I

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА: введение

С.В. Лебедева
СГУ им. Н.Г. Чернышевского
Саратов, 2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Механико-математический факультет

Элементарная математика: введение

Учебно-методическое пособие

для студентов, обучающихся по направлению 44.03.01 – педагогическое образование, профиль – математическое образование

Саратов, 2016

УДК 51(072.8)
ББК 22.1Р
Л 33

Рекомендовано к печати
учебно-методическим советом механико-математического факультета
Саратовского государственного университета имени Н.Г.Чернышевского

Л 33 **Лебедева, С. В.** Элементарная математика : Введение : учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки 44.03.01 – педагогическое образование, профиль – математическое образование. / С. В. Лебедева – Саратов, 2016. – 152 с.

Серийное оформление *С.В. Лебедевой*

Модуль «Введение» – первый в структуре дисциплины «Элементарная математика». Его цель – обобщение и систематизация имеющихся знаний в области элементарной математики с точки зрения информационного моделирования, в контексте профессиональной подготовки – пропедевтика курса «Методика обучения и воспитания (математика).

Пособие состоит из десяти взаимосвязанных разделов: 1. Понятие задачи, 2. Множество, 3. Конечные множества. Сюжетные комбинаторные задачи. Графический метод решения комбинаторных задач, 4. Бесконечные множества. Числовые множества. Множества натуральных и неотрицательных чисел, 5. Числовые последовательности, 6. Делимость. Свойства делимости, 7. Расширение понятия числа. Рациональные числа. Отношения и пропорции. Проценты, 8. Иррациональные числа. Логарифмы. Арифметика действительных чисел, 9. Систематические числа, 10. Информационное моделирование сюжетных задач, – каждое из которых представлено краткой теоретической справкой и системой задач. Система задач представлена пятью группами: тестовые задания, типовые математические, математические эвристические, практические и творческие задания.

Пособие ориентировано прежде всего на самостоятельное изучение модуля «Введение», самоконтроль и самооценку результатов, для чего в пособии предусмотрена рейтинговая система оценки достижений студентов.

УДК 51(072.8)
ББК 22.1Р

Введение

Пособие содержит 1000 задач обучающе-контролирующего характера, рассчитанных на самостоятельное решение студентами первого курса, как на аудиторных занятиях, так и во внеаудиторной работе.

Система задач представлена пятью группами:

тестовые задания (100 задач),

задачи I уровня сложности (500 задач),

задачи II уровня сложности (250 задач),

задачи III уровня сложности (100 задач) и

творческие задания (50 задач).

Тестовые задания имеют четыре варианта ответа, среди которых находится, как правило, один верный. В ряде заданий предполагается запись в пустой строке своего варианта ответа. Тестовые задания выполняются непосредственно в Пособии. На зачёте/экзамене преподаватель может попросить обосновать выбор ответа любого тестового задания.

Задачи I уровня сложности можно считать тренировочными, так как их выполнение требует знания соответствующего теоретического материала и известных алгоритмов решения. Студенту не следует «увлекаться» выполнением тренировочных задач, как правило, достаточно решить три задачи этой группы (определённого вида), чтобы вспомнить или сформировать нужный алгоритм решения.

Задачи II уровня сложности требуют умелого сочетания ряда известных алгоритмов решения, а иногда и нестандартного подхода к задаче. Большая часть задач, решаемых студентом, должна быть из этой группы задач.

Задачи III уровня сложности требуют сформированности ряда компонентов информационной культуры, главным из которых можно считать умения, связанные с информационным (в том числе математическим) моделированием. Процесс оформления решения данного вида задач должен включать описание всех этапов информационного моделирования.

Задачи I-III уровней сложности выполняются в отдельной тетради и сдаются для проверки в установленные преподавателем сроки (до проведения зачёта).

Выполненное творческое задание представляет собой электронный ресурс, который размещается в электронном портфолио студента, преподавателю предоставляется ссылка (указывается режим доступа) на этот ресурс.

Каждая задача имеет свой «вес» – V. Вес тестового задания – 0,05 балла, вес задачи I уровня – 0,1 балла, II уровня – 0,15 балла, III уровня – 0,2 балла, вес творческого задания – 1 балл.

Для получения зачёта по модулю «Введение» студенту достаточно пройти тестирование по каждой теме (с результатом, не менее 70% верных ответов) и набрать предусмотренное рабочей программой число баллов N, причём каждая тема должна быть «представлена» не менее, чем N/10 баллами.

За каждое правильно решённое задание студент получает максимальное количество баллов V только в том случае, если он единственный из группы включает это задание в свой отчёт о выполнении заданий по теме. В противном случае максимальное количество баллов V за правильно решённое задание, делится на количество решающих n, и каждый получает за это задание V/n баллов.

В качестве методической поддержки обучающихся в Пособии предусмотрен теоретический материал, предваряющий систему заданий по каждой теме курса, и образцы рассуждений и оформления некоторых типов задач.

Отчёт о выполнении заданий по каждой теме представляется в форме таблицы, в которой фиксируются ответы на тестовые задания и номера решённых заданий I-III уровней сложности, например:

Тема 1. Понятие задачи ________________________ (Ф.И.О.)

Тестовые задания – 0,05 б.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
а	***б***	***в***	***г***	***а***	***б***	***в***	***г***	***а***	***б***

Задания I уровня сложности – 0,1 б.

№№	11	12	21	24	31	32	41	42	46	54	55	58
баллы												

Задания II уровня сложности – 0,15 б.

№№	62	66	75	82	85				
баллы									

Задания III уровня сложности – 0,2 б.

№№	87	88	90	93					
баллы									

При разработке пособия были использованы материалы дипломных работ (выполненных под руководством автора данного пособия) выпускников СГУ им. Н. Г. Чернышевского, обучавшихся

по специальности «Математика с дополнительной специальностью информатика»:

- Пояркова Т.А. Системы счисления в курсе углубленного изучения математики: дипломная работа. – Саратов, 2005.
- Мохнаткина К.В. Последовательности в школьном курсе математики: дипломная работа. – Саратов, 2006.
- Петрова Т.Г. Элементы теории множеств в школьном курсе математики: дипломная работа. – Саратов, 2007.
- Клушева Ж.С. Элементы комбинаторики в курсе математики в условиях малокомплектной средней школы (интегрированный курс): дипломная работа. – Саратов, 2007.
- Харькова С.С. Информационные модели сюжетных задач: дипломная работа. – Саратов, 2008.

и направлению подготовки «Педагогическое образование», профиль – математическое образование.

- Мурыгина Т. А. Сюжетные задачи в обучении математики учащихся 6 класса: дипломная работа. – Саратов, 2016.

I. Понятие задачи

Под *задачей* будем понимать импликацию $Y \Rightarrow T$, при условии, что логическое значение *требования* T всегда истинно: $\lambda(T) = 1$, а *условие* Y представлено конъюнкцией данных y_i: $Y = y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_n$, где возможен случай $y_i = y_{i_1} \vee y_{i_2} \vee \ldots \vee y_{i_n}$. Кроме того, между условием Y и требованием T существует функциональная взаимосвязь, позволяющая провести решение задачи, то есть $T=f(Y)$.

Из вышеперечисленных *свойств* задачи следует, что задача

(1) может иметь решение (случай $1 \rightarrow 1$, то есть $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_n = 1$, что означает следующее: $\lambda(y_i) = 1$ или $y_i \neq \neg y_j$ для любых i и j из множества $1, 2, \ldots, n$);

(2) может не иметь решений (случай $0 \rightarrow 1$, то есть $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_n = 0$, что означает следующее: $\lambda(y_i) = 0$ или $y_i = \neg y_j$ для любых i и j из множества $1, 2, \ldots, n$).

С точки зрения информационного моделирования, *задача* – информационная модель некоторой ситуации.

Компоненты задачи (Y, T) можно также считать отдельными информационными моделями.

Схема 1. Классификация задач по способу представления ее компонентов

В зависимости от типа этих моделей можно разбить все задачи на два класса: символизированные (условие – некоторая математическая модель) и текстовые задачи (схема 1).

Итак, мы определили класс задач, называемый *текстовыми задачами*: условие Y и требование T – информационные (вербальные) словесные модели.

Проведем классификацию (схема 2) текстовых задач по характеру объектов и отношений (по принадлежности к области знаний), получим текстовые задачи:

(1) математические,

(2) прикладные,

(3) сюжетные.

Приведем примеры задач каждого вида:

1) символизированная математическая задача:

- *Решить уравнение* $(x + 1) \cdot (x + 5) \cdot (x + 9) \cdot \ldots \cdot (x + 157) = 3200$.
- $(x + 1) \cdot (x + 5) \cdot (x + 9) \cdot \ldots \cdot (x + 157) = 3200;\ x = ?$

2) текстовая математическая задача: *Между числами 6 и 17 вставьте четыре числа так, чтобы вместе с данными числами они образовали арифметическую прогрессию.*

3) сюжетная (практическая) задача: *Из деревни на станцию выехал грузовик, а через 30 минут из деревни в том же направлении выехал легковой автомобиль, который догнал грузовик в 30 км от станции. После прибытия на станцию легковой автомобиль сразу же повернул назад и встретил грузовик в 6 км от станции. Сколько времени понадобилось легковому автомобилю, чтобы догнать грузовик?*

4) прикладная задача: *Масса медного шара равна 6 кг, а объем его – 2 дм^3. Определите сплошной этот шар или полый. Плотность меди равна 8900 г/м^3.*

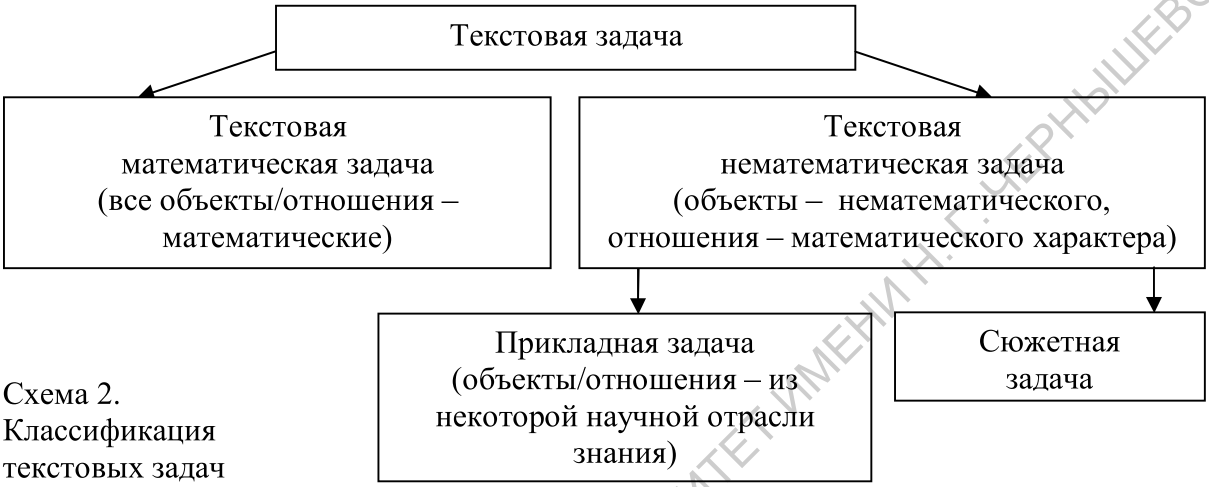


Схема 2. Классификация текстовых задач

Итак, под *сюжетной задачей* будем понимать текстовую нематематическую задачу.

С точки зрения информационного похода, *сюжетная задача* – словесная модель некоторой реальной, близкой к реальной или вымышленной ситуации. В первом случае, как любая модель сюжетная задача не является абсолютной копией своего оригинала, она лишь отражает некоторые его качества и свойства, наиболее существенные для выбранной цели исследования. При создании модели всегда присутствуют определенные допущения и гипотезы.

Процесс решения сюжетной задачи – многократное алгоритмическое по способу реализации информационное моделирование.

Решение сюжетной задачи – результат информационного моделирования, адекватный поставленному в задаче требованию.

Ответ сюжетной задачи – сформулированное на языке задачи решение.

<u>Тестовые задания (по 0,05 балла)</u>

1. Ответом задачи: *Вычислить $log_6 16$, если $log_{12}27=a$* – является утверждение

а) $log_6 16 = \dfrac{4(3-a)}{3+a}$

б) $log_6 16 = \dfrac{4(3-a)}{3+a}$, если $a \neq -3$

в) $log_6 16 = \dfrac{4(3-a)}{3+a}$, если $a \neq 3$

г) $log_6 16 = \dfrac{4(3-a)}{3+a}$, если $a \neq \pm 3$

2. Решением задачи: *Доказать, что ни при каком целом n число* $N = n^2 + 1$ *не делится на 3,* – является следующая цепочка рассуждений

а) При $n = 1$ число $N = 2$ не делится на 3. При $n = 2$ число $N = 5$ не делится на 3. При $n = 3$ число $N = 10$ не делится на 3. Продолжая рассуждать аналогично, придём к выводу, что ни при каком целом n число $N = n^2 + 1$ не делится на 3.

б) Чтобы число N делилось на 3 необходимо, чтобы оно было представимо в виде $N = 3m$, где m – целое. Тогда $3m = n^2 + 1$, или $3m - 1 = n^2$. Путём перебора убеждаемся, что квадрат натурального числа не представим в виде $3m - 1$: $n = 1$, $\underline{m = 1/3}$; $n = 2$, $\underline{m = 5/3}$; $n = 3$, $\underline{m = 10/3}$; $n = 4$, $\underline{m = 17/3}$; ...

в) Целое число n при делении на 3 может дать в остатке лишь числа $0, 1$ или 2, то есть может иметь вид $3k$, $3k + 1$ или $3k + 2$. При $n = 3k$, число $N = 9k^2 + 1$ не делится на 3. При $n = 3k + 1$, число $N = 9k^2 + 6k + 2$ не делится на 3. При $n = 3k + 2$, число $N = 9k^2 + 12k + 5$ не делится на 3. Таким образом, ни при каком целом n число $N = n^2 + 1$ не делится на 3.

г) Поскольку равносильное данному равенство $N - 1 = n^2$ выполняется только при $N = 5; 10; 17; 26$ *и т.д.*, проверим эти числа на делимость на 3. Итак, $5 = 3 + 2$, $10 = 9 + 1$, $17 = 15 + 2$, $26 = 24 + 2, \ldots$, то есть число N имеет вид $N = 3m + 1$ или $N = 3m + 2$, следовательно ни при каком целом n число $N = n^2 + 1$ не делится на 3.

3. Наиболее «перспективным» способом решения системы уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y, \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} = x \end{cases}$ является

а) подбор решений: очевидно, что пары чисел $(0; 0)$ и $(1; 1)$ являются решениями системы;

б) применение свойств пропорции: $\begin{cases} \dfrac{1+x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{1+y^2}{2y^2} = \dfrac{1}{x} \end{cases}$; замена переменных и дальнейшие алгебраические преобразования;

в) применение равносильных преобразований, приводящих сначала к совокупности $\left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0, \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{1}{2y^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x} \end{cases} \end{array} \right.$; а затем к окончательному решению: $(0; 0)$ и $(1; 1)$.

г) подстановка: $\dfrac{2\left(\dfrac{2y^2}{1+y^2}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{2y^2}{1+y^2}\right)^2} = y$ и дальнейшие преобразования.

4. Более простым равносильным неравенством, приводящим к решению неравенства $log_{100}x^2 + log_{10}^2 x < 2$, является

а) $lg^2 x + lg\, x - 2 < 0$;

б) $-2 < lg\, x < 1$;

в) $lg^2 x < lg100 - lg\, x$;

г) $(lg\, x + 2)\cdot(lg\, x - 1) < 0$.

5. Метод доказательства неравенства $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$

а) сравнение каждого слагаемого левой части с большей аликвотной дробью: $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}$;

б) метод математической индукции;

в) нахождение суммы дробей, стоящей в левой части неравенства и сравнение её с ¼;

г) геометрический метод доказательства.

6. Велосипедист от озера до деревни ехал со скоростью 15 км/ч, а обратно – со скоростью 10 км/ч. Сколько времени ушло у него на дорогу от озера до деревни, если на весь путь туда и обратно велосипедист затратил 1 час? Пусть x – время (в часах), затраченное на дорогу от озера до деревни. Какая математическая модель соответствует (адекватна) тексту задачи?

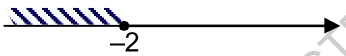
а) $15\cdot x=10\cdot(1-x)$;

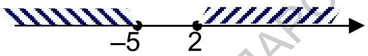
б) $\frac{15}{x} + \frac{10}{1-x} = 1$;

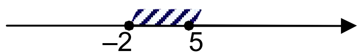
в) $15\cdot x+10\cdot(1-x)=1$;

г) $15\cdot(1-x)=10\cdot x$.

7. На каком рисунке изображена графическая модель адекватная системе неравенств $\begin{cases} 3x+6>0 \\ 10-2x>0 \end{cases}$?

а) 

б) 

в) 

г) 

8. Какая структурная модель <u>не адекватна</u> тексту задачи: *Я купил 100 фунтов шерсти за 7 гульденов. Что стоят 29 фунтов?*

а)

Ц	К	С
?	*100ф*	*7г*
	29ф	*?*

б)

Ф	×	Г	:	Ф
100		*7*		*29*

в)

Ц	К	С
1) *0,07*	*100*	*7*
2) x/29	*29*	*x*

г)

100 ф – 7 г
29 ф – ? г

9. В каком случае задача не решена?

а) Разложите на простые множители число 1463.

Решение.

1463 = 1400 + 63, значит, число 1463 делится на **7**;
1463 : 7 = 209;
209 = 190 + **19**, значит число 209 делится на 19;
209 : 19 = **11**.
Итак, 1463 = 7 · 11 · 19.

б) Решить задачу. Купили *а* тетрадей по 50 копеек и 2 ручки по 3 рубля. Сколько заплатили за покупку?
а · 50 + 2 · 300 = 50*а* + 600 (копеек)
а · 650 = 50*а* + 600
600*а* = 600
а = 100 (копеек)
Ответ. За покупку заплатили 1 рубль.

в) Верно ли неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$?

Решение
Возведём неравенство в (– 6) степень, при этом, так как основание степени больше 0, но меньше 1, знак неравенства изменится на противоположный,

получим: $\left(\frac{1}{2}\right)^{2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$ или $\frac{1}{4} < \frac{1}{27}$. Так как это неравенство неверно, то и исходное неверно.

г) Решить систему

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ 8x^2 + 4y^2 = 36x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2 + 4y^2 = 36 \cdot 4 \\ 8x^2 + 4y^2 = 36x \end{cases}$$

$$36 \cdot 4 = 36x$$

$$x = 4$$

10. В каком случае задача решена неверно, но это не повлияло на ответ?

а) Разложите на простые множители число 1463.

Решение.

1463 = 1400 + 63, значит, число 1463 делится на **7**;
1463 : 7 = 209;
209 = 190 + **19**, значит число 209 делится на 19;
209 : 19 = **11**.
Итак, 1463 = 7 · 11 · 19.

б) Решить задачу. Купили *а* тетрадей по 50 копеек и 2 ручки по 3 рубля. Сколько заплатили за покупку?
а · 50 + 2 · 300 = 50*а* + 600 (копеек)
а · 650 = 50*а* + 600
600*а* = 600
а = 100 (копеек)
Ответ. За покупку заплатили 1 рубль.

в) Верно ли неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$?

Решение
Возведём неравенство в (– 6) степень, при этом, так как основание степени больше 0, но меньше 1, знак неравенства изменится на противоположный,

получим: $\left(\frac{1}{2}\right)^{2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$ или $\frac{1}{4} < \frac{1}{27}$. Так как это неравенство неверно, то и исходное неверно.

г) Решить систему

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ 8x^2 + 4y^2 = 36x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2 + 4y^2 = 36 \cdot 4 \\ 8x^2 + 4y^2 = 36x \end{cases}$$

$$36 \cdot 4 = 36x$$

$$x = 4$$

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Не всегда решение задачи требует построения информационной, в том числе математической, модели. Иногда можно обойтись сведением задачи к последовательности элементарных задач:

$$Y \Rightarrow T1 \;\Rightarrow T2 \;\Rightarrow \ldots \;\Rightarrow T.$$

Удвоенное количество. Какой должна быть величина, если её удвоенное количество в сумме с 22 дадут сотню?

Можно, конечно составить математическую модель задачи, и используя знания о решении уравнения, ответить на вопрос задачи. А можно обойтись рассуждениями.

1 способ. Все величины в задаче – чётные, с учётом этого переформулируем задачу: сумма искомого и 11 равна 50. Значит, искомая величина равна 39.

2 способ. Если удвоенное количество в сумме с 22 дадут сотню, то без 22 удвоенное количество равно 78, а сама искомая величина равна 39.

Этот метод решения задач известен нам с начальной школы, где учитель часто предлагает решить задачу сначала устно, а затем только записать решение на математическом языке. Задача об удвоенном количестве на математическом языке может быть записана так:

1 способ

100 : 2 = 50 (половина суммы)

22 : 2 = 11 (половина от 22)

50 – 11 = 39 (искомая величина)

2 способ

100 – 22 =78 (удвоенное количество)

78 : 2 = 39 (искомая величина)

или так

x – искомая величина, $2x + 22 = 100$

$x + 11 = 50$

$x = 50 - 11$

$x = 39$

$2x = 100 - 22$

$2x = 78$

$x = 39$

Используя рассуждения решите следующие задачи.

11. Какой должна быть величина, если значение суммы её удвоенного количества и 12 такое же, как разность утроенного количества и 3?

12. Учитель задал на уроке сложную задачу. В результате количество мальчиков, решавших задачу, оказалось равно количеству девочек, ее не решивших. Кого в классе больше – решивших задачу или девочек?

13. Эдик, Вася, Андрей и Миша заняли первые четыре места в соревнованиях, причем ни на одно призовое место не было двух претендентов. На вопрос, какие они заняли места, мальчики честно ответили: 1) Андрей – «Я не был последним»; 2) Вася – «Я занял второе место»; 3) Эдик – «Я занял ни первое и ни третье место»; 4) Миша – «Андрей меня опередил». Какие места заняли мальчики?

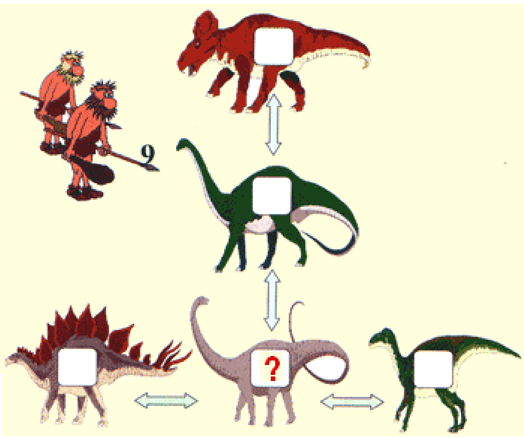
14. **Клоуны.** Три клоуна Бим, Бом и Бам вышли на арену в красной, зеленой и синей рубашках. Их туфли были тех же трех цветов. У Бима цвета рубашки и туфель совпадали. У Бома ни туфли, ни рубашка не были красными. Бам был в зеленых туфлях, но в рубашке другого цвета. Как были одеты клоуны?

15. Решить уравнение $\dfrac{1}{x} = -x$.

16. Решить уравнение $\frac{1}{x} = -x^2$.

17. Из 210 бордовых, 126 белых, 294 красных роз собрали букеты, причём в каждом букете количество роз одного цвета поровну. Какое наибольшее количество букетов сделали из этих роз и сколько роз каждого цвета в одном букете?

18. В портовом городе начинаются три туристских теплоходных рейса, первый из которых длится 15 суток, второй – 20 и третий – 12 суток. Вернувшись в порт, теплоходы в этот же день снова отправляются в рейс. Сегодня из порта вышли теплоходы по всем трём маршрутам. Через сколько суток они впервые снова вместе уйдут в плавание? Какое количество рейсов сделает каждый теплоход?



19. Расставьте числа 1, 2, 3, 4, 5 в колонке и в строчке из динозавров, так, чтобы сумма чисел как в колонке, так и в строчке была бы равна 9

20. На сайте производится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трёх футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинг одинаков?

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Часто решение текстовой задачи требует визуализации информации, составляющей её содержания, то есть построения информационной модели.

Вишневое варенье. Для варки варенья из вишни на 6 кг ягод берут 4 кг сахарного песку. Сколько килограммов сахарного песку надо взять на 12 кг ягод?

Информационная табличная модель-1 задачи «Вишнёвое варенье» (на языке задачи)

Ингредиенты	Ситуации	
	I	II
Ягоды	6 кг	12 кг
Сахарный песок	4 кг	?

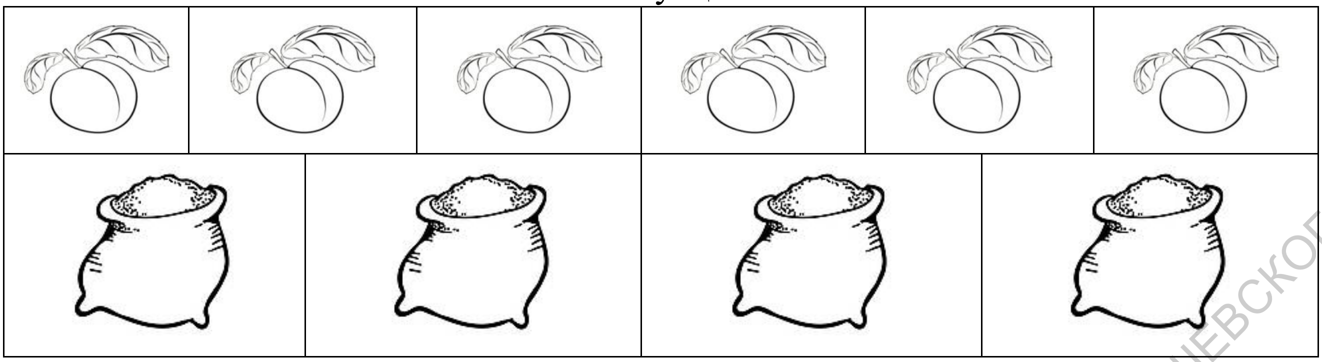
Информационная табличная модель-2 задачи «Вишнёвое варенье» (на языке числовых и буквенных величин)

Ингредиенты	I	II
Ягоды	6	12
Сахарный песок	4	x

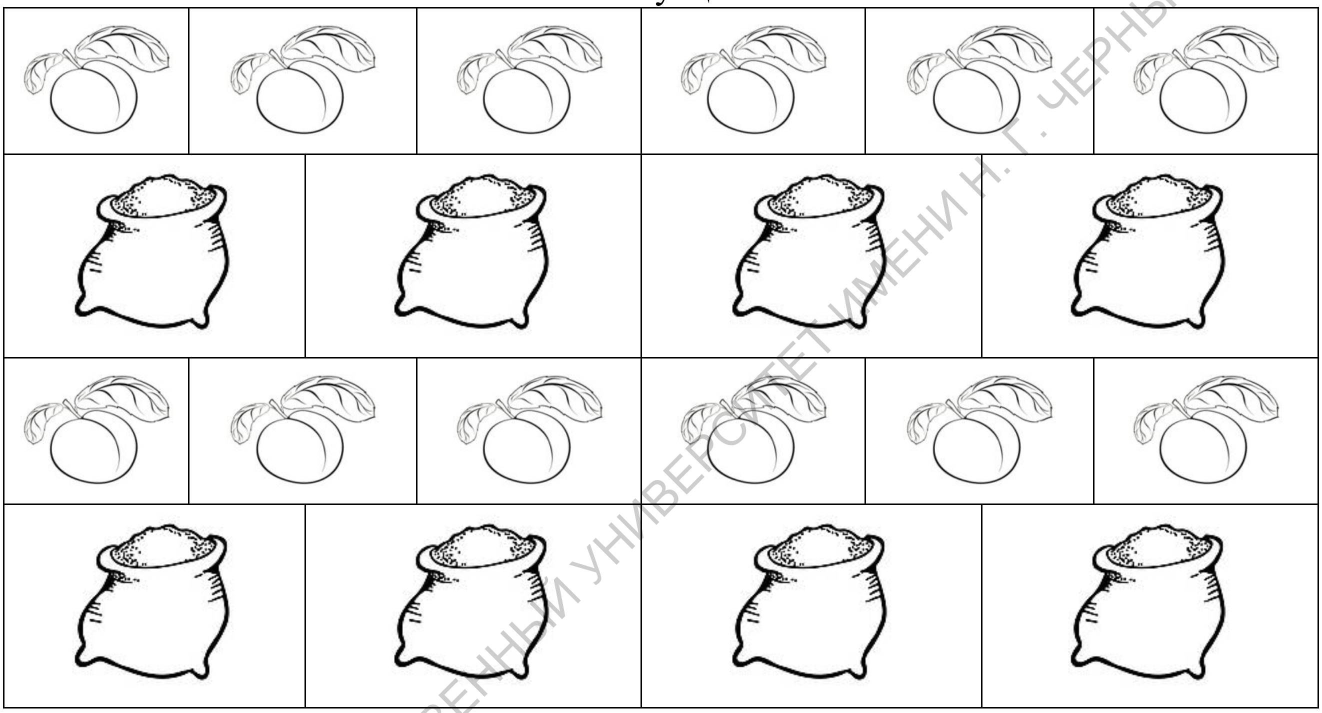
Алгебраическая модель – уравнение: $\frac{6}{4} = \frac{12}{x}$, где x – количество сахарного песка.

Схематическая модель – стилизованный рисунок

1 ситуация

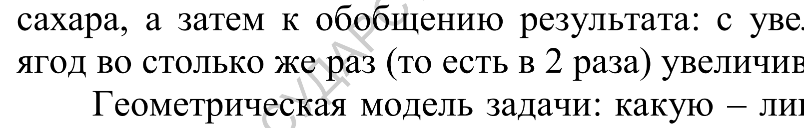


2 ситуация



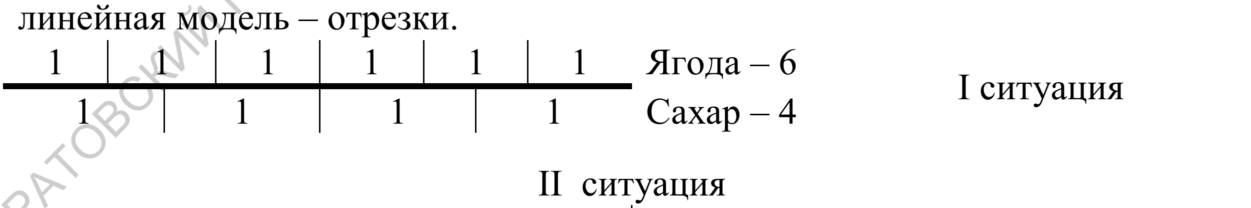
В этом случае решение сводится к прямому подсчёту «числа единиц» сахара, а затем к обобщению результата: с увеличением в 2 раза количества ягод во столько же раз (то есть в 2 раза) увеличивается количество сахара.

Геометрическая модель задачи: какую – линейную или плоскую – модель выбрать? Поскольку речь идёт только об одной величине, то выбирается линейная модель – отрезки.



I ситуация

II ситуация



Задача может быть переформулирована следующим образом: отрезок измеряется двумя способами; при первом способе его длина равна 6 единичным отрезкам, при втором – 4. Чему равна длина другого отрезка при измерении вторым способом, если первый способ измерения дал результат в 12 единичных отрезков (рисунок 3)?

Аналитическая модель (теоретическая основа – выявление закономерности):

1 следствие	3 кг ягод – 2 кг сахарного песка.
Дано:	6 кг ягод – 4 кг сахарного песка.
1 промежуточный результат:	9 кг ягод – 6 кг сахарного песка.
Вывод:	12 кг ягод – 8 кг сахарного песка.

Разнообразие информационных моделей задачи требует решения проблемы о сфере их применимости. Так, например, табличные и алгебраическая модели универсальны – позволяют решить задачу при любых числовых значениях (то есть решить задачу в общем виде: «Для варки варенья на a кг ягод берут b кг сахарного песку. Сколько килограммов сахарного песку надо взять на c кг ягод?»), другие модели имеют свои ограничения сферы применимости.

Постройте всевозможные модели следующих задач из «Арифметики» Магницкого.

21. В жаркий день 6 косцов выпили бочонок кваса за 8 часов. Нужно узнать, сколько косцов за 3 часа выпьют такой же бочонок кваса.

22. Пошёл охотник на охоту с собакой. Идут они лесом, и вдруг собака увидала зайца. За сколько скачков собака догонит зайца, если расстояние от собаки до зайца равно 40 скачкам собаки и расстояние, которое пробегает собаки за 5 скачков, заяц пробегает за 6 скачков? (В задаче подразумевается, что скачки делаются одновременно и зайцем и собакой).

23. Говорит дед внукам: «Вот вам 130 орехов. Разделите их на 2 части так, чтобы меньшая часть, увеличенная в 4 раза, равнялась бы большей части, уменьшенной в 3 раза». Как разделить орехи?

24. Собака усмотрела зайца в 150 саженях от себя. Заяц пробегает за 2 минуты 500 саженей, а собака – за 5 минут 1300 саженей. За какое время собака догонит зайца.

25. На мельнице имеется три жернова. На первом из них за сутки можно смолоть 60 четвертей зерна, на втором 54 четверти, а на третьем 48 четвертей. Некто хочет смолоть 81 четверть зерна за наименьшее время на этих трёх жерновах. За какое наименьшее время можно смолоть зерно и сколько для этого на каждый жернов надо зерна насыпать?

26. Летели скворцы и встретились им деревья. Когда сели они по одному на дерево, то одному скворцу не хватило дерева, а когда на каждое дерево сели по два скворца, то одно дерево осталось не занятым. Сколько было скворцов и сколько было деревьев.

27. Двое ели сливы. Один сказал другому: «Дай мне свои две сливы, тогда будет у нас слив поровну»,– на что другой ответил: «Нет, лучше ты дай мне свои две сливы, – тогда у меня будет в два раза больше, чем у тебя». Сколько слив было у каждого?

28. Трое мальчиков имеют по некоторому количеству яблок. Первый из мальчиков даёт другим столько яблок, сколько каждый из них имеет. Затем второй мальчик даёт двум другим столько яблок, сколько каждый из них теперь имеет; в свою очередь и третий даёт каждому из двух других столько, сколько есть у каждого в этот момент. После этого у каждого из мальчиков оказывается по 8 яблок. Сколько яблок было вначале у каждого мальчика?

29. Послан человек из Москвы в Вологду, и велено ему в хождении своём совершать во всякий день по 40 верст. На следующий день вслед ему послан второй человек, и приказано ему проходить в день по 45 верст. На какой день второй человек догонит первого?

30. Один воин вышел из города и проходил по 12 верст в день, а другой вышел одновременно и шёл так: в первый день прошёл 1 версту, во второй день 2 версты, в третий день 3 версты, в четвёртый 4 версты, в пятый 5 верст и так прибавлял каждый день по одной версте, пока не настиг первого. Через сколько дней второй воин настигнет первого?

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Рассуждения и информационные нематематические модели применяются как правило для того, чтобы неприведённое условие сделать приведённым для математического моделирования, то есть изменить конструкцию задачи так, что последовательным удалением несущественных данных и заменой отношений арифметическими действиями, получить математическую модель задачи.

Что растёт на елке? К Новому году Наташа купила три вида елочных шаров числом 2, 3 и 5 штук, причём, чем дороже шар, тем меньшее число их было куплено. Цены на шары составили 10, 17 и 25 рублей. Сколько Наташа заплатила за всю покупку?

Эта задача с неприведённым условием и сразу математическую модель составить не удастся. Привести задачу к приведённому виду можно двумя способами: (1) переформулировка с рассуждениями, (2) информационное моделирование.

Первый способ даёт такую цепочку задач, последняя из которых представлена математической моделью – числовым выражением, значение которого требуется найти.

Задача 1. К Новому году Наташа купила три вида елочных шаров числом 2, 3 и 5 штук. Цены на шары составили 25, 17 и 10 рублей соответственно. Сколько Наташа заплатила за всю покупку?

Задача 2. К Новому году Наташа купила три вида елочных шаров: 2 шара по 25 рублей за шар; 3 шара по 17 рублей за шар; и 5 шаров по 25 рублей за шар. Сколько Наташа заплатила за всю покупку?

Задача 3. Наташа купила: 2 шара по 25 рублей за шар, 3 шара по 17 рублей за шар, 5 шаров по 10 рублей за шар. Сколько Наташа заплатила за всю покупку?

Задача 4. Сколько Наташа заплатила за покупку: 2 шара по 25 руб./шт., 3 шара по 17 руб./шт. и 5 шаров по 10 руб./шт.?

Задача 5. Вычислить $25 \cdot 2 + 17 \cdot 3 + 10 \cdot 5 = ?$

Второй способ – составление информационной табличной модели сразу приводит к требуемому результату.

Ассортимент. Шары	Цена (руб./шт.)	Количество (шт.)	Стоимость (руб.)	
I	25	2	$25 \cdot 2$	50 + 51 + 50 = ?
II	17	3	$17 \cdot 3$	
III	10	5	$10 \cdot 5$	

Задачи с приведённым условием не требуют дополнительного информационного моделирования, поскольку выбор математической модели очевиден, например, из задачи 4 сразу следует задача 5. Приведём ещё несколько примеров.

Сверх плана. Бригада решила изготовить 175 изделий сверх плана. В первый день она изготовила 9/25 этого количества, во второй день – 13/25 этого количества. Сколько изделий изготовила бригада за эти два дня? Сколько изделий ей осталось изготовить?

Ответом на первый вопрос является значение выражения $175 \cdot \left(\frac{9}{25} + \frac{13}{25}\right)$, на второй вопрос задачи – значение выражения $175 \cdot \left(1 - \left(\frac{9}{25} + \frac{13}{25}\right)\right)$ или $175 - 175 \cdot \left(\frac{9}{25} + \frac{13}{25}\right)$.

Ученики и учебники. Ученики 5А класса купили 150 учебников. Каждый купил одинаковое количество книг. Сколько было пятиклассников, и сколько учебников купил каждый из них?

Пусть x – число учеников, а y – число учебников, причём, и x, и y – натуральные числа, и $x > 1$, тогда математической моделью задачи является уравнение $xy = 150$, а решением задачи (ответом на два её вопроса) – натуральные корни этого уравнения.

Забор. Игорь и Паша красят забор за 18 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 20 часов, а Володя и Игорь – за 30 часов. За сколько минут мальчики покрасят забор, работая втроём?

Путь x – производительность труда Игоря, y – Паши, z – Володи, t – время в часах, за которое мальчики покрасят забор, работая втроём, 1 – объём работы (забор), тогда математической моделью задачи является система уравнений $\begin{cases} x + y = \frac{1}{18} \\ y + z = \frac{1}{20} \\ x + z = \frac{1}{30} \\ x + y + z = \frac{1}{t} \end{cases}$, а решением задачи – значение t, которое, согласно требованию, надо перевести в минуты, то есть умножить на 60. В общем виде ответ – $60t$.

Постройте математические модели следующих геометрических задач.

31. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна 3 дм; найти площадь треугольника.

32. Найти площадь прямоугольного треугольника, если его катеты относятся как 3:4, а гипотенуза равна 25 см.

33. Дан равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны 6 см, а угол при основании 30 градусов; найти высоту, проведенную к основанию.

34. Дан равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны 6 см, а угол при основании 30 градусов; найти медиану, проведённую к основанию ***35.*** Дан равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны 6 см, а угол при основании 30 градусов; найти площадь треугольника

36. Дан равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны 6 см, а угол при основании 30 градусов; найти расстояние между серединой основания и боковой стороной.

37. Дан равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны 6 см, а угол при основании 30 градусов; найти радиус описанной около треугольника окружности.

38. Дан равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны 6 см, а угол при основании 30 градусов; найти радиус вписанной в треугольник окружности.

39. В треугольнике ABC с прямым углом C, $\sin B = 5/13$ и катетом $BC = 26$ провели высоту CH. Найдите длину отрезка BH.

40. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 8$ и $CH = 2$. Найдите высоту ромба.

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Иногда по каким-либо причинам построенная математическая модель нас не устраивает. В этим случае строят информационные модели, позволяющие найти иной способ решения задачи, используют разнообразные эвристические приёмы, рассуждения, метод исчерпывающих проб.

Знакочередующийся ряд. В ряд выписаны числа от 1 до 2016 в порядке возрастания. Можно ли между ними расставить знаки «+» и «–» так, чтобы значение полученного выражения было точным квадратом натурального числа?

Составить математическую модель задачи можно: $\begin{cases} i,\, j = \{1,2,\ldots,2016\} \\ i \neq j \\ \sum\limits_i i - \sum\limits_j j = m^2,\, m \in N \end{cases}$,

но как вывести из неё требование задачи? Итак, модель помогла мало, попробуем найти решение другим путём, например, рассуждая по индукции (жирным выделены значения, равные нулю):

Последовательность	Числовой ряд	Сумма
1	1	$1 = 1^2$
1, 2	– 1 + 2	$1 = 1^2$
1, 2, 3	– 1 + 2 + 3	$4 = 2^2$
1, 2, 3, 4	**1 + 2 – 3** + 4	$4 = 2^2$
1, 2, 3, 4, 5	**1 + 2 – 3** + 4 + 5	$9 = 3^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6	**1 + 2 + 3** + 4 + 5 **– 6**	$9 = 3^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	**1 + 2 + 3** + 4 + 5 **– 6** + 7	$16 = 4^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8	$36 = 6^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9		

Чисел становится всё больше, манипулировать с ними – всё сложнее. Нельзя ли свести дальнейшие манипуляции к уже полученным результатам? Рассмотрим числа, следующие за первыми 8 числами ряда: 9, 10, 11, 12:

$$9 + 12 = 10 + 11,$$

значит 9 и 12 берём с одним знаком, а 10 и 11 – с противоположным, то есть

$$9 - 10 - 11 + 12 = 0 \text{ или}$$
$$-9 + 10 + 11 - 12 = 0.$$

Этим же свойством обладают любые четыре последовательно взятые натуральные числа, например, 2013 – 2014 – 2015 + 2016 = 0.

Значит, следуя нашему методу, который действует для натурального ряда, состоящего более чем из 4 натуральных чисел, будем отбрасывать четвёрки чисел, начиная справа (то есть с «конца ряда»), оставляя в начале ряда не более 8 чисел (для рядов от 9 и более членов). Попробуем (с учётом предыдущих результатов – выделены цветом) один из вариантов.

Последовательность	Числовой ряд	Сумма
1	1	$1 = 1^2$
1, 2	– 1 + 2	$1 = 1^2$
1, 2, 3	– 1 + 2 + 3	$4 = 2^2$
1, 2, 3, 4	1 + 2 – 3 + 4	$4 = 2^2$
1, 2, 3, 4, 5	1 + 2 – 3 – 4 + 5	$1 = 1^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6	– 1 + 2 + 3 – 4 – 5 + 6	$1 = 1^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	– 1 + 2 + 3 + 4 – 5 – 6 + 7	$4 = 2^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1 + 2 – 3 + 4 + 5 – 6 – 7 + 8	$4 = 2^2$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	1 + 2 – 3 + 4 + 5 + 5 – 6 – 7 + 8	$9 = 3^2$
	1 + 2 – 3 – 4 + 5 + 6 – 7 – 8 + 9	$1 = 1^2$

И наконец, дадим положительный ответ на вопрос нашей задачи, предоставив пару вариантов её решения. 2016 : 4 = 504, значит, согласно нашему способу:

$$1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + 9 - 10 - 11 + 12 + \ldots + 2013 - 2014 - 2015 + 2016 =$$
$$= 4 = 2^2$$

или

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - 10 - 11 + 12 + \ldots + 2013 - 2014 - 2015 + 2016 =$$
$$= 36 = 6^2$$

Решите следующие задачи.

41. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 499. Сколько всего цифр написано на доске?

42. Бригада из пяти плотников и одного столяра выполнила работу. Плотники получили за неё по 200 рублей, а столяр – на 30 рублей больше среднего заработка бригады. Сколько рублей получил за работу столяр?

43. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно 1080.

44. Узлами клетчатой бумаги будем называть точки пересечения вертикальных и горизонтальных прямых. На клетчатой бумаге нарисован квадрат с вершинами в узлах и сторонами, направленными вдоль диагоналей клеток. Каждая сторона квадрата равна по длине 10 диагоналям клеток. Сколько узлов находится внутри квадрата?

45. Найти сумму всех четырехзначных чисел, записываемых только цифрами 1 и 2.

46. Найдите натуральное число, при возведении которого в куб получается число 1000003000003000001.

47. Числитель дроби увеличили на 20%. На сколько процентов нужно уменьшить её знаменатель, чтобы в итоге дробь возросла вдвое?

48. Две старушки вышли одновременно, на рассвете, навстречу друг другу, первая из пункта А, вторая из пункта В. Они встретились в 12.00 и пошли дальше. В 16.00 первая старушка пришла в пункт В, в 21.00 вторая старушка пришла в пункт А. В котором часу был рассвет?

49. На доске написаны числа 1,2,3,4,5,6,7,8,9. За один ход можно увеличить одно из чисел (любое) на 3 или на 5. Какое минимальное количество ходов нужно сделать, чтобы все числа стали равными?

50. В комнате находятся рыцари и лжецы – всего 11 человек. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Первый человек говорит: «В этой комнате все лжецы». Второй говорит: «Тот, кто говорил передо мной, сказал неправду». Оставшиеся 9 человек по очереди повторили фразу второго. Сколько рыцарей в комнате?

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Ещё один способ научиться решать задачи – понять, как устроена та или иная задача, какие её специфические особенности позволили определиться с выбором метода или способа решения. Другими словами, исследовать собственно задачу и метод её решения на предмет обобщения.

Так, например, задача про знакочередующийся ряд может быть обобщена до следующей: «В ряд выписаны подряд все натуральные числа от a до b в порядке возрастания. Можно ли между ними расставить знаки «+» и «–» так, чтобы значение полученного выражения было точным квадратом натурального числа?». Таким образом мы сконструировали новую задачу, записав условие в общем виде. При этом подход к решению новой задачи будет тем же, а вот результат – другим.

Можно расширять не только условие, но и требование задачи. Приведём пример.

Автомобили. Найдите скорость автомашины, если 80 км она проезжает:

а) за 1 ч; б) за $\frac{4}{5}$ ч; в) за $\frac{4}{3}$ ч; г) за $\frac{8}{7}$ ч;

д) за 50 мин; е) за 65 мин; ж) за 90 мин; з) за 100 мин.

Расширим задание за счёт включения следующих вопросов и дополнительных заданий:

и) обозначив машины соответственно А, Б, В и т.д;

к) какая из машин придёт к финишу первой, если все они будут участвовать в гонках?

л) между машинами А и Б 80 км; через какое время эти машины встретятся, если будут двигаться навстречу друг другу?

м) какая из машин Б или В пройдёт большее расстояние, при условии, что В ехала 3 часа, а Б 5 часов?

н) машина А проехала тоннель за 1 минуту; за сколько проедет этот тоннель машина Д?

п) на сколько водителю машины Ж надо изменить скорость для того, чтобы в гонках он пришёл к финишу первым?

р) машины Ж и З выехали навстречу друг другу из двух населённых пунктов, расстояние между которыми – 360 км, и встретились посередине пути; сколько в пути был каждый автомобиль?

с) машины Г и Е выехали из пункта А, в пункт В, расстояние между которыми – 320 км; и прибыли в последний одновременно; машина Г выехала из пункта А в 13.00; во сколько из пункта А выехала машина Е?

Понятно, что такое количество вопросов требует, по крайней мере, построения некоторой единой информационной модели, например, табличной (*скорость – время – расстояние*).

