92m$; (г) $9m$.

Какова вероятность достижения учителем целей урока: (1) Определить физический смысл производной, рассмотреть использование механического истолкования производной при решении задач, связанных с физическим смыслом, расширить знание учащихся. (2) Развитие логического мышления при установлении связи физических величин с понятием производной, развитие монологической речи в ходе объяснений, обоснований выполняемых действий, развитие навыков самостоятельной работы.

267. Охарактеризуйте задание: «На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, к которому проведены касательные в четырёх точках. Значения производной в этих точках следующие: – 4,56; – 1,2; 0; 0,35. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной».



а) несложное задание на построение графика являющегося моделью реальной или близкой к реальной ситуации;

б) несложное задание на чтение графика являющегося моделью реальной или близкой к реальной ситуации;

в) типовая задача на чтение графика производной функции для ответа на вопрос о каком-то свойстве самой функции;

г) типовая задача на чтение графика функции для ответа на вопрос о каком-то свойстве производной этой функции;

д) проблемная задача на нахождение производной функции в точке.

268. Для выполнения задания: «На рисунке (см. выше) изображён график функции $y = f(x)$, к которому проведены касательные в четырёх точках. Значения производной в этих точках следующие: – 4,56; – 1,2; 0; 0,35. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной.» – необходимо знать следующие факты:

а) В каждой точке интервала возрастания производная дифференцируемой на этом интервале функции положительна.

б) В каждой точке интервала убывания производная дифференцируемой на этом интервале функции отрицательна.

в) В каждой точке экстремума производная либо равна нулю, либо не существует.

г) Значение производной функции в данной точке равно тангенсу угла, который касательная проведённая в этой точке к графику образует с положительным направление оси абсцисс.

д) На тех интервалах, где график производной функции расположен выше оси абсцисс (т.е. производная положительна) сама функция возрастает.

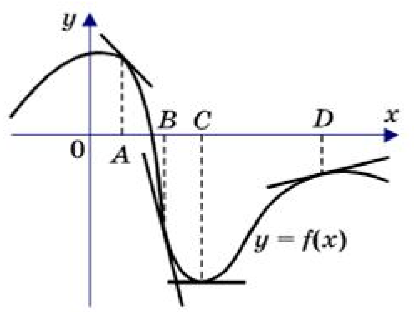
е) На тех интервалах, где график производной функции расположен ниже оси абсцисс (т.е. производная отрицательна) сама функция убывает.

ж) Общие точки графика производной и оси абсцисс являются точками максимума, если график пересекает ось «сверху вниз».

з) Общие точки графика производной и оси абсцисс являются точками минимума, если график пересекает ось «снизу вверх».

и) Точки касания графика производной функции и оси абсцисс не являются точками экстремума.

269. Выполнение задания: «На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, к которому проведены касательные в четырёх точках. Значения производной в этих точках следующие: – 4,56; – 1,2; 0; 0,35. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной.» – учитель организует в ходе устной работы. На доске кроме чертежа четыре равенства: $f'(A) = \ldots$, $f'(B) = \ldots$, $f'(C) = \ldots$, $f'(D) = \ldots$. Учащимся предлагается восстановить равенства и объяснить своё решение. Выберите ошибочные рассуждения.



а) Так как касательная, проходящая через точку с абсциссой C, параллельная оси абсцисс, то $f'(C) = 0$. Касательная, проходящая через точку с абсциссой D, образует с положительным направление оси абсцисс угол в пределах от 0 до $\pi/2$, значит $f'(D) > 0$, то есть $f'(D) = 0{,}35$. Касательные, проходящие через точки с абсциссами A и B, образуют с положительным направление оси абсцисс углы в пределах от $\pi/2$ до π, значит $f'(A) < 0$, $f'(B) < 0$, причём угол, соответствующий точке A больше угла, соответствующего точке B, то есть $f'(A) > f'(B)$, следовательно, $f'(A) = -1{,}2$ и $f'(B) = -4{,}56$.

б) Точки A и B находятся в интервале убывания функции, значит производные в этих точках отрицательны, причём $f'(A) > f'(B)$, следовательно, $f'(A) = -1{,}2$ и $f'(B) = -4{,}56$. C – точка экстремума, в ней производная равна нулю, значит $f'(C) = 0$. Точке D находятся в интервале возрастания функции, значит производная функции в этой точке положительна – $f'(D) = 0{,}35$.