Имеющиеся алгебраические модели можно интерпретировать по-разному. Так, например, $c = a \cdot b$ можно рассматривать, как формулу выражающую стоимость c от цены a, как формулу площади прямоугольника, как количество упорядоченных пар $(a;\ b)$, где a и b – элементы конечных множеств и т.п. Поэтому использование этой формулы лежит в основе методов решения многих задач и конструирования большинства учебных задач школьного курса математики. Например, сколько двузначных чётных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Составьте и решите задачи:

51) обобщив задачу: «На доске написаны числа 1,2,3,4,5,6,7,8,9. За один ход можно увеличить одно из чисел (любое) на 3 или на 5. Какое минимальное количество ходов нужно сделать, чтобы все числа стали равными?»;

52) обобщив задачу: «На доске написаны все натуральные числа от 1 до 499. Сколько всего цифр написано на доске?»;

53) обобщив задачу: «Числитель дроби увеличили на 20%. На сколько процентов нужно уменьшить её знаменатель, чтобы в итоге дробь возросла вдвое?»;

54) аналогичную задаче: «В комнате находятся рыцари и лжецы – всего 11 человек. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Первый человек говорит: «В этой комнате все лжецы». Второй говорит: «Тот, кто говорил передо мной, сказал неправду». Оставшиеся 9 человек по очереди повторили фразу второго. Сколько рыцарей в комнате?»;

55) аналогичную задаче: «Найдите натуральное число, при возведении которого в куб получается число 1000003000003000001»;

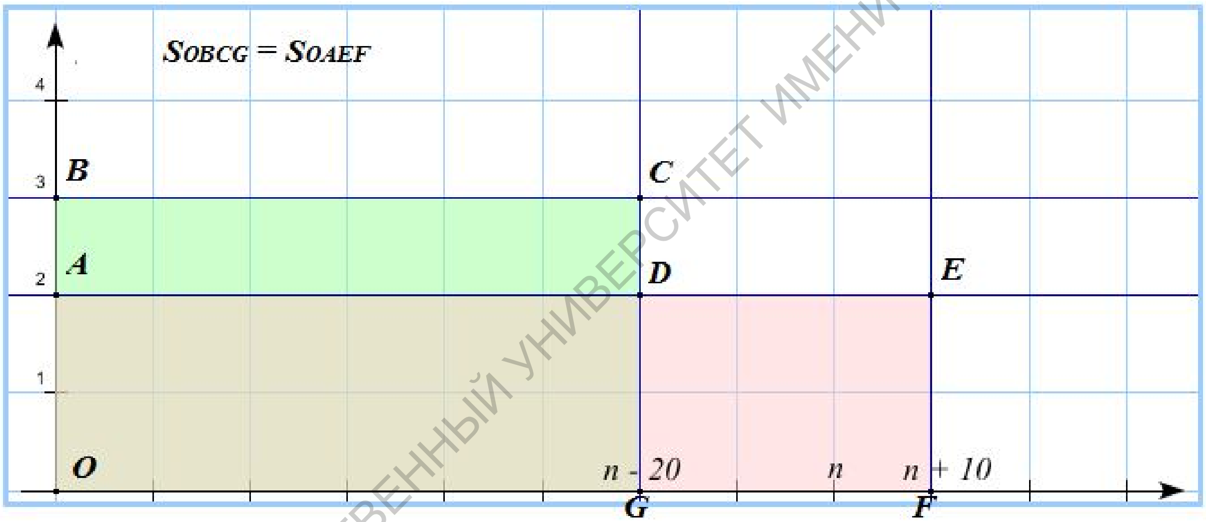
56) расширив требования задачи: «Узлами клетчатой бумаги будем называть точки пересечения вертикальных и горизонтальных прямых. На клетчатой бумаге нарисован квадрат с вершинами в узлах и сторонами, направленными вдоль диагоналей клеток. Каждая сторона квадрата равна по длине 10 диагоналям клеток. Сколько узлов находится внутри квадрата?»;

57) расширив требование задачи **Знакочередующийся ряд**;

58) расширив требование задачи **Ученики и учебники**;

59) математическая модель которой $\frac{7}{5} = \frac{12}{x}$;

60) математическая модель которой



<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Начинается решение задачи как правило с выяснения, типовая задача или нет. Типовой считается задача, алгоритм или метод решения которой известен решающему, в ином случае задача <u>для него</u> типовой не является; чаще такие задачи называются нестандартными.

И типовые и нестандартные задачи обладают высоким обучающим и развивающим потенциалом. Так, вполне типовая задача на нахождение значения числового выражения может быть интересной и познавательной, если задаться целью рационализации вычислений или построения такой разрешающей информационной модели, которая позволит не проводя дополнительных вычислений осуществить проверку и т.п.

Удвоение. Олин из древних способов умножения чисел, суть которого поясним на примерах. Будем умножать число 34 последовательно на 1, 2, 3, 4, 5 и т.д., пока не выявим метод.

1	34		
2	68		
		3	68+34=102
4	136	3	136–34=102
		5	136+34=170
		6	136+68=204
		7	136+68+34=238
8	272	7	272–34=238
		9	272+34=306
		10	272+68=340
		11	272+68+34=374
		12	272+136=408
		13	272+136+34=442
		14	272+136+68=476
		15	272+136+68+34=510
16	544	15	544–34=510
		17	544+34=578

34	16
68	8
136	4
272	2
544	1

34	17=16+**1**
68	8
136	4
272	2
544	1

34	77=76+**1**
68	38
136	19=18+**1**
272	9=8+**1**
544	4
1088	2
2176	1

34 · 16 = 544

34 · 17 = 544+34=578

34 · 77 = 2176+272+136 +34 = 2448+170 =2618

Итак, умножение на любое число свелось к устному умножению на степень двойки, то есть к удвоению числа, и сложению/вычитанию этих степеней (удвоенных количеств). Метод вполне применим для устного умножения двузначных чисел или трёхзначного числа на однозначное, но громоздок. Попробуем, оставив принцип удвоения, сократить запись.

Будем умножать 34 на 16 удваивая первое число и одновременно с этим уменьшая вдвое второе число, получим очень компактную запись и результат: 34 · 16 = 544.

Применим наш способ к умножению 34 на 17, а затем на 77, и убедимся, что он работает. Дайте обоснование этому способу.

61. Дайте описание и обоснование предложенным методам сложения и умножения многозначных чисел.

А.

```
    8 7 6 5
    5 4 3 2
  + 1 0 9 8
    7 6 5 4
    3 2 1 9
    -------
        2 8
      2 4
  +   1 9
  2 4
  ---------
  2 6 1 6 8
```

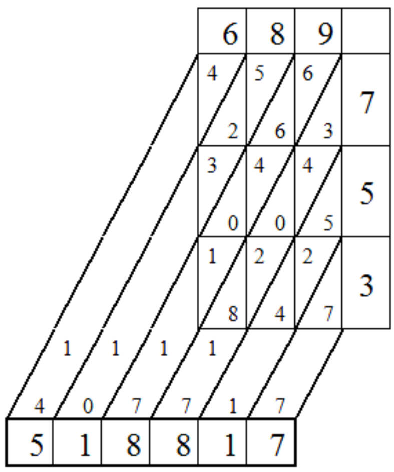
Б.

```
        6 8 9
      × 7 5 3
      -------
          2 7
        2 4
        4 5
  +   1 8
      4 0
      6 3
    3 0
    5 6
  4 2
  -----------
  5 1 8 8 1 7
```

В.

```
        6 8 9
      × 7 5 3
      -------
  + 4 2 0 0 2 7
      8 6 6 9
      1 2 1
    -----------
    5 1 8 8 1 7
```

Г.



62. Умножение некоторого числа на 9 можно свести к вычитанию двух чисел. Подумайте, каких, и предложите аналогичный способ умножения чисел на 99, на 999 и числа, близкие с 10, 100, 1000 и т.д.

Деление числа 786401 на 999 было произведено следующим образом:
$786401 = 786 \cdot 1000 + 401 = 786 \cdot 999 + 786 + 401 = 786 \cdot 999 + 786 + 213 + 188 =$
$= 767 \cdot 999 + 188.$
$786401 : 999 = 787$ (ост. 188).

Действуя по аналогии, разделите это же число на 99, 9999, на 98 и 102.

Для того, чтобы перемножить два двузначных числа, близких к 100, достаточно вычесть из одного дополнение второго до 100 и, увеличив разность в 100 раз, прибавить к ней произведение дополнений исходных чисел до 100. Проиллюстрируйте этот метод на примере $93 \cdot 98$ и дайте ему обоснование. Обобщите этот метод на умножение чисел близких к 1000.

63. Будем называть ***экспресс-методом*** метод решения типовой задачи «в обход известного алгоритма». Например, экспресс-метод возведения в квадрат числа, оканчивающегося на 5 сводится в поиску числа сотен, поскольку число единиц будет в любом случае равно 25, а число сотен находим по правилу: число десятков данного числа умножить на следующее за ним натуральное число: $95^2 = \overline{\underbrace{**}_{9\cdot 10}25} = 9025$ или $35^2 = \overline{\underbrace{**}_{3\cdot 4}25} = 1225$. Экспресс-методы разрабатываются, как правило, для решения частных задач.

Обоснуйте экспресс-метод умножения двух чисел, у которых цифры единиц в сумме дают 10, а цифры других разрядов совпадают:

$$\overline{ab} \cdot \overline{ac} = \overline{\underbrace{*\ldots*}_{a\cdot(a+1)}\underbrace{**}_{b\cdot c}}, \text{ если } b + c = 10$$

Разработайте экспресс-метод умножения двух чисел, оканчивающихся на 5.

64. Разработайте экспресс-метод решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, при условии $b = a + c$.

65. Разработайте экспресс-метод решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $\pm b = ac + 1$.

66. Разработайте экспресс-метод решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $\pm b = ac + 1$.

67. Разработайте экспресс-метод решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + ac = 0$, где $\pm b = a^2 + c$.

68. Иногда исследование типовых задач позволяет сделать математическое открытие. Мы знаем, что линейное уравнение – уравнение первой степени с одной неизвестной – всегда имеет один корень. А квадратное уравнение – уравнение второй степени с одной неизвестной – или не имеет корней, или имеет один корень, или имеет два корня. Нельзя ли «сделать» так, чтобы квадратное уравнение всегда имело два корня (по числу степени, как и линейное уравнение), ведь в этом случае уравнение 3 степени будет всегда иметь 3 корня, уравнение 4 степени – 4 корня и т.д.?

Откажемся от экспресс-метода решения квадратного уравнения с использованием дискриминанта и будем выделять полный квадрат.

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
$$\left[x^2 + 2x\cdot\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left[x^2 + 2x\cdot\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Предположим, что мы можем извлечь корень из отрицательного числа, тогда $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 = 0$ и $\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$, то есть наше уравнение, как мы и хотели, в любом случае будет иметь два корня (по числу степени): два различных действительных корня, если дискриминант $b^2-4ac>0$, два равных действительных корня, если дискриминант $b^2-4ac=0$ и два «ещё каких-то», не являющихся действительными, корня, если дискриминант $b^2-4ac<0.$ Какие это числа? Рассмотрим конкретный пример, решим уравнение $x^2-2x+5=0$.

$$\left(x-1-\frac{\sqrt{4-4\cdot 5}}{2}\right)\cdot\left(x-1+\frac{\sqrt{4-4\cdot 5}}{2}\right)=0.$$
$$x_1 = 1+\frac{\sqrt{16\cdot(-1)}}{2},\quad x_2 = 1-\frac{\sqrt{16\cdot(-1)}}{2}.$$
$$x_1 = 1+2\sqrt{-1},\quad x_2 = 1-2\sqrt{-1}.$$

Запись $\sqrt{-1}$ следует понимать, как число, квадрат которого равен (– 1); такое число получило в математике название мнимой единицы[1] и обозначение *i*. Запишем решение нашего уравнения с учётом введённых обозначений для чисел новой природы: $x_1 = 1+2i,\quad x_2 = 1-2i.$

Числа, являющиеся корнями нашего уравнения называют комплексными.

69. Решите уравнения: $x^3+7x^2+11x+5=0$ и $x^3+5x^2+9x+5=0$. Сколько и какие корни имеет каждое уравнение? Разработайте экспресс-метод для решения уравнений, аналогичных данным.

70. Решите уравнение $x^4-10x+169=0$.

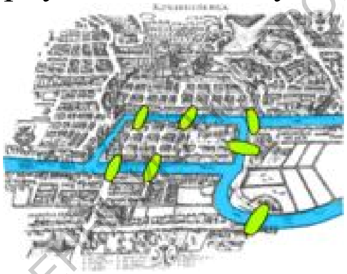
---

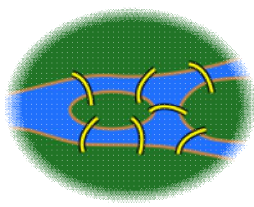
[1] Утверждение, что мнимая единица – это «квадратный корень из (−1), не точно: ведь (−1) имеет два квадратных корня, один из которых можно обозначить как *i*, а другой как (–*i*). Какой именно корень принять за мнимую единицу – неважно: все равенства сохранят силу при одновременной замене всех *i* на (–*i*) и (–*i*) на *i* . Однако из-за этой двусмысленности, чтобы избежать ошибочных выкладок, обозначение для *i* через радикал, т.е. $\sqrt{-1}$ не применяют.

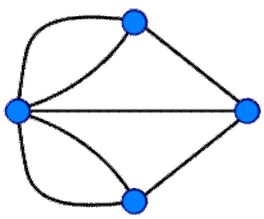
71. Развитию математической теории может поспособствовать решение на первый взгляд просто занимательной задачи. Известный математик Леонард Эйлер сделал множество математических открытий, занимаясь деятельностью отнюдь не математической.

«Мне была предложена задача об острове, – как писал в своем письме Л.Эйлер – расположенном в городе Кёнигсберге и окруженном рекой, через которую перекинуто 7 мостов. Спрашивается, может ли кто-нибудь непрерывно обойти их, проходя только однажды через каждый мост. И тут же мне было сообщено, что никто еще не смог это проделать, но никто и не доказал, что это невозможно. Вопрос этот, хотя и банальный, показался мне достойным внимания тем, что для его решения недостаточны ни геометрия, ни алгебра, ни комбинаторное искусство. После долгих размышлений я нашел легкое правило основанное на вполне убедительном доказательстве, при помощи которого можно во всех задачах такого рода тотчас же определить, может ли быть совершен такой обход через какое угодно число и как угодно расположенных мостов».

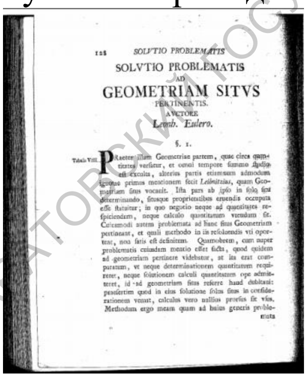
Город Кёнигсберг (ныне Калининград) располагается на обоих берегах реки Прегель и на двух островах, которые соединялись семью мостами. План расположения мостов приведен на первых трёх рисунках. Задача, о которой говориться в письме, состоит в том, чтобы во время прогулки пройти каждый мост по одному разу и вернуться в исходную точку.

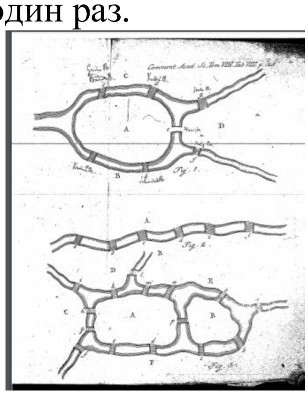


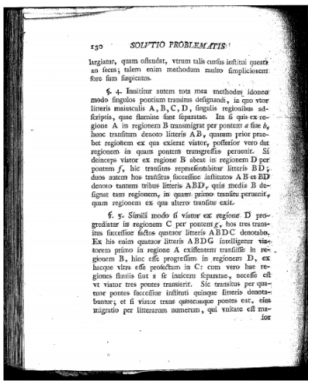




Так как нас интересуют только переходы по мостам, то план города можно заменить схемой, представленной на последнем рисунке. Нетрудно проверить, что фигуру, изображенную на схеме нельзя обвести ручкой, не отрывая её от бумаги и проходя по каждой дуге ровно один раз.

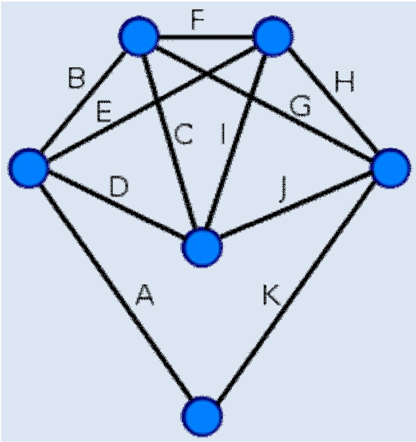






Исследуя ситуацию с кёнигсбергскими мостами, Эйлер решил значительно более общую задачу. А именно, в любом конечном связном графе, все вершины которого чётны (то есть в них сходится чётное число рёбер), существует цикл, в котором каждое ребро графа участвует ровно один раз. В честь Эйлера такой цикл называют эйлеровым циклом, а граф, в котором существует эйлеров цикл, – эйлеровым графом.

Обратившись к графу в задаче о кёнигсбергских мостах, замечаем, что все его четыре вершины являются нечетными (в трёх их них сходятся по три ребра, а в одной – пять ребер). Значит, Этот граф не является эйлеровым, поэтому решения не существует.

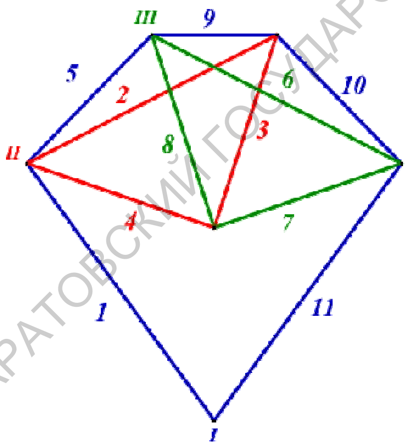


Существуют несколько способов построения эйлерова цикла: на рисунке изображён граф, каждая вершина которого чётна, поэтому этот граф – эйлеров; обход рёбер в алфавитном порядке даёт эйлеров цикл.

Рассмотрим универсальный и достаточно простой алгоритм, при помощи которого задача построения эйлерова цикла всегда разрешима.

Заметим, что выйдя из некоторой вершины и не пытаясь пройти по уже пройденному ребру еще раз, мы неизбежно вернемся в эту вершину[1], а вернувшись, окажемся перед двумя возможными ситуациями: (1) в построенный нами цикл входят все ребра графа (задача решена), (2) остались еще не пройденные ребра.

Во втором случае в полученном нами первом цикле обязательно есть вершина, из которой выходит еще не пройденное нами ребро. Из этой вершины проложим путь по ещё не пройденным рёбрам, пока не вернёмся в это вершину (второй цикл), опять окажемся перед теми же двумя ситуациями. В случае первой ситуации: сначала перемещаемся по маршруту первого цикла от первой до второй вершины, затем проходим по второму циклу и, вернувшись во вторую вершину, завершаем перемещение в первую вершину по нетронутой части первого цикла. Если мы и на этот раз не прошли по всем ребрам, обращаясь к вершине полученного цикла, из которой выходят не использованные еще ребра, вновь расширяем его описанным выше способом и т.д. Повторяя в случае необходимости подобные рассуждения еще и еще раз, мы сможем в результате построить эйлеров цикл.



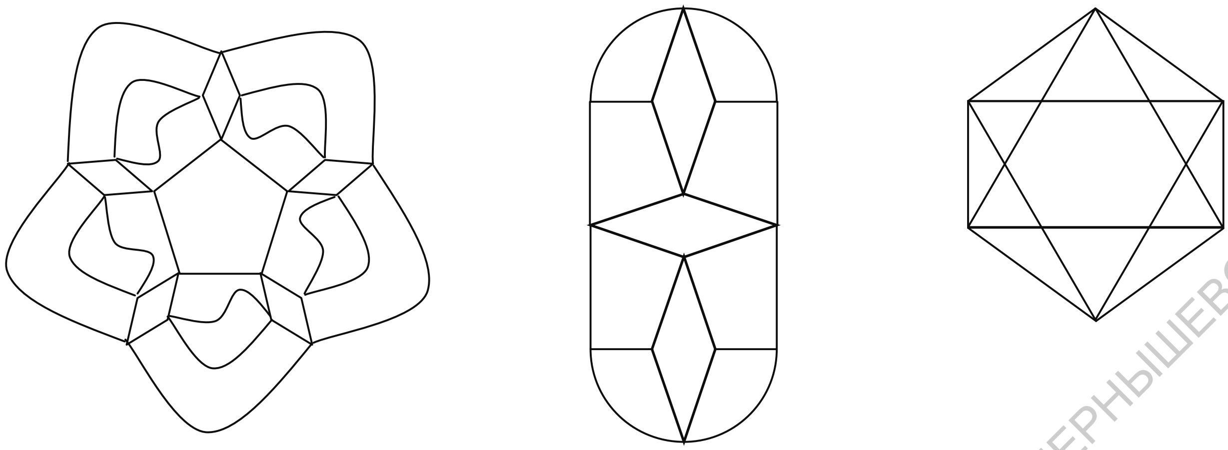
Покажем на примере: первый цикл (синий цвет) берёт своё начало и имеет конец в вершине I, второй (красный цвет) – начинается и заканчивается в вершине II, третий (зелёный) – в вершине III.

Сначала перемещаемся по маршруту первого цикла от I до II вершины, затем проходим по второму циклу, вернувшись во II вершину, перемещаемся в III и проходим по третьему циклу; вернувшись в III вершину завершаем перемещение в I вершину по нетронутой части первого цикла».

Предложите своё решение задачи в 2 и в 3 цикла.

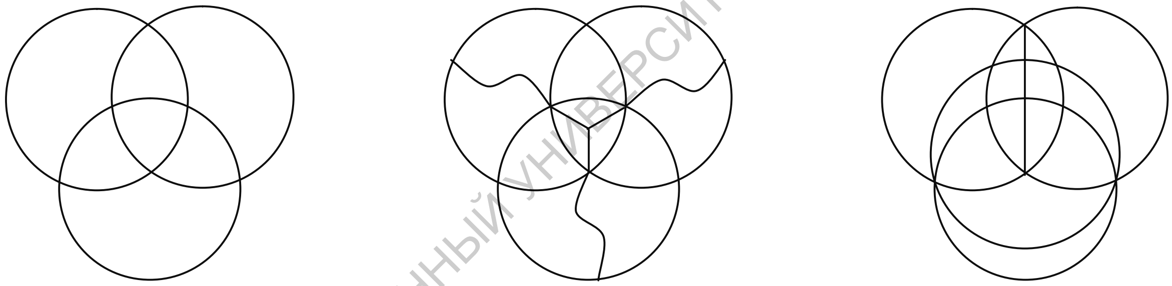
[1] Это объясняется тем, что, входя в любую вершину графа, мы всегда имеем возможность выйти из нее, т.к. в каждой вершине графа сходится четное число ребер.

72. Достройте до эйлерова графа (можно ли это сделать, не нарушая симметрии?) и/или постройте эйлеров цикл.



73. Муравей забрался в банку из-под сахара, которая имеет форму куба. Сможет ли муравей последовательно обойти все двенадцать ребер куба, не проходя дважды по одному ребру?

74. Принято всякую замкнутую линию, если ее можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, проходя при этом каждый участок в точности один раз, называть ***уникурсальной***. Являются ли следующие линии уникурсальными?



75. Попробуйте раскрасить графы из задач 71, 72 и 73, используя 2 цвета, 3 цвета, 4 цвета, 5 цветов так, чтобы при этом любые две области, имеющие общий участок границы[1], были раскрашены в разные цвета**.** Сформулируйте задачу в общем виде и возможные гипотезы по её решению.

76. Иногда не зная алгоритма или метода решения задачи, мы пытаемся, что называется, угадать решение, действуя методом проб и ошибок. Если мы перебрали всевозможные варианты, то можно с определённостью сказать, имеет ли задача решение, сколько решений и какие именно решения. Этот метод исчерпывающих проб иногда является весьма эффективным. Если перебрать все варианты нет возможности, нет возможности вывести какую-либо закономерность или рассуждать по индукции, но одно из решений найдено, то мы должны понимать, что решили только часть задачи, нашли частное её решение.

[1] Под общим участком границы понимается часть линии, то есть стыки нескольких областей в одной точке общей границей для них не считаются

Например, требуется решить уравнение в целых числах: $3x + 5y = 7z$. Анализируя коэффициенты при неизвестных, приходим к выводу, что x должен делиться на 5 и 7, y – на 3 и 7, z – на 3 и 5. Подставим соответствующие этому требованию числа в левую и правую части уравнения, получим: $3\cdot(5\cdot 7) + 5\cdot(3\cdot 7)$ и $7\cdot(3\cdot 5)$. Чтобы уравнять эти два выражения, необходимо удвоить последнее: $3\cdot(5\cdot 7) + 5\cdot(3\cdot 7) = 7\cdot(3\cdot 5)\cdot 2$. Итак, $x = 35$, $y = 21$, $z = 30$. Одно, частное решение найдено.

Насколько эффективен предложенный способ решения? Проверьте его на другом линейном уравнении с тремя неизвестными. Предложите свой способ решения этой задачи.

77. Оказывается, что любую денежную сумму, выраженную целым числом рублей, большим 7, можно уплатить без сдачи, имея лишь трёхрублёвые и пятирублёвые купюры в достаточном количестве. Докажите это.

78. Оказывается, что любую покупку стоимостью в целое число рублей можно заплатить одними трёхрублёвыми купюрами, если у кассира имеются только пятирублёвые купюры. Докажите это и укажите, какое наименьшее количество пятирублёвых купюр достаточно при этом иметь кассиру. Как эта задача связана с предыдущей?

79. Можно ли набрать сумму в 1000 рублей с помощью купюр достоинством в 1, 10 и 100 рублей таким образом, чтобы всего было использовано 40 купюр?

80. На складе имеются гвозди, упакованные в ящики по 16, 17 и 40 кг. Может ли кладовщик отпустить 140 кг, 150 кг и 210 кг гвоздей, не вскрывая ни одного ящика? А если гвозди разных видов, и нужно, например, обязательно 3 ящика какого-то определённого вида?

81. Требуется разлить 20,5 литра сок в банки по 0,7 л и 0,9 л так, чтобы все банки оказались полными. Сколько каких банок надо заготовить? Какое наименьшее количество банок при этом может понадобиться?

82. Часто практическая или прикладная задача не имеет рационального решения, а для нужд практики её иррациональное решение неприемлемо. В этом случае приходится искать приближённое значение с наперед заданной точностью. Пусть решением задачи стало число $23\sqrt{36825}$; исходя из условия и требования задачи нужно искать приближённое значение этой величины с точностью до десятых, а в нашем калькуляторе нет операции извлечения корня. Запишем подкоренное выражение в виде $x^2 + a,\ 0 < a < x^2$, тогда $\sqrt{x^2 + a} \approx x$. Применим формулу, улучшающую приближение: $\sqrt{x^2 + a} \approx x + \dfrac{a}{2x}$.

Итак, $\sqrt{36825} = \sqrt{190^2 + 725} \approx 190 + \dfrac{725}{380}$ – числитель дроби больше её знаменателя, поэтому $\sqrt{36825} = \sqrt{191^2 + 344} \approx 191 + \dfrac{344}{2\cdot 191} = 191\dfrac{172}{191} \approx 191{,}90$

$191{,}9^2 = 36825{,}61$, а $191{,}8^2 = 36787{,}24$. Первое приближённое значение дано с избытком, но более точно, поэтому $23\sqrt{36825} \approx 23\cdot 191{,}9 = 4413{,}7$.

Используя предложенный способ, вычислите $\sqrt{360825}$ и $\sqrt{1360827}$. Предложите свой способ приближённого вычисления квадратного корня.

83. Способ Герона по улучшению приближения квадратного корны из числа заключается в цепочке преобразований:

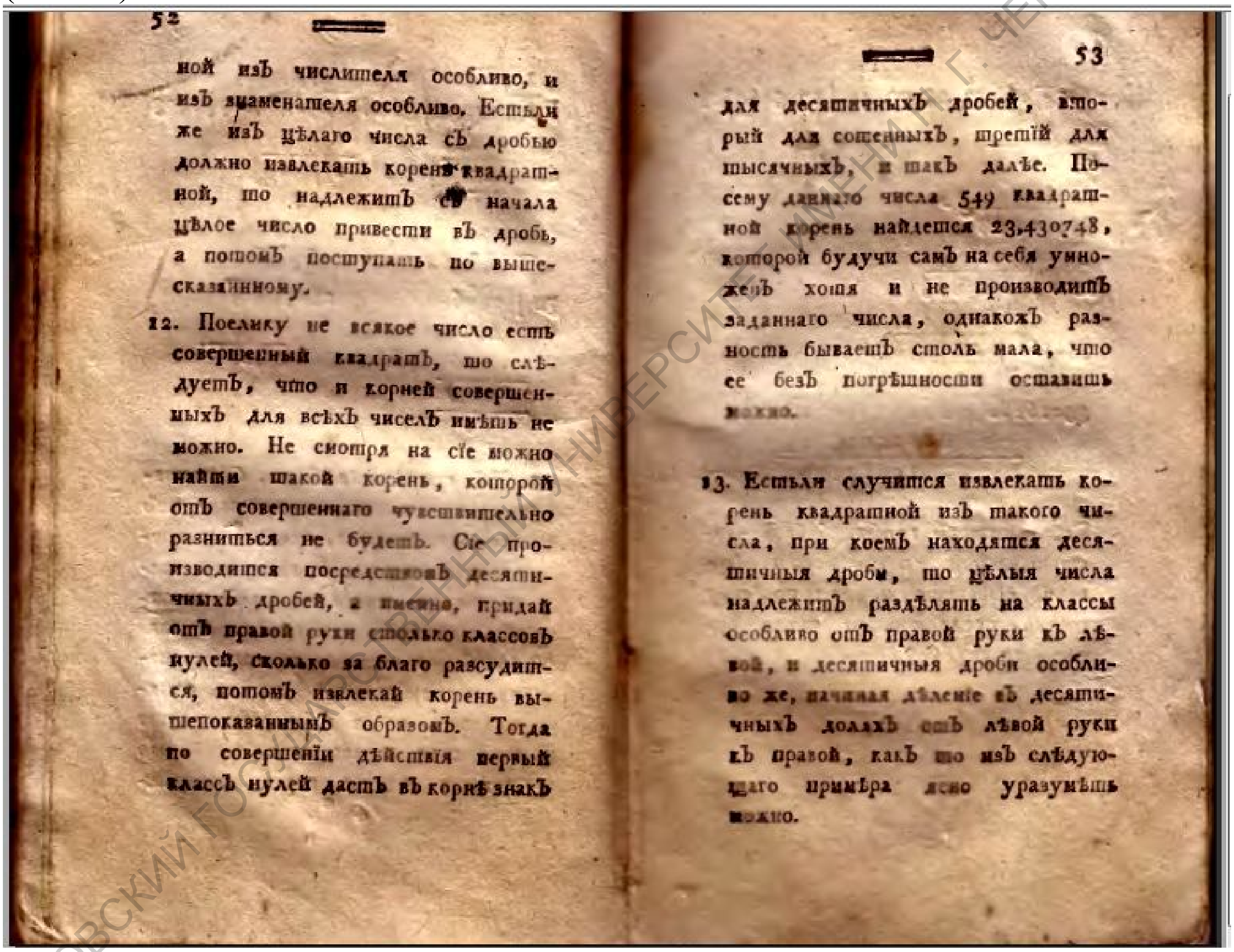
Пусть $\sqrt{a} \approx x_1$ – первое приближение, тогда

второе приближение $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right)$,

третье приближение $x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2} \right)$, …

Найдите с помощью способа Герона приближённые значения корней из предыдущей задачи проделав три шага.

84. А вот способ, описанный в п.12 Руководства к арифметике: часть 2 (1804 г.)


52

ной изъ числителя особливо, и изъ знаменателя особливо. Естьли же изъ цѣлаго числа съ дробью должно извлекать корень квадратной, то надлежитъ съ начала цѣлое число привести въ дробь, а потомъ поступать по вышесказанному.

12. Поелику не всякое число есть совершенный квадратъ, то слѣдуетъ, что и корней совершенныхъ для всѣхъ чиселъ имѣть не можно. Не смотря на сїе можно найти такой корень, которой отъ совершеннаго чувствительно разниться не будетъ. Сїе производится посредствомъ десятичныхъ дробей, а именно, придай отъ правой руки столько классовъ нулей, сколько за благо разсудится, потомъ извлекай корень вышепоказаннымъ образомъ. Тогда по совершенїи дѣйствїя первый классъ нулей дастъ въ корнѣ знакъ

53

для десятичныхъ дробей, второй для сотенныхъ, третїй для тысячныхъ, и такъ далѣе. Посему даннаго числа 549 квадратной корень найдется 23,430748, которой будучи самъ на себя умноженъ хотя и не производитъ заданнаго числа, одинакожъ разность бываетъ столь мала, что ее безъ погрѣшности оставить можно.

13. Естьли случится извлекать корень квадратной изъ такого числа, при коемъ находятся десятичныя дроби, то цѣлыя числа надлежитъ раздѣлять на классы особливо отъ правой руки къ лѣвой, и десятичныя дроби особливо же, начиная дѣленїе въ десятичныхъ доляхъ отъ лѣвой руки къ правой, какъ то изъ слѣдующаго примѣра ясно уразумѣть можно.

Опишите этот метод, обобщите при необходимости и найдите приближённые значения корней из предыдущей задачи.

85. Приближённые значения кубических корней можно находить по следующей формуле: $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{x^3 + b} \approx x + \frac{b}{3x^2}$. Найдите приближённые значения $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{999}$, $\sqrt[3]{2310}$.

Задачи III уровня (по 0,2 балла). Все описанные выше подходы, методы, способы решения задач применяются при решении задач математических олимпиад. Попробуйте применить полученные знания для решения следующих задач.

86. Отец поручил сыну измерить длину двора шагами. Это было зимой, и на снегу оставались следы. Для проверки отец измерил ту же длину двора своими шагами. Он начал с того же места, что и сын, и шёл в том же направлении, так что в некоторых случаях следы отца и сына совпадали. Всего следов на снегу получилось 61. Чему равна длина двора, если шаг сына равен 54 см, а шаг отца – 72 см?

87. Восстановите записи

```
_ 1 * * * 1 * * | 1 *
  * * 1         +---------
  -----           * 1 * * *
  _ 1 *
    * *
    ---------
     _ 1 * *
       * * 1
       -----
           1
```

```
_ * * * * * * | * * *
  * * * *     +-------
  -------       * 8 *
   _ * * *
     * * *
     -------
    _ * * * *
      * * * *
      -------
            0
```

```
_ * 2 * * 5 | 3 2 5
  * * *     +-------
  -------
_ * 0 * *
  * 9 * *
  -------
   _ * * *
     * * *
     -----
         0
```

88. Гравировщик делает таблички с буквами. Одинаковые буквы он гравирует за одинаковое время, разные – возможно, за разное. На две таблички «ДОМ МОДЫ» и «ВХОД» вместе он потратил 50 минут, а одну табличку «В ДЫМОХОД» сделал за 35 минут. За какое время он сделает табличку «ВЫХОД»?

89. В магазин доставили 6 бочонков с квасом, в них было 15, 16, 18, 19, 20 и 31 литр. В первый же день нашлось два покупателя: один купил два бочонка, другой – три, причем первый купил вдвое меньше кваса, чем второй. Не пришлось даже раскупоривать бочонки. Из шести бочонков на складе остался всего лишь один. Какой?

90. В затруднительном положении оказались однажды трое пеших разведчиков, которым необходимо было перебраться на противоположный берег реки при отсутствии моста. Правда, по реке катались в лодке два мальчика, готовые помочь солдатам, Но лодка была так мала, что могла выдержать вес только одного солдата; даже солдат и один мальчик не могли одновременно сесть в нее без риска ее потопить. Плавать солдаты совсем но умели. Казалось бы, при таких условиях мог переправиться через реку только один солдат. Между тем все три разведчика вскоре благополучно переправились на противоположный берег и возвратили лодку мальчикам. Как это они сделали?

91. Один из пяти братьев – Андрей, Витя, Дима, Толя или Юра разбил окно. Андрей сказал: «Это сделал или Витя, или Толя». Витя сказал: «Это сделал не я и не Юра». Дима сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой – неправду». Юра сказал: «Нет, Дима, ты не прав». Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что не менее трех братьев сказали правду. Кто же из братьев разбил окно?

92. Разбейте число 186 на три попарно различных натуральных слагаемых, сумма любых двух из которых делится на третье.

93. Из чисел *a, b* и *c* одно положительно, одно отрицательно и одно равно нулю. Известно, что $a = b\,(b - c)$. Какое из чисел положительно, какое отрицательно и какое равно нулю?

94. Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1. Какое число стоит на 2000 месте? На 2016 месте? На 3001 месте?

95. Пол в гостиной барона Мюнхгаузена вымощен одинаковыми квадратными каменными плитами. Барон утверждает, что его новый ковер (сделанный из одного куска ковролина) закрывает ровно 24 плиты и при этом каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд плит в гостиной содержит ровно 4 плиты, покрытых ковром. Не обманывает ли барон?

96. *Творческое задание (1 балл).* Проведите классификацию символизированных задач последовательно по различным основаниям.

97. *Творческое задание (1 балл).* Проведите классификацию задач ЕГЭ по двум основаниям: первое – по количеству и разнообразию информационный моделей, второе – по методам и способам решения.

98. *Творческое задание (1 балл).* Известный математик и популяризатор науки Джордж Пойа[1] (13.12.1887 – 07.09.1985) в предисловии к одной из своих книг писал: «… математическая задача иногда столь же увлекательна, как кроссворд, и что напряжённая умственная работа может стать столь же желанным упражнением, как стремительный теннис. Изведав удовольствие от занятий математикой, он [студент] его забудет не скоро, и вот тогда, очень вероятно, математика займёт определённое место в его жизни: как предмет любительских увлечений или как инструмент в его профессиональной работе, как профессия или как путь в личной славе».

Он написал несколько книг о том, как решают задачи и как надо учить решать задач. Примените его советы к решению задач этого раздела.

99. *Творческое задание (1 балл).* В задаче 84 упомянут один из учебников 19 века. Найдите другие учебники этого (или более раннего) периода, изучите и продемонстрируйте способы, которыми рекомендовалось ученикам того времени решать задачи. Проведите классификацию этих задач.

100. *Творческое задание (1 балл).* Разработайте алгоритм решения какой-нибудь олимпиадной задачи, проверьте работу алгоритма в среде электронных таблиц.

[1] *Pólya György* – Дьёрдь По́йа (венг.) или *George Polya* – Джордж По́лиа (англ.)

II. Множество

Математическим понятием, отражающим объединение некоторых объектов, предметов или понятий в одну единую совокупность является понятие множества. Это понятие не определяется, подобно понятиям точки, числа, и является первичным.

Предметы (объекты), составляющие некоторое множество, называются его элементами. Все множества можно записывать с помощью заглавных букв латинского алфавита: A – множество квадратов; B – множество чисел и т.д.

Элементы множества можно записать с помощью маленьких букв: x является элементом множества A. Это можно записать так: $x \in A$ (читают: x есть элемент множества A, или x принадлежит A, или x содержится в A, или A содержит x). Если объект x не является элементом множества A, то это записывают так: $x \notin A$ (читается: x не есть элемент множества A, или x не принадлежит A, или x не содержится в A).

Например, если множество B – множество натуральных чисел, то $2 \in B$, $-7 \notin B$, и т.д.

Множество можно иногда задавать перечислением его элементов. Если множество задано списком, то названия всех элементов множества записывают в фигурные скобки, разделяя запятой. Например, если множество C состоит из трех элементов: 1, 9 и -4, то это записывают так: $C = \{1, 9; -4\}$.

Множество считается заданным, если указано некоторое свойство, которым обладают все его элементы и не обладают ни какие другие объекты. Такое свойство называют *характеристическим свойством* множества. Например: множество $\{2, 4\}$ может быть задано следующим образом:

а) множество четных чисел, удовлетворяющих неравенству $1 < x < 5$;

б) множество корней квадратного уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0.$

Задание множества его характеристическим свойством записывают и в геометрии. Например, биссектриса угла есть геометрическое место точек плоскости, лежащих внутри этого угла и равноудаленных от его сторон.

Множество элементов обладающих характеристическим свойством записывают так: $A = \{x \mid -3 \le x \le 4\}$. Запись означает, что множество A состоит из всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $-3 \le x \le 4.$

Пустым называется множество не содержащее ни одного элемента; оно обозначается символом $\varnothing$.

Два множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов: $A = B$.

Пересечение множеств A и B есть множество, которое состоит из элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B.

Обозначается операция пересечения: $A \cap B$.

Например, для $A = \{1; 2; 3\}$ и $B = \{2; 3; 4; 5\}$, $A \cap B = \{2; 3\}$.

Множества называются *непересекающимися*, если у них нет общих элементов, то есть их пересечение пусто.

Пусть $C = \{6; 7; 8\}$, тогда $A \cap C = C \cap B = \varnothing$.

Если заданы два множества, то можно образовать новое множество, включив в него, во-первых, элементы первого множества и, во-вторых, элементы второго множества, не совпадающие с элементами первого.

Объединение множеств A и B представляет собой множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B.

Обозначается операция объединения: $A \cup B$. Для наших множеств A и B, $A \cup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

Если каждый элемент множества B является в то же время элементом множества A, то говорят, что B – подмножество A, и пишут $B \subseteq A$.

$$A = B \text{ тогда и только тогда, когда } A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A. \qquad \text{II.1}$$

Множество U называют *универсальным*, если все рассматриваемые нами множества A_i $(i=1 \div n)$ являются его подмножествами: $A_i \subseteq U$.

Каждое непустое множество имеет, по крайней мере, два подмножества: пустое множество $\varnothing$ и само множество A. Таким образом, пустое множество является подмножеством любого множества. Подмножество подмножества само является подмножеством, то есть если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.

Разностью двух множеств A и B называется такое множество, в которое входят все элементы из множества A, не принадлежащие множеству B. Разность множеств A и B обозначают $A \backslash B$.

$$A \backslash B = \varnothing, \text{ когда } A = B. \qquad \text{II.2}$$

В случае, когда $B \subseteq A$, разность $A \backslash B$ называют дополнением множества B в множестве A и обозначают B'. Справедливо равенство: $B \cap B' = A$. Чаще всего $A = U$.

Перечислим несколько свойств дополнения.

$$\varnothing' = U. \qquad \text{II.3}$$

$$U' = \varnothing. \qquad \text{II.4}$$

$$A'' = A \qquad \text{II.5}$$

Симметрической разностью (суммой) $A+B$ двух множеств A и B называется множество, являющееся объединением двух разностей $A \backslash B$ и $B \backslash A$.

Когда берутся дополнения множеств, отношения включения между ними меняются на противоположные: если $B \subseteq A$, то $A' \subseteq B'$.

Множество, элементы которого можно пересчитать называется *конечным* множеством. Конечное множество можно задавать двумя способами:

(1) указанием на некоторое свойство, которому удовлетворяют его элементы;

(2) перечислением его элементов.

Пустое множество считается конечным.

Подмножество конечного множества само конечно.

Множество, элементы которого невозможно пересчитать называется *бесконечным*.

Если множество B содержит бесконечное подмножество, то B бесконечно.

Пересечение/объединение двух конечных множеств есть тоже конечное множество.

Для операций над множествами справедливы следующие свойства:

$A\cup A'=U$ II.12 | $A\cap A'=\varnothing$ II.13

$A\cup B= B\cup A$ II.14 | $A\cap B= B\cap A$ II.15

$(A\cup B)'= A'\cap B'$ II.16 | $(A\cap B)'= A'\cup B'$ II.17

$A\cup(A\cap B)=A$ II.18 | $A\cap (A\cup B)=A$ II.19

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ II.20 | $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ II.21

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ II.22 | $A\cap(B\cup C) =(A\cap B)\cup(A\cap C)$ II.23

$A\cup B=B \Leftrightarrow A\subseteq B$ II.24 | $A\cap B=A \Leftrightarrow A\subseteq B$ II.25

$A'\cup B=\varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B$ II.26 | $A\cup B= U,\ A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow A'=B$ II.27

$A\backslash B= A\cap B'$ II.28

$A\backslash B=\varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B$ II.29

$A+B=B+A$ II.30

$(A+B)+C=A+(B+C)$ II.31

$A+B=\varnothing \Leftrightarrow A=B$ II.32

$A+\varnothing=A$ II.33

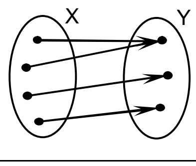
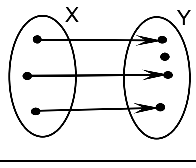
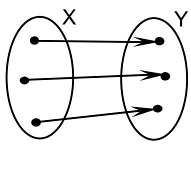
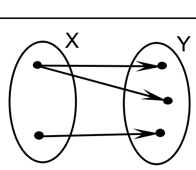
Пусть даны два множества A и B; выберем элементы $a\in A$ и $b\in B$. Пара (a,b) называется *упорядоченной*, если указано, какой элемент является первым, а какой – вторым.

Упорядоченные пары (a,b) и (c,d) называются равными, тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Декартовым произведением двух множеств A и B называется множество $M\times N$ всевозможных упорядоченных пар (a,b) и (c,d), таких, что $a\in A$ и $b\in B$.

Возможные соответствия между двумя различными множествами представлены в следующей таблице.

Таблица 1

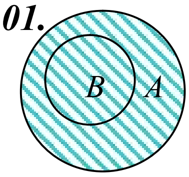
Описание	Иллюстрация	Название
Каждому элементу множества Y соответствует более одного элемента множества X		*сюръекция*
Каждому элементу множества Y соответствует не более одного элемента множества X		*инъекция*
Каждому элементу множества Y соответствует строго один элемент множества X; каждому элементу множества X соответствует строго один элемент множества Y		*сюрьекция* } *биекция* *инъекция* } *(взаимно-однозначное соответствие)*
Каждому элементу множества X соответствует более одного элемента множества Y		Названия не имеет, в математике не рассматривается из-за неоднозначности определения

Соответствие между элементами множеств A и B определяет *отображение* множества A в множество B (иногда вместо отображения говорят об *унитарной операции*).

Если существует взаимно-однозначное отображение A в B, то множество A называется *эквивалентным* множеству B.

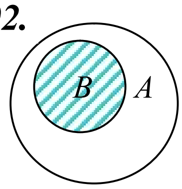
Тестовые задания (по 0,05 балла). Укажите информационную знаковую модель, соответствующую диаграмме :

101.



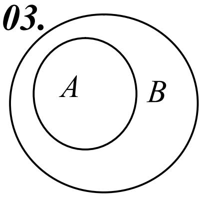
а) $A\cup B=B \Leftrightarrow A\subseteq B$
б) $A\cup B=A \Leftrightarrow A\subseteq B$
в) $A\cup B=B \Leftrightarrow B\subseteq A$
г) $A\cup B=A \Leftrightarrow B\subseteq A$

102.



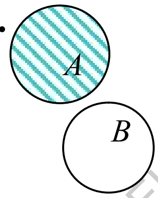
а) $A\cap B=B \Leftrightarrow A\subseteq B$
б) $A\cap B=A \Leftrightarrow A\subseteq B$
в) $A\cap B=B \Leftrightarrow B\subseteq A$
г) $A\cap B=A \Leftrightarrow B\subseteq A$

103.



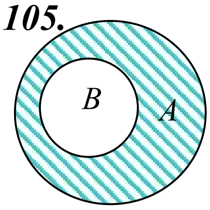
а) $A\backslash B=\varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B$
б) $B\backslash A=\varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B$
в) $A\backslash B=\varnothing \Leftrightarrow B\subseteq A$
г) $B\backslash A=\varnothing \Leftrightarrow B\subseteq A$

104.



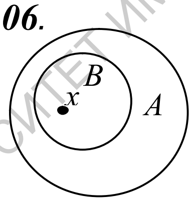
а) $A\backslash B=B \Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$
б) $A\backslash B=A \Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$
в) $B\backslash A=B \Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$
г) $B\backslash A=A \Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$

105.



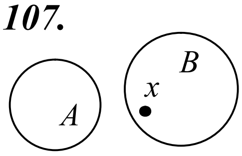
а) $A+B=A\backslash B \Leftrightarrow A\subseteq B$
б) $A+B=A\backslash B \Leftrightarrow B\subseteq A$
в) $A+B=B\backslash A \Leftrightarrow A\subseteq B$
г) $A+B=B\backslash A \Leftrightarrow B\subseteq A$

106.



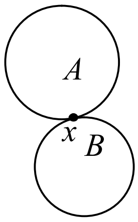
а) $x\in A\cap B,\ x\notin A\cup B$
б) $x\in A\backslash B$
в) $x\in A+B$
г) $x\in A\cap B,\ x\in A\cup B$

107.



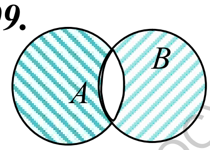
а) $x\in B\backslash A$
б) $x\in A\backslash B$
в) $x\in A\cup(A\cap B)$
г) $x\in A\cap B$

108.



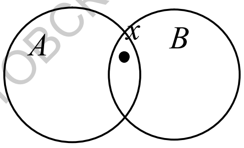
а) $x\in B\backslash A$
б) $x\in A\backslash B$
в) $x\in A+B$
г) $x\in A\cap B$

109.



а) $A+B=(A\cup B)\backslash(A\cap B) \Leftrightarrow A\cap B\subseteq A,\ A\cap B\subseteq B$
б) $A+B=(A\cap B)\backslash(A\cup B) \Leftrightarrow A\cap B\subseteq A,\ A\cap B\subseteq B$
в) $A+B=(A\cup B)\backslash(A\cap B) \Leftrightarrow A\cup B\subseteq A,\ A\cap B\subseteq A$
г) $A+B=(A\cap B)\backslash(A\cup B) \Leftrightarrow A\cup B\subseteq A,\ A\cap B\subseteq B$

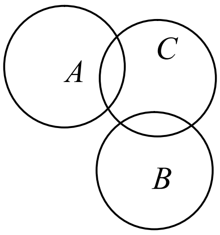
110.



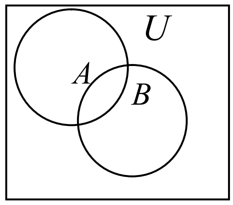
а) $x\in A\cap B,\ x\notin A\cup B$
б) $x\in A\cup B,\ x\notin A\cap B$
в) $x\notin (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$
г) $x\in A\cup(A\cap B),\ x\notin A\cap(A\cup B)$

<u>*Задачи I уровня (по 0,01 балла).*</u> Заштриховав соответствующие участки диаграмм, проиллюстрируйте следующие утверждения.

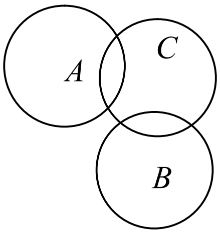
111. $x \in B \setminus (A \cup C)$



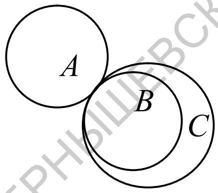
112. $x \in A' \cap B'$



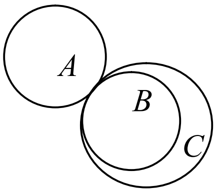
113. $x \in C \setminus (B \cup A)$



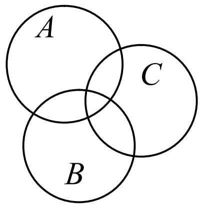
114. $x \in (A+B) \setminus C$



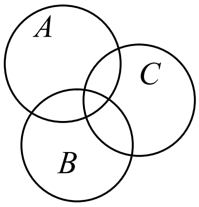
115. $x \in B+(A \setminus C)$



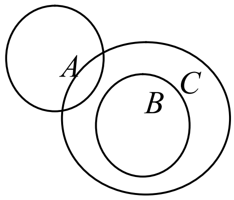
116. $x \in A+B+C$



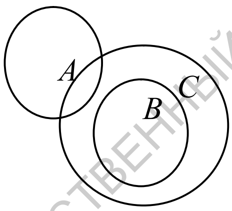
117. $x \in (A \cap B)+(C \setminus A)$



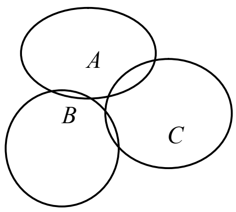
118. $x \in (A+B) \setminus C$



119. $x \in A+(B \setminus C)$



120. $x \in B+(A \setminus C)$



<u>*Задачи I уровня (по 0,01 балла).*</u> Для иллюстрации операций над множествами используют диаграммы Эйлера-Венна, где каждое множество обозначается кругом, универсальное множество – прямоугольником, а результат операции – штриховкой. Проиллюстрируйте следующие свойства операций над множествами, рассмотрев три случая (если условие задачи не предусматривает другого):

121. $A+B=B+A$

122. $(A+B)+C=A+(B+C)$

123. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

124. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

125. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

126. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

<u>*Задачи I уровня (по 0,01 балла).*</u> Даны множества: *A* – множество чётных чисел, *B* – множество чисел кратных *3*, *C* – множество чисел кратных *5*. Проиллюстрируйте на множествах *A, B* и *C* с помощью диаграмм Эйлера-Венна следующие свойства:

127. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

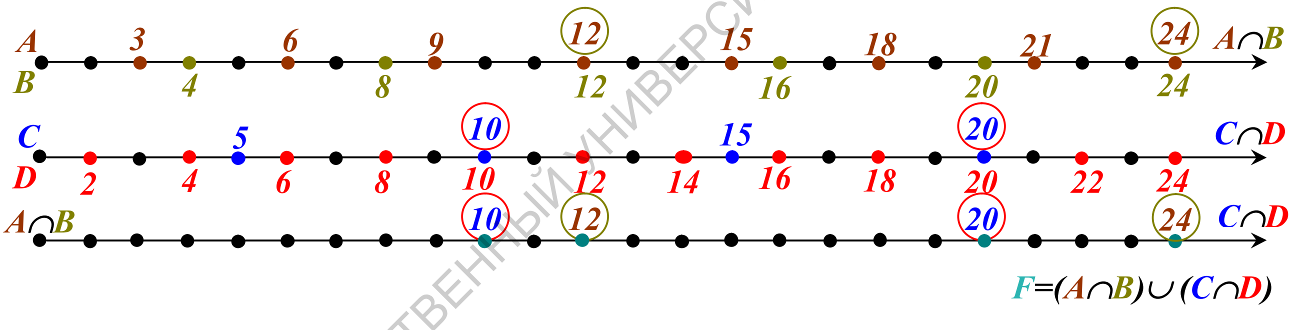
128. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

129. $A \setminus B = A \cap B'$

130. $A \setminus C = A \cap C'$

<u>Задачи I уровня (по 0,01 балла).</u> Диаграммы Эйлера-Венна в силу замкнутости фигур, используемых для иллюстрации не совсем удобны для проведения операций объединения и пересечения подмножеств множества N, поэтому обратимся к графическому способу представления информации о числовых множествах.

Договоримся пересечение и промежуточное объединение числовых множеств отмечать на одной числовой прямой (числовом луче для N), а результирующее объединение представлять двумя разными числовыми прямыми (лучами). Будем также для разных множеств использовать разноцветное выделение элементов. Если какой-либо элемент n (например, 5) принадлежит пересечению множеств, то он на чертеже будет обозначаться ⑤. Кроме того элементы пересекаемых множеств будем подписывать «сверху» от числовой прямой для одного из множеств, и «снизу» от числовой прямой – для другого множества. Если один и тот же элемент подписан «сверху» и «снизу», то он принадлежит пересечению «верхнего» и «нижнего» множеств, и обозначается ⑤. Элементы объединяемых множеств подписываем (в одну строку) или «сверху» или «снизу» от числовой прямой. На рисунке проиллюстрировано множество $F=(A\cap B)\cup(C\cap D)$, где A – множество чисел кратных 3, B – множество чисел кратных 4, C – множество чисел кратных 5, D – множество чётных чисел.



С учётом «договорённости» проиллюстрируйте следующие множества/ свойства множеств:

131. $A\cap(D\cup C)=(A\cap D)\cup(A\cap C)$

132. $F=(A\cap C\cap D)\cup B$

133. $F=A\cap B\cap D$

134. $F=(B\cap C\cap D)\cup A$

135. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

136. $F=(A\cap B\cap D)\cup C$

<u>Задачи I уровня (по 0,01 балла).</u> Выберем в качестве универсального – множество N натуральных чисел; A – множество чётных чисел, B – множество чисел кратных 3, C – множество чисел кратных 5, D – множество чисел кратных 7, E – множество чисел кратных 11. Проиллюстрируйте следующие множества:

137. $F=(C'\cap B')\cup D$

138. $F=(D\cup B)'\cap E'$

139. $F=(C'\cup B')\cap D$

140. $F=(D\cap B)'\cup E'$

<u>*Задачи I уровня (по 0,01 балла).*</u> *A* – множество чётных чисел, *B* – множество чисел кратных *6*, *C* – множество чисел кратных *9*. Проиллюстрируйте следующие множества /свойства множеств:

141. *F=A+B; A+B=B+A*

142. *F=A+C+B; (A+B)+C=A+(B+C)*

143. *F=C+B; C+B=B+C*

144. *F=A+C; A+C=C +A*

<u>*Задачи I уровня (по 0,01 балла).*</u> Определите с помощью характеристического свойства множества

145. $A=\{23;\ 22;\ 21;\ 20;\ 19;\ 18;\ 17;\ 16\}$.

146. $\mathbf{B}=\{15;\ 18;\ 21;\ 24;\ 27\}$.

147. $C=\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\ldots\right\}$.

148. $D=\{1;\sqrt{2};\sqrt{3};\ 2;\sqrt{5};\sqrt{6};\sqrt{7};\ 2\sqrt{2};\ 3;\ \ldots\}$.

149. *E* – всех двухзначных чисел, оканчивающихся цифрой *1*.

150. *G* – всех положительных чисел, образующих арифметическую прогрессию с первым членов, равным 5 и разностью 3,5.

151. *H* – всех прямоугольников.

152. *K* – всех прямоугольных треугольников.

<u>*Задачи I уровня (по 0,01 балла).*</u>

153. Являются ли равными множество *A* – всех квадратов и множество *B* – всех прямоугольников, имеющих одинаковые стороны?

154. Являются ли равными множество *A* – всех натуральных чисел, которые одновременно делятся на *2* и *3*, и *B* – всех натуральных чисел, делящихся на 6?

155. Определите все подмножества множества $A=\{a;b;c;d\}$. Сколько среди них трёхэлементных подмножеств?

156. Даны множества $A=\{a;b;c;d\}$; $B=\{a;b;3\}$; $C=\{2;4;c\}$; $D=\{1;b\}$; $E=\{a;b;4\}$. Определите *a; b; c; d* при условии, что $B\subset A$; $C\subset A$; $E\subset A$; $D\subset B$. Полученные множества изобразите с помощью диаграммы Эйлера-Венна.

<u>*Задачи I уровня (по 0,01 балла).*</u> *Разбиение множества* – это представление его в виде объединения произвольного количества попарно непересекающихся подмножеств. Пусть *X* – произвольное множество, тогда семейство непустых множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha\subset A}$, где *A* – некоторое множество индексов (конечное или бесконечное), называется разбиением *X*, если: (1) $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ для любых $\alpha,\ \beta \in A$, таких что $\alpha \neq \beta$,; (2) $X = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. При этом множества U_α называются *блоками* или *частями* разбиения данного множества *X*. Разбиение множества объектов по какому-либо признаку называется *классификацией*.

Выясните, правильны ли следующие классификации:

157. Множество углов разбивается на подмножества острых и неострых углов.

158. Множество углов разбивается на подмножества тупых углов.

159. Множество параллелограммов разбивается на подмножества прямоугольников, ромбов и квадратов.

160. Все целые числа делятся на простые и составные.

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Проведите классификацию по нескольким основаниям; при необходимости используйте *дихотомию* (способ логического деления класса на подклассы, который состоит в том, что делимое понятие полностью делится на два взаимоисключающих понятия: одно обладает некоторым признаком, другое этим признаком не обладает):

161. квадратных трёхчленов,

162. натуральных чисел,

163. целых чисел,

164. рациональных чисел,

165. комбинаторных соединений,

166. графов,

167. систем счисления,

168. последовательностей,

169. треугольников,

170. конфигураций двух прямых в пространстве,

171. конфигураций двух окружностей на плоскости,

172. преобразований плоскости,

173. элементарных функций.

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Классификация предназначена для постоянного использования в какой-либо науке или области практической деятельности. Обычно в качестве основания деления в классификации выбирают признаки, существенные для исследуемых объектов. В этом случае классификация (называемая естественной) выявляет существенные сходства и различия между объектами и имеет познавательное значение. В других случаях, когда цель классификации состоит лишь в систематизации предметов, в качестве основания выбираются признаки, удобные для этой цели, но несущественные для самих предметов (например, алфавитные каталоги). Такие классификации называют искусственными.

Когда исследователь имеет перед собой сложный ряд однородных явлений, то он должен: (1) расположить их в известном порядке, удобном для исследования; (2) сгруппировать сходные явления и отличить их от тех, которые только кажутся сходными с ними, в действительности же отличны от них; (3) расположить эти группы в таком порядке, чтобы степень сродства их и взаимной зависимости выражались бы в самом расположении.

Классифицируя явления, их можно делить на группы, эти группы вновь подразделять и т. д.; исследователь, производя это деление, может иметь в виду различные цели, объективные или субъективные, причём и характер классификации зависит от её цели.

174. Перед Вами стоит цель – выявить интересы и склонности учащихся 5-6 классов для разработки программы внеурочной деятельности по математике. На какие группы можно разбить всех учащихся в соответствии с поставленной целью?

175. Во время школьных каникул Вам предстоит провести дополнительные занятия по математике с учащимися 7 классов, по одному занятию с группой в день в течение 5 дней (с понедельника по пятницу). Можно ли подобрать такие основания для классифицирования учащихся, чтобы составить 5 однородных по своему составу групп?

176. С целью определения степени тревожности, связанной с учебной деятельностью, учитель применяет методику «Градусник». Перед процедурой диагностирования учитель проводит предварительную беседу с учащимися 5 класса, в ходе которой он предъявляет предмет, который есть в каждом доме. Это – градусник. Педагог объясняет ребятам, что при высокой температуре – 38, 40, 41 – человеку плохо, тревожно. Нормальная температура человека – 36,6; у него нет тревоги, все хорошо, у него все получается, он здоров. Температура у человека может быть и 35; при такой температуре человек испытывает слабость, усталость, отсутствие интереса и желания что-либо делать. После объяснения педагог предлагает учащимся поиграть в игру. Он будет называть учебные предметы, а ребятам предлагается написать ту температуру, которая у них условно появляется при назывании этого предмета. Например: *Русский язык – 39, Математика - 36,6.*

На сколько групп учитель может разбить учеников класса по результатам этой методики? Как можно назвать эти группы? Проведите классификацию учащихся по степени тревожности, назовите каждый класс и дайте ему определение (характеристику).

177. Проектирование учебно-воспитательного процесса требует исследования учащихся по различным направлениям, Учитель приоритетными для себя считает следующие направления (выписаны по убыванию значимости) исследования учащихся: степень интереса к математике, обучаемость, успешность в освоении предмета (средняя отметка по предмету), интерес к урокам математики (отсутствие «–», ситуативный «±», стабильный «+»), ведущий канал восприятия (каналы: А – аудиальный, В – визуальный, К – кинестетический). В результате диагностики учитель получил следующие результаты для 7[а] класса (***жирным курсивом*** – число учащихся в группе).

<table>
<tr><td colspan="20">Интерес к математике</td></tr>
<tr><td colspan="9">отсутствует – 11</td><td colspan="6">ситуативный – 11</td><td colspan="2">стабильный – 3</td><td colspan="3">творческий уровень – 1</td></tr>
<tr><td colspan="20">Обучаемость</td></tr>
<tr><td colspan="2">низкая – 2</td><td colspan="4">средняя – 7</td><td colspan="3">высокая – 2</td><td colspan="2">низкая – 4</td><td colspan="3">средняя – 6</td><td>высокая – 1</td><td>средняя – 2</td><td>высокая – 1</td><td colspan="3">высокая – 1</td></tr>
<tr><td colspan="20">Успешность в освоении математики: средняя отметка по предмету:
«2» – 1 человек «3» – 8 человек «4» – 10 человек «5» – 7 человек</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">4</td><td>5</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td colspan="3">5</td></tr>
<tr><td colspan="20">Интерес к урокам математики (отсутствие «–», ситуативный «±», стабильный «+»):
Отсутствует у 2 человек, ситуативный – у 10 человек, стабильный – у 14 человек</td></tr>
<tr><td>–</td><td>±</td><td>±</td><td>+</td><td>±</td><td>+</td><td>±</td><td>+</td><td>+</td><td>±</td><td>+</td><td>±</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td><td>±</td><td>+</td></tr>
<tr><td colspan="20">Ведущий канал восприятия:
аудиальный (4 человека), визуальный (20 человек), кинестетический (2 человека)</td></tr>
<tr><td colspan="20">1 1 1 2 2 2 1 1 3 1 2 3 1 1 2 1 1</td></tr>
</table>

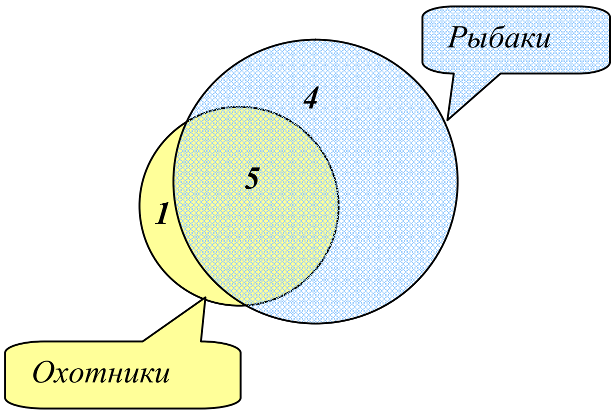
Требуется составить самостоятельную работу на 20 минут урока в трёх вариантах. Как для этого лучше разбить учащихся класса? На какой основной критерий должна быть сориентирована эта самостоятельная работа?

178. Можно ли провести классификацию учащихся $7^{\text{а}}$ класса по тем же основаниям (см задачу ***177***), но таким образом, чтобы уменьшить число групп разбиения. Попробуйте это сделать?

179. На какого ученика ориентированы Вы? Выпишите 5 основных характеристик портрета Вашего ученика и, определив таким образом основания классификации, проведите разбиение учебного класса на группы.

Задачи II уровня (по 0,15 балла). Можно выделить несколько возможных аспектов обращения к свойствам и операциям над множествами при решении сюжетных задач. Первая возможность связана с операцией сложения пересекающихся множеств, позволяющей решать типовые задачи содержания аналогичного следующей.

Охотники и рыбаки. Собрались 6 охотников и 9 рыбаков, а всего 10 человек. Как это может быть?



Решение. Поскольку число человек меньше суммарного количества представителей промысловых профессий, то разность между этими величинами определяет количество человек занимающихся одновременно и охотой и рыбалкой. Следовательно (ответ), в числе собравшихся 1 охотник, 4 рыбака и 5 человек, занимающихся одновременно и охотой и рыбалкой.

Решите задачи, проиллюстрируйте их, используя диаграммы Эйлера-Венна

2	3	2
3		3
2	3	2

180. **Девичья хитрость.** Золотошвея, взяв 20 девушек в учение, разместила их в 8 комнатах своего дома так, как показано на рисунке. По вечерам золотошвея обходила дом и проверяла, чтобы в комнатах на каждой стороне его было по 7 девушек. Однажды к девушкам в гости приехали 4 подружки и, заговорившись, остались у них ночевать, причём все 24 девушки разместились в комнатах так, что вечером золотошвея насчитала в комнатах на каждой стороне дома опять по 7 девушек. На следующий день 4 девушки пошли провожать своих четырёх подруг и дома не ночевали. Оставшиеся 16 девушек разместились так, что опять вечером золотошвея насчитала в комнатах с каждой стороны дома по 7 девушек. Как размещались девушки по комнатам в двух последних случаях?

181. **Расстановка стульев.** Нужно расставить 7 стульев у четырёх стен комнаты так, чтобы у каждой стены было их поровну. Как это сделать? Как изменится решение задачи в случае расстановки 17 стульев в пятиугольной комнате?

182. **Подписка на газеты и журналы.** Каждая семья, живущая в нашем доме, выписывает или газету, или журнал, или то и другое вместе. 75 семей выписывают газету, а 27 семей выписывают журнал и лишь 13 семей выписывают и журнал, и газету. Сколько семей живет в нашем доме?

***183.* О любви к фруктам.** В одном классе 25 учеников. Из них 7 любят груши, 11 – черешню. Двое любят груши и черешню; 6 – груши и яблоки; 5 – яблоки и черешню. Но есть в классе два ученика, которые любят все и четверо таких, что не любят фруктов вообще. Сколько учеников этого класса любят яблоки?

***184.* О знании иностранных языков.** Из 100 человек 85 знают английский язык, 80 – испанский, 75 – немецкий. Все владеют, по крайней мере, одним иностранным языком. Среди них нет таких, которые знают два иностранных языка, но есть владеющие тремя иностранными языками. Сколько человек из этих 100 знают 3 языка?

***185.* О розовых кустах.** В саду у Ани и Вити росло 2016 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались не политыми?

<u>*Задачи III уровня (по 0,2 балла).*</u> Можно выделить несколько возможных аспектов обращения к свойствам и операциям над множествами при решении сюжетных задач. Первая возможность (описана выше) связана с операцией сложения множеств, вторая – с отношениями между множествами, определяющими один из способов решения логических задач аналогичных следующей.

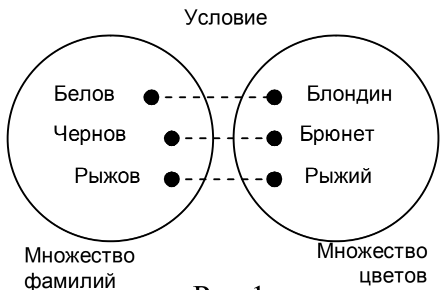


Рис.1

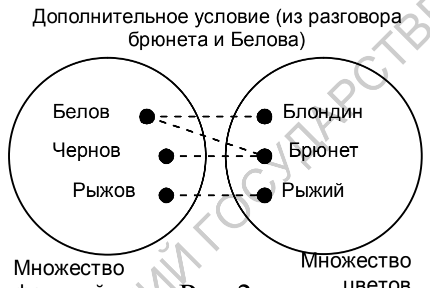


Рис.2

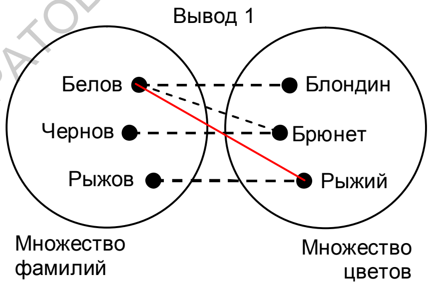


Рис.3

Встреча. Встретились Белов, Чернов и Рыжов. Один из них был блондин, другой – брюнет, третий – рыжий. Брюнет сказал Белову: «Ни у одного из нас цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос у каждого из них, если брюнеты всегда говорят правду?

Решение логических задач аналогичных данной связано с рассмотрением нескольких конечных множеств с одинаковым числом элементов, между которыми требуется установить соответствие.

Договоримся элементы множеств изображать точками плоскости. Если по условию задачи между двумя элементами этих множеств есть соответствие, то будем соединять такие элементы сплошной линией. Если же между двумя элементами множеств соответствия нет, то будем соединять их пунктирной линией. При наличии биекции каждый элемент одного из множеств будет соединяться сплошной линией только с одним элементом другого множества, а с остальными элементами он будет соединяться пунктирными линиями.

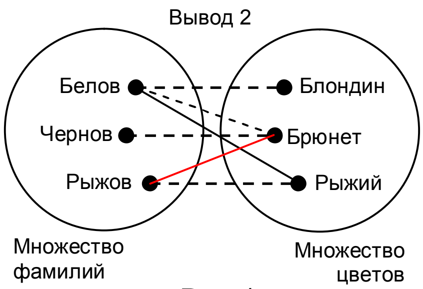


Рис.4

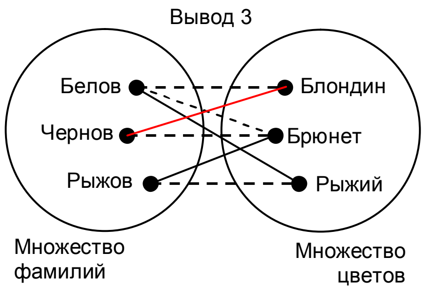


Рис.5

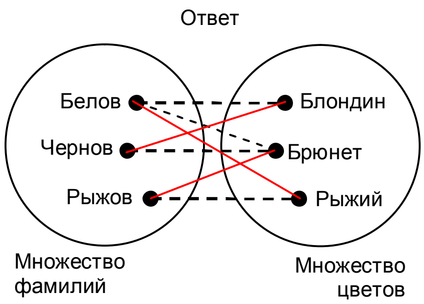


Рис.6

Решение. Цепочка (Рис.1-6) рассуждений с использованием соотношений между множествами.

Ответ. Белов – рыжий, Чернов – блондин, Рыжов – брюнет.

Логические задачи достаточно интересны и очень полезны для развития математических способностей. Они вырабатывают умение устанавливать связи между объектами, наблюдательность, настойчивость.

Решите следующие задачи, иллюстрируя каждый этап решения.

186. **Кто с кем катался?** Четыре подруги пришли на каток, каждая со своим братом. Они разбились на пары и начали кататься. Оказалось, что в каждой паре партнер выше своей партнерши и никто не катается со своей сестрой. Самый высокий из компании – Алеша Иванов, следующий по росту – Вова Лебедев, затем Любя Лебедева, Сережа Евсеев, Оля Евсеева, Дима Крылов, Инна Крылова и Аня Иванова. Кто с кем катался?

187. **Про щенков.** Три друга – Алеша, Сергей и Денис – купили щенков разной породы: щенка ротвейлера, щенка колли и щенка овчарки. Известно, что: щенок Алеши темнее по окрасу, чем ротвейлер, Лесси и Гриф; щенок Сергея старше Грифа, ротвейлера и овчарки; Джек и ротвейлер всегда гуляют вместе. У кого какой породы щенок? Назовите клички щенков.

188. **Преподаватели.** В педагогическом институте Аркадьева, Бабанова, Корсакова, Дашков, Ильин и Флеров преподают экономическую географию, английский язык, французский язык, немецкий язык, историю, математику. (1) Преподаватель немецкого языка и преподаватель математики в студенческие годы занимались художественной гимнастикой. (2) Ильин старше Флерова, но стаж работы у него меньше, чем у преподавателя экономической географии. (3) Будучи студентами, Аркадьева и Бабанова учились вместе в одном университете. Остальные окончили педагогический институт. (4) Флеров – отец преподавателя французского языка. (5) Преподаватель английского языка – самый старший из всех по возрасту и по стажу работы. Он работает в этом институте с тех пор, как окончил его. Преподаватели математики и истории – его бывшие студенты. (6) Аркадьева старше преподавателя немецкого языка. Кто какой предмет преподает?

189. **Кто взял книгу?** Библиотека, о которой пойдет речь, не столь уж велика: просто Саше вздумалось навести порядок в своих книгах. Так и есть! Пяти книг не хватает: томика Марка Твена, энциклопедии профессора Зарецкого, сборника сказок Андерсена, рассказов Бианки и сборника стихов Пушкина. Саша смутно помнил, что кому-то давал эти книги. Но кому? После многократных попыток Саше удалось вспомнить следующее: (1) к нему заходили только Андрей, Федя, Ира, Катя и Валя; никому другому он книг не давал; (2) он всегда строго придерживался правила давать друзьям только по одной книге, причем новую книгу давал только после того, как ему возвращали предыдущую; (3) Федя как-то раз брал у него энциклопедию профессора Зарецкого, но давно возвратил, так что взять эту книгу вторично Федя не мог; (4) у Андрея две литературные привязанности: стихи Пушкина и рассказы Марка Твена (книги других авторов Андрей взять не мог); (5) Катя отдает предпочтение рассказам о животных; (6) Ира читает только сказки и книги о компьютерах (поэтому она могла взять энциклопедию профессора Зарецкого); (7) Валя неизменный почитатель поэзии (остальных книг для нее просто не существует). Какую книгу взял каждый из детей?

190. **Как прошёл вечер?** (1) Андрей отправился на концерт. (2) Боря провел вечер с Ольгой. (3) Женя так и не встретил Розу. (4) Полина побывала в кино. (5) Роза посмотрела спектакль в театре. Неизвестно, где именно были Дима и Серафима, но известно, что каждый юноша из этой компании был в театре, на выставке или в кино с одной из девушек – Ольгой, Розой, Полиной и Серафимой. (6) Какая-то пара посетила художественную выставку.

Задачи III уровня (по 0,2 балла). Решите олимпиадные задачи, связанные с множествами.

191. **Детский сад.** В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме «р», которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к», которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 18 других учеников – слово «рот», а остальных – слово «крот». При этом слова «кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали своё слово верно?

192. **Подарки от деда Мороза.** У деда Мороза в мешке бесконечное число конфет, занумерованных натуральными числами. За минуту до Нового года он начинает дарить детям конфеты. Сначала он дарит детям конфету с номером 1. За полминуты до Нового года он дарит 2 конфеты с номерами 2 и 3, а конфету с номером 1 отбирает, за 15 секунд до Нового года он дарит 4 конфеты с номерами 4, 5, 6, 7, а две конфеты с номерами 2 и 3 отбирает, и т.д., за 1/2n долю минуты до Нового года дед Мороз дарит 2n конфет с номерами от 2n до (2n+1 –1) и отбирает 2n–1 конфет с номерами от 2n–1 до (2n–1). Сколько конфет будет у деда Мороза и у детей в момент встречи Нового года?

193. Пол комнаты площадью 6 $м^2$ покрыт тремя коврами, площадь каждого из которых равна 3 $м^2$. Докажите, что какие-то два из этих ковров перекрываются по площади, не меньшей 1 $м^2$.

194. **Три сосны.** Лесник считал сосны в лесу. Он обошёл 5 кругов, изображённых на рисунке, и внутри каждого круга насчитал ровно 3 сосны. Может ли быть, что лесник ни разу не ошибся?

195. В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано МА, на остальных – НЯ. Каждый ребёнок взял три карточки и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово МАМА могут сложить из своих карточек 20 детей, слово НЯНЯ – 30 детей, а слово МАНЯ – 40 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковы?

196. *Творческое задание (1 балл).* Разработайте один из способов информационного моделирования логических сюжетных задач, например, взяв за основу структурные модели (таблицы или графы), знаковые математические модели или компьютерные модели (в среде электронных таблиц).

197. *Творческое задание (1 балл).* Внимательно прочитайте следующие задачи и ответы к ним.

1. На воду сели три воробья, один из них улетел. Сколько воробьёв осталось? / Один и остался, остальные утонули: воробьи не сидят на воде.

2. На грядке сидят 6 воробьёв, к ним прилетели ещё 4. Кот подкрался и схватил одного воробья. Сколько осталось воробьёв на грядке? / Нисколько, так как остальные воробьи улетели. [1]

3. Раз, два, три, четыре, пять.
Кошка учится считать.
Потихоньку, понемножку
Прибавляет к мышке кошку.
Получается ответ: «Кошка – есть, а мышки – нет!»[2]

4. Однажды, точнее, когда-то и где-то
С голодным Котом повстречалась Котлета.
Котлета, представьте, всплеснула руками:
– Ах, как же я счастлива встретиться с Вами!
Кот лишь улыбнулся ей вместо ответа –
И сразу куда-то исчезла Котлета.[3]

5. Я сажаю в клетку пару животных, затем ещё одну пару; сколько животных будет в клетке? / Ответ зависит от породы животных: может случиться, что один зверь пожрёт другого; нужно также знать, должно ли производить учет немедленно или через год, в течение которого животные могут издохнуть или дать приплод.

6. Сейчас я докажу вам, что 3 раза по 2 будет не 6, как выдумаете, а всего 4. Следите за моими рассуждениями. У меня в руке 2 спички – 1 пара. Я ломаю одну спичку и получаю вторую пару. Две пары есть. Я ломаю вторую спичку и получаю третью пару. Однако, взяв три раза по 2, я получаю всего 4. Посмотрите и убедитесь: на моей ладони лежат всего 4 обломка. Где я совершил ошибку?

Что объединяет предложенные занимательные задачи? Возможны ли действия над множествами объектов, описанных в задачах? Почему? Сформулируйте возникшую проблему. Постарайтесь её решить.

---

[1] Волина В.В. Праздник числа. – М.: АСТ-ПРЕСС, 1996. – С.26
[2] В.Берестов. Считалочка/Литература и фантазия. – М.: Провсещение, 1994. – С.79
[3] Б.Заходер. Странное происшествие/Литература и фантазия. – М.: Провсещение, 1994. – С.170

***198**. <u>Творческое задание (1 балл).</u>* Сформулируйте в общем виде задачу **Расстановка стульев**. Предложите алгоритм решения задач данного типа, основанный на арифметических действиях над числами (деление с остатком). Проверьте правильность алгоритма для разного числа стульев, расставляемых в *n*-угольных комнатах. Разработайте (в качестве иллюстраций) наглядно-образные модели.

***199**. <u>Творческое задание (1 балл).</u>* Выясните суть понятия «кардинальные числа». Какие математические проблемы связаны с данным понятием? Сформулируйте их. Приведите ряд примеров использования кардинальных чисел в контексте темы, описывающей данный раздел.

***200**. <u>Творческое задание (1 балл).</u>* Разработайте информационные модели задачи **О мудрецах** и методы её решения. Какая из моделей будет наиболее оптимальной?

О мудрецах. В пещере лежат 4 колпака – 2 белых и 2 черных. В пещеру входят три мудреца, которые знают, сколько там лежит колпаков и какого цвета. Но в пещере темно, поэтому мудрецы на ощупь выбирают себе колпак, надевают на голову и по одному выходят из пещеры. Первый идет куда глаза глядят. Второй идет за ним и видит, какого цвета на нем колпак. Третий идет последним и видит, какого цвета колпак на первом и втором. Мудрецы не оборачиваются, не разговаривают и т.д. Они должны догадаться. Всегда ли среди этих трех мудрецов найдется тот, который догадается, какого цвета на нем колпак, и громко воскликнет: «Я знаю, на мне…!»?

III. Конечные множества. Сюжетные комбинаторные задачи. Графический метод решения комбинаторных задач

В математике и её приложениях часто приходится иметь дело с различного рода множествами и подмножествами: устанавливать связь между их элементами, определять число множеств или их подмножеств, обладающих заданным свойством. Такие задачи приходиться рассматривать при определении наиболее выгодных коммуникаций внутри города, при организации автоматической телефонной связи, работы морских портов, при выявлении связей внутри сложных молекул, генетического кода, а также в лингвистике, в автоматической системе управления, значит в теории вероятностей, и в математической статистике со всеми их многочисленными приложениями.

Раздел математики, изучающий комбинаторные соединения (размещения, перестановки и сочетания, а также их всевозможные комбинации) и связанные с ними задачи выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного множества, в соответствии с заданными правилами, называется *комбинаторикой.*

Сюжетные комбинаторные задачи – задачи выбора и расположения элементов некоторого конечного множества предметов или явлений в соответствии с заданными правилами, а также задачи о количестве таких выборов.

Поскольку сюжетные комбинаторные задачи описывают некоторые конечные множества, то одним из методов их решения является метод исчерпывающих проб, известный более как «метод перебора». Перебор всегда осуществляется по какому-либо признаку (свойству) объектов и напрямую связан с операцией классификацией объектов. Сложность комбинаторных задач заключается в том, что при их решении должна быть выбрана такая система конструктивного перебора, которая давала бы полную уверенность в том, что рассмотрены все возможные случаи (без повтора комбинаций). Наиболее перспективными являются два способа – таблица и граф-схема (дерево вариантов).

Проиллюстрируем на примере следующей задачи.

Флаги государств. Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трёх горизонтальных полос равной ширины, разных цветов – белый, синий, красный. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой флаг?

Решение-I. Будем выстраивать горизонтальную граф-схему (схема 3б) на основе организационной диаграммы (Схема 3а).

Первая колонка (первый уровень граф-схемы) фиксирует одно из условий задачи: наличие разрабатываемого объекта – флаг.

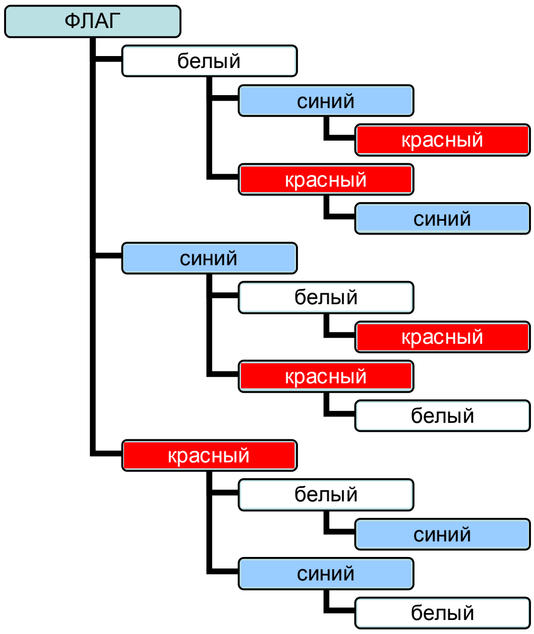


Схема 3а. Организационная диаграмма задачи ***Флаги государств***

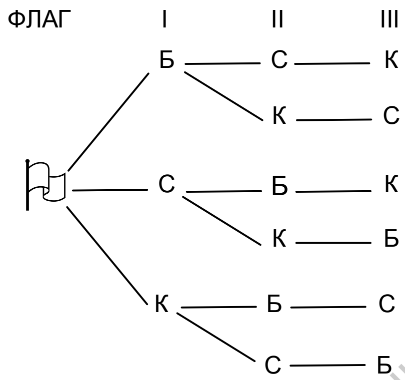


Схема 3б. Информационная модель – граф-схема задачи ***Флаги государств***

Вторая колонка (второй уровень граф-схемы) описывает возможные цветовые варианты (Б – белый, С – синий, К – красный) для первой полосы флага и поэтому обозначена римской цифрой I.

Третья колонка (третий уровень граф-схемы) описывает возможные цветовые варианты для второй полосы флага, обозначена римской цифрой II. Последняя колонка (четвёртый уровень граф-схемы) описывает возможные цветовые варианты для третьей полосы флага, обозначена цифрой III.

Количество вариантов в последней колонке даёт ответ на вопрос задачи.

<u>Решение-II</u>. Составим таблицу «В I-м – количество – всего».

Флаг	Количество цветовых вариантов в полосе			Всего вариантов (<u>ответ</u>)
	I	II	III	
1	3	2	1	$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

<u>Рассуждения</u>. Первая полоса может быть одного из трёх возможных цветов: либо белого, либо синего, либо красного. Всего 3 варианта. Вторая полоса для каждого цветового варианта первой может быть двух цветов, третья полоса для каждой из имеющихся ситуаций может быть только одного цвета. Итак, количество цветовых вариантов для флага: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

<u>Ответ</u>. Шесть стран.

<u>*Тестовые задания (по 0,05 балла).*</u>

201. В высшей лиге первенства России по футболу участвуют 16 команд. Разыгрывается три медали: золотая, серебряная и бронзовая. Перед началом первенства был объявлен конкурс знатоков, в котором требовалось указать распределение медалей. Сколько различных ответов можно дать на этот вопрос?

а) 16! б)16^3 в)$16 \cdot 15 \cdot 14$ г) _____

202. В группе 16 студентов. Сколькими способами можно назначать двух дежурных?

а) 16! б) $½ \cdot 15 \cdot 16$ в)$16 \cdot 15$ г) _____

203. В группе 16 студентов. Сколькими способами можно выбрать 14 человек для осеннего кросса?

а) 16! б) $½ \cdot 15 \cdot 16$ в)$16 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 3$ г) _____

204. За столом пять мест. Сколькими способами можно рассадить пятерых гостей?

а) 5 б) 5^2 в) 5! г) 5^5

205. Из ведра, в котором находится 27 роз, выбирают букет из семи роз. Сколькими способами может быть выбран букет?

а) $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 : 7!$ в) 27^7

б) $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$ г) 27!

206. Число способов расстановки восьми ладей на шахматной доске, при которых они не бьют друг друга равно

а) 8 б) 8^2 в) 8! г) 8^8

207. Сколькими способами в игре «Спортлото» можно набрать 6 номеров из 49?

а) 49^6 в) $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$

б) 49! г) ______

208. У Лены есть восемь различных красок. Она собирается написать ими слова «Новый год». Сколькими способами она может это сделать, если собирается каждую букву раскрашивать одним цветом и все восемь букв должны быть разными по цвету?

а) 8 б) 8^2 в) 8! г) 8^8

209. У одного человека есть 11 книг по математике, у другого 15 книг. Сколькими способами они могут выбрать по три книги для обмена?

а) $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$ в) $11 \cdot 10 \cdot 9 + 15 \cdot 14 \cdot 13$

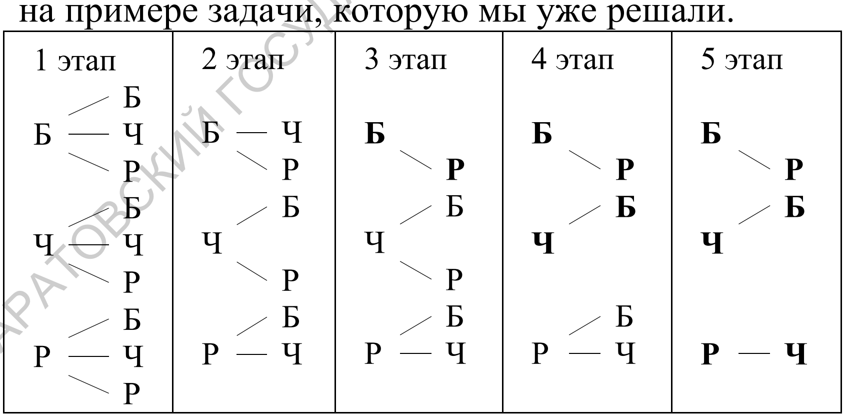
б) $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13$ г) $11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 35$

210. У ювелира есть пять изумрудов, восемь алмазов и семь топазов. Сколькими способами он может сделать браслет, включив в него по три камня каждого вида?

а) $10 \cdot 56 \cdot 35$ в) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

б) $10 + 56 + 35$ г) $5 \cdot 4 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 \cdot 5$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Некоторые логические задачи можно рассматривать, как комбинаторные и решить, используя граф-схемы. Покажем на примере задачи, которую мы уже решали.



Встреча. Встретились Белов, Чернов и Рыжов. Один из них был блондин, другой – брюнет, третий – рыжий. Брюнет сказал Белову: «Ни у одного из нас цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос у каждого из них, если брюнеты всегда говорят правду?

Построим граф-схему возможных вариантов сочетания фамилий и цвета волос (1 этап). С учётом условия: «Ни у одного из нас цвет волос не соответствует фамилии», – вычеркнем все строки, содержащие одинаковые буквы (2 этап). Следствием условия: «Брюнет сказал Белову», – является тот факт, что у Белова волосы не черные.; вычеркнем и это условие (3 этап); зафиксируем (выделим жирным) единственно возможную пару, первая часть которой – Б. Теперь последовательно будем удалять пары, вторая часть которых одинакова со второй частью уже фиксированной пары (4 и 5 этапы).

Используя граф-схемы, решите задачи:

211. **Про щенков** (см. предыдущий раздел).

212. **Кто взял книгу** (см. предыдущий раздел).

213. **Как прошёл вечер?** (см. предыдущий раздел).

214. **Клоуны** (см. раздел I).

215. Три друга – Алеша, Боря и Володя – учатся в различных школах (№ 577, 141 и 164) Санкт-Петербурга. Все они живут на различных проспектах (Энтузиастов, Наставников, Косыгина). Причем один из них любит математику, второй – биологию, а третий – химию. Известно, что: (1) Алеша не живет на проспекте Энтузиастов, а Борис не живет на проспекте Наставников; (2) мальчик, живущий на проспекте Энтузиастов, не учится в школе № 164; (3) мальчик, живущий на проспекте Наставников, учится в школе № 577 и любит математику; (4) Володя учится в школе № 164; (5) ученик школы № 141 не любит химию. В какой школе учится каждый из друзей, на каком проспекте он живет и какой предмет любит?

***216.* Кто чем занимается?** Кондратьев, Давыдов и Федоров живут на одной улице. Один из них – столяр, другой – маляр, третий – водопроводчик. Недавно маляр хотел попросить своего знакомого столяра сделать кое-что для своей квартиры, но ему сказали, что столяр работает в доме водопроводчика. Известно также, что Федоров никогда не слышал о Давыдове. Кто чем занимается?

***217.* Учителя.** Три товарища – Владимир, Игорь и Сергей – окончили один и тот же педагогический институт и преподают математику, физику и литературу в школах Тулы, Рязани и Ярославля. Владимир работает не в Рязани, Игорь – не в Туле. Рязанец преподает не физику, Игорь – не математику, туляк преподает литературу. Какой предмет и в каком городе преподает каждый из них?

218. Алексей, Владимир, Геннадий и Петр занимаются в детской спортивной школе в разных секциях: гимнастики, легкой атлетики, волейбола и баскетбола. Петр, Алексей и волейболист учатся в одном классе. Петр и Геннадий на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с волейболистом, ни с баскетболистом. Кто в какой секции занимается?

219. В семье Семеновых 5 человек: муж, жена, их сын, сестра мужа и отец жены. Все они работают. Один – инженер, другой – юрист, третий – слесарь, четвертый – экономист, пятый – учитель. Вот что еще известно о них. Юрист и учитель не кровные родственники. Слесарь – хороший спортсмен. Он пошел по стопам экономиста и играет в футбол за сборную завода. Инженер старше жены своего брата, но моложе, чем учитель. Экономист старше, чем слесарь. Назовите профессии каждого члена семьи Семеновых.

***220.* Пассажиры автобуса.** В междугороднем автобусе едут шесть пассажиров: Агеев, Боков, Власов, Громов, Дубов, Елисеев. Живут они в разных городах: в Москве, Ленинграде, Туле, Киеве, Риге и Одессе. Известно, что: (1) Агеев и москвич – врачи, Дубов и ленинградец – учителя, Власов и туляк – инженеры. (2) Боков и Елисеев – участники Великой Отечественной войны, а туляк в армии никогда не служил. (3) рижанин старше Агеева, а одессит старше Власова. Боков и москвич выйдут в Киеве, а Власов и рижанин намерены выйти в Виннице. Определите фамилию, профессию и место жительства каждого пассажира.

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла).*</u> Логические комбинаторные задачи на установление взаимно-однозначного соответствия между элементами равномощных множеств можно решать, используя таблицы соответствия (метод логических квадратов). Покажем на примере задачи **Встреча**.

1 этап	2 этап. Условие: «Брюнет сказал Белову»	3 этап. Условие: «Ни у одного цвет волос не соответствует фамилии»	4 этап. Вывод – заполнения строк/столбцов в которых уже стоят 2 знака

1 этап:

Фамилия	Цвет волос:	Б	Ч	Р
	Б			
	Ч			
	Р			

2 этап:

Фамилия	Цвет волос:	Б	Ч	Р
	Б		–	
	Ч			
	Р			

3 этап:

Фамилия	Цвет волос:	Б	Ч	Р
	Б	–	–	
	Ч		–	
	Р			–

4 этап:

Фамилия	Цвет волос:	Б	Ч	Р
	Б	–	–	+
	Ч		–	
	Р		+	–

Фамилия	Цвет волос:	Б	Ч	Р
	Б	–	–	+
	Ч		–	
	Р	–	+	–

Фамилия	Цвет волос:	Б	Ч	Р
	Б	–	–	+
	Ч	+	–	–
	Р	–	+	–

Решите указанным способом задачи:

***221*. Как прошёл вечер?** (1) Андрей отправился на концерт. (2) Боря провел вечер с Ольгой. (3) Женя так и не встретил Розу. (4) Полина побывала в кино. (5) Роза посмотрела спектакль в театре. Неизвестно, где именно были Дима и Серафима, но известно, что каждый юноша из этой компании был в театре, на выставке или в кино с одной из девушек – Ольгой, Розой, Полиной и Серафимой; какая-то пара посетила художественную выставку.

Решение (1 этап)

Юноши	Девушки: Ольга	Роза	Фима	Полина	Место отдыха: выставка	концерт	кино	театр
Андрей	–				–	+	–	–
Боря	+	–	–	–		–		
Женя	–	–				–		
Дима	–					–		
выставка		–		–				
концерт	–	–		–				
кино	–	–	–	+				
театр	–	+	–	–				
Место отдыха								

Раз Боря не был на концерте, то и Ольга там не была.

Решение (2 этап)								
Юноши	Девушки				Место отдыха			
	Ольга	Роза	Фима	Полина	выставка	концерт	кино	театр
Андрей	–	–	+	–	–	+	–	–
Боря	+	–	–	–	+	–	–	–
Женя	–	–	–	+	–	–	+	–
Дима	–		–	–	–	–	–	
выставка	+	–	–	–				
концерт	–	–	+	–				
кино	–	–	–	+				
театр	–	+	–	–				
Место отдыха								

Вывод 1. Ольга и Борис были на выставке.

Вывод 2. Серафима и Андрей были на концерте.

Вывод 3. Женя был с Полиной в кино

Вывод 4 Дима и Роза были в театре.

222. **Про щенков** (см. предыдущий раздел).

223. **Кто взял книгу** (см. предыдущий раздел).

*224***. Кто чем занимается?** (см. выше)

225. **Учителя**. (см. выше)

226. Познакомимся с тремя людьми: Алешиным, Беляевым и Белкиным. Один из них – архитектор, другой – бухгалтер, третий – археолог. Один живет в Белгороде, другой – в Брянске, третий в Астрахани. Требуется узнать, кто где живет и у кого какая профессия. Белкин бывает в Белгороде лишь наездами и то весьма редко, хотя все его родственники постоянно живут в этом городе. У двух из этих людей названия профессий и городов, в которых они живут, начинаются с той же буквы, что и их имена. Жена архитектора доводится Белкину младшей сестрой.