в) $f'(A) = 0{,}35$, т.к. касательная проведена к графику в положительной полуплоскости; $f'(B) = -4{,}56$ и $f'(D) = -1{,}2$, т.к. касательная проведена к графику в отрицательной полуплоскости и B расположена левее D; $f'(C) = 0$.

г) $f'(A) = -4{,}56$, т.к. точка A находится левее всех остальных, а значит её координата – наименьшая; чуть правее лежит точка B, значит $f'(B) = -1{,}2$; ещё правее – точка C, значит $f'(C) = 0$, и, наконец $f'(D) = 0{,}35$.

270. Среди основных направлений изучения логарифмической функции в школьном курсе математики выберите два центральных:

а) Логарифм и его свойства.
б) Преобразование логарифмических выражений.
в) Логарифмическая функция, её свойства и график.
г) Производная логарифмической функции.
д) Решение логарифмических, уравнений и неравенств.

271. Среди основных направлений изучения показательной функции в школьном курсе математики выберите два центральных:

а) Показательная функция, её свойства и график.
б) Преобразование показательных выражений.
в) Производная показательной функции.
г) Решение показательных уравнений и неравенств.

272. В.Н. Рыжиком разработана и описана в книге «25 000 уроков математики» (с. 151-154) система развивающих задач к модулю «Функции». Система из 13 заданий, в каждом из которых от 2 до 5 задач, позволяет всесторонне повторить основные дидактические единицы модуля, устанавливая при этом внутрипредметные связи. Содержание системы задач: функциональная символика, сложная функция, область определения функции, множество значений функции, чётность и нечётность функции, монотонность функции, ограниченность функции, обратная функция, периодичность функции, преобразование графиков функции, контрольное задание.

О структуре и содержании заданий можно получить представление по фрагменту системы, связанной с повторением чётности/нечётности функции.

«Задание 5. Четность и нечетность функции.

1.Исследовать на четность и нечетность функции:

$$f(x)=x^2\cdot|x|;\quad x(t)=t^4-t+1;\quad \varphi(a)=\sin a\cdot\cos a;\quad g(y)=\frac{(y-1)(y^2-1)}{1-y}.$$

2.Функция $f(x)$ определена на R, четная, $f(x)\neq 0$. Будет четной или нечетной функция: а) $f_1(x)=f(-x)$; б) $f_2(x)=x\cdot f(x)$?

Задание 6.Четность и нечетность функции.

1.Исследовать на четность или нечетность функции:

$$h(z)=tg\,z+tg(-z);\quad f(x)=(x-1)^{-2}-(x+1)^{-2};\ g(y)=\sqrt{1+y+y^2}-\sqrt{1-y-y^2}.$$

2.Существует ли функция $f(x)$ такая, что для всех $x\in R$ справедливо равенство $f(x)+f(-x)=x$?

3. Может ли уравнение $|x|=(x^2+1)^5-1$ иметь 10 корней?».

Перечислите основные проблемы, которые могут возникнуть при выполнении заданий 5 и 6.

273. Среди основных направлений изучения первообразной и интегралов в школьном курсе математики выберите два центральных:

а) Изучение первообразной функции и её свойств.

б) Первообразные элементарных функций.

в) Техника интегрирования.

г) Применение первообразной. Определённый интеграл.

д) Численные методы вычисления интегралов.

274. Теме «Первообразная и интеграл» предшествует тема «Производная и её применение». Такая последовательность изучения материала создаёт предпосылки для:

а) вычисления площадей криволинейной трапеции;

б) ознакомления с простейшими дифференциальными уравнениями – моделями, описывающими многие явления и процессы мироздания;

в) осознания учащимися того факта, что аппарат производной и интеграла – основа метода математического анализа;

г) понимания учащимися взаимосвязи между операциями дифференцирования и интегрирования функций, а также основной идеи метода дифференциального и интегрального исчислений;

д) успешного овладения техникой интегрирования.

275. Основу содержания темы составляют два типа вопросов, каждый из которых группируется около одного из двух понятий:

а) интеграл,

б) криволинейная трапеция,

в) первообразная,

г) производная,

д) функция.