227. Красный, синий, желтый и зеленый карандаши лежат в четырех коробках по одному. Цвет карандаша отличается от цвета коробки. Известно, что зеленый карандаш лежит в синей коробке, а красный не лежит в желтой. В какой коробке лежит каждый карандаш?

228. Маша, Лида, Женя и Катя умеют играть на разных инструментах (виолончели, рояле, гитаре и скрипке), но каждая только на одном. Они же владеют разными иностранными языками (английским, французским, немецким и испанским), но каждая только одним. Известно, что: девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански; девушка, которая говорит по-немецки, не играет на виолончели; Лида не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка; Маша не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка; 5. Женя знает французский язык, но не играет на скрипке. Кто на каком инструменте играет и какой иностранный язык знает?

229. Три одноклассника – Влад, Тимур и Юра, встретились спустя 10 лет после окончания школы. Выяснилось, что один из них стал врачом, другой – физиком, а третий – юристом. Один полюбил туризм, другой – бег, страсть третьего – регби. Юра сказал, что на туризм ему не хватает времени, хотя его сестра, единственный врач в семье, заядлый турист. Врач сказал, что он разделяет увлечение коллеги. У двоих из друзей в названиях их профессий и увлечений не встречается ни одна буква их имен. Определите, кто чем любит заниматься в свободное время и у кого какая профессия.

230. В чашке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в чашке; сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом; в банке не лимонад и не вода; стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла).*</u> Используя граф-схемы решите следующие комбинаторные задачи с числами.

231. Сколько существует четырёхзначных чисел, сумму цифр которых больше 4, но меньше 10?

232. Сколько натуральных чисел от 1 до 100 имеют ровно 4 натуральных делителя, не менее чем три из которых не превосходят 10?

233. Назовем число забавным, если все его цифры делятся на 4. Сколько забавных чисел среди четырёхзначных, среди шестизначных чисел?

234. Назовем две цифры близкими, если они отличаются на 1. Кроме того, будем считать близкими цифры 0 и 9. Сколько существует различных десятизначных чисел, у которых любые две соседние цифры – близкие?

235. Из множества {1, 2, 3, 4} выбираются три различных натуральных числа a, b, c. Сколько существует способов сделать это так, чтобы $a^{\left(b^c\right)}$ делилось на 4?

236. Какое наибольшее количество различных цифр можно выписать в ряд так, чтобы, подчеркнув любые две соседних, мы получили двузначное число, делящееся на 7 или 13? Число 07 тоже считается двузначным.

237. Сколькими способами цифры от 1 до 9 можно разбить на несколько (больше одной) групп так, чтобы суммы цифр во всех группах были равны друг другу (разбиения, отличающиеся только перестановкой групп считать одинаковыми)?

238. Сколькими способами цифры от 1 до 9 можно расставить в квадрате 3×3 так, чтобы в каждой строке (слева направо) и каждом столбце (сверху вниз) цифры шли по убыванию?

239. Сколькими способами можно выписать в ряд числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы для любых трёх подряд идущих чисел a, b, c величина $ac - b^2$ была кратна 7?

240. Сколько трёхзначных чисел содержат ровно одну цифру 4?

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла).*</u> Если комбинаторное соединение – упорядоченный набор элементов, каждый из которых выбирается из некоторого конечного множества, то для определения числа возможных соединений можно использовать таблицу, число столбцов которой на 1 превосходит число элементов в соединении. Покажем на примере следующей задачи.

Автомобильный номер. Комбинация из трёх букв на автомобильном номере состоит только из тех русских букв, у которых есть похожие латинские, а именно из А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х. Сколько всего таких комбинаций? Сколько комбинаций номеров, в которых совпадают только первая и последняя буквы? Сколько комбинаций номеров, в которых на первом месте – гласная, а на втором – согласная?

<table>
<tr><td colspan="3">Количество способов выбора</td><td rowspan="2">Всего комбинаций</td></tr>
<tr><td>1 буквы</td><td>2 буквы</td><td>3 буквы</td></tr>
<tr><td colspan="4">1 вопрос задачи</td></tr>
<tr><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td rowspan="2">$12^3 = 1728$</td></tr>
<tr><td colspan="3">{А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х} – 12 элементов</td></tr>
<tr><td colspan="4">2 вопрос задачи</td></tr>
<tr><td>12</td><td>11</td><td>1</td><td rowspan="2">$12 \cdot 11 = 132$</td></tr>
<tr><td>{А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х}</td><td>{А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х}\{выбранная буква} – 11 элементов</td><td>{выбранная буква} – 1 элемент</td></tr>
<tr><td colspan="4">3 вопрос задачи</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td rowspan="2">$4 \cdot 8 \cdot 12 = 384$</td></tr>
<tr><td>{А, Е, О, У} – 4 элемента</td><td>{ В, К, М, Н, Р, С, Т, Х} – 8 элементов</td><td>{А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х} – 12 элементов</td></tr>
</table>

Используя я табличный способ, решите следующие комбинаторные задачи с числами.

241. Сколько пятизначных чисел не превосходящих 55555 имеет только чётные цифры в своей записи? Сколько пятизначных чисел не превосходящих 55555 имеет только нечётные цифры в своей записи?

242. Сколько делителей у числа 720, 15552?

243. Сколько делителей у числа 999^{999}?

244. Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых, ни первая, ни вторая цифра слева – не пятёрка?

245. Назовём число зеркальным, если слева направо оно читается так же, как справа налево. Сколько существует пятизначных зеркальных чисел? Сколько из нюх делятся на 5?

246. Сколько пар натуральный чисел $(x; y)$, $1 \le x, y \le 1000$, таких, что $x^2 + y^2$ делится на 5 нацело?

247. Сколько существует четырёхзначных чисел, делящихся на 4, в десятичной записи которых нет цифр 4, 5, 6, 8?

248. Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых третья цифра меньше четвёртой на 2.

249. Сколько существует шестизначных чисел, которые содержат ровно пять повторяющихся цифр (считаем, что число может начинаться с нуля)?

250. Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковые цифры?

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Решение задач, в которых описаны комбинаторные соединения с повторениями, и задачи на поиск числа неупорядоченных наборов элементов, которые нельзя или технически трудно решить, используя описанные ранее методы, сводится к поиску числа решений без учёта повторений или упорядоченности и уменьшению этого количества во столько раз, сколько имеется «несостоявшихся» перестановок повторяющихся или неупорядоченных элементов. Покажем на примере следующих задач.

Обмен книгами. У Вася есть семь книг по математике, а в Вани – девять. Все 16 книг – разные. Сколькими способами мальчики могут обменяться тремя книгами (то есть дать три книги в обмен на три книги)?

Количество способов выбора 3 книг из коллекции						Всего комбинаций
Васи (из 7 книг)			Вани (из 9 книг)			
I	II	III	I	II	III	
Считаем наборы упорядоченными						
7	6	5	9	8	7	$9\cdot8\cdot7^2\cdot6\cdot5$
Возможные («несостоявшиеся») перестановки внутри наборов						
3	2	1	3	2	1	$3^2\cdot2^2=9\cdot4$
Ответ на вопрос задачи						
$\dfrac{9\cdot8\cdot7^2\cdot6\cdot5}{9\cdot4}=2\cdot7^2\cdot6\cdot5=49\cdot60=2940$						

Трамвайный билет. Трамвайный билет состоит из семи цифр от 0 до 9. Сколько билетов содержат ровно 5 одинаковых цифр? Найдите самый большой и самый маленький номер билета.

1 этап решения

Количество вариантов выбора цифры номера							Всего комбинаций
I	II	III	IV	V	VI	VII	
Выбираем из 7-элементного множества $\{x, x, x, x, x, a, b\}$ без учёта повторений							
7	6	5	4	3	2	1	$7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2$
Возможные («несостоявшиеся») перестановки повторяющихся цифр							
5	4	3	2	1			$5\cdot4\cdot3\cdot2$
Количество вариантов номеров семизначного билета, состоящего 3 различные цифры $7\cdot6=42$							

2 этап решения

Количество способов выбора из $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$			Всего комбинаций
x	a	b	
В случае упорядоченного набора			
10	9	8	$10\cdot9\cdot8=720$
Возможные («несостоявшиеся») перестановки внутри набора			
3	2	1	6
Число множеств вида $\{x, a, b\}$ $720:6=120$			

3 этап решения

Число билетов, содержащих 5 одинаковых цифр		Всего комбинаций
Количество вариантов 7-значного номера из цифр x, a, b	Число множеств вида $\{x, a, b\}$	
42	120	5040
Самый большой номер 9999987 Самый маленький номер 1011112		

Решите задачи.

251. Сколько 23-значных чисел, у которых сумма цифр равна 4?

252. Сколько 9-значных чисел, делящихся на 5, можно составить путём перестановки цифр числа 377355372?

253. Найдите количество семизначных чисел, в десятичной записи которых могут встречаться только цифры 4, 5, 6, 7, и таких, что каждая цифра не меньше предыдущей.

254. Сколько подмножеств у 7-элементного множества?

255. Каких 6-значных чисел больше: представляющихся в виде произведения двух трехзначных или остальных?

256. Сколько существует шестизначных чисел, у которых по три четных и нечетных цифры?

257. Сколькими способами можно выбрать 5 цифр так, чтобы сумма любых двух не равнялась 10?

258. Назовём число интересным, если в его записи одна из цифр вдвое больше суммы всех остальных (например, число 2016). Сколько всего интересных пятизначных чисел?

269. Сколькими способами можно представить миллион в виде произведения трех множителей, если произведения, отличающиеся порядком множителей,

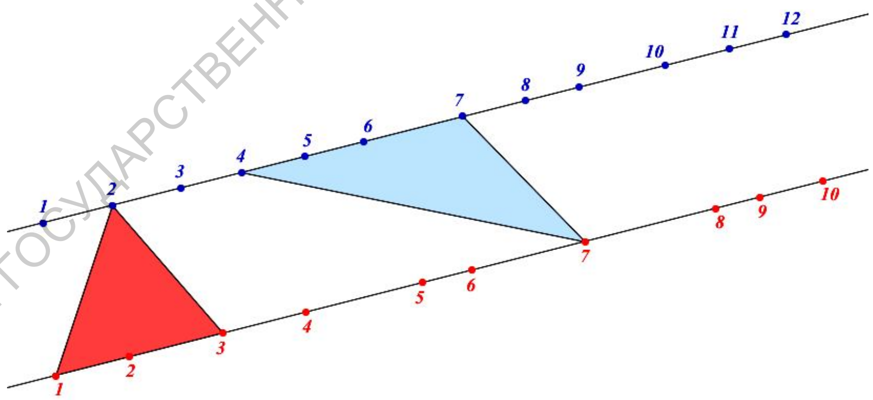
а) считаются различными?

б) считаются тождественными?

260. Из 10 различных цифр убрали три. Сколько способов восстановить изначальную сумму цифр?

<u>*Задачи II уровня (по 0,15 балла).*</u> Решение геометрических комбинаторных задач сводится к их информационному моделированию – к составлению модели на языке множеств и/или чисел.

***261.* Между двумя параллельными прямыми.** На одной из двух параллельных прямых произвольным образом отмечены 10, а на другой – 12 точек. Сколько треугольников с вершинами в этих точках может быть построено? Сколько четырёхугольников с вершинами в этих точках может быть построено?

<table>
<tr><td colspan="2">1 этап решения

</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 этап решения
С учётом построенной геометрической модели одного из множества возможных решений задачи, переформулируем её.</td></tr>
<tr><td>Сколько существует красных треугольников, если одна его вершина в одной из 12 синих точек, а другие – в двух из 10 красных точках?</td><td>Сколько существует синих треугольников, если одна его вершина в одной из 10 красных точек, а другие – в двух из 12 синих точках?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сколько всего красных и синих треугольников?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">3 этап решения
Переведём условие и требование задачи на язык множеств.</td></tr>
<tr><td>Сколько существует трёхэлементных множеств, составленных таким образом, что один элемент выбирается из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, а два других – из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}?</td><td>Сколько существует трёхэлементных множеств, составленных таким образом, что один элемент выбирается из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, а два других – из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Найти общее количество таких множеств.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4 этап решения</td></tr>
<tr><td>Выбрать элемент из 12-элементного множества можно 12 способами, а два элемента из 10-элементного множества – $10 \cdot 9 : 2 = 45$ способами.
Всего, $12 \cdot 45 = 580$ способов составить трёхэлементное множество с заданными условиями</td><td>Выбрать элемент из 10-элементного множества можно 10 способами, а два элемента из 12-элементного множества – $12 \cdot 11 : 2 = 66$ способами.
Всего, $10 \cdot 66 = 660$ способов составить трёхэлементное множество с заданными условиями</td></tr>
<tr><td colspan="2">В сумме получаем: 580 + 660 = 1240 способов (треугольников)</td></tr>
</table>

Самостоятельно ответьте на второй вопрос задачи.

262. На прямой отметили 10 различных точек. Сколько при этом получилось отрезков?

263. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

264. На окружности отметили 12 различных точек. Сколько при этом получилось дуг?

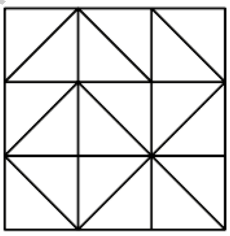
265. Сколько диагоналей в выпуклом двенадцатиугольнике?

266. На плоскости проведены 10 прямых так, что никакие две прямые не параллельны, и никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Найдите число точек пересечения этих прямых. Сколько треугольников образовано этими прямыми?

267. На плоскости расположены 9 точек в виде решётки 3×3. Через все возможные пары точек провели прямые. Сколько различных прямых получилось? Сколько существует различных треугольников с вершинами в этих точках?

268. На окружности отмечено одиннадцать точек. Сколько существует многоугольников с вершинами в отмеченных точках? Каких из них больше: содержащих данную отмеченную точку или остальных?

269. Даны две параллельные прямые, расстояние между которыми равно 2 см, на каждой отмечено по 10 точек, идущих через 1 см. нужно из этих 20 точек выбрать 9 таких, чтобы расстояние между любыми двумя из них было не менее 2 см. Сколькими способами это можно сделать?



270. Квадрат разбит на треугольники. Сколько существует способов закрасить ровно треть квадрата, при условии, что маленькие треугольники нельзя красить частично?

271. Отмечены вершины и середины сторон правильного десятиугольника. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

272. Дан правильный девятиугольник. Сколькими способами можно выбрать три его вершины так, чтобы они являлись вершинами равнобедренного треугольника?

Задачи II уровня (по 0,15 балла).

273. 10 друзей послали друг другу праздничные открытки, так что каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.

274. Четыре гостя при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Невнимательный швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получил чужую шляпу? (задача Леонарда Эйлера).

275. Сколькими способами можно вывести на арену 5 львов и 4 тигров, при условии, чтобы два тигра не шли друг за другом?

276. Необходимо разослать 7 различных фотографий, используя для этого 2 различных конверта. Сколькими способами можно это сделать?

277. В группе 20 студентов. Профессор решил каждому студенту задавать по одному из 25 каверзных вопросов. Сколько есть возможностей провести опрос в группе?

278. В кондитерском отделе продаются пирожные 4 сортов: наполеоны, эклеры, песочные, слоёные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

279. Известно, что при составлении команд многоместных космических кораблей возникает вопрос о психологической совместимости участников космического путешествия. Даже вполне подходящие порознь люди могут оказаться непригодными для длительного совместного путешествия. Предположим, что надо составить команду космического корабля из трёх человек: командира, инженера и врача. На место командира есть четыре кандидата a_1, a_2, a_3, a_4; на место инженера – три кандидата b_1, b_2, b_3; на место врача – три кандидата c_1, c_2, c_3. Проведённая проверка показала, что командир a_1 психологически совместим с инженерами b_1 и b_3 и врачами c_2 и c_3**;** командир a_2 с инженерами b_1 и b_2 и всеми врачами, командир a_3 – с инженерами b_1 и b_2 и врачами c_1, c_3**;** командир a_4 – со всеми инженерами и врачом c_2**.** Кроме того, инженер b_1 психологически несовместим с врачом c_3**;** инженер b_2 – с врачом c_1 и инженер b_3 – с врачом c_2**.** Сколькими способами при этих условиях может быть составлена команда космического корабля?

280. Для того чтобы совершить какую-либо операцию через банкомат необходимо знать pin-код имеющейся на руках банковской карты. Pin-код представляет собой некоторое четырёхзначное число (здесь, 0056 – тоже число), состоящее из цифр десятичной системы счисления, то есть 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Сколько неудачных попыток активации карты через банкомат может быть сделано человеком, не знающим pin-кода банковской карты?

281. Пин-код телефона состоит из 4 цифр (и может начинаться с нуля). Петя называет «счастливыми» такие пин-коды, у которых сумма крайних цифр равна сумме средних. В своём телефоне Петя использует только «счастливые» пин-коды. Он говорит, что даже если забудет одну цифру, но будет помнить её позицию, то он легко её восстановит. А если он забудет две цифры, но будет помнить их позиции, то ему придётся перебрать лишь небольшое число пин-кодов. Сколько пин-кодов придётся перебрать Пете в худшем случае? Сколько существует всего «счастливых» пин-кодов?

282. Анаграмма – это слово (не обязательно осмысленное), полученное из данного слова или словосочетания (в этом случае пробел – тоже «буква») перестановкой букв. Сколько всего анаграмм Вашего короткого имени? полного имени? имени и отчества? фамилии, имени и отчества?

283. Из трёх математиков и десяти экономистов нужно составить комиссию из семи человек. При этом в ней должен участвовать хотя бы один математик. Сколькими способами может быть составлена комиссия?

284. На дороге длиной 999 километров стоят 1000 километровых столбов, на каждом из которых написаны два числа – расстояние до начала и до конца дороги. Сколько среди этих столбов таких, на которых числа записаны только двумя различными цифрами?

285. В парламенте 30 депутатов. Каждые два из них либо дружат, либо враждуют, причем каждый дружит ровно с 6 другими. Каждые 3 депутата образуют комиссию. Найдите общее число комиссий, в которых все три члена попарно дружат или все трое попарно враждуют.

Задачи III уровня (по 0,2 балла).

286. Сколько существует делящихся на 9 одиннадцатизначных натуральных чисел, в записи которых участвуют только цифры 0 и 8?

287. Трое ребят делят между собой 10 яблок. Сколькими способами они могут их разделить, если все яблоки считаются одинаковыми (то есть, если нас интересует, сколько яблок получит каждый, но не то, какие именно яблоки ему достанутся)?

288. Сколько одночленов, после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, окажется в многочлене $(1+x^3+x^6+\ldots+x^{30})(1+x^5+x^{10}+\ldots+x^{30})$?

289. Сколько пар натуральных чисел удовлетворяют равенству $2x+5y=90000$?

290. Сколько натуральных чисел $n \le 10^{12}$ удовлетворяют равенству $НОК(16, n) = 16n$?

291. Сколько девятизначных чисел, в которых каждая цифра от 1 до 9 встречается ровно один раз, цифры 1, 2, 3, 4, 5 расположены в порядке возрастания, а цифра 6 стоит раньше цифры 1?

292. В некоторой сказочной стране алфавит состоит из трёх букв С, Г, У. словом называется любая, состоящая из этих букв конечная последовательность, в которой две согласные не могут стоять рядом и две гласные не могут стоять рядом. Сколько в этой стране состоящих из 200 букв слов, которые содержать каждую из букв алфавита хотя бы по разу?

293. Натуральное число имеет ровно два простых делителя. Его квадрат имеет 51 различных натуральных делителей. Какое наибольшее количество делителей может иметь куб этого числа?

294. Найдите количество натуральных чисел, которые делятся на 2012 и имеют, не считая 1 и самого себя, ровно 2199 различных делителей.

295. Число 2015 можно представить в виде суммы последовательных целых чисел различным образом, например, 2015 = 1007 + 1008 или (– 400) + (– 399) + … + 405. Сколькими способами это можно сделать?

296. <u>*Творческое задание (1 балл).*</u> Составить *Программу (алгоритм) решения сюжетной комбинаторной задачи*. Проиллюстрируйте работу *Программы* на серии примеров.

297. <u>*Творческое задание (1 балл).*</u> Выясните суть понятия «фигурные числа». Какие математические проблемы связаны с данным понятием? Сформулируйте их. Приведите ряд примеров использования фигурных чисел в контексте темы, описывающей данный раздел.

298. <u>*Творческое задание (1 балл).*</u> Составьте цепочку из десяти сюжетных комбинаторных задач, решение каждой из которых опирается на результат предыдущей.

299. <u>*Творческое задание (1 балл).*</u> Выясните суть понятия «комбинаторная лингвистика». Какие математические и литературные проблемы связаны с данным понятием? Сформулируйте их. Приведите ряд примеров.

300. <u>*Творческое задание (1 балл).*</u> В чём суть логической игры «судоку»? Какое отношение имеет комбинаторика к этой игре? Опишите способы создания игрового поля и стратегию данной игры. Приведите ряд примеров.

		1	6	7	8		4	
5	3	4	9	1			8	
		8	3			9	1	2
6	4			8		3	2	5
3			4	6	9			8
8	1	7		5			6	9
4	5	6			7	2		
	8			2	4	6	9	7
	7		1	3	6	8		

IV. Бесконечные множества. Числовые множества. Множества натуральных и неотрицательных целых чисел

Основной характеристикой конечного множества является число его элементов, или просто *число.*

Число (натуральное) – это свойство конечного множества, и в процессе счета мы как раз устанавливаем количество элементов множества. Когда математики всерьез задумались над вопросом, что же такое число, они, прежде всего, обнаружили этот факт. Кроме того, им стало ясно и другое: легче установить, совпадают или нет два числа, чем сказать, каковы они.

Если ребенок видит две чашки, каждую со своим блюдцем, то наступит день, когда он поймет, что и блюдец тоже два. Если у нас семеро гостей, а стульев всего шесть, − кто-то останется без стула. Если администратор театра видит, что каждое кресло занято одним зрителем, он понимает, что зрителей ровно столько, сколько мест в зале, и для этого ему не надо знать само количество мест.

Это означает, что понятие «равные числа» не связано с понятием «число» (несмотря на причуды языка). Подобным же образом, приложив, друг к другу два куска веревки, можно установить, что они имеют одинаковую длину, так никогда и, не узнав, чему она равна, или при помощи равноплечих весов убедиться, что два тела имеют одинаковую массу.

Во всех этих случаях легче сказать, обладают или нет два данных объекта общим свойством, чем объяснить в общем виде, что это за свойство. Всё, что требуется, – придумать способ сравнения объектов по отношению к этому (пока не определенному) свойству.

Метод сравнения длин или масс выбрать нетрудно, а как сравнивать числа?

Два множества имеют равное число элементов и называются *равночисленными* тогда и только тогда, когда между ними существует биекция.

Разобьем множества на классы равночисленных: два множества отнесем к одному классу тогда и только тогда, когда они равночисленны.

Каждый класс можно задать, указав один из его членов. Например, класс, содержащий множество $\{a, b, c, d, e\}$, включает в себя любое равночисленное с ним множество, а таковыми являются те и только те множества, которые состоят из пяти элементов. В этом смысле число 5 будет задано, если (1) задано некоторое множество и сказано, что оно состоит из 5 элементов; (2) сказано, что любое множество, равночисленное с заданным, тоже состоит из 5 элементов.

Итак, каждому множеству отвечает нечто, называемое числом, причем двум множествам отвечает одно и то же число тогда и только тогда, когда они равночисленны.

Существование чисел можно принять за аксиому. А дальше можно построить всю арифметику. Сначала определим первые несколько чисел:

0 соответствует пустому множеству $\varnothing$,

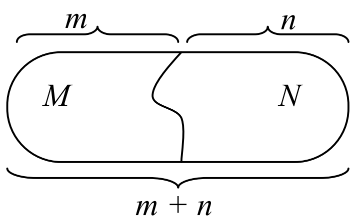
1 соответствует множеству $\{a\}$,

2 – множеству $\{a, b\}$,

3 – множеству $\{a, b, c\}$,

4 – множеству $\{a, b, c, d\}$

и т.д.



Затем введем *сложение* и *умножение* чисел. Возьмем два числа m и n. Найдем отвечающие им множества M и N (соответственно), причем такие, которые не пересекаются. Образуем объединение $M \cup N$. Ему отвечает какое-то число. Это число и будем, по определению, считать *суммой* $m + n$.

По поводу этого определения нужно сделать два замечания. Во-первых, всегда можно найти непересекающиеся множества M и N. В самом деле, если они пересекаются, можно заменять по одному общие элементы другими, и сам способ замены определяет биекцию между старым и новым множеством, которая гарантирует, что они остаются в одном классе.

Во-вторых, сложение должно быть «корректно определено». Взяв другие множества M' и N' отвечающие числам m и n, придем ли мы к тому же результату? Если нет, то наше определение бесполезно.

Допустим, что выбраны другие множества M' и N', которые не пересекаются и отвечают числам m и n. Тогда M и M' отвечают одному и тому же числу, и, значит, существует биекция $f\colon M \to M'$. По той же причине существует биекция $g\colon N \to N'$. Тогда можно построить биекцию $h\colon M \cup N \to M' \cup N'$. Если положить $h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \in M, \\ g(x) \text{ при } x \in N. \end{cases}$

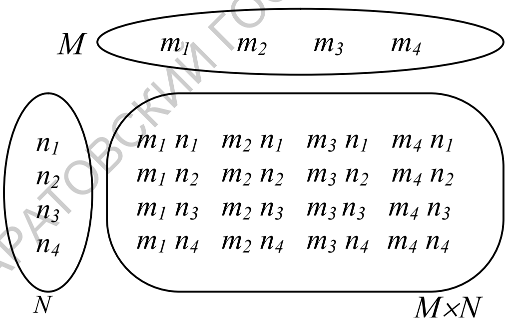
Теперь у нас достаточно информации, чтобы доказать знаменитую теорему: $2 + 2 = 4$.

Найдём непересекающиеся множества M и N, каждое из которых соответствует числу 2. По определению, можно взять $M = \{x, y\}$, $N = \{r, t\}$, где x, y, r, t различны. Существует биекция $f\colon M \to N$, при которой $f(x) = r$, $f(y) = t$, так что M и N равночисленны. Значит, N тоже соответствует числу 2.

Образуем объединение $M \cup N = \{x, y, r, t\}$.

Существует биекция между этим множеством и множеством $\{a, b, c, d\}$, определенная формулами $g(x) = a$, $g(y) = b$, $g(r) = c$, $g(t) = d$.

Множество $\{a, b, c, d\}$ по определению, соответствует числу 4, значит, и $M \cup N$ соответствует числу 4. По определению сложения, $2 + 2 = 4$.



Для определения умножения чисел m и n, возьмем соответствующие множества M и N, построим их (декартово) произведение $M \times N$ и соответствующее ему число будем считать произведением $m \cdot n$.

При этом справедливо равенство:

$$m \cdot n = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{n \text{ штук}} \qquad \text{IV.1}$$

При таком подходе можно доказать законы арифметики, по крайней мере для натуральных чисел (а из них уже можно вывести эти законы для отрицательных целых, для рациональных и для действительных чисел).

Возьмем, например, дистрибутивный (распределительный) закон умножения: $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$.

Пусть множества M, N, P соответствуют числам m, n, p причем M и N не пересекаются. Тогда $(m+n\cdot)p$ отвечает множеству $(M \cup N) \times P$, а $(m \cdot p + n \cdot p)$ – множеству $(M \times P) \cup (N \times P)$. Эти множества совпадают: первое состоит из всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in M$ или $x \in N$, а $y \in P$; второе состоит из всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in M$ и $y \in P$ или $x \in N$ и $y \in P$.

Раз эти множества совпадают, то между ними существует биекция. Следовательно, они равночисленны, отвечающие им числа равны, и распределительный закон доказан[1].

Аналогично доказываются другие законы арифметики натуральных чисел:

IV.2. $a + b = b + a$

IV.3. $a + (b + c) = (a + b) + c$

IV.4. $a \cdot b = b \cdot a$

IV.5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

IV.6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Однако, производя действия над числами, неуместно обращаться каждый раз к соответствующим конечным множествам. Будем рассматривать числа в качестве самостоятельного математического объекта, для чего объединим все числа в новое множество N, которое косвенно определим следующей системой аксиом (система аксиом Пеано) и будем называть *множеством натуральных чисел.*

1) Единица есть натуральное число.

2) Для любого натурального числа существует одно и только одно непосредственно следующее за ним натуральное число.

3) Любое натуральное число непосредственно следует не более чем за одним натуральным числом.

4) Единица не следует ни за каким натуральным числом.

5) Если какое-нибудь утверждение верно для единицы, и если всякий раз, когда оно верно для какого-нибудь натурального числа, оно верно и для непосредственно следующего за ним числа, то это утверждение верно для любого натурального числа.

На основе системы аксиом Пеано может быть построена арифметика натуральных чисел, то есть, определены все известные понятия арифметики (например, числа 2, 3, 4 и т.д., сложение чисел, вычитание и пр.) и доказаны все теоремы арифметики (например, законы сложения, умножения и пр.).

Последняя аксиома системы Пеано носит название *аксиомы математической индукции* и лежит в основе одного из методов доказательства математических утверждений, связанных с натуральным рядом, позволяющих сделать общее заключение на основании частных**.** Как и аксиома, метод именуется *методом математической индукции*.

---

[1] Приведённый в данном разделе материал основан на содержании статьи Яна Стюарта «Счёт, понятие о бесконечном»/ Концепции современной математики. – Минск: Высшая школа, 1980. – С.162 – 171.

Применение метода математической индукции (ММИ) сводится:

1. К проверке высказанного утверждения для $n = 1$.

2. К предположению, что утверждение верно для $n = k$.

3. К доказательству теоремы, что из предложения справедливости утверждения для $n = k$ следует справедливость утверждения и для $n = k+1$.

Иногда пункт 1. рассматривается не с $n = 1$, а с какого-нибудь другого утверждения для $n = n_0$, например, при доказательстве неравенства $2^n > n^2$ пришлось бы начинать с $n = 5$. Однако это не умоляет общность метода, так как всегда можно положить $n = m + 4$ (в общем случае $n = m + (n_0 - 1)$) и рассматривать процесс доказательства утверждения $2^{m+4} > (m+4)^2$, начиная с $n = 1$.

Очень важно уметь представлять натуральное число различными способами (IV.7):

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1} = a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1$$

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2} \cdot 10 + a_1$$

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_3} \cdot 100 + a_2 \cdot 10 + a_1 = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_3} \cdot 100 + \overline{a_2 a_1}$$ и т.д.

Отношение порядка на множестве натуральных чисел определяется на основе закона трихотомии и ряда определений.

Закон трихотомии: для любых двух натуральных чисел a и b выполняется одно и только одно из трёх соотношений, где c – некоторое натуральное число:

1*. $a = b$ 2*. $a = b + c$ 3*. $b = a + c$

В соответствии с этим законом, для любых двух натуральных чисел a и b выполняется одно и только одно из трёх соотношений порядка, где c – некоторое натуральное число:

1*) $a = b$,

2*) число *a больше* числа b: $a > b$, если $a = b + c$, (IV.8)

3*) число *a меньше* числа b: $a < b$, если $b = a + c$. (IV.9)

Отношение порядка обладает рядом свойств:

IV.10. $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$ IV.11. $a = b, x = y \Rightarrow a + x = b + y$

IV.12. $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$ IV.13. $a < b, x < y \Rightarrow a + x < b + y$

IV.14. $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ IV.15. $a > b, x > y \Rightarrow a + x > b + y$

IV.16. $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$ IV.17. $a = b, x = y \Rightarrow a \cdot x = b \cdot y$

IV.18. $a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$ IV.19. $a < b, x < y \Rightarrow a \cdot x < b \cdot y$

IV.20. $a > b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c$ IV.21. $a > b, x > y \Rightarrow a \cdot x > b \cdot y$

Напомним, что результат сложения двух натуральных чисел называется их *суммой*, а сами числа, участвующие в сложении – *слагаемыми*; результат умножения двух чисел называется *произведением*, а числа, участвующие в умножении – *множителями*. Определив возведение числа a в степень n как произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ штук}}, \qquad (IV.22)$$

Назовём результат возведения числа степень – *степенью,* число, возводимое в степень (число, повторяющееся сомножителем) – *основанием* *степени,* другое (число, указывающее количество сомножителей) – *показателем степени.*

Для натуральных чисел *a, b, m, n* справедливы следующие свойства (соответственно IV.23 – IV.25):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}; \qquad (ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

На множестве натуральных чисел можно рассмотреть арифметические действия, обратные сложению, умножению и возведению в степень.

Назовём арифметическое действие, обратное сложению – *вычитанием:* $a - b = x$, а его результат x – *разностью чисел a* и *b* при условии: $a = b + x$. Компоненты вычитания называются соответственно: a – уменьшаемое и b – вычитаемое.

Назовём арифметическое действие, обратное умножению – *делением:* $a : b = y$, а его результат y – *частным чисел a* и *b* при условии: $a = b \cdot y$. Компоненты деления называются соответственно: a – делимое и b – делитель.

Назовём арифметическое действие, обратное возведению в степень – *извлечением корня из числа:* $\sqrt[n]{a} = z$, а его результат z – *арифметическим корнем из числа a* при условии: $a = z^n$. Компоненты извлечения корня называются соответственно: a – подкоренное число и n – показатель корня.

Остаётся определить операцию (арифметическое действие) нахождения показателя степени по известному основанию и результату возведения в степень. *Логарифмом* числа b по основанию a называется показатель степени, в который надо возвести число a, чтобы получить число b:

$$w = log_a b \text{ при условии: } a^w = b.$$

Если к некоторому числу a применить последовательно прямое и обратное арифметическое действие, то число останется без изменения:

IV.26. $(a + b) - b = a$ IV.28. $(a \cdot b) : b = a$ IV.30. $(\sqrt[n]{a})^n = a$

IV.27. $(a - b) + b = a$ IV.29. $(a : b) \cdot b = a$ IV.31. $\sqrt[n]{a^n} = a$ IV.32. $n^{log_n a} = a$

Приём последовательного применения прямого и обратного арифметических действий часто используют при упрощении выражений.

С учётом введённых определений сформулируем ряд новых свойств.

IV.33. $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

IV.34. $a^m : a^n = a^{m-n}$

IV.35. $(a : b)^n = a^n : b^n$

IV.36. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

IV.37. $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$

IV.38. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

IV.39. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

IV.40. $log_n(a \cdot b) = log_n a + log_n b$

IV.41. $log_n(a : b) = log_n a - log_n b$

IV.42. $log_n a^m = m \cdot log_n a$

IV.43. $log_n a = (log_n b) \cdot (log_b a)$

IV.44. $log_n a = (log_m a) : (log_m n)$

На множестве N определены (имеют смысл для любых двух натуральных числе) операции сложения, умножения и возведения в степень. Остальные арифметические операции над натуральными числами без введения чисел другой природы возможны не всегда. Например, нахождение разности двух равных чисел, приводит нас к необходимости введения нового числа, не являющегося натуральным, которое назовём нулём:

$$a - a = 0 \qquad (IV.45)$$

Нуль в объединении с множеством N образует новое множество *неотрицательных целых чисел.*

Введение нуля приводит к появлению новых свойств:

IV.46. $a + 0 = a$ IV.47. $a - 0 = a$

IV.48. $a \cdot 0 = 0$ IV.49. $0 : a = 0$

IV.50. $0^n = 0$ IV.51. $\sqrt[n]{0} = 0$

IV.52*. $a^0 = 1$ IV.53. $log_n 1 = 0$

Определяя противоположные числа, как числа, удовлетворяющие свойству:

$$a + (-a) = 0 \qquad (IV.54)$$

расширим числа до множества Z целых чисел: *..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3,...*

На множестве Z определены (имеют смысл для любых двух натуральных числе) операции сложения, вычитания, умножения и возведения в степень. Следовательно, $N \subset Z$.

Следующее расширение до множества Q рациональных чисел позволяет проводить операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень. Следовательно, $N \subset Z \subset Q$. А значит, любое целое число n можно представить в виде дроби со знаменателем *1*, то есть $n = \frac{n}{1}$.

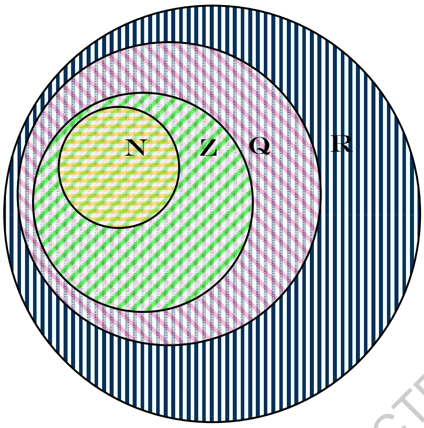


Схема 4. Соотношение между основными числовыми множествами

Следующая таблица (таблица 2) даёт представление о расширении понятия числа и содержит условия возможности выполнения действий на множестве N ($a,b,c,n,r \in N$), а схема 4 является наглядно-образной моделью данного процесса.

* Определение степени с нулевым показателем.

Таблица 2

Расширение понятия числа

№	Действие		Условие		Результат	Введение чисел новой природы; новые числовые множества		Пример
1	Вычитание $a-b$		$a>b$		$(a-b)\in$ N	N	Целые числа; Z	$27-3=18$ $18\in$ N, Z
2			$a=b$		$a-b=a-a=0$	Нуль; $\{0\}$		$27\text{-}27=0$ $0\in$ Z
3			$a<b$		$a-b=-(b-a)$ целое отрицательное число	Целые отрицательные числа; Z_-		$3-27=-18$ $-18\in Z_-$ $-18\in Z$
4	Деление		$a<b$		$a:b=\frac{a}{b}$ обыкновенная правильная дробь	Обыкновенные дроби	Рациональные положительные числа Q_+	$3:27=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}\in Q_+$
5	$a:b$	нацело	$a\geq b$	$a=b\cdot n$	$a:b=b\cdot n:b=n$ $\Leftrightarrow$ $a\,\vdots\,b$	N		$27:3=9$ $9\in$ N,Z,Q_+
6		с остатком		$a\neq b\cdot n$ $\Leftrightarrow$ $a=b\cdot n+r$ где $0<r<b$	$a:b=n(ост.r)$ деление с остатком $a:b=\frac{a}{b}=n\frac{r}{b}$, где $\frac{a}{b}$ – обыкновенная неправильная дробь, $n\frac{r}{b}$ – смешанное число	Обыкновенные дроби		$27:2=13(ост1)$ $27:2=13\frac{1}{2}$ $13\frac{1}{2}\in Q_+$
7	Извлечение корня $\sqrt[a]{b}$		$b=c^{n\cdot a}$		$\sqrt[a]{b}=\sqrt[a]{c^{n\cdot a}}=c^n$	N	Действительные положительные числа R_+	$\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ $3\in$ N,Z,Q_+ $3\in R_+$
8			$b\neq c^{n\cdot a}$		$\sqrt[a]{b}$	Иррациональные алгебраические числа I_+		$\sqrt[27]{3}$ $\sqrt[27]{3}\in I_+,R_+$
9	Нахождение показателя степени n		$a:b=a_1$ $a_1:b=a_2$ $a_2:b=a_3$ . . . $a_{n-1}:b=1$		$n=\log_b a$	N		$27:3:3:3=1$ $\log_3 27=3$ $3\in$ N,Z,Q_+ $3\in R_+$
					$^1/_n=\log_a b$	Аликвотные дроби		$\log_{27}3={}^1/_3$ $^1/_3\in Q_+,R_+$
10			в противном случае		$\log_b a$	Логарифмы; иррациональные трансцендентные числа		$\log_2 27\in R_+$

Тестовые задания (по 0,05 балла).

301. Из чисел $-3,-2,-1,0,1,2,3$ выберите все те, при которых число $10x+1$ больше числа $8x-2$.

а) $-3,-2$ б) $-3,-2,-1$ в) $-1,0,1,2,3$ г) $0,1,2,3$

302. Для $0<a<1$ справедливо утверждение

а) $a^2<a^3$ б) $a^2>a^3$ в) $a^2=a^3$ г) для сравнения не хватает данных

303. Между числами $\sqrt{15}$ и $\sqrt{35}$ заключены следующие целые числа

а) 16, 17,…,34 б) 3,4 и 5 в) 4, 5 и 6 г) 4 и 5

304. Значение выражения $(m^{-6})^{-2}m^{-14}$ при $m=\frac{1}{4}$ равно

а) -16 б) $-{}^1/_{16}$ в) ${}^1/_{16}$ г) 16

305. О натуральных числах a,b,c известно: $a>b>c$. Какое из следующих чисел отрицательно?

а) a^2-b^2 б) $ab-cb$ в) $bc-c^2$ г) $ac-ab$

306. Значение выражения $2\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$ равно

а) 60 б) 30 в) 12 г) $10\sqrt{6}$

307. Для $x>y-z$ справедливо неравенство

а) $x-y>z$ б) $y>x+z$ в) $z-x>y$ г) $z>y-x$

308. Произведение $4\cdot 2^n$ можно представить в виде степени

а) 2^{2n} б) 2^{n+2} в) 4^{n+2} г) 8^n

309. Число 2^{5-a} равно

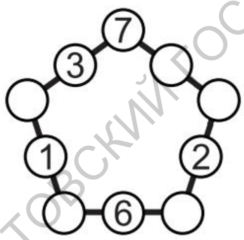
а) 2^5-a б) 2^5-2^a в) $2^5\cdot 2^a$ г) $2^5:2^a$

310. Число $log_2 3\cdot log_3 4\cdot log_4 5\cdot log_5 6\cdot log_6 7\cdot log_7 8$ равно

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

Задачи I уровня (по 0,1 балла) – олимпиадные для учеников 3-4 классов.

311. Из множества однозначных натуральных чисел выбираются пять таких, что никакие два из них в сумме не дают 10. Какое число будет в этом множестве обязательно?



312. Заполните натуральными числами пустые кружочки так, чтобы на всех сторонах пятиугольника суммы трех чисел были одинаковы. Выявите и объясните закономерность.

313. Сумма двух натуральных чисел равна 170. Первое число оканчивается цифрой 5, а если эту цифру отбросить, то получится второе число. Чему равна разность этих чисел?

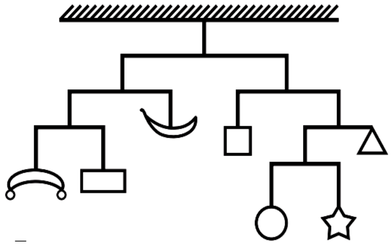
314. Самое маленькое из двузначных чисел с двузначной суммой цифр сложили с самым большим из двузначных чисел с однозначной суммой цифр. Что получилось?

315. Будем выписывать подряд целые числа 1, 2, 3,…, исключая те, которые содержат цифру 7. Какое число будет 777-ым?

316. Назовем трехзначное число удивительным, если оно делится на 3, а первая и последняя цифры у него одинаковы. Чему равна наименьшая разность между двумя удивительными числами?

317. Используя только две цифры: 1 и 7 напишите несколько чисел, сумма которых равна 2013, 2014, 2015, 2016 и 2017. Какое наименьшее количество чисел в каждом случае придётся написать?

318. У двух трехзначных чисел совпадают суммы цифр. От большего числа отняли меньшее; какое самое большое значение разности можно получить?



319. Конструкция на рисунке весит 128 граммов и находится в равновесии (вес горизонтальных планок и вертикальных нитей не учитывается). Сколько весит звездочка?

320. У каждого двузначного числа нашли произведение цифр, потом у каждого такого произведения подсчитали сумму цифр. Какая сумма самая большая?

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла)</u> – олимпиадные для учеников 5-6 классов.

321. Записали несколько положительных чисел, сумма которых равна 100. Среднее арифметическое трех самых больших из них равно 20, а двух самых маленьких – 13. Сколько чисел написано?

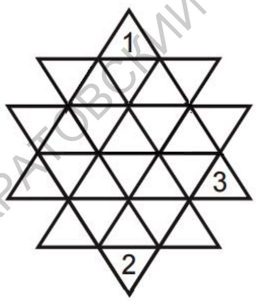
322. Разность двух чисел на 17 меньше уменьшаемого и на 9 больше вычитаемого. Чему равна эта разность?

323. Сколько трехзначных чисел обладает следующим свойством: если из такого числа вычесть 297, то получится трехзначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке?

324. На доске написано несколько натуральных чисел. Сумма этих чисел равна их произведению и равна 2016. Какое самое маленькое количество чисел может быть на доске?

325. Найдите наименьшее среди натуральных чисел обладающих свойством: множество его делителей таково, что там найдутся числа, оканчивающиеся цифрами 0, 1, 2, …, 9.

326. Все числа, сумма цифр которых делится на 5 выписывают в порядке возрастания. Чему равна самая маленькая разность между соседними числами в этом ряду?



327. В каждый маленький треугольник надо вписать одно из чисел 1, 2, 3, 4 (некоторые числа уже вписаны). Вписывать надо так, чтобы в любой полоске, состоящей из 4 маленьких треугольников, встречались все 4 числа.

328. Сколько двузначных чисел обладают таким свойством: если переставить местами их цифры, то они увеличиваются не менее, чем в 3 раза?

329. Если сумма трех последовательных положительных целых чисел равна 99, то чему равно произведение цифр первого из них?

330. Число 111…111 (2004 единицы) разделили на 3. Сколько нулей получилось в записи частного?

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла)*</u> *– олимпиадные для учеников 7-8 классов.*

331. Найдите двузначное число**,** сумма квадратов цифр которого равна 10. Если из этого числа вычесть 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

332. Найдите двузначное число такое, что если это число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 7, в остатке 6. Если же искомое двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке число, равное сумме цифр искомого числа.

333. Найдите двузначное число, которое в 4 раза больше суммы его цифр.

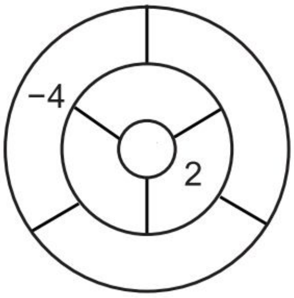
334. Найдите два трёхзначных числа, записанных одинаковыми цифрами, но в обратном порядке. Сумма искомых чисел равна 1252, сумма их квадратов – 84, а сумма цифр каждого из чисел равна 14.

335. Найдите числа $\overline{he}$ и $\overline{she}$ такие, что $\overline{he}^2=\overline{she}$.

336. Найдите четырёхзначное число $\overline{клоп}$ такое, что $9\cdot\overline{клоп}=\overline{полк}$.

337. Найдите цифры удовлетворяющие равенству: $\overline{ab}\cdot\overline{ba}=\overline{cdc}$.

338. Найдите трёхзначное число кратное 5 и такое, что если это число умножить на цифру его единиц, то результат будет больше суммы его цифр на 548.



339. В семь областей на рисунке надо вписать по числу так, чтобы число в каждой области было равно сумме чисел во всех соседних областях (две области считаются соседними, если они имеют общую границу).

340. Из пяти натуральных (не обязательно различных) чисел составили и вычислили всевозможные попарные суммы. Получилось всего три различных значения: 57, 70 и 83. Чему равно наибольшее из пяти чисел?

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла).*</u> Доказать, что при каждом натуральном *n* справедливо равенство:

341. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

342. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$

343. $2^2+6^2+10^2+\ldots+(4n-2)^2=\dfrac{4n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$

344. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$

345. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$

346. $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2\cdot(2n^2-1)$

347. $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n\cdot(3n+1)=n\cdot(n+1)^2$

348. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\right)$

349. $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+1)}$

350. $\frac{1}{4\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 16}+\ldots+\frac{1}{4n(4n+4)}=\frac{1}{16}-\frac{1}{16(n+1)}$

351. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$

352. $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$

353. $\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 19}+\ldots+\frac{1}{(6n-5)\cdot(6n+1)}=\frac{n}{6n+1}$

354. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4}$

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла).*</u> Доказать утверждение для натуральных чисел:

355. Если $n \geq 5$, то $2^n > n^2$.

356. Если $n \geq 10$, то $2^n > n^3$.

357. $a^2+b^2+c^2 > ab + bc + ac$.

358. $a^2+2ab+3b^2+2a+6b+3 > 0$.

359. $a^8-a^5+a^2-a+1 > 0$.

360. $(a+b)^n < 2^n(a^n+b^n)$.

<u>*Задачи II уровня (по 0,15 балла).*</u> Проверить равенство:

361. $2(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)=2^{n+1}(2n-1)!$

362. $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{n\cdot(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

363. $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\ldots+(n-1)\cdot n^2=\frac{n\cdot(n^2-1)\cdot(3n+2)}{12}$

364. $2+7+14+\ldots+(n^2+2n-1)=\frac{n\cdot(2n^2+9n+1)}{6}$

365. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$

366. $\frac{7}{1\cdot 8}+\frac{7}{8\cdot 15}+\frac{7}{15\cdot 22}+\ldots+\frac{7}{(7n-6)\cdot(7n+1)}=1-\frac{1}{7n+1}$

367. $2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+4\cdot 3^2+\ldots+(n+1)\cdot n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(3n+1)}{12}$

368. $(-1)^n\cdot(2n-1)+\ldots+11-9+7-5+3-1=(-1)^n\cdot n$

Задачи II уровня (по 0,15 балла). Найти сумму:

369. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$

370. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$

371. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}$

372. $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$

373. $\frac{4}{4\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{4}{(n+3)\cdot(n+4)}$

374. $1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\ldots+\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$

375. $1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2$

Задачи II уровня (по 0,15 баллов). Арифметический метод решения сюжетных задач – адекватная задаче последовательность арифметических действий (при этом все арифметические операции при решении задачи проводятся над конкретными величинами, и основой рассуждения является знание смысла арифметических действий), описывающих ту или иную ситуацию/действие задачи – знаком вам с начальной школы. Используя этот метод[9], решите следующие задачи.

376. Одного человека спросили: «Сколько вам лет?» Он ответил так: «Десять лет тому назад я был в четыре раза старше сына, а через десять лет я буду лишь вдвое старше его». Сколько лет этому человеку?

377. Два поезда выехали в разное время навстречу друг другу с двух станций, расстояние между которыми 588 км. Первый поезд проходил в час 48 км, а второй поезд проходил в час 63 км. На сколько часов один из них выехал раньше другого?

378. Воспитательница детского сада рассчитала, что если давать каждому ребенку по 6 слив, то останутся 38 слив. Если же раздавать по 8 слив, то одному ребенку слив не достанется. Сколько было детей и сколько слив?

379. У нескольких ребят было поровну яблок. Если бы ребят было на два меньше, то каждому досталось бы на одно яблоко больше. А если бы ребят было на три меньше, то каждому досталось бы на два яблока больше. Сколько было ребят?

380. Бобер Боб строит новую хатку. У него есть 6 бревен, которые надо разделить на 6 частей каждое. Своими острыми зубами он перегрызает бревно в одном месте за 1 минуту. Сколько времени займет у него вся эта работа?

[9] Для наглядности можно использовать геометрические информационные модели

381. Буратино увидел двух продавцов с тетрадками по одной и той же цене. «Умненький Буратино, – зовет его один продавец – если ты купишь у меня две тетрадки, то я их обе продам тебе на 40% дешевле!». «Богатенький Буратино, – кричит другой – если ты купишь такую же тетрадку у меня по обычной цене, то вторую я продам всего за 20 сольдо!». Умница Мальвина подсказала Буратино, что покупка двух тетрадок у первого продавца обойдется на 5 сольдо дешевле, чем у второго. Сколько стоила одна тетрадка сначала?

382. Царь Кащей подобрел и решил потратить 50 золотых монет на подарки детям. В сундуке у него хранится пять ларцов, в каждом ларце по три шкатулки, а в каждой шкатулке по десять золотых монет. Сундук, ларцы и шкатулки заперты на замки. Какое наименьшее число замков потребуется открыть Кащею, чтобы достать 50 монет?

383. В классе сидят мальчики и девочки. Если в класс войдут еще десять мальчиков, то всего мальчиков станет вдвое больше, чем девочек. Сколько девочек должны выйти из класса, чтобы среди оставшихся ребят оказалось вдвое больше мальчиков, чем девочек?

384. Капитан Флинт и несколько пиратов нашли сундук с золотыми монетами. Они разделили монеты поровну. Если бы пиратов было на 4 меньше, то каждый получил бы на 10 монет больше. Если бы монет было на 50 меньше, то каждый пират получил бы на пять монет меньше. Сколько золотых монет было в сундуке?

385. Как гласит русская поговорка, ложка дёгтя портит бочку мёда. Сколько банок мёда удастся испортить десятью каплями дёгтя, если в бочке сорок банок, а в ложке двести капель?

Задачи III уровня (по 40 баллов). Решить задачу.

386. Из города А в город В в 6 ч утра выехал грузовой автомобиль. Шесть часов спустя из города В в город А по той же дороге выехал ему навстречу легковой автомобиль. Автомобили движутся с постоянными скоростями. По предварительной договоренности они одновременно приехали в поселок С, расположенный на дороге между А и В. Разгрузка и оформление документов длились 5 часов. Затем грузовой и легковой автомобили продолжили каждый свой путь. Легковой и грузовой автомобили прибыли соответственно в города А и В одновременно в 23 ч того же дня. Найдите время прибытия автомобилей в населенный пункт С.

387. На кусте роз каждое утро, начиная с понедельника, расцветают пять бутонов. Каждое утро садовник срезает три из них. Из скольких роз будет состоять букет, если в ближайшее воскресенье садовник срежет все розы?

388. Турист, находящийся в спортивном лагере, должен успеть к поезду на железнодорожную станцию. Если он поедет на велосипеде со скоростью 15 км/ч, то опоздает на 30 мин, а если на мопеде со скоростью 40 км/ч, то приедет за 2 ч до отхода поезда. Чему равно расстояние от лагеря до станции?

389. Турист добирался до места слета на велосипеде, на лодке, а затем пешком. Если бы путь на велосипеде занял у него в 3 раза меньше времени, на лодке – в 6 раз меньше, а пешком – в 4 раза меньше, то на всю дорогу у него ушло бы 2 ч. Если бы на велосипеде он также ехал в 3 раза меньше времени, на лодке – в 1,5 раза меньше. А пешком – в 2 раза меньше, то добрался бы до места слета за 3 ч. Сколько времени занял у него весь путь?

390. Из пунктов А и В, расстояние между которыми равно 2 км, вниз по течению реки одновременно начинают движение соответственно плот и лодка. В тот же момент из пункта В навстречу плоту начинает движение катер. Собственная скорость лодки равна скорости течения, собственная скорость катера в два раза превышает скорость течения. Встретив плот, катер мгновенно разворачивается и следует до встречи с лодкой, после чего снова разворачивается и движется в сторону плота до встречи с ним, затем опять к лодке и т.д. Сколько раз катер встретит плот за время, в течение которого плот преодолеет расстояние, равное 1000 км?

391. Лесхоз планировал заготовить за несколько дней 216 новогодних елей. Первые три дня лесхоз выполнял установленную ежедневную норму, а потом стал заготавливать на 2 ели в день больше. Поэтому уже за 1 день до срока было заготовлено 232 ели. Сколько елей ежедневно заготавливал лесхоз в первые три дня работы?

392. Химический комбинат получил заказ на изготовление этилового спирта, соляной кислоты и дистиллированной воды. Для готовой продукции потребовалась 21 железнодорожная цистерна. При перекачивании были использованы три специализированных насоса: сначала первый насос заполнил четыре цистерны этиловым спиртом, затем второй насос заполнил шестнадцать цистерн соляной кислотой и в завершение третий насос заполнил одну цистерну дистиллированной водой. Найдите минимально возможное время, затраченное на перекачивание всей продукции, если известно, что суммарная производительность всех трёх насосов равна 7 цистернам в сутки.

393. Студент затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 10 раз дешевле, авторучка – в 4 раза дешевле, а книга – в 5 раз дешевле, то та же покупка стоила бы 400 рублей. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил бы в 2 раза дешевле, авторучка – в 4 раза дешевле, а книга – в 3 раза дешевле, то студент заплатил бы 1200 рублей. Сколько стоит покупка, и за что было уплачено больше: за портфель или авторучку?

394. Фермер арендовал два экскаватора. Аренда первого экскаватора стоит 60$ в день, производительность его в мягком грунте 250 $м^3$ в день, в твёрдом грунте – 150 $м^3$ в день. Аренда второго экскаватора стоит 50$ в день, производительность его в мягком грунте 180 $м^3$ в день, в твёрдом грунте – 100$м^3$ в день. Первый работал несколько полных дней и вырыл 720 $м^3$. Второй за несколько полных дней вырыл 330 $м^3$. Сколько дней работал каждый экскаватор, если фермер заплатил за аренду не более 300$.

395. В 2016 году один профессор сказал: «Мне было *(n : 11)* лет, когда шёл n^2 год» в каком году родился профессор?

***396**. <u>Творческое задание (1 балл).</u>* Вам необходимо освоить еще один метод решения сюжетных задач – компьютерное моделирование в электронных таблицах.

Преимуществом этого метода является возможность работы с тремя основными классами моделей: материальными (компьютерными), информационными (знаковыми и наглядно-образными) и мысленными (воображаемыми). Причем компьютерному моделированию в электронных таблицах предшествует информационное, в том числе и математическое, моделирование.

Рассмотрим метод моделирования в электронных таблицах подробнее[10].

Объекты и процессы, описанные в сюжетных задачах, можно выразить математическими формулами, связывающими их параметры. Эти формулы составляют математическую модель сюжетной задачи. По формулам можно сделать расчеты с различными значениями параметров и получить количественные характеристики модели. Расчеты, в свою очередь, позволяют сделать выводы и обобщить их. Среда электронных таблиц – это инструмент, который виртуозно и быстро выполняет трудоемкую работу по расчету и пересчету количественных характеристик исследуемого объекта или процесса.

Моделирование сюжетных задач в электронных таблицах проводится по общей схеме, которая выделяет четыре основных этапа: постановка задачи, разработка модели, компьютерный эксперимент и анализ результатов. Рассмотрим особенности проведения моделирования в среде электронных таблиц по каждому этапу.

I этап. Постановка задачи. Сюжетная задача с точки зрения компьютерного моделирования является наиболее простой: в ней четко поставлена цель и определены параметры (которые известны – данные условия, и которые надо найти – требования), поэтому постановка задачи осуществляется самим фактом существования данной задачи.

На этом этапе ученикам необходимо воспринять информацию задачи и, что главнее, «принять» задачу, то есть «захотеть ее решить».

Следует заметить, что при моделировании в электронных таблицах учитываются только параметры, которые имеют количественные характеристики, и взаимосвязи, которые можно описать формулами. Формализацию проводят в виде поиска ответов на вопросы, уточняющих общее описание задачи.

Как правило, сюжетная задача сформулирована в приведённом виде, и в ней четко поставлены цели и определены параметры модели, которые надо учесть. Тогда первый этап моделирования опускается как уже осуществленный. В противном случае проводится работа по формализации задачи (например, задачи в стихах).

---

[10] Информатика. 7-9 класс [Текст]: Практикум-задачник по моделированию. Базовый курс / Н.В.Макарова, Г.С.Николайчук /Под ред.Н.В. Макаровой. – СПб.: Питер, 2007.

II этап. Разработка модели. Этап разработки модели начинается с построения информационной модели в различных знаковых формах, которые на завершающей стадии воплощаются в компьютерную модель.

Информационная модель в табличной форме детально описывает объекты.

Иногда полезно дополнить представление об объекте и другими знаковыми формами: схемой, чертежом, формулами, – если это способствует лучшему пониманию задачи.

Во многих исследованиях используется прием *уточнения моделей*. Первоначально моделируется один элементарный объект с минимальным набором входных параметров. Постепенно модель уточняется введением некоторых из отброшенных ранее характеристик.

При исследовании количественных характеристик объекта необходимым шагом является составление *математической модели,* которое заключается в выводе математических формул, связывающих параметры модели.

На основе составленных информационной и математической моделей составляется *компьютерная модель.* Компьютерная модель непосредственно связана с прикладной программой, с помощью которой будет производиться моделирование. В нашем случае это электронные таблицы. При составлении расчетных таблиц надо четко выделить три основные области данных: исходные данные (ячейки таблицы для них желательно выделить цветом), промежуточные расчеты, результаты (выделены цветом шрифта). Исходные данные вводятся «вручную». Промежуточные расчеты и результаты проводятся по формулам, составленным на основе математической модели и записанным по правилам электронных таблиц. В формулах, как правило, используются абсолютные ссылки на исходные данные и относительные ссылки на промежуточные расчетные данные.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1		**За 1 ч**	**кол-во час**	**Объем**	Задача: Одна мельница может смолоть 38 ц пшеницы за 6 ч., другая – 96 ц за 15 ч., третья – 35 ц за 7 ч. Как распределить 133 т пшеницы между мельницами, чтобы они мололи зерно в течение одного и того же времени?
2	**I**	6 1/3	6	38	
3	**II**	6 2/5	15	96	
4	**III**	5	7	35	
5	**I**	6 1/3	75	***475***	Введите данные условия задачи в жёлтые ячейки
6	**II**	6 2/5	75	***480***	
7	**III**	5	75	***375***	
8	**I,II,III**	17 11/15	75	1330	
9					

III этап. Компьютерный эксперимент. После составления компьютерной модели проводятся тестирование и серия экспериментов согласно намеченному плану. *План эксперимента* должен четко отражать последовательность работы с моделью. Первым пунктом такого плана всегда является *тестирование* модели. Тестирование в электронных таблицах начинается с проверки правильности введения данных и формул.

Для проверки правильности алгоритма построения модели используется тестовый набор исходных данных, для которых известен или заранее определен другими способами конечный результат. Например, если используются при моделировании расчетные формулы, то надо подобрать несколько вариантов исходных данных и просчитать их «вручную». Это будет результат, полученный другим способом. Затем, когда модель построена, проводится тестирование на тех же вариантах.

В плане должен быть предусмотрен эксперимент или серия экспериментов, удовлетворяющих целям моделирования. Каждый эксперимент должен сопровождаться осмыслением результатов, которые станут основой анализа результатов моделирования.

	A	B	C		E		G
1		**v,v1<v2**	**t**		**S**		Введите данные условия задачи в жёлтые ячейки
2	**Николай**	60	4	12	240	***960***	
3	**Андрей**	80					
4		20	*Ответ.*		*960*		
	Задача: Николай и Андрей живут в одном доме. Николай вышел из дома и направился к школе. Через 4 минуты после него из дома вышел Андрей и догнал своего товарища у школы. Найдите расстояние от дома до школы, если Николай шёл со скоростью 60 м/мин, а скорость Андрея 80 м/мин.						

Расчётные формулы для данной компьютерной модели:

B4 := B3-B2

E2 := B2*C2

D2 := E2/B4

F2 := B3*D2

D4 := ЕСЛИ(B2<B3;F2;"Решений нет")

IV этап. Анализ результатов моделирования. Заключительным этапом моделирования является анализ модели. По полученным расчетным данным проверяется, насколько расчеты отвечают нашему представлению и целям моделирования. Важным качеством исследователя является умение увидеть в числах реальный объект или процесс.

Разработайте компьютерную модель одной из сюжетных задач данного раздела.

397. *<u>Творческое задание (1 балл).</u>* Решите задачу: «Иван задумал пятизначное число. Вычеркнув из него одну цифру, он сложил полученное четырехзначное число с исходным пятизначным числом. Сумма оказалась равна 52713. Чему равна сумма цифр задуманного Иваном пятизначного числа?», – а затем «повторите» действия Ивана с другими натуральными числами и составьте серию аналогичных задач для подготовки школьников 7-8 классов к участию в математической олимпиаде.

398. *<u>Творческое задание (1 балл).</u>* Решите задачу: «Петя написал на доске 10 целых чисел. Затем он нашел произведение каждой пары чисел, написанных на доске. Ровно 15 из этих произведений оказались отрицательными. Сколько нулей среди 10 написанных на доске чисел?», – а затем «повторите» действия Пети с другими натуральными числами и составьте серию аналогичных задач для подготовки школьников 7-8 классов к участию в математической олимпиаде.

399. *Творческое задание (1 балл)*. Решите задачу: «Маша придумала новую операцию с числами: $a * b = 2a + 3b$. Чему равно $3*(4*5)$?», – а затем «повторите» действия Маши по конструированию операций и составьте серию аналогичных задач для подготовки школьников 7-8 классов к участию в математической олимпиаде.

400. *Творческое задание (1 балл).* Изучите содержание таблицы и сформулируйте соответствующую гипотезу. Была ли она доказана или опровергнута математиками прошлого? Кто занимался этой проблемой, какие результаты были получены?

1 + 1 = 2				
1 + 3 = 4				
1 + 5 = 6	3 + 3 = 6			
1 + 7 = 8	3 + 5 = 8			
	3 + 7 = 10			
1 + 11 = 12		5 + 7 = 12		
1 + 13 = 14	3 + 11 = 14		7 + 7 = 14	
	3 + 13 = 16	5 + 11 = 16		
1 + 17 = 18		5 + 13 = 18	7 + 11 = 18	
1 + 19 = 20	3 + 17 = 20		7 + 13 = 20	
	3 + 19 = 22	5 + 17 = 22		…
1 + 23 = 24		5 + 19 = 24	7 + 17 = 24	…
	3 + 23 = 26		7 + 19 = 26	…
		5 + 23 = 28		…
1 + 29 = 30			7 + 23 = 30	…
1 + 31 = 32	3 + 29 = 32			…
…	…	…	…	…
	$\square + \square$	= 1234567890		
…	…	…	…	…

V. Числовые последовательности

Пусть X – это либо множество действительных чисел, тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов множества X называется *числовой последовательностью.*

Зафиксируем в таблице «Последовательности» основные характеристики некоторых последовательностей. Введём обозначения для последовательностей:

$\{a_n\}$ арифметическая прогрессия и её частные случаи

$\{b_n\}$ последовательность натуральных чисел,

$\{c_n\}$ последовательность четных чисел,

$\{d_n\}$ последовательность нечетных чисел;

$\{h_n\}$ последовательность квадратов натуральных чисел;

$\{j_n\}$ последовательность кубов натуральных чисел;

геометрические прогрессии со знаменателем q:

$\{k_n\}$ для $q > 1$

$\{l_n\}$ для $|q| < 1$;

$\{m_n\}$ геометрическая прогрессия с чередованием знаков;

$\{r_n\}$ последовательность аликвотных дробей;

$\{s_n\}$ последовательность квадратов аликвотных дробей;

$\{t_n\}$ последовательность арифметических корней натуральных чисел;

$\{v_n\}$ последовательность арифметических корней натуральных чисел с чередованием знаков;

$\{u_n\}$ последовательность Фибоначчи: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$;

$\{z_n\}$ последовательность Фарея порядка m, определяемая следующим образом: последовательность рациональных чисел вида $\frac{\alpha}{\beta}$ (где $\alpha, m, \beta \in \mathrm{N}$ $0 \le \alpha \le \beta \le m$, и $\frac{\alpha}{\beta}$ – несократимая дробь), расположенных в порядке возрастания.

Вопросительным знаком в таблице отмечены требования творческих заданий.

Для выполнения некоторых заданий вам необходимы определения понятий «возрастающая последовательность» и «убывающая последовательность».

Сформулируйте и запишите определения этих понятий самостоятельно.

Таблица 3

Последовательности

	Рекуррентная Формула	Формула n-го члена	Характеристическое свойство	Свойство членов равноудаленных от «концов» последовательности	Формула суммы первых n членов
$\{a_n\}$	$a_{n+1}= a_n+ \partial,\ \partial\neq 0$	$a_n=a_1+ (n-1)\partial,$	$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$	$a_1+a_n =a_2+a_{n-1}=\ldots$	$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$
$\{b_n\}$	$b_1 = 1,$ $b_{n+1} = b_n+1$	$b_n= n$			$S_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ $S_n = \frac{2a_1+\partial(n-1)}{2}\cdot n$
$\{c_n\}$	$c_1=2$ $c_{n+1} = c_n+ 2,$	$c_n=2n$			$S_n=n\cdot(n+1)$
$\{d_n\}$	$d_1=1$ $d_{n+1}= d_n+ 2,$	$d_n=2n+1$			
$\{h_n\}$	$h_{n+1}= h_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$	$h_n=n^2$	$4h_n =\left(\sqrt{h_{n-1}}+\sqrt{h_{n-1}}\right)^2$	$\sqrt{h_1}+\sqrt{h_n} =\sqrt{h_2}+\sqrt{h_{n+1}}$	$S_n = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$
$\{j_n\}$	$j_{n+1}= j_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^3$	$j_n=n^3$	$8j_n =\left(\sqrt[3]{j_{n-1}}+\sqrt[3]{j_{n+1}}\right)^3$	$\sqrt[3]{j_1}+\sqrt[3]{j_n} =$ $=\sqrt[3]{j_2}+\sqrt[3]{j_{n-1}} = \ldots$	$S_n = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$
$\{k_n\}$	$k_{n+1} = k_n\cdot q,\ q>1$	$k_n=k_1 \cdot q^{n-1},$ $k_1\neq 0$	$k_n^2 = k_{n-1} \cdot k_{n+1} \Leftrightarrow$ $k_n = \sqrt{k_{n-1}\cdot k_{n+1}}$	$k_1 \cdot k_n= k_2 \cdot k_{n-1}=\ldots$	$S_n = \frac{k_1\cdot(q^n-1)}{q-1}$
$\{l_n\}$	$l_{n+1}= l_n\cdot q,\ \lvert q\rvert<1,$	$l_n=l_1 \cdot q^{n-1}$ $l_1\neq 0$	$l_n^2 = l_{n-1} \cdot l_{n+1}$	$l_1 \cdot l_n= l_2 \cdot l_{n-1}=\ldots$	$S_n = \frac{l_1\cdot(1-q^n)}{1-q}$
$\{m_n\}$	$m_{n+1} = m_n \cdot q,$ $q < -1$	$m_n=m_1 \cdot q^{n-1},$ $m_1\neq 0$	$m_n^2 =m_{n-1} \cdot m_{n+1}$	$\lvert m_1 \cdot m_n\rvert = \lvert m_2 \cdot m_{n-1}\rvert$ $=\ldots$	$S_n = \frac{m_1\cdot(q^n-1)}{q-1}$
$\{r_n\}$	$r_{n+1} = \frac{n\cdot r_n}{n+1}$	$r_n = \frac{1}{n}$	$r_n = \frac{2r_{n-1}\cdot r_{n+1}}{r_{n-1}+r_{n+1}}$	$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_n}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_{n-1}}=\ldots$	?
$\{s_n\}$	$s_{n+1} = \frac{s_n\cdot n^2}{n+1}$	$s_n = \frac{1}{n^2}$	?	$\sqrt{\frac{1}{s_1}}+\sqrt{\frac{1}{s_n}}=\sqrt{\frac{1}{s_2}}+\sqrt{\frac{1}{s_{n-1}}}$	?
$\{t_n\}$	$t_{n+1} = \sqrt{t_n^2+1}$	$t_n = \sqrt{n}$	?	?	?
$\{v_n\}$	$v_{n+1} =(-1)^{n+1}\sqrt{v_n^2+1}$	$v_n = (-1)^n\sqrt{n}$	?	?	?
$\{u_n\}$	$u_1 = u_2 = 1$ $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$	?	$u_n= u_{n+1}- u_{n-1}$	?	$S_n = u_{n+2} - u_2$
$\{z_n\}$	?	?	?	(z^m): $z_1+ z_n=z_2+ z_{n-1}=$ $=\ldots=1$	?

<u>*Тестовые задания (по 0,05 балла).*</u>

401. Если в арифметической прогрессии первый и десятый члены соответственно равны 30 и 12, то сумма двенадцати первых членов равна

а) 228 б) 226 в) 210 г) 180

402. В геометрической прогрессии $b_1=64$, $q=-1/2$. В каком случае при сравнении членов этой прогрессии знак неравенства поставлен неверно?

а) $b_2< b_3$ б) $b_3> b_4$ в) $b_4>b_6$ г) $b_5>b_7$

403. Членом арифметической прогрессии 3; 6; 9; 12; … является число

а) 83 б) 95 в) 100 г) 102

404. Арифметической прогрессией является последовательность
а) натуральных степеней числа 2;
б) натуральных чисел, кратных 7;
в) квадратов натуральных чисел;
г) чисел, обратных натуральным.

405. Геометрической прогрессией является последовательность
а) натуральных степеней числа 3;
б) натуральных чисел, кратных 3;
в) кубов натуральных чисел;
г) чисел, противоположных натуральным.

406. Формулой n-ого члена геометрической прогрессии, заданной условиями: $b_1 = 3,\ b_{n+1} = 2\cdot b_n$, – является

а) $b_n=3\cdot 2n$ б) $b_n=3\cdot 2^n$ в) $b_n=3\cdot 2^{n-1}$ г) $b_n=3\cdot 2(n-1)$

407. Последовательность задана формулой $c_n = n^2-1$. Какое из указанных чисел является членом этой последовательности?

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

408. Среди членов последовательности, заданной формулой $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ нет числа

а) $\frac{1}{2}$ б) $\frac{1}{4}$ в) $\frac{1}{5}$ г) $\frac{1}{6}$

409. Среди членов последовательности (a_n) такой, что $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ нет числа

а) 21 б) 235 в) 610 г) 987

410. Последовательность 1, 2, 3, … не может быть задана следующим образом

а) $a_1 =1,\ a_n = 2a_{n-2} +1$
б) $a_1 =1,\ a_2 =2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
в) $a_1 =1,\ a_n = a_{n-1} +1$
г) $a_{3n-2} =1,\ a_{3n-1} =2,\ a_{3n} =3$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Арифметическая прогрессия

411. Найти натуральное число x, если $1+7+13+\ldots+x = 280$, где слагаемые являются последовательными членами арифметической прогрессии.

412. Укажите наиболее близкий к нулю член арифметической прогрессии 22,7; 21,4; …

413. Существует ли арифметическая прогрессия, в которой $a_6 =14,\ a_{10} =20,\ a_{16} =28$?

414. Про арифметическую прогрессию известно, что $a_5 + a_9 = 40$. Найдите $a_3 + a_7 + a_{11}$.

415. Найти сумму натуральных чисел, кратных 3 и не превосходящих 150.

416. Найти сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 250, которые не делятся на 7.

417. Найти сумму натуральных чисел с тридцатого по сороковой включительно, если $a_n = 3n + 5$.

418. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 27,5, а сумма следующих пяти её членов равна 90. Найти сумму членов этой последовательности с одиннадцатого по семнадцатый включительно.

419. Найти сумму первых 25 совпадающих членов двух арифметических прогрессий: 3,8,13,… и 4,11,18,… .

420. Найти сумму всех чётных трёхзначных чисел, кратных 3, но не кратных 5.

421. Сколько существует натуральных четырёхзначных чисел, которые делятся только на одно из чисел 4 или 5?

422. Найти сумму всех натуральных чисел, которые не превосходят 200, которые при делении на 5 дают в остатке 4.

423. Про арифметическую прогрессию известно, что $a_3 = 5,\ a_2 + a_6 = 18.$ Найти число, обратное сумме первых десяти членов прогрессии.

424. Найти число членов арифметической прогрессии, у которой отношение суммы первых 13 членов к сумме последних 13 членов равно 1/2, а отношение суммы всех членов без первых трёх к сумме членов без последних трёх равно 4/3.

425. При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй её член в частном получится 5, а при делении тринадцатого члена этой прогрессии на её шестой член получится: в неполном частном – 2, в остатке – 5. Найти сумму двадцати членов этой прогрессии.

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла)</u>. Геометрическая прогрессия

426. В геометрической прогрессии три члена. Их сумма равна 19, а сумма их квадратов равна 133. Найти члены прогрессии.

427. Сколько членов геометрической прогрессии нужно сложить, чтобы получить сумму 3069, если $a_1 + a_5 = 51$ и $a_2 + a_6 = 102$?

428. Существует ли геометрическая прогрессия, в которой $a_2 = -6,\ a_5 = 48,\ a_7 = 192$?

429. Между числами 2 и 18 вставьте три числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

430. В геометрической прогрессии $b_{10} \cdot b_{14} \cdot b_{21} = -0,125$. Вычислить b_{15}.

431. Три числа $b_1,\ b_2,\ b_3$ образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Вычислить b_3 если $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 64,\ b_1 + b_2 + b_3 = 14.$

432. Между числами 3 и 19683 вставить семь чисел так, чтобы все девять чисел образовали геометрическую прогрессию.

433. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника являться последовательными членами геометрической прогрессии?

434. Найти x, если числа $30 - x^2,\ x^2$ и 1 являются последовательными членами геометрической прогрессии.

435. Найти пятый и седьмой члены геометрической прогрессии, если произведение её первого и пятого членов равна 1/4, а сумма второго и третьего равна 9/14.

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла)</u>. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

436. Найти последовательность из четырёх чисел, первые три из которых образуют арифметическую прогрессию, а последние три – геометрическую прогрессию; сумма крайних чисел последовательности равна *66*, а сумма средних её чисел – *60*.

437. Сумма первого и пятого членов геометрической прогрессии равна 51, а сумма второго и шестого членов равна 102. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, нужно сложить, чтобы их сумма была равно 3069?

438. Между числами 1 и 256 вставить три числа так, чтобы все пять чисел составили геометрическую прогрессию. Между теми же числами вставить четыре числа так, чтобы все шесть чисел составили арифметическую прогрессию. Найти сумму семи найденных чисел.

439. Найти трёхзначное число, если известно, что его цифры образуют геометрическую прогрессию, а цифры числа, меньшего данного на *400* – арифметическую прогрессию.

440. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна *91*. Если к этим членам прибавить соответственно *25, 27* и *1*, то получатся три числа, образующие арифметическую прогрессию.

441. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них удвоить, то получится арифметическая прогрессия. Чему равен знаменатель данной геометрической прогрессии, если известно, что по модулю он не превосходит 1.

442. Три различных числа a,b,c образуют геометрическую прогрессию, а числа $a+b,\ b+c,\ c+a$ образуют арифметическую прогрессию. Чему равен знаменатель данной геометрической прогрессии?

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла)</u>. Разные последовательности

443. Последовательность $\{a_n\}$ определена как $a_1=137$ и $a_{n+1}-a_n=0$ для $n\geq 1$. Найдите a_{8999}.

444. Найдите a_7 если $a_1=3$, $a_2=7$ и $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$.

445. Последовательность $\{a_n\}$ определена формулой $a_n=3^n-5^n+1/n$. Она возрастающая или убывающая?

446. Последовательность $\{a_n\}$ определена следующим: $a_1=1$, $a_2=1$ и $a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$. Она возрастающая или убывающая?

447. Последовательность задана формулой $c_n=\frac{12}{n+1}$. Сколько членов в этой последовательности больше 2?

448. Первый член числовой последовательности равен 1, каждый из двух следующих равен 2, каждый из трех следующих за ними равен 3 и т.д. Чему равен 2017-й член этой последовательности?

449. Последовательность $\{d_n\}$ определена формулой $d_n=n^2+2n+1$. Найдите сумму первых двадцати её членов.

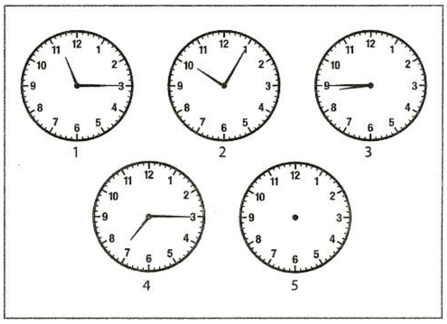
450. Последовательность $\{d_n\}$ определена формулой $d_n=n^3+n^2+1$. Найдите сумму первых 33 её членов.

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла)</u>. Поиск закономерности.

1					
2	3				
4	5	6			
7	8	9	10		
11	12	13	14	15	
16	17	18	19	20	21

451. Числа от 1 до 120 выписаны в 15 строк, как показано на рисунке. В каком из столбцов (считая слева) сумма чисел самая большая?

452. Какое число нужно подставить для продолжения последовательности: 0, 0, 1, 2, 2, 4, 3, 6, 4, 8, 5, … ?



453. Какое время должны показывать часы под номером 5, чтобы продолжить определенную последовательность.

454. Найдите закономерность и подставьте числа вместо многоточия: 1, 2, 2, 4, 8, 11, …, 37, 148, 153, 765, 771, …, 4633, …

455. Девочка заменила каждую букву в своём имени её номером в русском алфавите. Получилось число 2011533. Как её зовут?

456. В одной школе есть 1000 шкафов для одежды с номерами 1, 2, . . . , 1000, которые на ночь запираются. В этой школе живёт 1000 привидений. Ровно в полночь 1-е привидение открывает все шкафы; затем 2-е закрывает шкафы с номерами, делящимися на 2; затем 3-е меняет состояние (открывает, если шкаф закрыт и наоборот) тех шкафов, номер которых делится на 3 и т.д. 1000-е меняет состояние шкафа с номером 1000, после чего привидения исчезают. Сколько шкафов останутся открытыми?

457. Найдите закономерность и подставьте числа вместо многоточия: 1, 2, 3, 12, 21, 23, …, 312, 123, 1221, …, …, …

10	**3**	**6**	**7**	
1		**5**	**4**	**9**

458. Числа в таблице подчиняются некоторой закономерности. Найдите закономерность и подставьте числа в пустые ячейки.

459. Найдите закономерность и подставьте числа вместо многоточия: 1, 2, 3, 3, 6, 18, 54, 324, …, …, …

460. Найдите закономерность и подставьте числа вместо многоточия: 1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, …, …, …

<u>*Задачи II уровня (по 0,15 балла).* Вычислить</u>

461. $50^2-49^2+48^2-47^2+\ldots+2^2-1^2$.

462. $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2$.

463. $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+100\cdot 2^{99}$.

464. $1+11+111+1111+\ldots+\underbrace{11..11}_{n\ цифр}$

465. $\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+\ldots+\frac{1}{n}$.

466. $\frac{1+2+4+8+\ldots+2^{11}}{3+12+\ldots+32}$.

<u>*Задачи II уровня (по 0,15 балла).*</u>

***467**.* Найти трёхзначное число, если известно, что его цифры образуют геометрическую прогрессию, а при вычитании из этого числа *792* получается новое число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если же из цифры, выражающей число сотен вычесть *4*, а остальные цифры оставить без изменения, то получится число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

468. Найти четырёхзначное число, если известно, что оно делится на 225, а его первые три цифры образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

469. Даны две арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3, такие, что $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$. Числа $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$ образуют геометрическую прогрессию. Доказать, что $a_1 = b_1, a_2 = b_2$.

470. Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 9. На втором месте – сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1, то есть 10: $9^2=81,\ 8+1+1+1=10$. На третьем месте – 2, полученная следующим образом: $10^2=100,\ 1+0+0+1=2$ и т.д. Какое число стоит на 2016 месте?

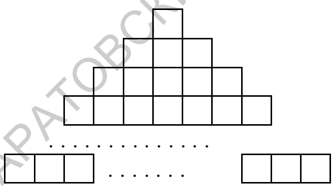
471. Найти наименьший член последовательности $\{c_n\}$, заданной формулой $a_k=k^2 - 2016\cdot k +20162016$.

472. Про первые шесть чисел последовательности известно, что каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Сумма первых шести чисел равна 7996. Чему равно пятое из вписанных чисел?

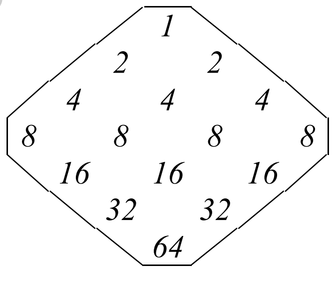
473. Дана геометрическая прогрессия. Известно, что её первый, десятый и тридцатый члены являются натуральными числами. Верно ли, что её двадцатый член также является натуральным числом?

474. Арифметическая прогрессия состоит из целых чисел. Сумма первых n членов этой прогрессии является степенью двойки. Докажите, что n – также степень двойки.

475. $\{a_1, a_2, ..., a_{20}\}$ – набор целых положительных чисел. Строим новый набор чисел $\{b_0, b_1, b_2, ...\}$ по следующему правилу: b_0 – количество чисел исходного набора, которые больше 0; b_1 – количество чисел исходного набора, которые больше 1; b_2 – количество чисел исходного набора, которые больше 2; и т.д., пока не пойдут нули. Докажите, что сумма всех чисел исходного набора равна сумме всех чисел нового набора.



476. На клетчатой бумаге нарисована фигура: в верхнем ряду – одна клеточка, во втором сверху – три клеточки, в следующем ряду – 5 клеточек, и т.д., всего рядов – n. Докажите, что общее число клеточек есть квадрат некоторого числа.



477. Таблица имеет форму ромба со стороной длины n. В первой строчке таблицы стоит одно число 1. Во второй – два числа – две двойки, в третьей – три четверки, и так далее (здесь нарисован квадрат 4 × 4, но решить задачу нужно не только для этого частного случая, а желательно для любого натурального n). В каждой следующей строчке стоит следующая степень двойки. Длина строчек сначала растет, а затем убывает так, чтобы получился ромб. Докажите, что сумма всех чисел таблицы есть квадрат некоторого целого числа.

Задачи II уровня (по 0,15 балла). Олимпиадные задачи для младших подростков.

478. 12 мальчиков и 8 девочек являются членами математического клуба. Каждую неделю в клуб принимают двух новых девочек и одного мальчика. Сколько будет членов в клубе в тот день, когда мальчиков и девочек станет поровну?

479. Улитка взбирается на ветку длиной 10 дм. За день она поднимается на 4 дм, а за ночь сползает вниз на 3 дм. Через сколько дней улитка достигнет конца ветки?

480. Белоснежка раздавала семи гномам грибы. Каждый следующий гном получал на один гриб больше предыдущего, а все вместе они получили 707 грибов. Сколько грибов получил последний гном?

481. В студию танцев приняли 60 мальчиков и 20 девочек. Каждую неделю уходят 2 мальчика и приходят 3 новые девочки. Сколько танцоров будет в студии, когда число мальчиков и девочек сравняется?

482. Васе на 23 февраля подарили *777* конфет. Вася хочет съесть все конфеты за k дней, причем так, чтобы каждый из этих дней (кроме первого, но включая последний) съедать на одну конфету больше, чем в предыдущий. Для какого наибольшего числа k это возможно?

483. Лена записала шесть различных натуральных чисел, сумма которых равна 22. Лёша записал сто различных натуральных чисел, сумма которых равна 5051. Лена угадала, какие числа записал Лёша, и Лёша угадал, какие числа записала Лена. Как им это удалось?

484. Петя и Вася выписывают 12-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Начинает Вася. Докажите, что какие бы цифры он не писал, Петя всегда сможет добиться, чтобы получившееся число делилось на 9.

485. Лёша и Лена решали задачи у доски, а все остальные откровенно бездельничали. Лена, решив свою задачу, записала четыре числа, составляющие арифметическую прогрессию, Лёша, решив свою задачу, записал четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию. Учитель, стерев условия и решения обеих задач, сложил одноимённые члены обеих прогрессий и получил числа: 27, 27, 39, 87, по которым за 5 минут предложил всему классу восстановить ответы решавших у доски. Попробуйте сделать это и вы.

Задачи III уровня (по 0,2 балла).

486. Три брата, числа лет которых образуют геометрическую прогрессию, делят между собой некоторую сумму денег пропорционально возрасту. Если бы ту же сумму денег они разделили пропорционально возрасту через три года, то младший брат получил бы на 1050 рублей больше, а средний на 150 рублей больше, чем теперь. Сколько лет каждому из братьев, если известно, что разница в возрасте между старшим и младшим равна 15 годам?

487. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а в каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты 5700 м?

488. Алеша, Боря, и Вася покупали блокноты и карандаши. Алеша купил 4 карандаша и 2 блокнота, Боря-6 карандашей и блокнот, Вася – 3 карандаша и блокнот. Сколько стоит блокнот, если известно, что карандаш стоит 3 рубля, а суммы денег, потраченные Алешей, Борей и Васей, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию?

489. Коля, Петя, Миша и Ваня ловили рыбу. Оказалось, что количество рыб, пойманных Колей, Петей и Мишей, образует в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если бы Коля поймал на 2 рыбы меньше, а Ваня на 12 меньше, чем на самом деле, то количества рыб, пойманных Колей, Мишей и Ваней образовали бы в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша, если известно, что он поймал на 18 рыб меньше Вани?

490. Средний рост трех студентов равняется 1 м 78 см, причем рост каждого из них не менее 1 м 72 см. Какой максимально возможный рост любого из этих студентов?

491. В *21* кучу разложили *200* орехов. Докажите, что существуют две кучи, в которых орехов поровну.

492. Васе поручили за несколько дней посадить в одну линию ровно 321 цветок. Каждый следующий день он должен сажать по одному цветку во все промежутки между уже посаженными цветами. На какое наибольшее число дней ему удастся растянуть эту работу?

493. Ваня и Вова считают деревья, растущие вокруг большого поля. Мальчики двигаются в одном направлении, но начинают счет с разных деревьев. То дерево, которое Вова назвал двадцатым, для Вани оказалось шестым, а дерево, которое Вова назвал седьмым, для Вани оказалось девяносто четвертым. Сколько деревьев растет вокруг поля?

494. Из города А выезжает автомобиль и едет по прямой дороге со скоростью 50 км/ч. Затем каждый час из А выезжает новый автомобиль, причем каждый следующий едет на 1 км/ч быстрее предыдущего. Последний автомобиль выезжает через 50 часов после первого и едет со скоростью 100 км/ч. Какова скорость автомобиля, который будет возглавлять колонну через 100 часов после старта первого автомобиля?

495. Однажды в понедельник Петя принес в школу и дал почитать Коле сборник фантастических рассказов. Во вторник Коля отдал его Грише, а Гриша в четверг отдал его Саше, а Саша в следующий понедельник отдал его Володе, и так далее причем каждый держал у себя книгу вдвое дольше предыдущего. В результате книга вернулась к Пете опять в понедельник, но лишь в следующей учебной четверти. Сколько ребят успели ее прочесть?

***496**. Творческое задание (1 балл).* Исследуёте последовательности Фарея – заполните ячейки последней строки таблицы 4, отмеченные знаком «?».

Последовательность Фарея порядка m, определяется как последовательность рациональных чисел вида $^{\alpha}/_{\beta}$ (где $^{\alpha}/_{\beta}$ несократимая дробь, причем $0\leq\alpha\leq\beta\leq m, m\in\mathrm{N}$), расположенных в порядке возрастания.

Составьте последовательность Фарея 8-го порядка; какие при этом трудности вы испытали? Составьте последовательность Фарея 1-го порядка и 2-го порядка; какую закономерность при этом вы заметили? Продолжайте составление последовательностей 3, 4, …, 7-го порядков; как вы при этом будете действовать?

Сравните последовательности Фарея порядка m < 8.

Постройте графики функций, описывающие последовательности Фарея порядка m < 8 в системе координат ZON.

Докажите (опровергните) следующие гипотезы относительно свойств последовательности Фарея:

1. Если $z_n=\alpha_n/\beta_n$ и $z_{n+1}=\alpha_{n+1}/\beta_{n+1}$, то выполняется равенство

$$\beta_n\cdot\alpha_{n+1}-\alpha_n\cdot\beta_{n+1}=1.$$

2. Между членами $z_n = \alpha_n/\beta_n$ и $z_{n+1} = \alpha_{n+1}/\beta_{n+1}$ z_{n+1} последовательности Фарея порядка $m-1$ расположено число z^m последовательности порядка m:

$$z^m=(\alpha_n+\alpha_{n+1})\,/\,(\beta_n+\beta_{n+1}).$$

3. Члены последовательности Фарея порядка m симметричны относительно числа ½, при этом выполняется равенство $z_1 + z_n = z_2 + z_{n-2} = \ldots = 1$.

4. Первые m чисел $(m > 0)$ последовательности Фарея $m+1$ порядка образуют последовательность аликвотных дробей, записанную в порядке возрастания.

5. График (в системе координат ZON) приближается к прямым $n = 0,\ n = 1$.

6. Графики симметрично расположенные относительно прямой $z_n=½$ сужаются к прямым $z_n = ⅓$ и $z_n = ⅔$ соответственно.

7. Последовательность Фарея описывает множество рациональных чисел.

8. Последовательность Фарея эквивалентна множеству натуральных чисел.

***497**. Творческое задание (100 баллов).* Проведите исследование последовательности Фибоначчи по следующему плану (I-VI).

I. К последовательности чисел Фибоначчи приводит решение следующей задачи: «Сколько пар кроликов может произойти от одной пары в течение года, если а) каждая пара каждый месяц порождает новую пару, которая со второго месяца становится производителем, и б) кролики не дохнут?».

Данная последовательность имеет вид: *1, 1, 2, 3, 5, 8,13, 21, 34, 55, 89, …*

Докажите по индукции следующее свойство последовательности Фибоначчи: $$u_{n+m} = u_{n-1}\cdot u_m + u_n\cdot u_{m+1} \qquad (*)$$

II. Последовательность Фибоначчи обладает следующими свойствами:

1. $u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$;
2. $u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3$;
3. $u_n^2 = u_{n-1}\cdot u_{n+1} + (-1)^{n+1}$;
4. Если n делиться на m, то и u_n делиться на u_m.

5. Каково бы ни было целое число m, среди первых m^2-1 чисел Фибоначчи найдется хотя бы одно, делящееся на m.

6. Соседние числа Фибоначчи взаимно просты.

Докажите эти свойства. В случае затруднения воспользуйтесь следующими указаниями:

1. Воспользуйтесь формулой (*), равенством $m=n$ и формулой $n+1$ члена последовательности Фибоначчи для доказательства первого свойства.

2. Второе свойство доказывается аналогично первому *(полагая $m=2n$).*

3. Третье свойство доказывается по индукции. При доказательстве индуктивного перехода используют приём прибавления обеим частям исходного равенства одного и того же числа. В нашем случае это число $u_n \cdot u_{n+1}$.

4. Пусть n делиться на m, тогда справедливо следующее равенство $n=m\cdot k$. Проведите доказательство индукцией по k.

5. Следует ли из формулировки теоремы указания на то, <u>какое именно</u> число Фибоначчи делиться на m? Можно ли сказать, что в сформулированном утверждении говориться о том, что первое число Фибоначчи делящиеся на m не должно быть особенно большим? Используя рассуждения по индукции, проверьте выполнимость утверждения для $m=2\div6$. Выпишите остатки от деления. Выявите закономерность. Результат обобщите.

6. Доказать утверждение методом от противного.

III. Используя рекуррентную формулу, продолжите последовательность Фибоначчи «влево»: запишите первые 7 чисел.

IV. Определите (U_n) – последовательность Фибоначчи в случае $n \in Z$. Перечислите некоторые свойства последовательности (U_n).

V. Запишите формулу нахождения n-го $(n<0)$ члена последовательности Фибоначчи (U_n) с использованием последовательности (u_n).

VI. Выведите формулу для вычисления суммы n $(n<0)$ чисел Фибоначчи.

VII. Проверить равенства (под символом $S_{-3;3}$ следует понимать сумму чисел последовательности Фибоначчи *от* U_{-3} *до* U_3 включительно):

А) $S_{-6} = -4.$	Б) $S_{-5} = 4.$	В) $S_{-3;3} = 6.$
Г) $S_{-3} = S_3$	Д) $S_{-3} + S_3 = 3 + 3$	Е) $S_{-3} + S_3 = S_{-3}$

<u>498. Творческое задание (100 баллов).</u> Исследуйте последовательность, заданную формулой n-го члена: $K_n = \dfrac{1}{2^n}$. В чём её особенность? Как она связана с числами Канвея? Что вам известно об этих числах?

<u>499. Творческое задание (100 баллов).</u> Осуществите подборку историко-математического материала (старинных задач) по теме «Числовые последовательности». Опишите методы решения задач.

<u>500. Творческое задание (100 баллов).</u> Чем уникальна последовательность простых чисел? Как бы вы описали эту последовательность на языке теории множеств? На алгебраическом языке? Перечислите некоторые свойства последовательности простых чисел.

VI. Делимость. Свойства делимости

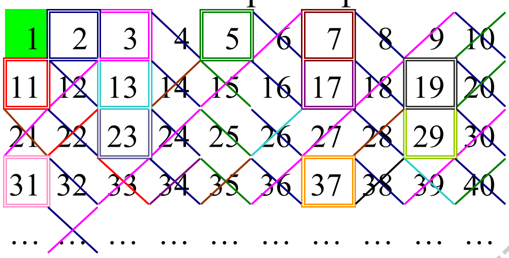
Число n *делится* на число m, обозначают $n \vdots m$, если найдётся такое число x, что $n = m \cdot x$.

В зависимости от количества делителей число n, все натуральные числа можно разделить на три класса.

Натуральные числа

1	**Простые числа**	**Составные числа**
единственный делитель – 1	$p=1\cdot p$ два делителя	$s=1\cdot a\cdot b$ более двух делителей Основная теорема арифметики (VI.1): $s = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$ где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – целые неотрицательные числа (VI.1) – каноническая запись натурального числа

Решето Эратосфена



Основная теорема арифметики: всякое натуральное число можно единственным образом представить в виде произведения степеней простых множителей.