276. Основное внимание при изучении элементов интегрального исчисления уделяется:

а) введению понятий первообразной и интеграла;

б) вычислению объёмов тел;

в) вычислению площадей криволинейной трапеции;

г) нахождению первообразных и вычислению интегралов на базе таблиц первообразных и правил нахождения первообразных;

д) ознакомлению учащихся с основными свойствами первообразных и правилами нахождения первообразных;

е) раскрытию смысла операции интегрирования как операции, обратной по отношению к операции дифференцирования заданной функции:

ж) решению задач физического содержания (на использование интегралов);

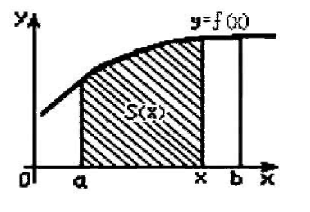
з) решению простейших дифференциальных уравнений;

и) численным методам вычисления интегралов.

277. Учитель излагает новый материал по теме «Вычисление площади криволинейной трапеции»:

В математике разработаны методы, позволяющие вычислять площади фигур, границы которых состоят из кривых линий, например частей парабол, синусоид и др. (если, конечно, площади этих фигур существуют). Теперь, используя знания о первообразной функции можно научиться находить площади фигур, называемых криволинейными трапециями.

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке *[a;b]* знака функции *f(x)*, прямыми *x=a*, *x=b* и отрезком *[a;b]*.



Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции *f(x)*, прямыми *x=a, x=b* и отрезком оси абсцисс. Вначале рассмотрим случай $f(x)>0$.

Пусть $x\in[a;b]$. Площадь криволинейной трапеции, заштрихованной на рисунке, есть функция от *x*. Обозначим её через *S(x)*. $S'(x) = f(x)$. Это равенство означает, что переменная площадь *S(x)* есть первообразная для функции *f(x)*. Поэтому площадь криволинейной трапеции *S* может быть вычислена при помощи интегрирования. Из рисунка видно, $S(a) = 0$, так как заштрихованная фигура при $x = a$ превращается в отрезок, $S(b)=S$ есть площадь рассматриваемой трапеции.

В случае $f(x)<0$ вычисление площади криволинейной трапеции будем заменять вычислением площади трапеции, симметричной данной относительно оси абсцисс. Такая криволинейная трапеция ограничена прямыми *x=a, x=b*, осью абсцисс, графиком функции $y = -f(x)$, принимающей положительные значения на рассматриваемом промежутке.

Используя равенство $S'(x) = f(x)$, где $f(x) \geq 0$ на промежутке *[a; b]*, выведем формулу для вычисления площади криволинейной трапеции. Из этого равенства видно, что *S(x)* есть первообразная для *f(x)* на промежутке *[a, b]*. Пусть *F(x)* – другая первообразная для *f(x)* на этом же промежутке. В силу основного свойства первообразных имеем: $S(x) = F(x) + C$.

Это равенство верно при всех $x\in[a; b]$, так как функции *S(x)* и *F(x)* определены в точках *a* и *b*. Подставим вместо *x* число *a*, получим: $S(a) = F(a) + C$.

Но $S(a) = 0$, поэтому $0 = F(a) + C$, откуда $C = - F(a)$. Таким образом, $S(x) = F(x) - F(a)$. Искомую площадь получим путем подстановки в последнее равенство $x = b$: $\underline{S = F(b) - F(a)}$.

Основные понятия вводятся на ________________основе.

Форма изложения – ______________________________

Без обоснования осталось утверждение – ____________________

Обоснуйте это утверждение.

____

____

____

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Решение задачи о трёхзначном числе

Приведите пример трёхзначного числа, сумма цифр которого равна 19, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.

Решение. Решим более общую задачу и найдём все числа, удовлетворяющие её условиям.

I. Составим таблицу квадратов цифр:

Число	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Квадрат	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

II. Выясним**,** при каких условиях сумма квадратов цифр трёхзначного числа делится на 3, но не делится на 9.

Пусть дано число $\overline{abc}$, $a \neq 0$.

Составим сумму квадратов его цифр: $a^2 + b^2 + c^2$.