Теоремы о свойствах делимости

Условие	**Заключение**	
Если $a,b,c,d,\ k,m,n \in \mathbb{N}$ и …	то…	
$a \vdots b$	$ak \vdots b$	VI.2
$a \vdots k,\ b \vdots k$	$(a \pm b) \vdots k$	VI.3
$a \vdots c,\ b \vdots d$	$ab \vdots cd$	VI.4
$a \vdots b$	$a^k \vdots b^k$	VI.5
$a \vdots b,\ b \vdots c$	$a \vdots c$	VI.6
$a \vdots k,\ b \vdots k$	$ab \vdots k^2$	VI.7
$a \vdots bc$	$a \vdots b$ или $a \vdots c$	VI.8
$ab \vdots m$, $НОД(a,m)=1$	$b \vdots m$	VI.9
$a \vdots m,\ a \vdots n$, $НОД(m,n)=1$	$a \vdots mn$	VI.10
$(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k) \vdots k$		VI.11
$(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k) \vdots k!$		VI.12

Общим делителем нескольких чисел называется число, служащее делителем для каждого из них. Наибольший из общих делителей обозначается $НОД(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ и определяется двумя основными способами. Первый – с использованием разложения на простые множители натуральных чисел, чей НОД необходимо найти; второй – алгоритм Евклида.

Если $НОД(a,b)=1$, то числа a и b называют *взаимно простыми*.

С понятием взаимно простых чисел связаны некоторые свойства делимости натуральных чисел (свойства VI.9 и VI.10).

Нахождение НОД двух чисел методом разложения на множители

Правило нахождения	Пример
1. Даны числа a и b	*1804* и *328*
2. Записать числа a и b в каноническом виде	$1804=2^2\cdot 11\cdot 41$ и $328=2^3\cdot 41$
3. Выписать **все общие простые** множители, входящие в каноническую запись каждого из чисел a и b	*2* и *41*
4. Возвести каждый из выписанных простых множителей в наименьшую степень, с которой этот множитель входит в каноническую запись чисел a и b	2^2 и *41*
5. Произведение полученных степеней даст $НОД(a,b)$	$НОД(a,b)= 2^2\cdot 41=164$

Нахождение НОД двух чисел по алгоритму Евклида

Правило нахождения		Пример
1. Даны числа a и b, $a>b$		*1804* и *328*
2. Представить большее из чисел в виде $a=q\cdot b+r$, где q – неполное частное, а r – остаток от деления a на b		$1804=5\cdot 328+164$
3. Представить в виде $b=q_1\cdot r+r_1;\ r=q_2\cdot r_1+r_2;\ \ldots;\ r_{n-1}=q_{n+1}\cdot r_n+r_{n+1}$		$328=2\cdot 164+0$
$r_n=q_{n+2}\cdot r_{n+1}+0$	$r_n=q_{n+2}\cdot r_{n+1}+1$	
$НОД(a,b)= r_{n+1}$	$НОД(a,b)=1$	$НОД(a,b)= 164$

Наименьшее натуральное число, которое делится нацело на a и b называется *наименьшим общим кратным* и обозначается $НОК(a,b)$.

Нахождение НОК двух чисел методом разложения на множители

Правило нахождения	Пример
1. Даны числа a и b	*1804* и *328*
2. Записать числа a и b в каноническом виде	$1804=2^2\cdot 11\cdot 41$ и $328=2^3\cdot 41$
3. Выписать **все общие простые** множители, входящие в каноническую запись хотя бы одного из чисел a или b	*2, 11* и *41*
4. Возвести каждый из выписанных простых множителей в наибольшую степень, с которой этот множитель входит в каноническую запись чисел a или b	2^3, *11* и *41*
5. Произведение полученных степеней даст $НОК(a,b)$	$НОК(a,b)= 2^3\cdot 11\cdot 41=3608$

Сформулируем некоторые полезные теоремы.

$НОД(a,b,c)= НОД(НОД(a,b),c)$ VI.13

$НОК(a,b,c)= НОК(НОК(a,b),c)$ VI.14

$НОД(a,b)\cdot НОД(a,b)=a\cdot b$ VI.15

$НОД(ac,bc)= c\cdot НОД(a,b)$ VI.16

$НОК(ac,bc)= c\cdot НОК(a,b)$ VI.17

$НОД(a,a+1,a+2)=1$ VI.18

$НОД(2a,2a+2)=2$ VI.19

Тестовые задания (по 10 баллов).

501. Сумма всех двузначных чисел оканчивается цифрой

а) 0; б) 2; в) 5; г) ___

502. Сумма всех трёхзначных чисел оканчивается цифрой

а) 0; б) 2; в) 5; г) ___

503. Число 15 в 5 раз больше своего наименьшего делителя, отличного от 1. Сколько всего натуральных чисел обладают таким же свойством?
а) одно; б) два; в) более двух; г) ∞.

504. Сколько простых чисел p обладают следующим свойством: p представимо в виде суммы простых чисел и p представимо в виде разности простых чисел?
а) одно; б) два; в) более двух; г) ∞.

505. Произведение $122 \cdot 85$ делится на
а) 4 б) 25 в) 9 г) 10

506. Сколько целых чисел k обращают дробь $\dfrac{15k^2+14k-1}{5k-2}$ в целое число?
а) $\varnothing$; б) одно; в) два; г) четыре.

507. Какое из следующих чисел чётно, если известно, что a – чётно, а b – нечетно?
а) ab б) $3(a+b)$ в) $a+b$ г) $(a+1)+b$

508. Какое из следующих чисел нечётно, если известно, что a – чётно, а b – нечетно?
а) ab б) $2(a+b)$ в) $a+b$ г) $a+b+1$

509. Частное от деления НОК чисел 6300 и 990 на их НОД равно
а) 77; б) 154; в) 385; г) 770.

510. Сумма остатков от деления числа $126\ 450\ 747$ на $2, 3, 4, 5, 9, 10$ и 25 равна
а) 35; б) 38; в) 47; г) ___

<u>*Задачи I уровня (по 20 баллов).*</u> Сократите дробь

511. $\dfrac{93\,790\,101}{95\,543\,187}$ **512**. $\dfrac{2\,205\,901}{2\,767\,003}$ **513**. $\dfrac{5\,025\,763}{15\,094\,237}$ **514**. $\dfrac{765\,025\,2}{8415\,2037}$

<u>*Задачи I уровня (по 20 баллов).*</u> Решите систему на множестве натуральных чисел

515. $\begin{cases} m \cdot n = 12 \\ НОД(m,n) = 1 \end{cases}$ **516**. $\begin{cases} m + n = 20 \\ НОД(m, n) = 1 \end{cases}$

517. $\begin{cases} m \cdot n = 120 \\ НОД(m, n) = 2 \end{cases}$ **518**. $\begin{cases} m + n = 20 \\ НОД(m,n) = 5 \end{cases}$

<u>*Задачи I уровня (по 20 баллов).*</u> Докажите, что при каждом натуральном n число

519. $n^3 + 11n$ делится на 6;
520. $6^{2n-1} + 1$ кратно 7;
521. $4^n + 15n - 1$ кратно 9;
522. $n^5 - n$ делится на 30.
523. $\overline{abcabc}$ делится на 7, на 11, на 13

Задачи I уровня (по 20 баллов). Найдите числа, удовлетворяющие условию делимости.

524 $\overline{56x6x} \vdots 36$	***525***. $\overline{135x3} \vdots 45$	***526***. $\overline{55x5xy} \vdots 63$	***527***. $\overline{xy12yx} \vdots 72$
528. $\overline{x2y2z5} \vdots 55$	***529***. $\overline{xyxyxy} \vdots 21$	***530***. $\overline{7xx0x} \vdots 77$	***531***. $\overline{x12345x} \vdots 18$

Задачи I уровня (по 20 баллов). Докажите, что следующие числа являются составными:

532. $\overline{123456789}$;

533. $11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 91 - 111$;

533. $123456^{123456} - 11$;

535. $2^{33} + 1$;

534. $10^{2009} + 8$;

537. $4^{105} + 5^{105}$;

535. $\overline{xyz}$, ггд $x, y, z \in \{1,4\}$;

539. $13^{25} + 17^{89} + 2^{71}$;

540. $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 83 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 70$;

541. $(6789^5 + 6)^{18} - 1$;

542. $7^{40} - 19$;

543. $2^{3^{2009}} - 1$.

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Докажите следующие утверждения:

544. Сумма кубов любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

545. Если натуральное число взаимно-просто с числом 6, то $(n^2-1) \vdots 24$

456. $\sqrt{\underbrace{11111\ldots1}_{2n\ цифр} - \underbrace{22\ldots2}_{n\ цифр}} = \underbrace{33\ldots3}_{n\ цифр}$

547. Все числа вида $2^{2^n} + 1$ $(n \geq 2, n \in \mathrm{N})$ оканчиваются цифрой 7.

548. Все числа вида $2^{4^n} - 5$ $(n \in \mathrm{N})$ оканчиваются цифрой 1

549. Если число c не делится на $НОД(a,b)$,то уравнение $ax + by = c$ $(a,\ b,\ c \neq 0)$ не имеет решения в целых числах.

550. Сумма всех семизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, в записи которых каждая цифра участвует только один раз, делится на 9.

551. При каждом натуральном n число $\frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{4} + \frac{11n^2}{24} + \frac{n}{4}$ является натуральным.

Задачи I уровня (по 0,1 балла).

552. Найдите простые делители числа 1 000 027.

553. Найдите такое число, что, если из него вычесть 7, результат умножить на 7, то получится тот же результат, как если бы мы вычли из этого же числа 11 и результат умножили на 11.

554. Найдите девятизначное число, все цифры которого различаются между собой и не содержат нуля, и квадратный корень из которого имеет вид $\overline{ababc}$, где $\overline{ab} = c^3$.

555. Найдите все варианты представления числа 316 в виде суммы двух слагаемых, одно из которых делится на 13, а другое – на 11.

556. Найдите цифры, которые следует вписать вместо * в числе $\overline{30{*}0{*}03}$, чтобы получить число, делящееся на 13.

557. Найдите число $\overline{aabb}$, такое, что $\overline{aabb} = n^2$, $n \in \mathrm{N}$.

558. Сколько чисел вида $\overline{5*383*8*2*936*5*8*203*9*3*76}$ делящихся на 396, в записи которых цифры, обозначенные *, не повторяются?.

559. Найдите натуральные n и m, разность квадратов которых равна 21.

560. Найдите двузначное число, произведение цифр которого, сложенное с 12, даёт это же число.

<u>*Задачи II уровня (по 0,15 баллов).*</u> Докажите следующие утверждения.

561. Ни при каком натуральном n число $1+2+3+...+n$ не может заканчиваться ни одной из цифр 2, 4, 7, 9.

562. Произведение трёх последовательных натуральных чисел, среднее из которых совпадет с кубом натурального числа, делится на 504.

563. Для любых натуральных x, число $x^9 - 6x^7 + 9x^5 - 4x^3$ делится на 8640.

564. Число $\frac{(3n)!}{6^n \cdot n!}$ – натуральное для любого натурального n.

565. Если составное натуральное число n больше четырёх, то

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \vdots n.$$

566. Если n – чётно, то число $\frac{n}{12}+\frac{n^2}{8}+\frac{n^3}{24}$ – целое.

567. Если p – простое число большее 3, то $(n^2-1) \vdots 24$.

568.. Не существует простого числа p, для которого числа $p+5$ и $p+10$ простые.

569. Среди любых 30 последовательных натуральных чисел найдётся такое, у которого сумма цифр делится на 11.

570. Если a,b,c – нечётные числа, то $НОД(a,b,c)=НОД\left(\frac{a+b}{2};\frac{a+c}{2};\frac{b+c}{2}\right)$.

571. Для двух натуральных чисел, одно из которых есть разность квадратов нечётных чисел, а другое – сумма квадратов этих чисел, число 4 не является общим делителем.

572. Любое составное число s имеет простой делитель, не превосходящий корня из s.

<u>*Задачи II уровня (по 0,15 баллов).*</u> Найдите

573. Найдите натуральные n, при которых (n^4+4) – простое число.

574. Может ли произведение четырёх последовательных натуральных чисел быть равным 11880?

575. $\sqrt{\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + ...}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + ...}} = ?$.

576. Найдите пару чисел, не удовлетворяющую условию $187x - 104y = 41$ из следующего перечня: *(3;5), (107;192), (211;379), (314;565), (419;753),* не подставляя непосредственно указанные значения в формулу.

577. Сформулируйте теорему, справедливую для любого натурального числа, за исключением чисел 5; 23; 304.

578. Что больше: $\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$ или $\frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}$?

579. Найдите сумму цифр наименьшего натурального числа *n*, обладающего свойством: если у *n* ровно 3 различных простых делителя, то у *11n* таких делителей тоже 3, а у числа *6n* – четыре;

580. Найдите все простые числа *n* и *m*, для которых $m^2 – 2n^2 = 1$.

581. Найдите все целые числа *n* и *m*, удовлетворяющие условию $m \cdot n = n + 2m$.

582. Найдите целые числа *a* и *b* такие, что их сумма равна 1244. Если к числу *a* приписать справа цифру 3, а в числе *b* отбросить последнюю цифру 2, то полученные числа будут равны;

583. $(2+1)\cdot(2^2+1)\cdot(2^4+1)\cdot(2^8+1)\cdot(2^{16}+1)\cdot(2^{32}+1) = ?$

584. Найдите целые *x*, при которых $(x^2–71) \vdots (7x+55)$.

585. Сколько из натуральных чисел 1, 2, …, N делится на 12, если не менее 13 из них делятся на 4, и не более 9 чисел делятся на 6.

Задачи III уровня (по 0,2 балла). Решите задачи.

586. В типографии набирали строку с умножением вида $\overline{abc} \cdot \overline{bcc} \cdot \overline{cab}$, но набор рассыпался, и цифры произведения перемешались. В результате произведение было напечатано в виде *234 235 286*. Известно, что *a>b>c,* и что в разряде единиц напечатана верная цифра 6. восстановите истинное значение произведения.

587. Вы пришли в магазин и хотите купить 8 одинаковых авторучек, несколько карандашей по 4 рубля, линейку за 9 рублей, две общие тетради по 18 рублей и 12 тонких тетрадей. Продавец подсчитал общую стоимость товаров и попросил вас уплатить в кассу 527 рублей. Как, по-вашему, не ошибся ли продавец?

588. На станцию привезли 420 тонн угля в вагонах вместимостью по 15 тонн, 20 тонн и 26 тонн. Сколько и каких вагонов было использовано, если всего было 27 вагонов?

589. У отца спросили, сколько лет его двум сыновьям. Ответ был таков: если к произведению чисел, означавших их года, прибавить сумму этих чисел, то будет 14. Сколько лет сыновьям?

590. Сколько лет капитану, сколько у него детей, и какова длина его судна, если произведение этих трёх искомых (целых) чисел равно 32118, и известно, что (1) длина судна выражается в метрах и более 1 метра; (2) у капитана есть несколько сыновей (более 1); (3) капитану больше лет, чем он имеет детей, но ста лет ему еще нет?

591. «Сколько у вас детей, и какого возраста?» – спросил однажды гость у учителя математики? «У меня три мальчика», – ответил учитель. – «Произведение чисел их лет равно 72, а сумма этих чисел равна номеру нашего дома». Гость вышел на улицу, посмотрел на номер, вернулся и сказал: «Задача не определена!» «Да, вы правы, – сказал учитель, – но я всё-таки надеюсь, что старший из моих сыновей пойдёт по моим стопам». Сколько лет каждому из детей учителя?

592. Школьник затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка – в 2 раза дешевле, а книга – в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 8оо рублей. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка – в 4 раза дешевле, а книга – в 3 раза дешевле, то школьник уплатил бы за покупку 1200 рублей. Сколько стоит покупка, и за что было уплачено больше: за портфель или авторучку?

593. Сумма, равная 53 копейкам, составлена из монет по 3 и 5 копеек, общее количество которых менее 15. если в этом наборе монеты по 3 копейки заменить на монеты в 5 копеек, а монеты по 5 копеек – на монеты по 3 копейки, то полученная в результате сумма уменьшится по сравнению с первоначальной, но не более, чем в полтора раза. Сколько монет достоинством в 3 копейки было в наборе?

594. В комнате несколько четырёхногих стульев и трёхногих табуретов. Когда на всех стульях и табуретах сидит по человеку, в комнате всего 39 ног. Сколько в комнате стульев и сколько табуретов?

595. Найти прямоугольный треугольник, стороны которого выражались бы натуральными числами, причём все девять цифр, участвующих в записи сторон – различны.

596. *Творческое задание (1 балл).* Обобщение теоремы делимости чисел Фибоначчи: u_n делиться на u_m тогда и только тогда, когда n делиться на m.

I. Докажите данное утверждение.

II. Сформулируйте признаки делимости чисел Фибоначчи на 2, на 4, на 5, на 7, на 13.

III. Докажите признаки делимости чисел Фибоначчи:

Число Фибоначчи четно тогда и только тогда, когда его номер делиться на 3.

Число Фибоначчи делится на 4 тогда и только тогда, когда его номер делиться на 6.

Число Фибоначчи делится на 5 тогда и только тогда, когда его номер делиться на 5.

Число Фибоначчи делится на 7 тогда и только тогда, когда его номер делиться на 8.

Число Фибоначчи делится на 13 тогда и только тогда, когда его номер делиться на 7.

III. Докажите следующие факты:

Нет нечетных чисел Фибоначчи делящихся на 17.

Нет нечетных чисел Фибоначчи делящихся на 9.

Нет четных чисел Фибоначчи делящихся на 11.

597. *Творческое задание (1 балл).* Что вы знаете о великом учёном древности Диофанте Александрийском? О диофантовых уравнениях первой и второй степени? Какое отношение имеют эти уравнения к теории делимости?

Решите следующие задачи Диофанта (на множестве N, в крайнем случае – на Q) в общем виде и для конкретных чисел.

I. Заданное число разложить на два числа, имеющие данную разность. (Пусть заданное число будет 100, а разность 40. Определить эти числа.)

Решение Диофанта. Положим, что меньшее число x, тогда большее будет $x+40$: взятые вместе они дадут $2x+40$. Заданное число – 100. Следовательно, 100 равно $2x+40$. из подобных вычитаем подобные: из 100 вычитаем 40, в остатке будет $2x$, равное 60. тогда каждое x равно 30. наименьшее число будет 30, а большее 70. Доказательство очевидно.

II. Предложенное число разложить на два таких числа, чтобы заданные их неодинаковые части при сложении образовали заданное число. (Разложить число 100 на два числа так, чтобы $^1/_3$ первого числа и $^1/_5$ второго числа, сложенные вместе давали 30).

III. Найти три таких числа, чтобы они, сложенные попарно, равнялись трём данным числам. Необходимо, чтобы полусумма трёх данных чисел была больше каждого из них.

IV. Найти два таких числа, чтобы их сумма и произведение равнялись заданным числам. Нужно, чтобы квадрат полусуммы искомых отличался от их произведения на квадрат.

V. Заданный квадрат разложить на два квадрата.

VI. Данное число, являющееся суммой двух квадратов, разбить на два других квадрата.

VII. К двум заданным числам прибавить одно и то же число, такое, чтобы каждое сделалось квадратом.

<u>Решение Диофанта</u>. Пусть данные числа будут 2 и 3; прибавляем к каждому x. Тогда $x+2$ и $x+3$ будут квадратами; мы имеем здесь так называемое двойное равенство; приравниваются же они следующим образом. Зная разность, ищи два таких числа, чтобы их произведение давало эту разность, например 4 и ¼. Тогда или половина разности этих чисел, умноженная на себя, будет равна меньшему, или половина суммы, умноженная на себя, будет равна большему. Но половина разности, умноженная на себя, будет $^{225}/_{64}$; это равняется $x+2$, и x получается $^{97}/_{64}$. Половина же суммы, умноженная на себя, будет $^{289}/_{64}$; это равняется большему, то есть $x+3$; и x получается опять $^{97}/_{64}$. таким образом, число, которое нужно прибавлять, будет $^{97}/_{64}$. Оно, очевидно, удовлетворяет условию задачи.

598. *<u>Творческое задание (1 балл).</u>* Подберите или разработайте самостоятельно серию не менее чем из 10 задач, аналогичных задаче: «Из чисел, квадраты которых делятся на 24, выбрали самое маленькое. Чему равна сумма цифр этого числа?» – для подготовки учащихся 5-6 классов к олимпиаде по математике

599. *<u>Творческое задание (1 балл).</u>* Подберите или разработайте самостоятельно серию не менее чем из 10 задач, аналогичных задаче: «Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?» – для подготовки учащихся 5-6 классов к олимпиаде по математике

600. *<u>Творческое задание (1 балл).</u>* Какое отношение к алгоритму Евклида имеет задача: «Есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной n, разделенная бороздками на равносторонние треугольники со стороной 1. Играют двое. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок вдоль бороздки, съесть его, а остаток передать противнику. Тот, кто получит последний кусок – треугольник со стороной 1, – победитель. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?»?

VII. Расширение понятия числа. Рациональные числа. Отношения и пропорции. Проценты

Определим *несократимую* дробь $\frac{a}{b}$, как такую, у которой *НОД(a,b)=1.*

Всякую дробь $\frac{A}{B}$, *B≠0* можно записать в виде несократимой дроби $\frac{a}{b}$, сократив числитель и знаменатель дроби $\frac{A}{B}$ на *НОД(A,B)*:

$$\frac{A}{B}=\frac{a\cdot НОД(A,B)}{b\cdot НОД(A,B)}=\frac{a}{b}, \text{ где } НОД(a,b)=1. \qquad \text{(VII.1)}$$

Наименьшее общее кратное двух и более дробей является общим знаменателем этих дробей и используется в частности для нахождения суммы дробей:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot\frac{НОК(b,d)}{b}}{НОК(b,d)}+\frac{c\cdot\frac{НОК(b,d)}{d}}{НОК(b,d)}=\frac{a\cdot\frac{НОК(b,d)}{b}+c\cdot\frac{НОК(b,d)}{d}}{НОК(b,d)}, \qquad \text{(VII.2)}$$

их разности и сравнения дробей.

Арифметика обыкновенных дробей сводится к действиям над целыми числами[*], поэтому подробно останавливаться на этом вопросе нет интереса.

Обратимся к практической стороне теории обыкновенных дробей.

Отношением называют частное от деления одного числа на другое: $a:b=c$ или $\frac{a}{b}=c$, где *a* – предыдущий член отношения*, b* – последующий член отношения*, c* – отношение.

Отношение показывает, во сколько раз *a* больше/меньше, чем *b,* или же, какую часть числа *b* составляет число *a*.

Два равных отношения образуют *пропорцию*: $a:b=c:d$ или $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, где *a, d* – крайние члены пропорции*, b,c* – средние член пропорции.

Основное свойство дроби (VII.3): $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot k}{b\cdot k}$, – есть ни что иное, как пропорция.

---

[*] Например, для того, чтобы перемножить две обыкновенные дроби необходимо (1) перемножить их числители – целые числа, (2) перемножить их знаменатели – натуральные числа, (3) записать новую дробь с числителем равным произведению числителей и знаменателем равным произведению знаменателей: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

Перечислим основные свойства пропорции

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ $b \cdot d \neq 0$	$\Leftrightarrow$	$a \cdot d = b \cdot c$	VII. 4
		$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ или $\dfrac{c}{a}=\dfrac{d}{b}$, или $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$	VII. 5
		$a=\dfrac{b\cdot c}{d}$ или $b=\dfrac{a\cdot d}{c}$, или $c=\dfrac{a\cdot d}{b}$, или $d=\dfrac{b\cdot c}{a}$	VII. 6
		$\begin{cases} c = k\cdot a, \\ d = k\cdot b, \\ k - \textit{любое число}. \end{cases}$	VII. 7
		$\dfrac{x\cdot a+y\cdot b}{m\cdot a+n\cdot b}=\dfrac{x\cdot c+y\cdot d}{m\cdot c+n\cdot d}$, $(m\cdot a+n\cdot b)\cdot(m\cdot c+n\cdot d)\neq 0$	VII. 8

Пропорция, у которой средние члены равны, называется *непрерывной*. Средний член непрерывной пропорции есть среднее геометрическое крайних членов: $a:b=b:c \Rightarrow b=\sqrt{a\cdot c}$. (VII. 9)

Вычисления с обыкновенными дробями становятся очень громоздкими, если знаменатели их сколько-нибудь велики. Главное затруднение – приведение дробей к общему знаменателю – следствие того, что знаменатели могут быть любыми числами, в выборе которых нет никакой системы.

Систематизируем выбор знаменателей обыкновенных дробей, разбивая единицу на 10 долей (десятые), десятую долю – на 10 долей (сотые), и т.д. и получая, таким образом, *десятичные дроби*:

$$\overline{a,a_1a_2\ldots a_n}=a+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}. \qquad \text{(VII. 10)}$$

Преимущество десятичных дробей перед обыкновенными состоит в том, что они основаны на той же системе, на которой построены счёт и запись целых чисел. Благодаря этому и запись, и правила действий с десятичными дробями по существу те же, что и для целых чисел.

Определим *рациональное число* как обыкновенную дробь $\dfrac{n}{m}$, где $n\in$ Z, $m\in$ N, и опишем способы представления рациональных чисел в виде десятичных дробей.

(1) Рациональные числа вида $\dfrac{n}{2^x\cdot 5^y}$, где $x>y$, $x\in$ N, $y\in\{0,1,2,\ldots\}$, представимы в виде конечных десятичных дробей $\dfrac{n}{2^x\cdot 5^y}=\dfrac{n\cdot 5^{x-y}}{2^x\cdot 2^y\cdot 5^{x-y}}=\dfrac{5^{x-y}\cdot n}{10^x}$.

(2) Рациональные числа вида $\dfrac{n}{2^x\cdot 5^y}$, где $x<y$, $x\in\{0,1,2,\ldots\}$, $y\in$ N, представимы в виде конечных десятичных дробей $\dfrac{n}{2^x\cdot 5^y}=\dfrac{n\cdot 2^{y-x}}{2^x\cdot 2^{y-x}\cdot 5^y}=\dfrac{2^{y-x}\cdot n}{10^y}$.

(3) Рациональные числа вида $\dfrac{n}{m}$, где $m \neq 2^x \cdot 5^y$, $x \in \{0,1,2,\dots\}$, $y \in \{0,1,2,\dots\}$, представимы в виде бесконечных десятичных дробей, называемых *периодическими*. Чтобы получить десятичную запись таких рациональных чисел необходимо провести деление n на m до получения повторяющейся упорядоченной группы цифр, называемой *периодом*. Результат записывают в виде $\overline{a,a_1a_2\dots a_m(b_1b_2\dots b_n)}$, где a – число – целая часть, неполное частное от деления n на m, $(b_1b_2\dots b_n)$ – период.

Правила обращения десятичных дробей в обыкновенные дроби

Конечная дробь $\overline{a,a_1a_2\dots a_n}$	**Бесконечная периодическая дробь** $\overline{a,a_1a_2\dots a_m(b_1b_2\dots b_n)}$
1. Воспользоваться формулой перевода	
$\overline{a,a_1a_2\dots a_n} = a + \dfrac{\overline{a_1a_2\dots a_n}}{10^n}$ (VII. 11)	$\overline{a,a_1a_2\dots a_m(b_1b_2\dots b_n)} = a + \dfrac{\overline{a_1a_2\dots a_m b_1b_2\dots b_n} - \overline{a_1a_2\dots a_m}}{\underbrace{99\dots9}_{n\ цифр} \cdot 10^m}$ (VII. 12)
2. Упростить получившееся числовое выражение, сократив, по возможности, обыкновенную дробь, входящую в состав суммы	
3. Результат записать в виде смешанного числа ($a \neq 0$) или правильной дроби ($a = 0$)*	

Определим *процент* как сотую часть числа и будем обозначать количество процентов знаком %. Если данное число принять за 1, то 1% составляет 0,01 часть этого числа. Таким образом, количество процентов можно выразить в виде десятичной дроби $a\% = a/100$.

<u>*Тестовые задания (по 0,05 балла).*</u>

601. Найти два числа, сумма которых равна 73,571. Если первое слагаемое увеличить в 5 раз, а второе слагаемое – в 3 раза, то новая сумма окажется равной 277,313.

а) 28,271 и 45,3 б) 28,3 и 45,271 в) 28,371 и 45,2 г) 25,371 и 48,2

602. Какая дробь больше 4/13, но меньше 5/13?

а) 3/20 б) 7/20 в) 9/20 г) 11/20

603. Неизвестный член пропорции

$$\frac{15{,}2 \cdot 0{,}25 - 48{,}51 : 14{,}7}{x} = \frac{\left(\dfrac{13}{44} - \dfrac{2}{11} - \dfrac{5}{66} : 2\dfrac{1}{2}\right) \cdot 1\dfrac{1}{5}}{3{,}2 + 0{,}8\left(5{,}5 - 3\dfrac{1}{4}\right)}$$ равен

а) 1/11 б) 25 в) 110 г) 275

---

* см. таблицу 2

604. Сумма $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 17}$ равна

а) 57/209440 б) 6/6545 в) 3/12320 г) 5/34

605. Пусть $a+\frac{1}{a}=3$, тогда $a^2+\frac{1}{a^2}$ равна

а) 7 б) 8 в) 9 г) 11

606. Пусть $a-\frac{1}{a}=\frac{2}{3}$, тогда $\frac{a^{12}+1}{a^6}$ равна

а) $-18\frac{179}{729}$ б) $\frac{64}{729}$ в) $7\frac{199}{729}$ г) $14\frac{442}{729}$

607. Пусть $\frac{4b+a}{5a-7b}=2$, тогда $\frac{4a-5b}{3a+b}$ равна

а) –1,2 б) –1/42 в) 1/6 г) 3/7

608. Число увеличили в 10 раз. На сколько процентов произошло увеличение?

а) на 100% б) на 900 % в) на 1000% г) на 1100%

609. Число сначала увеличили на 20%, а затем результат уменьшили на 20%. Как изменилось число?

а) не изменится; б) уменьшится на 4%; в) увеличится на 4%; г) ______

610. Число сначала уменьшили на 20%, а затем результат увеличили на 20%. Как изменилось число?

а) не изменится; б) уменьшится на 4%; в) увеличится на 4%; г) ______

Задачи I уровня (по 0,1 балл).

611. Сколько процентов от числа 3 составляет разность между ним и 3% числа 20?

612. Если 18% от числа 10 равны 15% некоторого числа, то чему равно это число?

613. После увеличения числа на 17% получили 108,81. Чему равно исходное число?

614. Если 90% числа равны $(9\sqrt[3]{32}-2\sqrt[3]{500}):\sqrt[3]{4}$, то чему равно само число?

615. Числитель и знаменатель дроби – положительные числа. Как изменится дробь, если числитель уменьшить на 16%, а знаменатель увеличить на 40%?

616. Однозначное число увеличили на 10. Если теперь полученное число увеличить на столько же процентов, как и в первый раз, то получится 72. Найти исходное число.

617. Число a больше числа b на 50%. На сколько процентов число b меньше числа a?

618. Если среднее арифметическое двух положительных чисел на 30% меньше большего из этих чисел, то на сколько процентов среднее арифметическое больше меньшего из них?

619. Половину положительного числа умножили на 20% от этого же числа и получили 22,5. Найдите само число.

620. Чему равны числа *a* и *b*, если сумма увеличенного на 10% числа *a* и уменьшенного на 10% числа *b* равна 210 и на 5% больше суммы *a* и *b*?

Задачи I уровня (по 0,1 балла).

621. Представить $^1/_7$ в десятичной записи.

622. Представить $^1/_{49}$ в десятичной записи.

623. Представить 0,(714285) в виде обыкновенной несократимой дроби.

624. Представить 0,412(5) в виде обыкновенной несократимой дроби.

625. Представить 3,3(45) в виде обыкновенной несократимой дроби.

626. Сравнить числа *0,(06504)+0,(2)* и *107/369*

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Вычислить

627. $0,(2)+0,(37)+0,(73)-0,(487);$

628. $$\frac{\left(\frac{2}{3}+0,(3)\right):0,25}{0,12(3):0,0925}+12,5\cdot 0,32;$$

629. $$\frac{0,175+\frac{3}{5}+0,725+0,42(6)+0,12(3)}{0,128\cdot 6,25-(0,0345:0,12)};$$

630. $$\frac{0,8(5)+0,17(1)}{0,8(5)-0,17(1)}+\frac{0,8(3)+0,1(6)}{0,8(3)-0,1(6)};$$

631. $$\frac{(0,625+2,708(3)):2,5}{(1,3+0,7(6)+0,(36))\cdot\frac{110}{401}};$$

632. $0,(2)\cdot 0,(3)\cdot 0,(4)\cdot 0,(5)\cdot 0,(6)\cdot 0,(7);$

633. $$\frac{\left(3\frac{3}{4}:1\frac{1}{2}\right)+\left(1\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{\left(2:3\frac{1}{5}\right)+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}$$

Задачи I уровня (по 0,1 балла).

634. Найти двенадцать процентов от числа $\frac{10a}{53}+\frac{b}{3}$, при условии

$$a=\frac{14-\left(49\frac{1}{3}:16-14:8\frac{1}{6}\right)\cdot 7}{1\frac{17}{18}\cdot\left(1\frac{59}{70}+\frac{37}{42}+2\frac{19}{30}\right)-10},\quad b=\frac{\left(\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{225}\right)\cdot 9+0,16\right):\left(\frac{1}{3}-0,3\right)}{(5-1,1409:0,3):\left(4,2:0,12-0,21\cdot\frac{2}{3}\right)}:\frac{1}{114}.$$

635 Найти число, если 5% его равны $\dfrac{2\frac{11}{25}-0{,}84\cdot\left(6\frac{8}{9}:2\frac{7}{12}-\frac{5}{12}\cdot 4\frac{4}{35}\right)}{7{,}605:7\frac{1}{2}+3{,}086}$.

636. Сколько процентов составляет число a от числа b, если $a=(0{,}8\cdot 7+0{,}8^2)\cdot\left(1{,}25\cdot 7-\frac{4}{5}\cdot 1{,}25\right)+31{,}64,\quad b=\dfrac{(11{,}81+8{,}19)\cdot 0{,}02}{9:11{,}25}$?

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Докажите, что если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, то

637. $\dfrac{a\pm b}{b}=\dfrac{c\pm d}{d}$ ***638***. $\dfrac{a}{a\pm b}=\dfrac{c}{c\pm d}$ ***639***. $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$

640. $\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{a-b}{c-d}$ ***641***. $\dfrac{a+b}{b-a}=\dfrac{c+d}{d-c}$ ***642***. $\dfrac{a+2b}{2a+b}=\dfrac{c+2d}{2c+d}$

643. $\dfrac{a+b}{2a-b}=\dfrac{c+d}{2c-d}$ ***644***. $\dfrac{a-b}{a+2b}=\dfrac{c-d}{c+2d}$ ***645***. $\dfrac{2a-b}{a-b}=\dfrac{2c-d}{c-d}$

Задачи II уровня (по 0,15 балла). Для решения задач на изменение состава вещества путём увеличения/уменьшения доли одного из его компонентов используется в качестве информационной разрешающей модели следующая таблица (назовём её .простой табличной моделью задач «на процентное содержание вещества»).

Состав вещества	Исходное состояние		Конечное состояние	
	%	масса		%
Неизменный компонент (…)				
Изменяющийся компонент (…)				
Всего	100%			100%

Любые две строки столбца «Исходное состояние» или «Конечное состояние» образуют пропорцию, поэтому задача указанного типа в конце концов сводится к «решению двух пропорций».

Покажем на примере задачи Столовый уксус процесс решения задач аналогичного вида.

Столовый уксус. Сколько столового 6%-го уксуса получиться из 120 г 70%-ой уксусной эссенции?

1 этап – заполнение известными данными, выявление требования задачи

Состав вещества	Исходное состояние		Конечное состояние	
	%	г		%
Неизменный компонент (кислота)	*70%*			*6%*
Изменяющийся компонент (вода)				
Всего	100%	*120*	*?*	100%

2 этап – составление первой пропорции, поиск первой неизвестной величины (устно)

Состав вещества	Исходное состояние		Конечное состояние	
	%	г		%
Неизменный компонент (кислота)	*70%*	*1)* ***84***		*6%*
Изменяющийся компонент (вода)				
Всего	100%	*120*		100%

3 этап – составление второй пропорции, поиск второй неизвестной величины (устно)

Состав вещества	Исходное состояние		Конечное состояние	
	%	г		%
Неизменный компонент (кислота)	*70%*	*1)* ***84***		*6%*
Изменяющийся компонент (вода)				
Всего	100%	*120*	*2)* ***1400***	100%

Вторая пропорция включает величину, которую требуется найти, поэтому, решением второй пропорции мы дали ответ на вопрос задачи.

Ответ. 1400 г столового уксуса.

Если бы требовалось узнать, сколько воды следует добавить, чтобы развести эссенцию до столового уксуса, нужно было бы произвести ещё одно действие: 1400 – 120 = 1280.

Решите следующие задачи с использованием простой табличной моделью задач «на процентное содержание вещества».

646. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составляло 2%?

647. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько килограммов соли нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составляло 24%?

648. Свежие грибы содержат 90% воды, а сушёные – 12%. Сколько получится сушёных грибов из 88 кг свежих?

649. Пчёлы, перерабатывая цветочный нектар в мёд, освобождают его от значительной части воды. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчёлам для получения 1 кг мёда, если нектар содержит 70% воды, а полученный из него мёд – 17% воды?

650. Из 38 тонн сырья второго сорта, содержащего 25% примесей, после переработки получается 30 тонн сырья первого сорта. Каков процент примесей в сырье первого сорта?

<u>*Задачи II уровня (по 0,15 балла).*</u> Олимпиадные задачи «на части» для младших школьников.

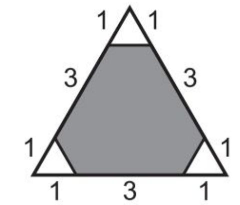
651. В одном литре морской воды содержится 0,00001 миллиграммов золота. Сколько килограммов золота содержится в 1 км^3 морской воды?

652. Если кошка научится прыгать в 1,5 раза дальше, чем умеет, ей понадобится ровно 6 прыжков, чтобы, убегая от собаки, добраться до дерева. За сколько прыжков кошка может это сделать сейчас?

653. Костя собирает марки с изображениями машин и птиц. Сначала у него было поровну марок обоих видов, но потом он обменялся несколькими марками со своим приятелем. В результате этого обмена число марок с птицами уменьшилось на 5%, а число марок с машинами увеличилось на 15%, причем марок с машинами стало на 24 больше, чем с птицами. Сколько марок с птицами осталось у Кости?

654. Крыша покрыта одинаковыми прямоугольными листами кровли, которые уложены в 8 рядов (снизу вверх). Каждый следующий ряд перекрывает предыдущий на 0,1 своей ширины. Какая часть крыши покрыта в два слоя?

655. В банке с компотом плавают сливы и абрикосы. Сливы составляют 40% всех фруктов. Вася выловил из банки несколько слив и съел их. Теперь оставшиеся сливы составили 20% всех фруктов в банке. Какую часть слив съел Вася?



656. Какой процент площади треугольника закрашен на рисунке?

657. На что нужно умножить треть от четверти числа, чтобы получить утроенную половину того же числа?

658. У кошки родились котята: двое самых легких весят 25% от суммарного веса всех членов семейства, а трое самых тяжелых – 60%. Сколько всего кошек в этом семействе?

659. Федя поехал на велосипеде из города в деревню. Он собирался приехать в деревню ровно в 15:00. За две трети отведенного времени он проехал три четверти пути. После этого он изменил скорость и прибыл в деревню в 15:00, как и собирался. Чему равно отношение его первоначальной скорости к скорости на последней четверти пути?

660. Малыш, Карлсон и Винни-Пух ели варенье. Они начали одновременно и ели до тех пор, пока варенье не кончилось. Малыш успел съесть только одну девятую часть варенья. Если бы ели только Малыш и Карлсон, то Малышу досталась бы четверть всего варенья. Какая часть варенья досталась бы Малышу, если бы он ел только с Винни-Пухом?

Задачи II уровня (по 0,15 балла). Докажите следующие утверждения:

661. Если $a \geq b$ и $\dfrac{a-b}{a+b}$ – несократимая дробь, то и $\dfrac{a}{b}$ несократима.

662. Любое положительное рациональное число представимо конечной суммой различных аликвотных дробей, например, $2\dfrac{17}{60} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}$.

663. На множестве натуральных чисел выполняется тождество $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$.

664. $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{(k+1)^2}\right) = \dfrac{n+2}{2n+2}$.

Задачи II уровня (по 0,15 балла). Найдите

665. Найдите три аликвотные дроби, дающие в сумме $1\dfrac{1}{12}$; $\dfrac{28}{33}$; $\dfrac{2}{7}$.

666. Найдите натуральное число, входящее в пропорцию

$$\frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3} = \frac{199}{242}.$$

667. Найдите число, которое надо вычесть из знаменателя и прибавить к числителю дроби $\dfrac{14157}{117843}$, чтобы после сокращения получить $1\dfrac{1}{5}$.

668. Найдите дробь $\frac{a}{b}$, такую, что $\frac{a}{b} = \overline{0,(xbyazt)}$.

669. Найдите дробь $\frac{a}{b}$, где $a,b \in \mathrm{N}$, которая увеличится в три раза, если её числитель возвести в куб, а к знаменателю прибавить 3.

670. Найдите число А= $\underbrace{\overline{15\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}}_{\text{не более 30 цифр}}$, обладающее следующим свойством: если А умножить на 5, то результат можно получить, просто передвинув цифры $\overline{15}$ на правый конец, то есть в итоге получается число вида $\overline{\ldots..15}$.

671. Между числами 4/7 и 5/7 вставьте квадрат рационального числа.

<u>Задачи II уровня (по 0,15 балла).</u> Олимпиадные задачи «на проценты» для школьников 7-9 классов.

672. Винни-Пух пошёл в магазин за мёдом. Цена одного горшочка – 1 фунт, но при покупке n горшочков (n < 100) покупатель получает скидку n%. Когда Винни вернулся домой, Кристофер Робин посмотрел на его покупку и сказал: «Глупенький мой мишка! Ты ухитрился заплатить за мёд наибольшую возможную сумму денег!». Сколько фунтов заплатил Винни-Пух?

673. Придя в магазин, Винни-Пух обнаружил, что горшочек для мёда подорожал на 60%, а мёд подешевел на 60%, и теперь горшочек и мёд в нем стоят поровну. Как изменилась цена горшочка с мёдом?

674. Лёша, Ганс и Стас сложились и купили палатку. Стас заплатил 60% от её цены, Лёша 40% от оставшейся суммы, а Ганс – последние 30 долларов. Сколько стоила палатка?

675. Когда бочка на 30% пуста, то в ней содержится на 30 литров больше, чем когда она на 30% заполнена. Сколько литров вмещает полная бочка?

676. Учитель задал на лето двоечнику в четыре раза больше задач, чем отличнику. После каникул оказалось, что мальчики решили задач поровну, но процент задач, решённых отличником, равен проценту задач, не решённых двоечником. Сколько процентов задач решил отличник?

677. В музыкальной школе количество участников конкурса «Кенгуру» составляет 5% от количества всех девочек и 20% от количества всех мальчиков. Сколько процентов учеников этой школы могут принять участие в конкурсе «Кенгуру»?

678. Среди нескольких различных простых чисел ровно n% (n∈N) делятся на 3. Чему может быть равно n?

679. Ровно 1% солдат полка награждены медалями. Полк выстроили в форме прямоугольника. Оказалось, что награжденные солдаты встречаются ровно в 30% рядов и в 40% колонн. Какое наименьшее количество солдат может быть в этом полку?

<u>*Задачи II уровня (по 0,15 балла).*</u> Табличная модель задач «на смеси и сплавы» существенно не отличается от простой табличной модели задач «на процентное содержание вещества» и имеет вид

СОСТАВ ВЕЩЕСТВА	I		II		I + II	
	в %	масса I	в %	масса II	в %	масса (I + II)
Неизменный компонент (…)						
Изменяющийся компонент (…)						
ВСЕГО	*100%*		*100%*		*100%*	

680. **В каких пропорциях** нужно смешать 50%-ый раствор и 70%-ый раствор кислоты, чтобы получить 65%-ый раствор кислоты? Какое максимальное количество 65%-ого раствора можно получить, если имеется 250 г 50%-го раствора и неограниченное количество 70%-го? Какое максимальное количество 65%-ого раствора можно получить, если имеется 250 г 70%-го раствора и неограниченное количество 50%-го?

СОСТАВ ВЕЩЕСТВА	I		II		I + II	
	в %	масса I	в %	масса II	в %	масса (I + II)
Неизменный компонент (кислота)	*50%*	***0,5x***	*70%*	***0,7y***	*65%*	***0,5x+0,7y*** / ***0,65(x+y)***
Изменяющийся компонент (вода)						
ВСЕГО	*100%*	***x***	*100%*	***y***	*100%*	***x + y***
x : y = ?						

$0,5x+0,7y=0,65(x+y)$

$0,05y=0,15x$

$x : y = 1 : 3$

Итак, нужно взять 1 часть 50%-ого раствора и 3 части 70%-ого раствора.

Дайте ответ на второй и третий вопросы задачи.

Решите, используя табличные модели, следующие задачи.

681. Имеются два слитка сплавов золота и меди. В первом слитке отношение золота к меди равно 1:2, а во втором 2:3. Если сплавить $^1/_3$ первого слитка с 5/6 второго, то в получившимся слитке окажется столько золота, сколько было в пером меди; а если 2/3 первого слитка сплавить с половиной второго, то в получившемся слитке окажется меди на 1 кг больше, чем было золота во втором слитке. Сколько золота в каждом слитке?

682. От двух кусков сплава с массами 3 кг и 2 кг и с концентрацией меди 0,6 и 0,8 отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего концентрация меди в обоих сплавах стала одинаковой. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

683. Имеются два сплава золота и серебра, в одном массы этих металлов находятся в отношении 2:3, в другом – в отношении 3:7. Сколько нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 8 кг сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5:11?

684. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, второй – 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 225 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

685. Смешав 54%-ый и 61%-ый растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 46%-ый раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50%-го раствора той же кислоты, то получили бы 56%-ый раствор кислоты. Сколько килограммов 54%-го раствора использовали для получения смеси?

Задачи III уровня (по 0,2 баллов). Решите задачу.

686. Что быстрее: проехать весь путь на велосипеде или две третьих пути на мотоцикле, который движется в три раза быстрее, чем велосипед, а оставшуюся часть пути преодолеть пешком, что втрое медленнее, чем ехать на велосипеде?

687. Сколько пресной воды нужно добавить к 4 кг морской воды, чтобы уменьшить содержание соли в ней в 2,5 раза?

688. Объём вещества А составляет половину суммы объёмов веществ В и С, а объём вещества В составляет $^1/_5$ суммы объёмов веществ А.и С. Найти отношение объёма вещества С к сумме объёмов веществ А и В.

689. Сбербанк перечисляет ежегодно 3% от суммы вклада. Сколько будет на счету вкладчика, внёсшего сумму в 60000 рублей через год? Через сколько лет внесенная сумма удвоится?

690. Для выпечки пшеничного хлеба взято столько килограммов муки, сколько процентов составляет припек на эту муку. Для выпечки ржаного хлеба взято на 10 кг муки больше, а именно столько килограммов, сколько процентов составляет припек на ржаную муку. Сколько взято той и другой муки, если выпечено всего 112,5 кг хлеба?

691. На сколько процентов снизилась производительность труда, если для выполнения плана пришлось увеличить рабочий день с 7 ч до 8 ч?

692. На первом поле 65% площади засеяно овсом. На втором поле овсом занято 45% площади. Известно, что на первом и втором полях вместе под овсом занято 53% общей площади. Какую часть всей засеянной площади составляет первое поле?

693. После двух последовательных снижений объема производства выпуск продукции сократился в два раза. Определить процент сокращения производства.

694. Гонщик-мотоциклист подсчитал, что при увеличении скорости на 10% он пройдёт круг по кольцевой дороге за 15 мин. На сколько процентов он должен увеличить скорость, чтобы пройти круг за 12 мин?

695. Число студентов курса, успешно сдавших все зачеты, заключено в пределах 96,8% до 97,2% от общего числа студентов. Найти минимальное число студентов, которое может быть на таком курсе.

696. *Творческое задание (100 баллов).* Задачи №№ 686-695 относят к категории сюжетных задачам на изменение величин, выраженное в числах/процентах. Проведите классификацию задач №№ 686-695 на соответствие той или иной алгебраической модели.

Разработайте информационные табличные модели двух-трёх классов задач данной категории. Проверьте построенные модели на универсальность.

Найдите (или сформулируйте самостоятельно) задачу, не относящуюся к рассматриваемым вами классам задач.