Сумма будет делиться на 3, если

1) каждое слагаемое будет делиться на 3 или

2) остатки от деления слагаемых на 3 в сумме дадут число, кратное 3.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) Каждое слагаемое суммы делится на 3, с учётом того, что слагаемые – квадраты цифр, они могут принимать значения: 0 (9·0), 9 (9·1), 36 (9·4) и 81 (9·9), то есть любая сумма, составленная из этих чисел будет делиться на 9.

2) Остатки от деления слагаемых на 3 в сумме дадут число, кратное 3.

Найдём остатки от деления квадратов цифр на 3

Число	0	**1**	**2**	3	**4**	**5**	6	**7**	**8**	9
Квадрат	0	**1**	**4**	9	**16**	**25**	36	**49**	**64**	81
Остаток	0	**1**	**1**	0	**1**	**1**	0	**1**	**1**	0

Если цифра не кратна 3, то её квадрат при делении на 3 даёт в остатке 1, а сумма трёх таких квадратов будет делиться на 3, но не будут делиться на 9..

Итак, мы выяснили, что ***сумма квадратов любого трёхзначного числа, составленного из цифр 1, 2, 4, 5, 7, 8, будет делиться на 3, но не будет делиться на 9***.

III. Найдём все числа $\overline{abc}$, $a \neq 0$. $a + b + c = 19$, составленные ***из цифр 1, 2, 4, 5, 7, 8***.

Сумма двух самых «больших» цифр равна *16 (8 +8)*, значит цифры ***1*** и ***2*** не могут входить в число $\overline{abc}$ (они в сумме с 16 не дадут 19).

19 : 3 = 6 (ост.1), значит, число $\overline{abc}$ не может состоять только из цифр меньших *7*.

Итак, число $\overline{abc}$, $a + b + c = 19$ может быть составлено ***из цифр 4, 5, 7, 8***.

Проверяем, ***8 + 7 + 4 = 19***. Эта тройка цифр путём перестановки позволяет получить 6 чисел: ***874, 847, 784, 748, 487, 478***.

Проверяем, ***7 + 7 + 5 = 19***. Эта тройка цифр путём перестановки позволяет получить 3 числа:.

Ответ. Условиям задачи удовлетворяют 9 чисел, которые запишем в порядке убывания: ***874, 847, 784, 775, 757, 748, 577, 487, 478.***

Приложение 2. Решение задачи о банковском счёте Петра Васильевича

Первого числа каждого нечётного месяца, начиная с января, Пётр Васильевич клал на свой беспроцентный банковский счёт 30 тысяч рублей, а первого числа каждого чётного месяца, начиная с февраля, снимал 15 тысяч рублей. Первого числа какого месяца на счету Петра Васильевича оказалось 90 тысяч рублей?

Решение. Составим информационную модель задачи.

месяц	сумма (тыс. руб)		месяц
	после (до)вложения	после снятия	
янв.	30	15	февр.
март	45	30	апр.
май	60	45	июнь
июль	75	60	авг.
сент.	**90**	75	окт.
нояб.	105	**90**	**дек.**
		105	

Информационная модель, приводящая к ответу «1 сентября»:

– 15 + 30 – 15 + 30 – 15 + 30 – 15 + 30 – 15

30	15	45	30	60	45	75	60	90
янв.	февр.	март	апр.	май	июнь	июль	авг.	сент.

Информационная модель, приводящая к ответу «1 декабря»:

месяц	движение средств	итог (тыс. руб.)	
янв.	+ 30	15	90
февр.	– 15		
март	+ 30	15	
апр.	– 15		
май	+ 30	15	
июнь	– 15		
июль	+ 30	15	
авг.	– 15		
сент.	+ 30	15	
окт.	– 15		
нояб.	+ 30	15	
дек.	– 15		

30 – 15 = 15 (доход на начало чётного месяца, т.е. за каждые два месяца)

90 : 15 = 6 (номер чётного месяца, в котором доход составил 90 тыс.руб.)

6 · 2 = 12 (номер месяца по календарю – шестого чётного)

Приложение 3. Решение задачи о потомках князя Гвидона

У князя Гвидона было 5 сыновей. Из его потомков 2012 имели ровно 3 сыновей и не имели дочерей, а остальные умерли бездетными. Сколько было потомков у князя Гвидона?

Решение**.**

Разработаем информационную модель задачи, позволяющую наметить план её решения.

c_1			**c_2**			**c_3**			**c_4**			**c_5**		
c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}	c_{27}	c_{28}	c_{29}	c_{210}	c_{211}	c_{112}	c_{213}	c_{214}	c_{215}
· 3	· 3	· 3	· 3	· 3	· 3	· 3	· 3	· 3	· 3	· 3	· 3	· 3	· 3	· 3
и т.д. пока число потомков, имеющих троих детей, не станет ≤ 2012														

План.

1. Число потомков, имеющих троих детей образует сумму первых n членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 5, а знаменатель – 3. Эта сумма ≤ 2012, но, скорее всего < 2012, т.к. по условию, князь имел и бездетных потомков. Найдём эту сумму S/

2. Найдём, сколько потомков в (n + 1) поколении имели 3 детей: 2012 – S.

3. Общее число потомков князя образует сумму первых (n + 1) членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 5, а знаменатель равен 3, к которой прибавляется произведение 3·(2012 – S).

Реализация плана.

$$S_n = \frac{5\cdot\left(3^n - 1\right)}{3-1} < 2012; \quad 3^n - 1 < 804{,}8; \quad 3^n = 729 < 805{,}8; \quad n = 6$$

$$S_6 = \frac{5\cdot\left(3^6 - 1\right)}{3-1} = \frac{5\cdot 728}{2} = 5\cdot 364 = 1820$$

$$2012 - 1820 = 192$$

$$S_7 = \frac{5\cdot\left(3^7 - 1\right)}{3-1} + 3\cdot 192 = 5465 + 576 = 6041$$

Ответ. У князя Гвидона было 6041 потомок.

Приложение 4. Решение задачи о наибольшем из возможных чисел

Найдите наибольшее возможное значение числа $abc+ab+bc+ac$, если неотрицательные числа a, b и c удовлетворяют равенству $a+b+c=12$.

Идея: рассмотреть имеющиеся алгебраические модели с геометрической точки зрения (объём параллелепипеда, площади его граней и сумма «трёх измерений»).

Решение. Если рассматривать прямоугольный параллелепипед, то
$abc = V$ – его объём,
$ab = S_1$, $bc = S_2$, $ac = S_3$ – площади граней,
$a+b = 12-c = p_1$, $b+c = 12-a = p_2$, $a+c = 12-b = p_3$ – полупериметры соответствующих граней.

Рассмотрим одну из граней: $ab = S_1$, $a+b = 12-c = p_1$ –$const$. Найдём зависимость площади этой грани от стороны a: $S_1(a) = (p_1-a)a = -a^2 + p_1a$. Получили квадратичную функцию $S_1(a) = -a^2 + p_1a$. Она определена, по условию задачи, на множестве неотрицательных чисел и принимает на этом множестве наибольшее значение в точке $a = -\frac{p_1}{2\cdot(-1)} = \frac{p_1}{2}$ (абсцисса вершины параболы $S_1(a) = -a^2 + p_1a$; ветви параболы направлены вниз).

Итак, $a = \frac{p_1}{2}$ и $a+b = p_1$, значит, $b = \frac{p_1}{2}$, то есть $a = b$.

Рассматривая другие грани и рассуждая аналогичным образом, получаем, что $a=b=c=4$, с учётом условия $a+b+c=12$.

Теперь найдём наибольшее возможное значение числа $abc+ab+bc+ac$,
$4\cdot4\cdot4+4\cdot4+4\cdot4+4\cdot4 = 64+16\cdot3 = 64+48 = 112$.

Можно сначала сделать вывод, что наибольшего значения число $abc+ab+bc+ac$ достигает при равенстве входящих в него переменных, то есть наибольшим будет число вида a^3+3a^2, где $a = \frac{a+b+c}{3}$, а затем вычислить это значение: $4^3+3\cdot4^2 = 64+48 = 112$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Светлана Владимировна Лебедева

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ (МАТЕМАТИКА).
ЧАСТНАЯ МЕТОДИКА
(в вопросах, педагогических задачах и ситуациях)
ЧАСТЬ 1. АРИФМЕТИКА. АЛГЕБРА. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Работа издана в авторской редакции

Подписано в печать Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$
Усл. печ. л. 10 Гарнитура Times