697. *Творческое задание (100 баллов).* Проанализируйте следующие равенства, аналоги которых изучались в Древнем Египте, о чём можно судить по сохранившемуся с тех времён кожаному свитку*:

$$\overline{3}+\overline{6}=\overline{2},\ \overline{2}+\overline{3}+\overline{6}=1,\ \overline{2}+\overline{6}=\overline{\overline{3}},\ \overline{\overline{3}}+\overline{6}=\overline{2}+\overline{3},\ \overline{2}+\overline{\overline{3}}=\overline{6}+1.$$

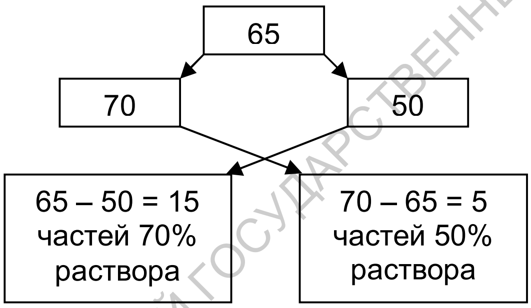
Эти равенства в свитке употреблялись без всяких указаний, и поэтому можно считать, что они являлись правилами счёта, которые знал наизусть каждый вычислитель в Древнем Египте.

Переведите эти правила на современный математический язык.

Перечисленные формулы далее использовались египтянами, по-видимому, следующим образом: каждое из пяти соотношений делилось на 2, на 3, на 4 и т.д. Проделайте эти действия, продолжив, таким образом, данный ряд формул.

Сформулируйте обобщающие выводы.

698. *Творческое задание (1 балл).* Исторически долгое время математические знания передавались из поколения в поколение в виде списка задач практического содержания вместе с их решениями. Одновременно с этим и обучение математике велось по образцам: ученики, подражая учителю, решали задачи на определенное «правило».



На схеме представлен старинный способ решения задачи № 680. Сравните старинный и современный способы решения этой задачи. Решите подобные задачи, используя старинный способ. Обоснуйте факт получения верного ответа.

В современной литературе информационные модели не адекватные поставленной задаче, но дающие возможность получения верного ответа на поставленный в задаче вопрос носят название ***фальшивого правила***.

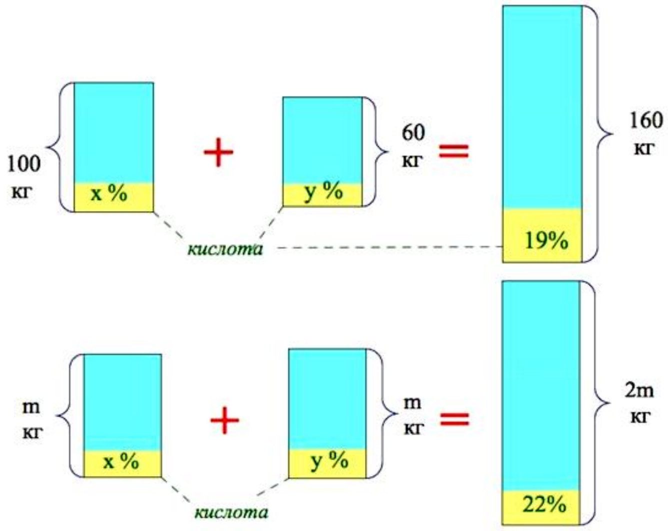
Приведите примеры других фальшивых правил и математически обоснуйте возможность их применения к решению конкретного типа задач.

699. *Творческое задание (1 балл).* Для решения задач на смеси и сплавы используются схематические модели. Например, для решения задачи: «Имеются два сосуда. Первый содержит 100 кг, а второй – 60 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится

---

* Хранится в Британском музее Лондона.

раствор, содержащий 19% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 22% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?» построена следующая



модель. На основании этой модели закончите решение задачи.

Примените этот вид моделирования к решению задач на смеси и сплавы №№ 681-685. Сравните два способа информационного моделирования задач на смеси и сплавы не менее, чем по 7 критериям.

Можно ли этот вид моделирования применить к решению задач «на проценты» других видов.

700. *<u>Творческое задание (1 балл).</u>* Подберите серию не менее, чем из десяти разнообразных по фабуле задач к учебному проекту «Семейная экономика». Примерами таких задач могут служить следующие две задачи:

1. Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 65%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 2%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

2. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Сколько лет нужно ждать семье, желающей купить холодильник этой марки не более, чем за 15000 рублей, если, выставленный на продажу холодильник за 20700 рублей, через два года был продан за 16767 рублей?

VIII. Иррациональные числа. Логарифмы. Арифметика действительных чисел

Введём понятие *иррационального числа* как такого, которое не представимо в виде конечной или бесконечной периодической дроби (другими словами, которое представимо в виде бесконечной непериодической дроби).

Среди иррациональных чисел особо выделяют радикалы (рациональные степени рациональных чисел) и логарифмы рациональных чисел по рациональному основанию. Объединение рациональных и иррациональных чисел образует множество *действительных чисел*. Всевозможные комбинации рациональных и иррациональных чисел, исключая числа, полученные извлечением корня чётной степени из отрицательного числа, также являются действительными числами, а числа-«исключения» образуют новое числовое множество, вновь расширяя понятие числа.

Перечислим новые свойства (с учётом условия «исключения») указанных чисел, определяемых расширением числового множества до R ($a,b,m,n\in$R).

VIII.1. $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n},\ a>0;$ VIII.2. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ a>0;$

VIII.3. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{a}=\sqrt[m\cdot n]{a^{m+n}};$ VIII.4. $\sqrt[m\cdot n]{a^m}=\sqrt[n]{a};$

VIII.5. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|;$ VIII.6. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a;$

VIII.7. $\sqrt[n]{a}=0\Leftrightarrow a=0;$ VIII.8. $\sqrt[n]{a}=1\Leftrightarrow a=1;$

VIII.9. $log_n ab=log_n|a|+log_n|b|,\ a\cdot b>0;$ VIII.10. $log_n\dfrac{a}{b}=log_n|a|-log_n|b|,\ \dfrac{a}{b}>0;$

VIII.11. $log_{n^\alpha}m^\beta=\dfrac{\beta}{\alpha}log_n m,\ m>0;$ VIII.12. $log_{n^\alpha}m^{2\beta}=\dfrac{2\beta}{\alpha}log_n|m|;$

VIII.13. $log_a b=\dfrac{log_n b}{log_n \alpha},\ m>0, m\neq 1;$ VIII.14. $log_a b=\dfrac{1}{log_b \alpha}.$

<u>*Тестовые задания (по 0,05 балла).*</u>

701. Если $\sqrt{37-n}-\sqrt{15-n}=2$, то $\sqrt{37-n}+\sqrt{15-n}$ равна

а) 5 б) 8 в) 11 г) 14

702. Выражение $log_{\frac{1}{7}}\dfrac{49}{7-2\sqrt{6}}+log_{\sqrt{7}}\dfrac{1}{\sqrt{6}-1}$ равно

а) –4 б) –3 в) –2 г) 2

703. Укажите все номера рациональных чисел: (1) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}$;

(2) $\left(\sqrt[3]{7-\sqrt[3]{7}}\right)^0$; (3) $\sqrt[5]{32\sqrt{2}}$; (4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}-\sqrt{5}$; (5) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{log_2 8}$.

а) 1,2,3 б) 1,2,4 в) 1,2,5 г) 1,3,4 д) 1,3,5
е) 1,4,5 ж) 2,3,4 з) 2,3,5 и) 2,4,5 к) 3,4,5

704. Укажите все номера целых чисел

(1) $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}+4\sqrt{3}$; (2) $\left(\sqrt[7]{7+\sqrt[7]{7}}\right)^0$; (3) $125^{\frac{4}{3}}$; (4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}2}$; (5) $\sqrt[4]{9\sqrt{3}}:3^{\frac{1}{6}}$.

а) 1,2,3 б) 1,2,4 в) 1,2,5 г) 1,3,4 д) 1,3,5
е) 1,4,5 ж) 2,3,4 з) 2,3,5 и) 2,4,5 к) 3,4,5

705. Для того, чтобы избавится от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{a}}}}$ необходимо

а) дважды возвести дробь во вторую степень;

б) умножить числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{a}}}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$;

в) умножить числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{a}}}$;

г) умножить числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{a}}}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$.

706. Пусть числа α и β – иррациональны, r – рационально. Какие из следующих чисел: (1) α+β, (2) α·β, (3) α+r, (4) α·r, – могут принимать рациональные значения? Выберите номер ответа на поставленный вопрос.

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) 1,2
е) 1,3 ж) 1,4 з) 2,3 и) 2,4 к) 3,4
л) 1,2,3 м) 1,2,4 н) 1,3,4 о) 2,3,4 п) 1,2,3,4

707. Пусть числа α и β – иррациональны, r – рационально. Какие из следующих чисел: (1) $\sqrt{\alpha}$, (2) $\sqrt{r}$, (3) $\sqrt{\alpha+\beta}$, (4) $\sqrt{\alpha+r}$, – могут принимать рациональные значения? Выберите номер ответа на поставленный вопрос.

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) 1,2
е) 1,3 ж) 1,4 з) 2,3 и) 2,4 к) 3,4
л) 1,2,3 м) 1,2,4 н) 1,3,4 о) 2,3,4 п) 1,2,3,4

708. В результате какого действия над числом $\sqrt[3]{2\log_{15}3}$ получится рациональное число?

а) возведение числа в третью степень;
б) увеличение подкоренного выражения на $2\log_{15}75$;
в) деления подкоренного выражения на $\log_{15}3$;
г) умножение подкоренного выражения на $\log_3 15^4$.

709. Между какими числами расположено число $\sqrt[3]{2\log_{15}3}$?

а) $-\sqrt[3]{2}$ и 1 б) $-\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ в) 0 и $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ г) 1 и $\sqrt[3]{2}$

710. Пусть $\alpha=\frac{\log_2 192}{\log_{12}2}$, $\beta=\frac{\log_3 24}{\log_{96}2}$, тогда

а) $3=\alpha+\beta$ б) $3=\alpha-\beta$ в) $3=\beta-\alpha$
г) $3=\alpha\cdot\beta$ д) $3=\alpha:\beta$ е) $3=\beta:\alpha$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Найти значение выражения

711. $2^{\log_3 5}-5^{\log_3 2}$;

712. $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\ldots\cdot\log_{11}10\cdot\log_{12}11$;

713. $2^{\sqrt{\log_2 3}}-3^{\sqrt{\log_3 2}}$;

714. $7^{\log_3 5}+3^{\log_3 7}-5^{\log_3 7}-7^{\log_5 3}$;

715. $\left(\sqrt[7]{\frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3}+\log_{9\sqrt{3}}125}$;

716. $\sqrt{\frac{\sqrt{81}\cdot\sqrt[3]{512}\cdot\sqrt[3]{32}\cdot\sqrt{162}}{\sqrt[4]{6561}\cdot\sqrt[3]{729}\cdot\sqrt{31250}}}\cdot\sqrt[3]{54\cdot 500\sqrt{2}}\cdot\sqrt{25}$;

717. $\frac{\log_3 135}{\log_{15}3}-\frac{\log_3 5}{\log_{405}3}$;

718. $\left(\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}-\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}$;

719. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{243}\right)^3-\frac{\log_4 19}{3\log_4 27}}$;

720. $5^{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}}+\log_{\sqrt{2}}\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{10+2\sqrt{21}}$;

721. $\frac{\log_3 12}{\log_{36}3}-\frac{\log_3 4}{\log_{108}3}$;

722. $\frac{48}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{243}+\sqrt[3]{375}}$;

723. $\left(0,25^{\log_2 3}+\frac{17}{9}\right)^{\log_2 17}$

724. $\log_{\sqrt[3]{5}}\frac{125}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Не пользуясь таблицами, определить, что больше

725. $\log_4 2$ или $\log_{0,625}0,25$.

726. $\log_{\log_4 2}\frac{1}{2}$ или 1.

727. $\log_4 60$ или $\log_3 30$.

728. $\log_3 25$ или $\log_2 11$.

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Докажите

729. $\sqrt{21-12\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-3$.

730. $\frac{\left(\sqrt{\sqrt{20}-4}+\sqrt{\sqrt{20}+4}\right)^2}{\sqrt{\left(4-\sqrt{20}\right)^2}}=3\sqrt{20}+14$.

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Прологарифмируйте выражение по основанию 3 ($a>0, b>0$).

731. $\left(\sqrt[5]{a^3 b}\right)^{\frac{2}{3}}$;

732. $\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0,2}$;

733. $9a^4\cdot\sqrt[5]{b}$;

734. $\frac{a^2}{27b^7}$.

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Докажите

735. $4^{\log_5 7}=7^{\log_5 4}$;

736. $3^{\log_2 5}=5^{\log_2 3}$;

737. $\log_3 7+\log_7 3>2$.

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Освободитесь от иррациональности в знаменателе

738. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$;

739. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

740. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}}$.

741. $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}}$;

742. $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}$;

743. $\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$

Задачи I уровня (по 0,1 балла).

744. Не вычисляя, расположите в порядке возрастания $\sqrt{2017}, \sqrt{201}\cdot 7$, $\sqrt{20}\cdot\sqrt{17}, \sqrt{20}\cdot 17, 20\cdot\sqrt{17}$.

745. Найти значение выражения $\log_{a^3b^4}\sqrt[3]{a^2b}$, если $\log_a b = \frac{1}{4}$.

746. Является ли натуральным числом $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$?

747. Что больше $\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$ или $\log_3\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$?

748. Чему равен $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{a}$, если $\log_a 27 = b$?

749. Выразить $\log_{30}8$ через $\lg 3$ и $\lg 5$.

750. Найти $\lg 56$, если $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$.

751. Как из $\log_{60}2$ и $\log_{60}5$ получить $\log_{60}27$? Можно использовать целые числа.

752. Выразить $\log_6 16$ через $\log_{12}27 = a$.

753. Зная $\lg 2$ и $\lg 13$ найти $\log_5 3{,}38$.

754. $\log_2\log_8\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{64}}}}_{39\ раз} = ?$

755. Пусть $\log_b a = \sqrt{3}$, тогда $\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = ?$

756. Сравните число $\sqrt{\left|8\sqrt{3}-16\right|} - \sqrt{8\sqrt{3}+16}$ и наименьший корень уравнения $4x^2 + 21x + 17 = 0$.

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Сравните

757. $\log_5 3$ и $\frac{2}{3}$ ***758.*** $\log_2 5$ и $2\frac{1}{3}$ ***759.*** $3^{\log_5 7}$ и $7^{\log_5 3}$ ***760.*** $\log_2 5$ и $\log_5 32$

Задачи II уровня (по 0,15 балла). Докажите

761. Число $\sqrt[3]{1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2}} + \sqrt[3]{26}$ – целое.

762. Число $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$ – рациональное.

763. Число $(2+\sqrt{3})^{128}$ – иррациональное.

764. Если $\alpha = \log_{12}18$, $\beta = \log_{24}54$, то $\alpha\cdot\beta + 5(\alpha-\beta) = 1$.

765. $\log_3 5\cdot\log_2 28\cdot\log_{\frac{1}{5}}4 < -6$.

766. Числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

767. Доказать без помощи таблиц $\frac{1}{\log_2\pi} + \frac{1}{\log_5\pi} > 2$

Задачи II уровня (по 0,15 балла). Упростите

768. $\left(a^{\alpha}\right)^{-\beta\cdot \log_{a^{\lambda}} N^{-\gamma}}$ **769.** $a^{\frac{\log_b \log_b N}{\log_a b}}$ **770.** $\frac{a-\sqrt{a}-2}{2-a}$ **771.** $\frac{a-2\sqrt{a}-3}{3-\sqrt{a}}$

Задачи II уровня (по 30 баллов).

772. Найдите $log_{25}24$, если $\alpha = \log_6 15$ и $\beta = \log_{12} 18$.

773. Между какими соседними целыми числами заключено значение выражения $\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+..+\frac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{19}}$?

774. Найдите сумму $S_n = 1+2\sqrt{2}+3\left(\sqrt{2}\right)^2+\ldots+n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$.

775. Найдите сумму первых двенадцати членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = \sqrt[3]{2}-1$ и $b_3 = \left(\sqrt[3]{2}-1\right)\cdot\sqrt[3]{4}$.

776. Какое из чисел больше (не используя калькулятор) $\sqrt{2008200820}+\sqrt{2008200822}$ или $2\sqrt{2008200821}$?

777. Справедливо ли тождество $4^{\log_2 a}+2^{\log_2 a}=(a+1)\cdot a^2$?

778. Последовательность $\{a_n\}$ определена как $a_1 = 6+\sqrt{3}$, $a_2 = 15$, $a_{n+2}-\left(2+\sqrt{3}\right)a_{n+1}+2\sqrt{3}\cdot a_n = 0$. Найдите значение a_8.

779. Определить отношение двух чисел, если отношение их среднего арифметического к среднему геометрическому равно 25 : 24.

780. Целой частью числа А называется наибольшее целое число, не превышающее А; обозначение: [А]. Дробной частью А называется А – [А]; обозначение: {А}. Приведите пример такого положительного А, что {А}+{1/А}=1.

781. Какое наибольшее число раз можно последовательно взять логарифм по основанию 2 от числа 16^{64} (первый раз логарифм берётся от этого числа, а затем всякий раз – от числа, полученного в предыдущий раз)?

782. Какие значения может принимать выражение $\log_{b_{21}b_{50}} b_1 b_2 \ldots b_{70}$, где b_1, b_2, … – геометрическая прогрессия?

783. Лена записала логарифм этого года по основанию прошлого года, а Лёня – логарифм следующего года по основанию этого года. У кого из них число больше?

784. Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов по основанию 3 от этих чисел равна 10. Найдите эти числа, если $\log_3 b_1 \cdot \log_3 b_5 = 3$.

785. Сумма нескольких не обязательно различных положительных чисел не превосходила 100. Каждое из них заменили на новое следующим образом: сначала прологарифмировали по основанию 10, затем округлили стандартным образом до ближайшего целого числа и, наконец, возвели 10 в найденную целую степень. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел превышает 300?

786. Существует ли такое натуральное число n, большее 1, что значение выражения $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ является натуральным числом?

787. Найдите все действительные числа x такие, что оба числа $x+\sqrt{3}$ и $x^2+\sqrt{3}$ – рациональные.

788. Число x таково, что среди четырёх чисел: $x-\sqrt{2}$, $x-\dfrac{1}{x}$, $x+\dfrac{1}{x}$, $x^2+2\sqrt{2}$; – ровно одно не является целым. Найдите все такие x.

789. Дан квадратный трёхчлен $x^2 + bx + c$. Докажите, что найдётся такое иррациональное x, при котором значение $x^2 + bx + c$ рационально.

790. $\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}=?$ Результат обобщите.

791. $\sqrt{37-5\sqrt{48}}=?$ Результат обобщите.

792. $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}=?$

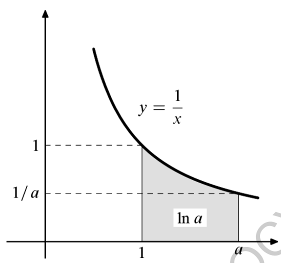
793. $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}=?$

794. Существует ли четырёхугольник $ABCD$ площади 1 такой, что для любой точки O внутри него площадь хотя бы одного из треугольников OAB, OBC, OCD, DOA иррациональна?

795. Рациональная точка – точка, у которой все три декартовы координаты – рациональные числа. Существует ли такая сфера, на которой имеется ровно одна рациональная точка?

796.. *Творческое задание (1 балл).* О каких числах-«исключениях» идёт речь в краткой теоретической справке к данному разделу? Что вы знаете об этих числах, об арифметических действиях над ними? Приведите примеры.

797. *Творческое задание (1 балл).* Прибор для сравнения чисел $log_a b$ и $log_c d$ $(a, b, c, d > 1)$ работает по правилам: если $b > a$ и $d > c$, то он переходит к сравнению чисел $log_a(b:a)$ и $log_c(d:c)$; если $b < a$ и $d < c$, то он переходит к сравнению чисел $log_d c$ и $log_b a$; если $(b-a)(d-c) \le 0$, то он выдаёт ответ. Покажите, как прибор сравнит числа $log_{25}75$ и $log_{65}260$. Докажите, что любые два неравных логарифма он сравнит за конечное число шагов (используйте цепные дроби).



798. *Творческое задание (1 балл).* Начиная с рассуждения Галилея о том, что скорость падения тела не может быть пропорциональна пройденному пути, можно прийти к определению логарифма как площади под гиперболой и экспоненты как обратной (к логарифму) функции. Изложите суть вопроса.

799. *Творческое задание (1 балл).* John Napier (1550–1617) – шотландский математик и теолог известен главным образом как изобретатель системы логарифмов, основанной на установлении соответствия между арифметической и геометрической числовыми прогрессиями. В труде *«Mirifici logarithmorum canonis descriptio» (1614 г.)* ученый предложил первую таблицу логарифмов (ему же принадлежит и сам термин «логарифм»), но не указал способ ее вычисления. Объяснение было дано в другом его сочинении *«Mirifici logarithmorum canonis constructio»*, вышедшем в 1619, уже после смерти автора. Изложите суть идеи построения таблиц логарифмов, изложенной Непером.

800. *Творческое задание (1 балл).* Приведите аннотированный список статей журнала «Квант», посвящённых иррациональным числам и действиям с ними; выпишите 10 наиболее интересных задач по данной теме.

IX. Систематические числа

Запись числа в десятичной системе счисления настолько привычна для нас, что, говоря о числе, мы обычно представляем его в этой форме.

В системе счисления с основанием 10 запись числа $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1}$ означает число
$$N_{10}=a_n 10^{n-1}+\ldots+a_3 10^2+a_2 10+a_1, \qquad (X.1)$$
где коэффициенты чисел $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$ могут принимать значения из множества $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, причём $a_n \neq 0$.

Системой счисления назовём совокупность приёмов представления и обозначения натуральных чисел. При этом сами числа называют *систематическими.*

Системы счисления в зависимости от того, меняется ли значение цифры от её местоположения в числе, делятся на два больших класса: позиционные и непозиционные системы счисления.

Система счисления называется *позиционной* если значение каждой цифры в записи числа зависит от того места n, которое эта цифра занимает.

Говорят, что число *N записано в системе счисления с натуральным основанием q* (в *q-ичной* системе счисления), если оно представимо в виде:
$$N_q = k_n q^{n-1} + \ldots + k_3 q^2 + k_2 q + k_1, \qquad (X.2)$$
где k принимает значение из некоторого множества, состоящего из q символов, и $k,q \in \mathrm{N}$. Такая запись числа называется *систематической записью числа по основанию q*.

Все такие системы счисления строятся по одному общему правилу*.

1. Рассматривается алфавит $A=\{|\}$. Натуральным числом называется любое непустое слово в алфавите A.

2. Выбирается некоторое число q – основание системы счисления.

3. Выбирается алфавит из q символов, называемых цифрами: $S=\{s_i, 1\leq i \leq q\}$.

4. Одним из символов фиксируется нулевой элемент.

5. Другим символам придаются значения по следующей схеме: $\underbrace{||\ldots||}_{i\ \text{штук}}\rightarrow s_i$

6. Каждое число N представляется в виде (X.2), где $k_l \in S$.

7. Далее, такое число сокращённо записывается в виде $(k_n k_{n-1} \ldots k_2 k_1)_q$.

Если основание системы счисления $q<10$, то за «алфавит» принято принимать числа из следующей последовательности натуральных чисел $0,1,2,\ldots,9$, сохраняя за каждой цифрой её десятичное значение. Если основание системы счисления $q>10$, то за «алфавит» принято принимать цифры из следующей последовательности натуральных чисел: $0,1,2,\ldots,9$, (по прежнему, сохраняя за каждой цифрой её десятичное значение), дополняя их прописными буквами латинского алфавита по следующему правилу: символу A соответствует десятичное число **10**, символу B – 11, C – 12, D – 13, E – 14 и т.д.

---

* Приведённые ниже множества N и A – это множества натуральных чисел, записанных в десятичной и унарной системах счисления соответственно

Система счисления с натуральным основанием q позиционна. При позиционной записи значение каждой цифры зависит от того места n, которое эта цифра занимает.

Система счисления называется *аддитивной непозиционной,* если число в ней представлено в виде числового выражения, в котором используется операция сложения.

Все такие системы счисления строятся по одному общему правилу:

1. Рассматривается алфавит $A=\{|\}$. Натуральным числом называется любое непустое слово в алфавите A.

2. Выбирается алфавит из i символов, называемых ключевыми числами или цифрами: $S=\{s_1\}$, i–любое.

3. Ключевым числам придаются значения по следующей схеме: $\underbrace{||\ldots||}_{i\ \text{штук}} \to s_i$

4. Устанавливается отношение: $s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < \ldots$

5. Каждое число N представляется в виде суммы:

если $s_1 < N < s_2$,то $N=\Sigma(s_1)$;

если $s_2 < N < s_3$,то $N=\Sigma(s_2)+\Sigma(s_1)$, при этом $s_1 \leq \Sigma(s_1) < s_2$ или $\Sigma(s_1)=0$;

если $s_3 < N < s_4$,то $N=\Sigma(s_3)+\Sigma(s_2)+\Sigma(s_1)$, при этом $s_1 \leq \Sigma(s_1) < s_2$, $s_2 \leq \Sigma(s_2) < s_3$ или $\Sigma(s_1) \cdot \Sigma(s_2)=0$;

и т.д.

6. Далее из суммы отбрасываются знаки сложения, и число сокращенно записывается в виде $(s_n s_{n-1} \ldots s_2 s_1)$.

Приведем пример: в качестве алфавита ключевых чисел рассмотрим цифры римской непозиционной системы счисления, то есть цифры $\{I,V,X,L,C,D,M\}$. Ключевым числам придадим значения по следующей схеме: $| \to I$, $||||| \to V$, $\underbrace{||||||||||}_{10\ \text{штук}} \to X$, $\underbrace{||\ldots||}_{50\ \text{штук}} \to L$, $\underbrace{|||\ldots|||}_{100\ \text{штук}} \to C$, $\underbrace{||||\ldots||||}_{500\ \text{штук}} \to D$, $\underbrace{|||||\ldots|||||}_{1000\ \text{штук}} \to M$.

Устанавливаем отношение: $I < V < X < L < C < D < M$.

Остальные числа представляются в виде суммы ключевых чисел, например, $X+I+I$, затем число записывается без знаков сложения, то есть XII.

Система счисления называется *мультипликативной непозиционной*, если число в ней соответствует числовому выражению, в котором используются операции сложения и умножения.

Число $(2873)_{10}$ в мультипликативной системе счисления, алфавит ключевых чисел которой представлен цифрами римской нумерации $\{I,V,X,L,C,D,M\}$, записывается в виде $D3CL2X3I$, так как получено следующим образом: $D+3 \cdot C+L+2 \cdot X+3 \cdot I$.

По мере расширения понятия числа расширяется понятие системы счисления, причём это расширение идёт в двух направлениях.

1. <u>Расширение алфавита</u> за счёт включения в него знаков арифметических действий и знаков функций. Это расширение напрямую связано с расширением понятия числа: рассматриваются отрицательные, дробные (рациональные), иррациональные и т.д. систематические числа.

Всякое рациональное число представимо в q-ичной системе счисления единственным образом в виде конечной суммы

$$R = \frac{N}{M} = \frac{k_1}{q} + \frac{k_2}{q^2} + \ldots + \frac{k_{s-1}}{q^{s-1}} + \frac{k_s}{q^s}, \qquad (X.3)$$

где $0 \le N < M$, N и M – взаимно простые числа, $k_i < q$, $i = 1 \div s$.

Число вида (X.3) называют *конечной систематической q-ичной дробью* и обозначают $(0, k_1 k_2 \ldots k_s)_q$.

Бесконечной правильной q-ичной дробью называется сумма

$$R = \frac{k_1}{q} + \frac{k_2}{q^2} + \ldots + \frac{k_n}{q^n} + \ldots, \qquad (X.4)$$

где q – основание системы счисления и $k_n < q$.

Бесконечная систематическая дробь называется *чисто периодической систематической дробью с периодом длины l,* если для любого k имеет место равенство: $k_{n+l} = k_n$, причем, l – наименьшее из чисел, удовлетворяющих этому равенству, – и обозначается $(0,(k_1 k_2 \ldots k_l))_q$.

Бесконечная систематическая дробь называется *смешанной периодической систематической дробью с периодом длины l,* если существует такое число m, что для любого $n > m$, такое что $k_{n+l} = k_n$, причем, l – наименьшее из чисел, удовлетворяющих этому равенству, – и обозначается $(0,a_1 a_2 \ldots a_m(k_1 k_2 \ldots k_l))_q$.

Поскольку все системы счисления описывают объекты одной и той же природы, а именно действительные числа, то в этих системах счисления справедливы те же определения, законы и правила арифметических действий, что и в привычной для нас десятичной системе (см. разделы IV-VIII).

Практически все процедуры действия с числами, записанными в различных системах счисления, включают этап перевода чисел из одной системы счисления в другую, более «удобную».

Рассмотрим подробнее процесс перевода чисел из одной позиционной системы счисления в другую.

Обычно из всех систем счисления одна считается «своей», а другие «чужими» системами счисления. Например, человеку трудно свыкнуться с тем, что запись числа в десятичной системе счисления, это не само число, а всего лишь некоторый текст, который мы привыкли отождествлять с числом.

В связи с этим возможны три задачи, которые мы сформулируем в форме вопросов:

1) Как перевести число из «своей» системы счисления в «чужую»?

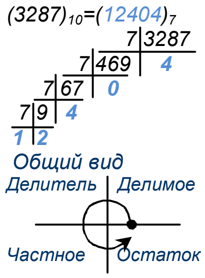
2) Как перевести число из «чужой» системы счисления в «свою»?

3) Как перевести число из «чужой» системы счисления в другую, более «удобную»? «Удобство» основания системы счисления зачастую связано с постановкой конкретной практической задачи.

Пусть число N записано в m-ичной системе. Это значит, что оно представлено в виде: $N_m = b_k m^{k-1} + \ldots + b_3 m^2 + b_2 m + b_1$.

Записать это число в какой-либо другой системе счисления, скажем в q-ичной, значит найти коэффициенты (дня определенности, $k_1, k_2, \ldots, k_n$)

в q-ичной систематической записи числа N, каждый из которых является какой-либо цифрой от 0 до $q–1$ включительно.



Способ «от младших к старшим разрядам» перевода чисел из одной системы счисления в другую

Существуют два способа перевода чисел, подходящих для перевода в систему счисления с меньшим основанием. Первый – «от младших разрядов к старшим» – заключается в следующем:

• Разделим число N_m, на q получим остаток k_n и частное q_1 (все арифметические действия выполняются в m-ичной системе счисления).

• Затем разделим частное q_1 на q, получим остаток $k_{n–1}$ и частное q_2.

• Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не получим частное $q_n= k_1$, меньшее q и остаток k_2.

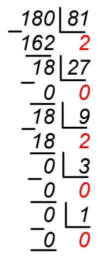
• В результате получим все цифры $k_1,k_2,…,k_n$, входящие в q-ичное представление числа.

Второй способ – «от старших разрядов к младшим» – заключается в следующем. Пусть дано N_m, переведем это число в q-ичную систему счисления. Для этого:

$(180)_{10}=(20200)_3$
Степени 3:
1,3,9,27,81,243

• Составим таблицу «ключевых» чисел – степеней q: $1,q,q^2,q^3,…, q^x<N_m<q^{x+1}$.

• Делим N_m на q^x. Частное от деления – первая цифра искомого числа – k_1. Остаток – R_1.



• $R_1:q^{x–1}$. Находим следующую цифру искомого числа – k_2 – частное от деления. Определяем остаток R_2.

• И так далее

• $R_{x–1}:q$. Находим предпоследнюю цифру искомого числа – $k_{n–1}$ – частное от деления. Определяем остаток R_x.

• $R_x:1=k_n$.

• В результате получим все цифры $k_1,k_2,…,k_n$, входящие в q-ичное представление числа.

Способ «от старших к младшим разрядам» перевода чисел из одной системы счисления в другую

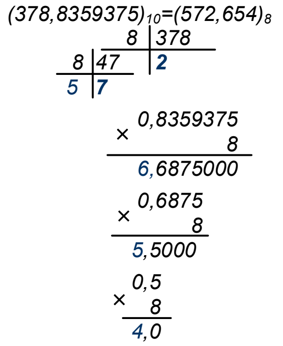
В случае перевода целого числа в систему счисления с большим основанием q, необходимо, в первую очередь определить её алфавит, затем перевести данное число в десятичную систему счисления, воспользовавшись формулой (X.2), составить таблицы сложения и умножения однозначных чисел в q-ичной системе счисления, применить один из описанных выше способов для перевода числа из десятичной системы счисления в q-ичную, используя составленные таблицы.

+	s_1	s_2	…	s_q
s_1				
s_2				
…				
s_q				

×	s_1	s_2	…	s_q
s_1				
s_2				
…				
s_q				

Для перевода систематической q-ичной дроби в десятичную систему счисления можно, как и в случае целых чисел, воспользоваться представлением (X.3) систематической дроби в виде суммы.

Для перевода десятичной в q-ичную дробь поступают следующим образом:



Перевод смешанного числа из десятичной системы счисления в восьмеричную

▪ Умножим данную десятичную дробь на q: целая часть полученного числа – первая цифра после запятой систематической q-ичной дроби.

▪ Дробную часть полученного при умножении числа умножаем на q: целая часть полученного числа – вторая цифра после запятой систематической q-ичной дроби.

▪ И так далее…

▪ Этот процесс может быть как конечным (на каком-то этапе в результате умножения получается целое число) или бесконечным.

Если число – смешанное, то целую и дробную часть переводят в q-ичную систему счисления отдельно.

2. Расширение основания системы счисления. Потребности человечества в расширении возможностей электронно-вычислительной техники привели к необходимости рассматривать системы счисления с наперёд заданными свойствами. Так возникли нега-позиционные системы счисления, системы счисления с комплексными основаниями и др.

Тестовые задания (по 10 баллов).

801. Выберите запись, не являющуюся 7-ричной записью некоторого числа

а) 210 б) 432 в) 654 г) 876

802. Выберите запись, не являющуюся аддитивной непозиционной записью некоторого числа

а) XCIV б) LXXXXIII в) CLXV г) CVII

803. Какое из чисел не равно $(27)_{10}$?

а) $(1000)_3$ б) $(102)_5$ в) $(33)_9$ г) $(1B)_{16}$

804. Какое из чисел равно $(2577)_{10}$?

а) $(10010010001)_2$ б) $(220101)_4$ в) $(5533)_6$ г) $(5201)_8$

805. Какая запись числа $(49)_{10}$ не верна?

а) XXXXVIIII б) XLIX в) IL г) 4XV4I

806. Какая запись числа $(5707)_{10}$ верна?

а) 11D2C7I б) 5MD2CV2I в) 5M7C7I г) 57C7I

807. Какое из чисел больше $(3D2)_{16}$?

а) $(2D2)_{16}$ б) $(3C2)_{16}$ в) $(3D1)_{16}$ г) $(3D3)_{16}$

808. Какое из чисел меньше $(323)_5$?

а) $(10022)_3$ б) $(153)_7$ в) $(106)_9$ г) $(80)_{11}$

809. Найдите равную данной $(0{,}564)_8$ систематическую дробь

а) $(0{,}1011100)_2$ б) $(0{,}2323)_4$ в) $(0{,}4205343)_6$ г) $(0{,}726562)_{10}$

810. Найдите не равную данной $(0{,}333)_4$ систематическую дробь

а) $(0{,}111111)_2$ б) $(0{,}552343)_6$ в) $(0{,}77)_8$ г) $(0{,}984376)_{10}$

Задачи I уровня (по 0,1 балла).

811. В какой системе счисления верно равенство 35+40=115?

812. В какой системе счисления верно равенство 425–342=63?

813. В какой системе счисления верно равенство 216·3=654?

814. В какой системе счисления верно равенство 1520:12=123?

815. Найдите значение q, если $236_q=1240_5$?

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Процедуры сложения и умножения состоят из цепочки следующих действий:

(1) Выбирается «удобная» q-ичная система счисления.

(2) Данные числа N_r, M_t переводятся в q-ичную систему счисления.

(3) В выбранной системе счисления составляются таблицы сложения и умножения однозначных чисел.

(4) При сложении или умножении многозначные числа подписываются одно под другим с соблюдением правила соответствия разрядов – «столбиком».

(5) Действия производятся с использованием таблиц и правила соответствия.

(6) Ответ записывают в соответствии с требованием задачи.

Вычитание и деление определяются, как действия, обратные к сложению и умножению. Процедуры вычитания и деления проводятся с использованием таблиц и правила соответствия. В случае сложения, вычитания, умножения и деления положительных и отрицательных чисел пользуются известными правилами арифметики.

Найти значение выражения в соответствующих системах счисления.

816. 3240_6+4023_6

817. 23265_8-4761_8

818. 2431_5+1302_5

819. $A705_{11}-4761_{11}$

820. $11011_2\cdot1001_2$

821. $120101_3:102_3$

822. $120321_4\cdot31_4$

823. $150335_7:23_7$

824. $120111_3:102_3+201_3\cdot12_3$

825. $(76_8\cdot64_8-55_8\cdot37_8)\cdot44_8$

826. $1_4+2_4+3_4+10_4+\ldots+33333_4$

827. $2_4+10_4+20_4+100_4+\ldots+200000_4$

828. $425_6\cdot54_6-531_6\cdot43_6$

829. $(135_9:5_9-(^3/_5)_9-55_9):7_9$

830. $(12340_5)^2-(4321_5)^2$

831. $(265_7)^3+(402_7)^3$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Найти значение выражения и запишите результат в удобной для вас системе счисления.

832. $3240_6+110221_3$

833. $23265_8-321131_4$

834. $11011_2\cdot2103012_4$

835. $551_9:102_3$

836. $1_2+10_3+100_4+1000_5+10000_6$

837. $100_2\cdot100_3\cdot100_4\cdot100_5\cdot100_6\cdot100_7\cdot100_8$

838. $10_2+10_3+10_4+10_5+10_6+10_7+10_8$

839. $100000_{16}:10000_8:1000_4:100_2$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Переведите числа в восьмеричную систему счисления.

840. $(101011000{,}01)_2$

841. $(52130{,}03125)_{10}$

842. $(3210{,}031)_4$

843. $(AB{,}16)_{12}$

844. $(555{,}13)_6$

845. $(101{,}CD1)_{16}$

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Вспомните алгоритм извлечения квадратного корня из натурального числа, взяв за основу $\sqrt{279841}$.

$\sqrt{27'98'41'} = 529$

$-27'98'41'$
25
-298
$204 \qquad 5\cdot 2=10, \qquad 102\cdot 2=204$
-9441
$9441 \qquad 52\cdot 2=104, \qquad 1049\cdot 9=9441$
0

Процедура извлечения квадратного корня

(1) Разобьём число на группы по две, начиная слева.

(2) Для старшей группы, образующей число 27, подберём такое число, чтобы его квадрат был наибольшим не превосходящим числа 27 – это 5 – первая цифра квадратного корня.

(3) Из старшей группы вычтем квадрат первой цифры корня, то есть 25. К полученной разности припишем справа следующую группу цифр, получим 298.

(4) Первую цифру квадратного корня умножим на 2, получим $5\cdot 2=10$. Найдём x – вторую цифру квадратного корня, такую, что $\overline{10x}\cdot x \le 298$, причём произведение в записанном неравенстве – наибольшее из возможных: $102\cdot 2=204$.

(5) Произведём вычитание столбиком: $298 - 204 = 94$. К полученной разности припишем справа следующую группу цифр, получим 9441.

(6) Число, образованное найденными цифрами квадратного корня умножим на 2, получим $52\cdot 2=104$. Найдём y – третью цифру квадратного корня, такую, что $\overline{104y}\cdot y \le 9441$, причём произведение в записанном неравенстве – наибольшее из возможных: $1049\cdot 9=9441$.

(7) Поскольку разность между $1049\cdot 9$ и 9441 равна нулю, то корень из числа 279841 – целое число 529.

Осуществите процедуру извлечения квадратного корня из числа

846. *904401*	***847***. *5612161*	***848***. *927369*
849. *61653904*	***850***. *1234321*	***851***. *42528266,6769*

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Осуществите процедуру извлечения квадратного корня из систематического числа (аналогично соответствующей процедуре в десятичной системе счисления)

852. $(11111000001)_2$	***853***. $(12110000)_3$	***854***. $(1312101)_4$
855. $(220234)_5$	***856***. $(133013)_6$	***857***. $(62052)_7$
858. $(74057401)_8$	***859***. $(63086101)_9$	***860***. $(230A01)_{11}$

Задачи II уровня (по 0,15 баллов). В разделе VI «Делимость. Свойства делимости» были рассмотрены свойства делимости натуральных чисел, которые применимы в любой системе счисления. А вот признаки делимости, сформулированные для десятичной системы счисления, и известные Вам из школьного курса математики, в систему счисления с произвольным натуральным основанием перенести нельзя, так как эти признаки связаны с представлением чисел именно в десятичной системе.

Для каждой позиционной системы счисления можно сформулировать свои признаки делимости на то или иное число.

861. Сформулируйте определение чётного и нечётного чисел в двоичной системе счисления. Сформулируйте признаки делимости на 2 и основание системы счисления в троичной системе счисления.

862. Сформулируйте признаки делимости на 2, 3 и основание системы счисления в четверичной системе счисления.

863. Сформулируйте признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 7 и основание системы счисления в восьмеричной системе счисления.

864. Сформулируйте признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и основание системы счисления в двенадцатеричной системе счисления.

865. Число $A=(3630)_p$ делится на 7. Чему равно *p,* и какова десятичная запись этого числа, если известно, что $p \le 12$*?*

866. Число записанное в десятичной системе счисления оканчивается цифрой 5. Будет ли это число кратно 5, если его записать в системе счисления с основанием 3?

867. Сколько существует четырёхзначных чисел, записанных в восьмеричной системе счисления, делящихся на 2 и 7, запись которых начинается с 32?

868. Найдите все четырёхзначные числа вида $\left(\overline{a23b}\right)_6$, кратные $\left(\overline{30}\right)_6$.

869 Докажите, что разность чисел $\left(\overline{abcd}\right)_q$ и $\left(\overline{dcba}\right)_q$, где $q \in \mathrm{N}$, кратна числу $q-1$.

870. Докажите, что если в некоторой *q*-ичной системе счисления записано число, и в этом числе произвольно переставить цифры и вычислить разность между исходным и полученным числом, то разность будет кратна числу $q-1$.

871. Доказать, что делимость $\left(\overline{abc}\right)_q + \left(\overline{cba}\right)_q$ на *q* не зависит от средней цифры.

872.. Докажите, что всякая конечная восьмеричная дробь при переводе в десятичную систему счисления останется конечной. Верно ли обратное?

873. Известно, что $\left(\overline{ab}\right)_p = \left(\overline{ba}\right)_q$ и $p,q \in \mathrm{N}$. Выразите *p* через *q*. Найдите *p* и *q* из равенства $43_p=34_q$. Сколько решений имеет задача?

874.. Найдите НОД(100100_2;10100_2) и НОК(100100_2;10100_2).

Задачи II уровня (по 0,15 баллов).

875. Чему равно *x* в десятичной системе счисления, если $x = 10_3 + 10_2 \cdot 10_5$?

876. В классе 111100_2% девочек и 1100_2 мальчиков. Сколько учеников в классе?

877. У меня 100 братьев. Младшему 1000 лет, а старшему 1111 лет. Старший учится в 1001 классе. Может ли такое быть?

878. В классе 1000_q учеников, из них 120_q девочек и 110_q мальчиков. В какой системе счисления велся счет учеников?

879. В математической олимпиаде участвовало 13 девочек и 54 мальчика, а всего 100 человек. В какой системе счисления записаны эти сведения?

880. В бумагах одного чудака-математика найдена была его автобиография. Она начиналась следующими удивительными словами: «Я окончил курс университета 44 лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком, я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте – всего 11 лет – способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня была уже и маленькая семья из 10 детей. Жалования я получал в месяц всего 200 рублей, из которых 1/10 приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 130 руб. в месяц» и т.д. Чем объяснить странные противоречия в числах этого отрывка?

881. Восстановите неизвестные цифры, обозначенные знаком вопроса, в следующих примерах на сложение и вычитание, определив вначале, в какой системе представлены числа.

а) $\begin{array}{r} 2\,\square\,2\,1 \\ +\quad 1\,2\,3 \\ \hline \square\,2\,0\,3 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} 5\,\square\,5\,5 \\ +\ \square\,3\,2\,7 \\ \hline \square\,1\,6\,\square\,4 \end{array}$ в) $\begin{array}{r} 2\,1\,\square\,0\,2 \\ +\ \square\,1\,2\,1\,2 \\ \hline \square\,2\,\square\,0\,2\,1 \end{array}$ г) $\begin{array}{r} 4\,\square\,5 \\ -\ 1\,3\,6 \\ \hline \square\,5\,6 \end{array}$ д) $\begin{array}{r} 1\,5\,3\,6 \\ -\ \square\,4\,2 \\ \hline 6\,7\,\square \end{array}$

882. Упорядочить числа по убыванию. 143_6; 50_9; 1222_3; 1011_4; 110011_2; 123_8.

883. С числом разрешается производить две операции: «увеличить в два раза» и «увеличить на 1». За какое наименьшее число операций можно из числа 0 получить число 100?

884. Найдите наименьшее основание системы счисления, в которой одновременно имеют место следующие признаки делимости: (1) число делится на 5 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 5; (2) число делится на 7 тогда и только тогда, когда число, составленное из двух его последних цифр, делится на 7.

885. В сумме $+1+3+9+27+81+243+729$ можно вычеркивать любые слагаемые и изменять некоторые знаки перед оставшимися числами с «+» на «–». Маша хочет таким способом сначала получить выражение, значение которого равно 1, затем, начав сначала, получить выражение, значение которого равно 2, затем (снова начав сначала) получить 3, и так далее. До какого наибольшего целого числа ей удастся это сделать без пропусков?

<u>Задачи III уровня (по 0,2 балла).</u> Решите задачи

886. Все клетки шахматной доски пронумерованы от 1 до 64 (в каждом ряду клетки нумеруются слева направо, в первом ряду – от 1 до 8, во втором – от 9 до 16 и т.д.). На доску поставили 8 ладей так, что никакие две из них не бью друг друга. Найдите все значения, которые может принимать сумма номеров полей, занятых ладьями.

887. Фокусник высыпает на стол монеты на сумму 3 рубля и предлагает задачу: разложить деньги по 9-ти кошелькам так, чтобы можно было уплатить любую сумму до 3-х рублей, не открывая кошельков. Как можно разложить монеты?

888. Кладовщик одного склада оказался в большом затруднении: заказанный комплект гирь для простых чашечных весов не прибыл к сроку, а на соседнем складе лишних гирь тоже не было. Тогда он решил подобрать несколько кусков железа разной массы и временно пользоваться ими как гирями. Ему удалось выбрать такие четыре «гири», с помощью которых можно было бы взвешивать с точностью до 100 г товар от 100 г до 4 кг. Какие массы имели эти «гири»?

889. Можно ли с помощью трех гирь (1, 3 и 9 кг) взвесить с точностью до 1 кг любой груз до 13 кг включительно, если гири можно располагать на обеих чашах весов, в том числе и на чаше с грузом?

890. Имеется множество билетов с номерами от 1 до 30 (номера могут повторяться). Каждый из студентов вытянул один билет. Преподаватель может произвести следующую операцию: прочитать список из нескольких (возможно – одного) номеров и попросить их владельцев поднять руки. Сколько раз он должен проделать такую операцию, чтобы узнать номер каждого студента (их не обязательно 30)?

891. Шестьдесят четыре друга одновременно узнали 64 новости, причём каждый узнал одну новость. Они стали звонить друг другу и обмениваться новостями. Каждый разговор длится 1 час. Какое минимальное количество часов необходимо, чтобы все узнали все новости, если во время одного разговора можно передать сколько угодно новостей?

892. Для передачи сообщений по телеграфу каждая буква русского алфавита (Е и Ё отождествлены) представляется в виде пятизначной комбинации из нулей и единиц, соответствующих двоичной записи номера данной буквы в алфавите (нумерация букв начинается с нуля). Например, буква А представляется в виде 00000, буква Б – 00001, буква Ч – 10111, буква Я – 11111. Передача пятизначной комбинации производится по кабелю, содержащему пять проводов. Каждый двоичный разряд передается по отдельному проводу. При приеме сообщения Криптоша перепутал провода, поэтому вместо переданного слова получен набор букв ЭАВЩОЩИ. Найдите переданное слово.

893. Миша загадал число не меньше 1 и не больше 1000. Васе разрешено задавать только такие вопросы, на которые Миша, который всегда говорит правду, может ответить «да» или «нет». Может ли Вася за 10 вопросов определить загаданное число?

894. В классе 16 учеников. Каждый месяц учитель делит класс на две группы. Какое наименьшее количество месяцев должно пройти, чтобы каждые два ученика в какой-то из месяцев оказались в разных группах?

895. Летела стая гусей. На каждом озере садилась половина гусей и еще полгуся. Остальные летели дальше. Все гуси сели на n озерах. Сколько всего гусей было в стае?

896. *Творческое задание (1 балл).* Системы счисления, основание которых есть число целое отрицательное, называют *нега-позиционными системами счисления:* $N_{-q}=k_n(-q)^{n-1}+\ldots+k_3(-q)^2+k_2(-q)+k_1.$

Воспользовавшись структурой и содержанием теоретического материала данного раздела опишите характеристические особенности нега-позиционных систем счисления и основные процедуры выполнения арифметических действий. Укажите важное достоинство нега-позиционных систем счисления. Приведите примеры.

Системы счисления, основание которых есть комплексное число, называют *мнимо-позиционными системами счисления:*

$$N_{qi}=k_n(qi)^{n-1}+\ldots+k_3(qi)^2+k_2(qi)+k_1.$$

Воспользовавшись структурой и содержанием теоретического материала данного раздела опишите характеристические особенности мнимо-позиционных систем счисления и основные процедуры выполнения арифметических действий. Укажите важное достоинство мнимо-позиционных систем счисления. Приведите примеры.

897. *<u>Творческое задание (1 балл).</u>* *Системой счисления Канвея* называется такая запись числа, при которой, начиная с некоторой «цифры» числа m, все остальные «цифры» соответствуют последовательности чисел вида $\frac{1}{2^n}$. Число R, записанное в системе Канвея соответствует сумме:

$$R=(-1)^{k_0}\cdot N+(-1)^{k_0}+(-1)^{k_1}\cdot\frac{1}{2}+(-1)^{k_2}\cdot\frac{1}{4}+(-1)^{k_3}\cdot\frac{1}{8}+(-1)^{k_4}\cdot\frac{1}{16}+(-1)^{k_5}\cdot\frac{1}{32}+\dots$$

где $k_i\in\{0,1\}$.

Такие системы счисления строятся по правилу:

1. Рассматривается алфавит $A=\{\uparrow,\downarrow\}$.

2. Если нужно записать положительное число, то его запись начинают с n символов ↑, где n соответствует целой части данного числа R.

3. Если нужно записать отрицательное число, то его запись начинают с n символов ↓, где n соответствует целой части данного числа $(-1)^{k_0}N$.

4. Если целая часть числа равно нулю, то $N=0$.

5. Дробная часть числа начинается с того же символа, которым была записана целая часть $(-1)^{k_0}$.

6. Все последующие символы соответствуют последовательности чисел вида $\frac{1}{2^n}$. Выбор символа ↑ или ↓ зависит от необходимости сложения (↑) или вычитания (↓) последующего члена последовательности.

Если $\left(-\frac{1}{2^n}\right)$, то используют символ ↓. Если $\frac{1}{2^n}$, то используют символ ↑.

7. Выражение (X.3) заменяется соответствующим набором символов ↑↓.

Воспользовавшись структурой и содержанием теоретического материала данного раздела опишите характеристические особенности системы счисления Канвея и основные процедуры выполнения арифметических действий. Выявите достоинства системы Канвея. Приведите примеры.

898. *<u>Творческое задание (1 балл).</u>* В рассмотренных выше позиционных системах счисления значение единицы любого разряда, кроме первого, равнялся значению предшествующего разряда, умноженного на основание системы счисления q. Можно представить себе ещё один вариант записи чисел – так называемые, смешанные системы счисления.

Под ***базисом системы счисления*** понимают последовательность чисел q_1 q_2 ... q_{n-1}, каждое из которых задаёт значение соответствующего разряда.

Так, базисом десятичной системы счисления являются числа $1,10,100,\dots,10^{n-1}$, двоичной системы счисления – $1,2,4,\dots,2^{n-1}$. Таким образом, числа базиса таких систем счисления образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным основанию системы счисления.

Помимо этого, можно рассматривать системы счисления, базис которых – любая наперёд заданная последовательность.

Чётной системой счисления называют систему счисления с базисом $1,2,4,6,\ldots,2(n-1)$.

Воспользовавшись структурой и содержанием теоретического материала данного раздела опишите характеристические особенности чётной системы счисления и основные процедуры выполнения арифметических действий. Выявите достоинства чётной системы счисления. Приведите примеры.

899. *Творческое задание (1 балл).* *Системой счисления Фибоначчи* называют систему счисления с базисом $1,2,3,5,8,\ldots,q_{n-2}+q_{n-1}$. Воспользовавшись структурой и содержанием теоретического материала данного раздела опишите характеристические особенности системы счисления Фибоначчи и основные процедуры выполнения арифметических действий. Приведите примеры.

900. *Творческое задание (100 баллов).* Можно расширить понятие системы счисления, рассматривая системы счисления, значения цифр которых придаются не только числами натурального ряда, но противоположным к ним числами. Такие системы счисления называются *уравновешенными.* Рассмотрите систему счисления с основанием $q=5$ и цифрами $\{\tilde{1},0,1,2,3\}$, где $\tilde{1}=-1$. Воспользовавшись структурой и содержанием теоретического материала данного раздела опишите характеристические особенности данной системы счисления и основные процедуры выполнения арифметических действий. Приведите примеры.

Наибольший интерес представляют уравновешенные системы счисления с нечётным симметричным основанием. Примером таких систем счисления может служить троичная система счисления с симметричным основанием $\{\tilde{1},0,1,\}$, где $\tilde{1}=-1$. Воспользовавшись структурой и содержанием теоретического материала данного раздела опишите характеристические особенности данной системы счисления и основные процедуры выполнения арифметических действий. Выявите достоинства системы. Приведите примеры.

Исследуйте факториальную систему счисления, базис которой составлении из факториалов чисел натурального ряда: $1!,2!,\ 3!,\ldots$

Как бы выглядели счёты для осуществления арифметических действий в факториальной системе счисления?

X. Информационное моделирование сюжетных задач

Информация имеет функциональное значение в жизни человека. Потребность в информации предваряет всякую другую потребность и всякое действие. Информация имеет непосредственное значение в ориентации человека в окружающем материальном мире. Мы постигаем действительность только через наши модели (Т.А.Ван Дейк). Эти модели и есть наше понимание действительности, которую мы «реконструируем для того, чтобы справиться с ней»[1].

С понятием *информации* тесно связано понятие *информационной модели* и *информационного моделирования*.

В современном (информационном) обществе принцип информационного моделирования наряду с другими информационными принципами играет определяющую роль. *Принцип информационного моделирования* гласит: научное познание осуществляется посредством моделирования; основные модели – описание объектов или процессов на некотором языке – *информационные модели*, которые играют решающую роль в общении и практической деятельности.

Принцип информационного моделирования непосредственно связан с основным тезисом формализации (*основной тезис формализации* указывает на принципиальную возможность разделения объекта и его обозначения и тесно связан с так называемым треугольником Фреге, в котором обрисована связь трёх основных понятий: объекта, знака и концепта). Причины, по которым «рабочее» понятие модели, например математической модели, приобретает характер информационного принципа, заключены в универсальном характере понятия информационной модели. В этом смысле математическая модель является одним из видов информационных моделей.

Следствиями принципа информационного моделирования являются: (1) признание наличия трёх классов моделей – материальные, информационные и воображаемые модели; (2) приобретение информационными моделями статуса самостоятельных объектов, способных оказывать значительное влияние на мировосприятие и поступки людей[2].

Под *умением информационного моделирования* понимают совокупность действий и операций субъекта с информацией об объекте:

- по восприятию (определять цель моделирования; осуществлять выбор объекта моделирования; системно анализировать объект);
- выражению (выбор формы представления модели; формализация);
- оценке (анализ полученной модели на непротиворечивость; адекватности объекту и цели моделирования).

[1] Ван Дейк Т.А. Язык. Познание. Коммуникация [Текст] / Т.А.Ван Дейк. - М.: Прогресс, 1989. – С.12
[2] Бешенков С.А., Ракитина Е.А., Шутикова М.И. Гуманитарная информатика: от технологий и моделей к информационным принципам // Информатика и образование, 2008, №2. – С.3

Следующая схема разработана по материалам электронного ресурса *Информатика и информационные технологии [Электронный ресурс]: Образовательное электронное Интернет-издание для педагогов/ Российский университет дружбы народов/ ИДО РУДН, 2006 – Режим доступа: www.ido.rudn.ru/nfpk/inf/inf9.html,* – и дает представление о разнообразии информационных моделей.

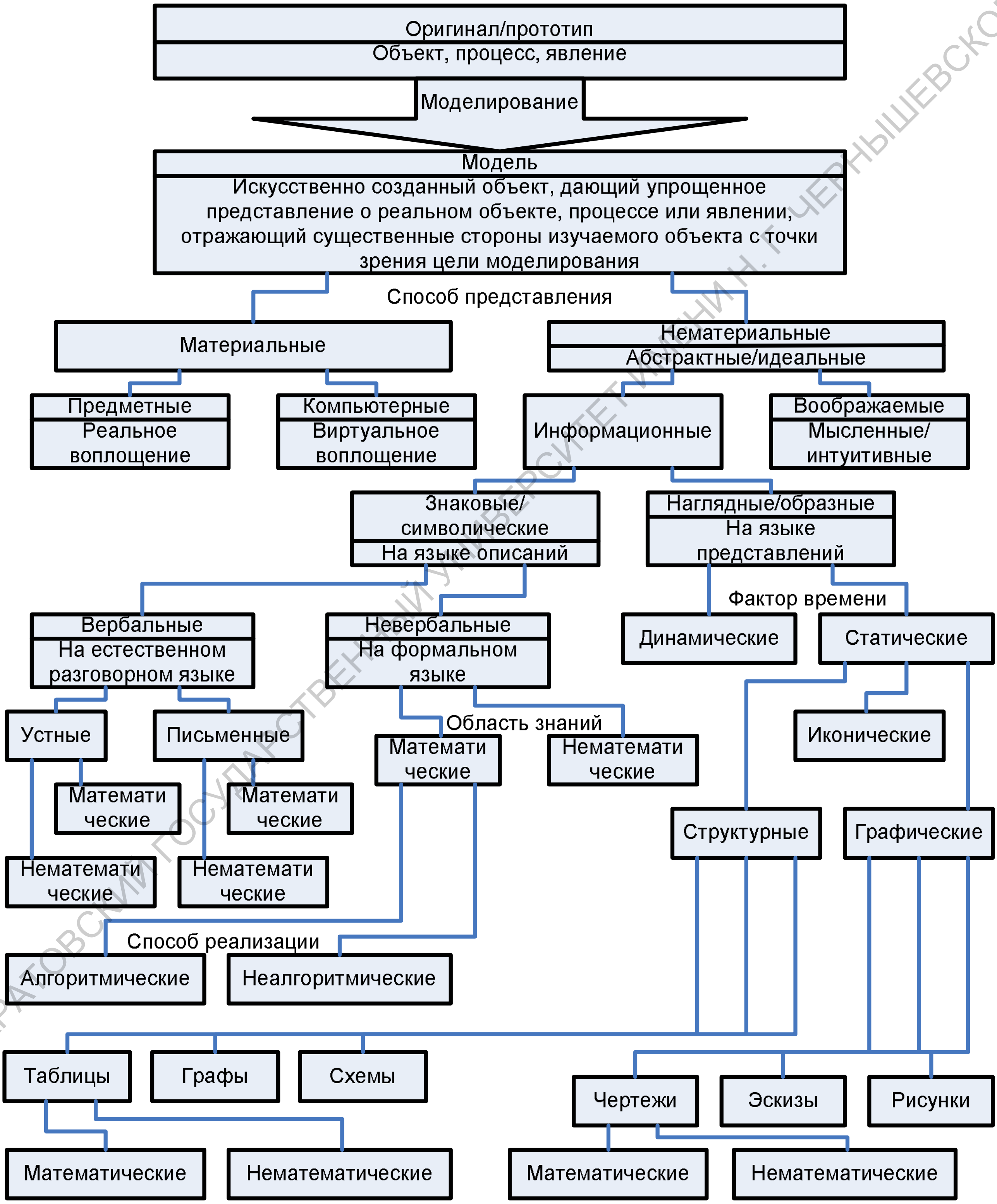


Схема 5. Классификация моделей

На примере решения задач на движение проиллюстрируем возможности информационного моделирования.

Решение задачи на движение требует последовательного построения несколько различных информационных моделей: наглядно-образных графических (чертеж, схема, граф) и структурных (таблица), а также формальных знаковых математических (арифметические выражения, уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств).

Наглядно-образная графическая модель позволяет лучше понять взаимосвязи и отношения, описанные в условии задачи, структурная модель (таблица) – определить наиболее удобный способ решения, знаковая математическая модель строится с целью получения ответа на поставленный вопрос.

Одной из особенностей задач на движение является то, что всякая такая задача требует обязательного анализа. Без предварительного анализа трудно определить, какой метод, и какая соответствующая знаковая математическая модель являются наиболее подходящими для решения данной задачи.

Перечислим основные требования, предъявляемые к схемам (наглядно-образным графическим моделям), составляемым по условию задач на движение:

(1) при движении по прямой расстояние принято обозначать отрезком;

(2) равные расстояния обозначаются равными отрезками;

(3) для обозначения суммы пройденных расстояний используются фигурные скобки;

(4) если в задаче описываются две (и более) ситуации, строятся две (и более) схемы;

(5) если в задаче описывается движение в одном направлении двух объектов, желательно разделять информацию об этих объектах, располагая ее в различных полуплоскостях относительно прямой, содержащей отрезок (модель пройденного пути);

(6) место (пункт отправления, встречи, прибытия) обозначают либо точкой на отрезке и соответствующей буквой, либо черточкой, либо флажком;

(7) время, затраченное на тот или иной отрезок пути, отмечается, как правило, над флажком, в случае, если объекты были в пути одинаковое количество времени или над каждым отрезком пути непосредственно, если участники движения затратили разное по количеству время на преодоление пути;

(8) стоянку можно обозначать выколотой точкой, под которой обозначается время, отведенное на стоянку,

(9) направление движения указывают стрелками;

(10) движение вслед изображается с использованием двух координатных лучей, располагающихся друг под другом;

(11) в задачах на движение по течению (против течения) реки расстояние желательно обозначать наклонной линией, при этом «вниз» по наклонной обозначается движение по течению реки и «вверх» – против течения. Потребность в использовании наклонной определяется необходимостью

сконцентрировать внимание обучаемых на изменении скорости объекта (имеющего собственную скорость) при его движении по реке. Кроме того, данный приём позволяет вести пропедевтическую работу по изучению основ векторной алгебры: если обозначить собственную скорость транспортного средства $\bar{v}$,скорость течения $\bar{v}_t$, то скорость объекта по течению определяется векторной суммой $\bar{v}+\bar{v}_t$, а против течения – разностью векторов $\bar{v}-\bar{v}_t$; поскольку векторы коллинеарные, то $\left|\bar{v}+\bar{v}_t\right|=\left|\bar{v}\right|+\left|\bar{v}_t\right|$ и $\left|\bar{v}-\bar{v}_t\right|=\left|\bar{v}\right|-\left|\bar{v}_t\right|$.

При решении задач на движение схемы выполняют ориентировочную роль, поскольку дают возможность одновременно «видеть» все связи между данными. Лучшему и быстрому осознанию сути явления, зафиксированного в схеме, помогает уменьшение количества перекодировок, которые потребуется делать при сопоставлении схемы с реальной ситуацией. Поэтому применяемая схема должна быть разумно сокращенной и упрощенной по сравнению с реальным явлением и в то же время наиболее естественной для конкретной задачи.

Графическая модель позволяет перейти к построению другой информационной наглядно-образной структурной модели – таблице. Целесообразно строить две таблицы: в первой – размещать информацию на языке задачи, во второй – ту же информацию представлять на алгебраическом языке.

Обратимся к объекту нашего исследования – задачам на движение. Таблица, являющаяся информационной моделью этого типа задач инвариантна по форме: состоит из четырёх столбцов. В первом содержится информация об объектах движения, во втором указывается скорость движения рассматриваемых объектов, в третьем – время движения, в четвёртом – пройденный путь (расстояние).

Сформулируем требования к составлению таблиц первого рода, то есть содержащих информацию на языке задачи:

(1) количество строк зависит от количества участников движения и количества ситуаций;

(2) при необходимости можно использовать сложные таблицы, содержащие объединённые ячейки и (или) «разбитые» ячейки;

(3) если рядом стоящие ячейки столбца содержат одинаковую информацию, то они подлежат объединению, если эти ячейки разделены и не содержат явной числовой информации – их равенство обозначают соединяющим отрезком с точками на обоих концах •——•;

(4) если ячейки столбца содержат информацию, связанную некоторым отношением, то существующую зависимость обозначают отрезком с точкой на одном конце (зависимое значение) и стрелкой на другом конце (независимое значение) •——→ и подписывают условие зависимости, например, *«? на 2 м <u>б.</u>»* или *«? в 2 раза <u>м.</u>»*;

(5) разность двух числовых значений, размещённых в смежных ячейках столбца, обозначают дугой со стрелками на двух концах ⟷, сумму двух

числовых значений, размещённых в смежных ячейках столбца, обозначают фигурной скобкой $\underbrace{\qquad\quad}$;

(6) в ячейке содержится либо число, либо вопрос, либо вопрос и условие зависимости, главный вопрос (требование) задачи обводится в овал ?, а ячейка, его содержащая «заливается» (выделяется цветом).

Требования к составлению таблиц второго рода, содержащих информацию на алгебраическом языке следующие:

(1) форма таблицы второго рода полностью соответствует форме таблицы первого рода, поэтому способ решения задачи с использованием таблиц первого и второго рода назовём *решением задачи с использованием таблицы наложений*;

(2) числовые величины переносятся из таблицы первого рода без каких-либо изменений;

(3) неизвестные величины записываются в виде арифметических действий или алгебраических выражений с переменной в соответствии с условиями зависимости и основной функциональной зависимостью ($s=v\cdot t$);

(4) наличие и количество переменных определяется наличием или отсутствием условий зависимости;

(5) если информация в ячейке получена двумя способами, то осуществляется разбиение ячейки по диагонали; на основе информации таких ячеек составляется уравнение;

(6) знаки суммы и разности двух величин (двусторонняя стрелка и фигурная скобка) в таблице первого рода предполагают трансформацию соответствующих ячеек таблицы второго рода;

(7) единицы измерений величин не указываются;

(8) возможно в правом верхнем углу указать ограничения, накладываемые не неизвестные величины;

(9) возможно в левом верхнем углу указывать порядок (этап) заполнения таблицы (например, $^{1)}$, $^{2)}$ и т.д.);

(10) при необходимости перевода единиц измерения величин, представленных в таблице первого рода разными наименованиями (например, *v=15км/ч, t=20мин, s–на500м* *м.*), в ячейки таблицы второго рода переносится равная исходной величина соответствующего наименования (например, *v=15км/ч,t=*$^{1}/_{3}$*ч,s–?на0,5км* *м.*), если зависимость указана в процентном отношении, ее переводят в десятичную дробь (например, «*на 30% б.*» в таблице первого рода обращается в «*в 1,3 раза б.*» в таблице второго рода);

(11) «заливкой» выделяется ячейка, содержащая информацию с требованием задачи (знак вопроса не ставится).

Решение задач с использованием таблицы наложений проиллюстрируем на конкретном примере **Задачи о мотоциклисте.** Из пункта А выехал велосипедист. Одновременно из пункта В, отстоящем от А на расстоянии 20 км, выехал мотоциклист. Скорость велосипедиста 12 км/ч, мотоциклиста – 16 км/ч. На каком расстоянии от пункта А мотоциклист догонит велосипедиста?

Первый этап построения табличной модели I рода			
Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В			
М			

Второй этап построения табличной модели I рода			
Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	*12 км/ч*	*?*	*?*
М	*16 км/ч*		*?*

В задаче рассматриваются два объекта, что предполагает наличие трёх строк таблицы первого рода: «Характеристики движения» (участники/ситуации – скорость – время – расстояние), «Велосипедист», «Мотоциклист». Составляется таблица 3×4. Поскольку время в пути одинаково для двоих участников движения, то следует объединить соответствующие ячейки столбца «Время» (1 этап).

Затем в таблицу (2 этап) вносятся два числовых значения: скорости – *12км/ч* и *16 км/ч*, то есть указываются, какие из выделенных величин известны, и расставляются знаки вопроса вместо всех остальных величин (указываются неизвестные величины).

Далее определяется зависимость между неизвестными величинами, что дополняет таблицу соотношением между пройденными расстояниями (3 этап). Можно выявить зависимость и между известными величинами, что дополнит таблицу соотношением между скоростями и определит ещё один способ решения задачи (4 этап). Выделяется главное требование (вопрос) задачи. Этим заканчивается этап анализа условия задачи.

Третий этап построения табличной модели I рода				
Участн.	Скорость	Время	Расстояние	
В	*12 км/ч*	*?*	*?*	*на 20 км б*
М	*16 км/ч*		*?*	

Четвёртый этап построения табличной модели I рода					
Участн.	Скорость		Время	Расстояние	
В	*12 км/ч*	*?*	*?*	*?*	*на 20 км б*
М	*16 км/ч*			*?*	

По содержанию таблицы первого рода составляется таблица второго рода: Цветом выделяется ячейка с требованием задачи, одним из трех возможных способов выбирается одно из неизвестных (обозначается буквой *x*), все остальные неизвестные величины выражаются через *x*. При этом возникает ситуация, когда информация в некоторой ячейке получена двумя способами (осуществляется разбиение ячейки по диагонали). На основе информации разбитой по диагонали ячейки составляется уравнение. Кроме того, возможен арифметический способ решения.

Табличная модель II рода Вариант I			
Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	*12*	*x*	*12x*
М	*16*		*12x+20* / *16x*

Табличная модель II рода Вариант II			
Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	*12*	*x:12* / *(x+20):16*	*x*
М	*16*		*x+20*

Табличная модель II рода Вариант III			
Участн.	Скорость	Время	Расстояние
В	*12*	*(x–20):12* / *x:16*	*x–20*
М	*16*		*x*

Табличная модель II рода Вариант IV					
Участн.	Скорость		Время	Расстояние	
В	*12*	*1) 16 –12=4*	*2) 20:4=5*	*3) 2·5=60*	*20*
М	*16*			–	

Итак, по результатам составления табличной модели **Задачи о мотоциклисте** возможно составление соответствующей знаковой математической модели данной задачи:

1 вариант. $12x+20=16x,\ x=5,\ 12x=60.$

2 вариант. $x:12=(x+20):16,\ 12(x+20)=16x,\ 4x=240,\ x=60.$

3 вариант. $(x–20):12=x:16,\ 12x=16(x–20),\ 4x=320,\ x=80;\ 80–20=60.$

4 вариант. *16 –12=4(км/ч) – скорость сближения; 20:4=5(ч) – понадобится М, чтобы «покрыть» разницу в 20 км; 12·5=60(км) – расстояние от А до встречи М и В.*

5 вариант. $12\cdot(20:(16–12))=60.$

На примере этой задачи можно сформулировать в явном виде и в дальнейшем исследовать проблему рациональности выбора неизвестных, для чего необходимо сравнение всех способов решения задачи (то есть наглядно-образных моделей (графическую и табличную), математической модели и тем решением, которое осуществляется в рамках составленной математической модели).

Тестовые задания (по 0,05 баллов)

901. В двух библиотеках было одинаковое количество книг. Через год в первой библиотеке число книг увеличилось на 50%, а во второй – в полтора раза. В какой библиотеке книг стало больше?

а) В первой библиотеке. б) Во второй библиотеке.
в) Книг стало поровну. г) Задача не определена.

902. Лыжник от озера до деревни шёл со скоростью 15 км/ч, а обратно – со скоростью 12 км/ч. Сколько времени ушло у него на обратную дорогу, если на весь путь туда и обратно лыжник затратил 3 часа?

Пусть x – время на обратную дорогу. Какое из уравнений является математической моделью задачи?

а) $15(3 – x) = 12x$ б) $^{15}/_{x} + {}^{12}/_{3–x} = 3$
в) $15x + 12(3 – x)= 3$ г) $15x = 12(3 – x)$

903. При покупке стиральной машины стоимостью 6500 рублей покупатель предъявил вырезанную из газеты рекламу, дающую право на 5% скидку. Сколько он заплатит за машину?

а) *325 рублей* б) *3250 рублей* в) *6175 рублей* г) *6495 рублей*

904. На первый курс института может быть принято 180 человек. Число поданных заявлений составило 120% от количества мест на курсе. Сколько заявлений было подано?

а) 36 б) 150 в) 216 г) 300

905. В классе 25 учащихся. При посадке деревьев в школьном саду каждая девочка посадила по 2 дерева, а каждый мальчик по 3 дерева. Всего было посажено 63 дерева. Сколько в классе девочек и сколько мальчиков?

Пусть в классе x девочек и y мальчиков. Какая система уравнений является математической моделью задачи?

а) $\begin{cases} x+y=25 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=63 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=25 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=63 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=25 \\ 3x+2y=63 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=25 \\ 2x+3y=63 \end{cases}$

906. Андрей старше Олега на 4 года, а Олег старше Бориса в полтора раза. Вместе им 36 лет. Сколько лет Борису?

а) 16 б) 12 в) 8 г) 6

907. На пост спикера парламента претендовали два кандидата. В голосовании приняли участие 252 депутата. Голоса между кандидатами распределились в отношении 2 : 7. Сколько голосов получил проигравший?

а) 280 б) 196 в) 128 г) 56

908. В книге 84 страницы. Во второй день каникул Саша прочитал в 2 раза больше страниц, чем в первый, а в третий – на 4 меньше, чем во второй. Сколько страниц прочитал Саша в каждый из этих дней?

Пусть x – количество страниц, прочитанных в первый день. Какое из уравнений является математической моделью задачи?

а) $x + {}^{x}/_{2} + ({}^{x}/_{2} - 4) = 84$ б) $x + 2x + (2x - 4) = 84$

в) $x + {}^{x}/_{2} + ({}^{x}/_{2} + 4) = 84$ г) $x + 2x + (2x + 4) = 84$

909. В танцевальной студии число девочек относится к числу мальчиков как 6:5. Сколько пар, в каждую из которых входят мальчик и девочка, могут одновременно танцевать, если всего в студии занимается 66 человек?

а) 36 б) 33 в) 30 г) 11

910. В две большие и три маленькие коробки помещается 38 карандашей, а в три большие и две маленькие коробки – 42 карандаша. Сколько карандашей в большой и маленькой коробках вместе?

а) 40 б) 30 в) 19 г) 16

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла)*</u>. Дана задача. Проанализируйте и укажите, какими методами можно ее решить. Какой метод является для данной задачи наиболее рациональным? Почему?

Пример такого анализа проиллюстрируем на следующей задаче.

Задаче про упаковку. Два автомата разной производительности при одновременном включении упакуют дневную норму коробок с соком за 12 часов. Если первый автомат будет включен 2 часа, а второй – 3 часа, то будет упаковано только 20% всех коробок. За какое время может упаковать дневную норму коробок каждый автомат, работая в отдельности?

<u>Решение</u>. Анализ данной задачи следует начинать с определения типа, к которому она относится. Это, так называемая, задача «на работу». Задачи этого вида имеют следующую структуру: *Производительность – время – объем работы*.

Таким образом, величины, указанные в задаче, связаны следующей формулой: [*Производительность*] ×·[*время*] = [*объем работы*].

Делаем <u>вывод</u>: задача решается либо по действиям, либо с помощью составления уравнения. Поскольку в условии задачи описано несколько ситуаций, решение задачи, возможно, потребует построения *системы уравнений*.

911. Из турбазы в одном направлении выходят три туриста с интервалом в 30 минут. Первый идет со скоростью 5 км/ч, второй – 4 км/ч. Третий турист догоняет второго, а еще через 4 часа догоняет первого. Найдите скорость третьего туриста.

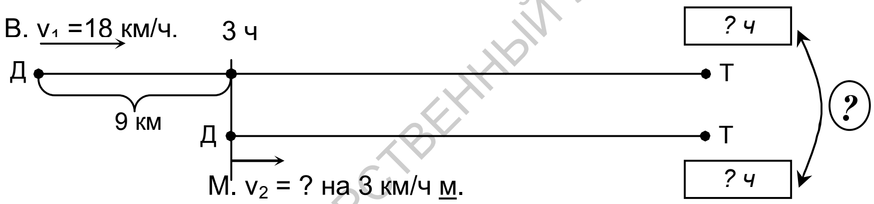
912. Незадолго до выборов социологический опрос показал, что 60% избирателей уже решили, за кого из двух кандидатов они будут голосовать. При этом 55% из них решили голосовать за кандидата А. Какой процент из тех, кто еще не определил своего избранника, должен голосовать за кандидата А, чтобы за него проголосовала, по крайней мере, половина избирателей?

913. Бригада косцов в первый день скосила половину луга и еще 2 га, а во второй день – четверть оставшейся части и последние 6 га. Найти площадь луга.

914. В очередь в буфет стоят Вика, Соня, Боря, Денис и Алла. Вика стоит впереди Сони, но после Аллы; Борис и Алла не стоят рядом; Денис не находится радом ни с Аллой, ни с Викой, ни с Борей. В каком порядке стоят дети?

915. В купе вагона один против другого стоят два дивана, на каждом из которых по четыре места. Из восьми пассажиров трое желают сидеть лицом в направлении движения поезда, два – спиной. Сколькими способами могут разместиться пассажиры, с учётом их пожеланий?

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Составить схему/чертеж к следующим задачам. В качестве образца рассмотрите схему к задаче **Кто раньше?** Велосипедист и всадник выехали из деревни на турбазу разными дорогами. Всадник ехал по дороге, которая была короче на 9 км, но со скоростью на 3 км/ч меньшей, чем велосипедист. Велосипедист ехал 3 часа со скоростью 18 км/ч. Кто из них раньше приедет на турбазу?



916. Из города А в город В, расстояние между которыми равно 300 км, выехал автобус. Через 20 минут навстречу ему из В в А выехал автомобиль и через 2 часа после выезда встретил автобус. С какой скоростью ехал автомобиль, если известно, что она была на 20 км/ч больше скорости автобуса?

917. Из пунктов А и В, расстояние между которыми 19 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода и встретились в 9 км от пункта А. Найдите скорость каждого, если известно, что пешеход, вышедший из А, шел со скоростью, на 1 км/ч большей, чем другой пешеход, и сделал в пути 30-минутную остановку.

918. Лодка может проплыть 15 км по течению реки и еще 6 км против течения за то же время, за какое плот может проплыть 5 км по этой реке. Найдите скорость течения реки, если известно, что собственная скорость лодки 8 км/ч.

920. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 8 км, одновременно вышли два лыжника. Скорость одного из них на 4 км/ч меньше скорости другого. Лыжник, который первым прибыл в В, сразу же повернул обратно и встретил другого лыжника через 45 минут после выхода из А. На каком расстоянии от пункта В произошла встреча?

921. Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В, расстояние между которыми 5 км. Через 30 мин туристы встретились и, не останавливаясь, продолжили путь с той же скоростью. Первый прибыл в пункт В на 25 минут позже, чем второй в пункт А. Определите скорость каждого туриста.

922. Один автомобиль проходит в минуту на 200 м больше, чем другой, поэтому, поэтому затрачивает на прохождение одного километра на 10 секунд меньше. Сколько километров в час проходит каждый автомобиль?

923. Плот проплывает путь из А в В за 12 часов, а моторная лодка – за 3 часа. За какое время моторная лодка преодолеет такое же расстояние в стоячей воде?

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Сформулируйте задачу по её информационной табличной модели.

924.		***v***		***t***		***S***
по течению	лодки	*8 км/ч*	*?*	*?*	*5 ч*	*?*
	течения	*2 км/ч*				
остановка				*3 ч*		*–*
против течения	лодки	*8 км/ч*	*?*	*?*		*?*
	течения	*2 км/ч*				

925.	***v***	***t***	***S***
В	*15 км/ч*	*? на30 мин б.*	*?*
М	*40 км/ч*	*? на 2ч м.*	
Время отхода		*?*	*–*

926.	**II**	**I**	**III**
В	*? в 3 р м*	*?*	*? в 3 р м*
Л	*? в 6 р м*	*?*	*? в 1,5 р м*
П	*? в 4 р м*	*?*	*? в 2 р м*
Всего	*2*	*?*	*3*

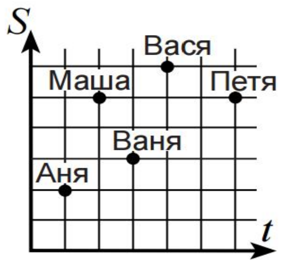
927. *Участники процесса*	*Производительность бригады*			*Время работы*		*Объем работы*	
	Один комбайн	*Кол-во комбайнов*	*Объем работы*				
I бригада	*?*	*?*	*?*	*?*	*? не более, чем на 1/20 от*	*1*	
II бригада		*?*	*?*	*?*			
один комбайн		*–*	*–*	*?*		*1*	
I бригада		*?*	*?*	*?*	*? 1/10 от*	*1/2*	*1*
II бригада		*?*	*?*	*?*		*1/2*	

928.	**I**		**II**		**I+II**	
	масса	**%**	**масса**	**%**	**масса**	**%**
Неизменное вещество	4) *0,2x*	***20%***	5) *0,5y*	***50%***	6) *0,2x+0,5y* / 7) *0,3(x+y)*	***30%***
Вода						
всего	1) *x*	***100%***	2) *y*	***100%***	3) *x+y*	***100%***
	в ? раз					

929.	**Я Б Л О К И**			
	СВЕЖИЕ		**СУШЁНЫЕ**	
	в %	масса		в %
неизменн.вещ-во	1) *20%*	4) *0,2*		2) *80%*
вода	***80%***	3) *0,8*	5) *0,05*	***20 %***
ВСЕГО	***100%***	***1***	6) *0,25*	***100%***
		На ?м. (в %) 7) *1 – 0,25 = 0,75 = 75%.*		

930.	**I**		**II**		**I + II**	
	в %	масса	в %	масса	в %	масса
кислота	***75%***	3) *0,75x*	***15 %***	6) *4,5*	***50%***	7) *0,75x+4,5*
вода	1) *25%*	2) *0,25x*	4) *85%*	5) *25,5*	***50%***	8) *0,25x+25,5*
ВСЕГО	***100%***	*x*	***100%***	***30 г***	***100%***	*x+30*

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Найдите ошибки в решении.



931. Придя в школу, каждый из пяти друзей отметил на координатной плоскости точку с такими координатами: время t, затраченное им на дорогу от дома до школы, и пройденное расстояние S. Кто из ребят шел быстрее всех?

Решение.

Быстрее всех шёл тот, кто затратил меньше времени. Найдём время каждого ученика. Аня – 1 минута, Маша – 2 минуты, Ваня –3 минуты, Вася – 4 минуты, Петя – 6 минут. Быстрее всех шла Аня.

Ответ. Аня.

932. Владелец маленького магазинчика заплатил 1000 рублей за упаковку авторучек. Когда он продал две трети этих авторучек, то вернул три четверти денег, затраченных на их покупку. Сколько денег он получит, продав всю упаковку?

Было – ? (шт.) по ? (руб./шт.), всего 1000 руб.

Продал – 2/3 от ↑ по ? (руб./шт.), всего 3/4 от ↑

Ск. денег – ?

Решение.

1) 1000 : 4 · 3 =750 (руб.) – стоят 2/3 упаковки.

2) 750 : 2 = 375 (руб.) – стоит 1/3 упаковки.

3) 375 · 3 = 1125 (руб.) – выручка за упаковку.

4) 1125 – 1000 = 125 (руб.) – доход с продажи.

Ответ. 125 рублей.

933. Через реку шириной 120 метров построен мост. Одна четверть длины моста расположена над левым берегом, одна четверть – над правым берегом. Чему равна длина моста?

Решение.

1) 120 : 4 = 30 (м) – длина четверти моста.

2) 120 + 30 + 30 = 180 (м) – длина всего моста.

Ответ. 180 м.

934. Две машины едут по асфальтированной дороге со скоростью 80 км/ч, сохраняя дистанцию 24 метра. Когда машина сворачивает на грунтовую дорогу, ее скорость резко падает до 50 км/ч. Каким будет расстояние между машинами на грунтовой дороге?

Ответ. Если две машины будут ехать по грунтовой дороге с одинаковой скоростью, то расстояние между ними не изменится, то есть останется прежним – 24 м.

935. Если Аня идёт в школу пешком, а обратно едет на автобусе, то всего на дорогу она тратит 1,5 ч. Если же она едет на автобусе в оба конца, то весь путь у неё занимает 30 мин. Сколько времени потратит Аня на дорогу, если и в школу и из школы она будет идти пешком?

Решение.

Пусть x – скорость Ани, а y – скорость автобуса, тогда

$(x + y)1,5 = 0,5 \cdot 2y$,

$1,5x = 0,5y$

$3x = y$

$0,5 \cdot 2 \cdot 3x = 3x$, *где 3(ч)* – время Ани в пути

Ответ. 3 часа

936. Вадим и Лёша спускались с горы. Вадим шёл пешком, а Лёша съезжал на лыжах в семь раз быстрее Вадима. На полпути Лёша упал, сломал лыжи и ногу и пошёл в два раза медленней Вадима. Кто первым спустится с горы?

Решение.

Пусть x – скорость Вадима, тогда $7x$ – скорость Лёши на лыжах, $0,5x$ – скорость Лёши с больной ногой. Вадим прошёл весь путь за $1/x$ часов, а Лёша – за $\dfrac{\frac{1}{2}}{7x}+\dfrac{\frac{1}{2}}{0,5x}$. Узнаем, какая дробь больше: $\dfrac{1}{x}$ или $\dfrac{\frac{1}{2}}{7x}+\dfrac{\frac{1}{2}}{0,5x}$.

$$\frac{7x}{2}+\frac{0,5x}{2}=3,75x.$$

Так как $x>1$ (из соображений здравого смысла), то $3,75x > 1/x$.

Ответ. Лёша будет первым.

937. Расстояние между Атосом и Арамисом, скачущими по одной дороге, равно 20 лье. За час Атос покрывает 4 лье, а Арамис – 5 лье. Какое расстояние будет между ними через час?

Ответ. 19 лье, так как оно сократиться на $(5 – 4)$ лье.

938. Я иду от дома до школы 30 минут, а мой брат – 40 минут. Через сколько минут я догоню брата, если он вышел из дома на 5 минут раньше меня?

Решение.

Если бы он вышел на 10 минут раньше, то я догнал бы его у школы, то есть через 30 минут.

Так как 5 в 2 раза меньше 10, то я догоню его в 2 раза быстрее, то есть через 15 минут.

Ответ. Через 15 минут.

939. Один путник шел первые полпути со скоростью 4 км/ч, а вторые полпути со скоростью 6 км/ч. Другой путник шел первую половину времени со скоростью со скоростью 4км/ч, а вторую половину времени со скоростью 6 км/ч. С какой постоянной скоростью должен был бы идти каждый из них, чтобы затратить на свое путешествие то же самое время?

	V	T		S	
I	*4 км/ч*	*s/8*	*s/8+s/12*	*s/2*	*s*
	6 км/ч	*s/12*		*s/2*	
	?	*s/8+s/12*		*s*	
II	*4 км/ч*	*t/2*	*t*	*2t*	*s*
	6 км/ч	*t/2*		*3t*	
	?	*t*		*2t+3t*	

Решение.

Пусть x – скорость I пешехода, а y – II пешехода, тогда, $\begin{cases} x \cdot \left(\dfrac{s}{8}+\dfrac{s}{12}\right)=s \\ y \cdot t = 2t+3t \end{cases}$.

Система из двух уравнений с четырьмя неизвестными имеет бесконечно много решений.

Ответ. задача не имеет решения.

940. Из пункта *A* в пункт *B* выехал велосипедист. Одновременно из пункта *B* в пункт *A* навстречу велосипедисту вышел пешеход. После их встречи велосипедист повернул обратно, а пешеход продолжил свой путь. Известно, что велосипедист вернулся в пункт *A* на 30 минут раньше пешехода, при этом его скорость была в 5 раз больше скорости пешехода. Сколько времени затратил пешеход на путь из *A* в *B*?

Решение.

До встречи велосипедист проехал 5 частей пути (5/6), а пешеход прошёл 1 часть пути (1/6), так как их скорости относятся как 5 : 1.

Пусть x – скорость пешехода, тогда $5x$ – скорость велосипедиста..Пешеход прошёл путь длины *1* за y часов (искомая величина), то есть $xy=1$. Велосипедист за $(y-0,5)$ часов преодолел $5x(y-0,5)$, что составляет 10/12 пути.

Составим и решим систему. $\begin{cases} x \cdot y = 1 \\ 5x(y-0,5)=\dfrac{10}{12} \end{cases}$; $\begin{cases} x \cdot y = 1 \\ 5-2,5x=\dfrac{10}{12} \end{cases}$; $\begin{cases} x \cdot y = 1 \\ 2,5x=5-\dfrac{10}{12} \end{cases}$;

$\begin{cases} x \cdot y = 1 \\ x=\dfrac{5}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} y=\dfrac{3}{5} \\ x=\dfrac{5}{3} \end{cases}$.

Ответ. 3/5 часа, то есть 36 минут.

<u>*Задачи I уровня (по 0,1 балла)*</u>. Разработайте информационную и разрешающую модель задачи.

941. Костя увидел своего друга Сережу, идущего по улице, побежал за ним и догнал за 3 минуты. Если бы в тот момент, когда Костя побежал, Сережа пошел ему навстречу со своей прежней скоростью, они встретились бы через 1 минуту. Сколько времени бежал бы Костя, если бы Сережа ждал его, стоя на месте?

942. Черепахи Чапа и Паша бегут десятиметровый кросс по одной дорожке, стартуя одновременно с одного старта. Чапа преодолевает каждый метр за две минуты, а потом две минуты отдыхает. Паша передвигается в два раза быстрее, но и отдыхает после каждого метра в два раза дольше. В скольких точках дистанции (кроме старта и финиша) обе черепахи побывают одновременно?

943. Катя и четыре ее подружки разделили между собой несколько конфет. В результате оказалось, что у всех девочек разное число конфет, а общее число конфет у любых трех девочек больше, чем общее число конфет у остальных двух. Какое самое маленькое число конфет может быть у Кати?

944. Гусеница выползла из своего домика в полдень и ползет по лугу, поворачивая после каждого часа направо или налево на 90º. За первый час она проползла 1 м, а за каждый следующий – на 1 м больше, чем за предыдущий. На каком наименьшем расстоянии от домика она могла оказаться в 7 часов вечера?

945. Семья Васи приехала на дачу на машине в 16.00. Если бы скорость, с которой они ехали, была на 25% больше, то они приехали бы в 14.30. В какое время они выехали из дома?

946. По круговой дорожке в одном направлении двигаются пешеход и велосипедист. Скорость велосипедиста на 75 % больше скорости пешехода. В скольких разных точках дорожки будут происходить обгоны?

947. У Леши часы спешат на 7 минут, а он думает, что они отстают на 8 минут. Леша посмотрел на свои часы и решил, что сейчас полдень. Который сейчас час?

948. Братья Вова и Миша ездят в школу на самокатах. Миша выезжает из дома в 8:00 и приезжает в 8:40. Вова выезжает на пять минут раньше и приезжает в школу на 15 минут позже Миши. В какое время Миша перегоняет Вову?

949. Команда из Пети, Васи и одноместного самоката участвует в гонке. Дистанция разделена на участки одинаковой длины, их количество равно 42, в начале каждого – контрольный пункт. Петя пробегает участок за 9 мин, Вася – за 11 мин, а на самокате любой из них проезжает участок за 3 мин. Стартуют они одновременно, а на финише учитывается время того, кто пришел последним. Ребята договорились, что один проезжает первую часть пути на самокате, остаток бегом, а другой – наоборот (самокат можно оставить на любом контрольном пункте). Сколько участков Петя должен проехать на самокате, чтобы команда показала наилучшее время?

950. Два туриста вышли одновременно из села А в село В. Когда первый турист прошел половину пути, второму осталось пройти 24 км, а когда второй прошёл половину пути, первому осталось пройти 15 км. Каково расстояние между А и В?

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Используя арифметический способ решите задачи.

951. Пловец плывёт вверх против течения Невы. Возле Дворцового моста он потерял пустую фляжку. Проплыв еще 20 минут против течения, он заметил потерю и вернулся догонять флягу; догнал он её возле моста лейтенанта Шмидта. Какова скорость течения Невы, если расстояние между мостами равно 2 км?

952. Два охотника отправились одновременно навстречу друг другу из двух деревень, расстояние между которыми 18 км. Первый шел со скоростью 5 км/ч, а второй – 4 км/ч. Первый охотник взял с собой собаку, которая бежала со скоростью 8 км/ч. Собака сразу же побежала навстречу второму охотнику, встретила его, тявкнула, повернула и с той же скоростью побежала навстречу хозяину, и так далее. Так она бегала до тех пор, пока охотники не встретились. Сколько километров она пробежала?

953. Для перевозки почты из почтового отделения на аэродром был выслан автомобиль. Самолёт с почтой приземлился раньше установленного срока, и привезённая почта была отправлена в почтовое отделение на попутной грузовой машине. Через 30 минут езды грузовая машина встретила на дороге автомобилем, который принял почту и, не задерживаясь, повернул обратно и прибыл в почтовое отделение на 20 минут раньше, чем обычно. На сколько минут раньше установленного срока приземлился самолёт?

954. Улитке нужно забраться на дерево высотой 10 метров. За день она поднимается на 4 метра, а за ночь сползает на 3. Когда она доползет до цели, если стартовала улитка утром в понедельник?

955. Моторная лодка в 9 часов отправилась вверх по течению реки, и в момент её отправления с лодки был брошен в реку мяч. В 9:15 лодка повернула и поплыла по течению. В котором часу лодка догонит мяч, если известно, что её собственная скорость оставалась неизменной?

956. Петя ехал из Петрова в Николаево, а Коля – наоборот. Они встретились, когда Петя проехал 10 км и еще четверть оставшегося ему до Николаева пути, а Коля проехал 20 км и треть оставшегося ему до Петрова пути. Какое расстояние между Петрово и Николаево?

957. Двое лыжников шли с постоянной скоростью 6 км/ч на расстоянии 200 метров друг от друга. Потом они стали подниматься в большую горку, и скорость упала до 4 км/ч. Потом оба лыжника съехали с горки со скоростью 7 км/ч и попали в глубокий снег, где их скорость стала всего 3 км/ч. Каким стало расстояние между ними?

958. Инженер ежедневно приезжает поездом на вокзал в 8 часов утра. Точно в 8 часов к вокзалу подъезжает автомобиль и отвозит инженера на завод. Однажды инженер приехал на вокзал в 7 часов утра и пошёл навстречу машине. Встретив машину, он сел в неё и приехал на завод на 20 минут раньше, чем обычно. Сколько времени инженер шёл пешком? Скорости автомобиля и инженера постоянны.

959. Вася шел от дома до автобусной остановки пешком со скоростью 4 км/ч, затем ехал на автобусе до школы со скоростью 30 км/ч и затратил на весь путь 1 час. Обратно из школы он ехал на автобусе со скоростью 36 км/ч и шел пешком от остановки до дома со скоростью 3 км/ч. На обратную дорогу он потратил 1 час 5 мин. Найти путь, который Вася проехал на автобусе, и расстояние от дома до остановки.

960. Группа туристов должна была прибыть на вокзал в 5 часов. К этому времени с турбазы за ними должен был прийти автобус. Однако, прибыв на вокзал в 3:10, туристы пошли пешком на турбазу. Встретив на дороге автобус, они сели в него и прибыли на турбазу на 20 минут раньше предусмотренного времени. С какой скоростью шли туристы до встречи с автобусом, если скорость автобуса 60 км/ч?

Задачи II уровня (по 0,15 баллов). В работах известных методистов и простых учителей математики предлагаются различные методы и способы решения сюжетных задач. Исследуйте предложенные методы и способы решения на рациональность. Решите задачи с использованием табличных моделей.

961. Из пункта А в пункт В одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 15 км. Найдите расстояние между пунктами А и В [А.В.Шевкин «Решайте задачи проще!»[1]].

Решение. Пусть половина расстояния АВ равна x км, тогда требуется найти $2x$. По смыслу задачи $x>15$. Когда первый прошел половину пути – x км, второй прошел $(2x – 24)$ км. Так как скорости постоянны, а время движения одинаково, то отношение скоростей первого и второго пешеходов равно $\frac{x}{2x-24}$. Когда же второй пешеход прошел половину пути – x км, первый прошел $(2x – 15)$ км. И в этом случае скорости постоянны, а время движения одинаково, поэтому отношение скоростей первого и второго пешеходов равно $\frac{2x-15}{x}$. Одно и то же отношение скоростей мы выразили двумя дробями, составим уравнение: $\frac{x}{2x-24}=\frac{2x-15}{x}$. Это уравнение имеет единственный корень $x=20$ больший 15, поэтому расстояние $2x$ между пунктами А и В равно 40 км.

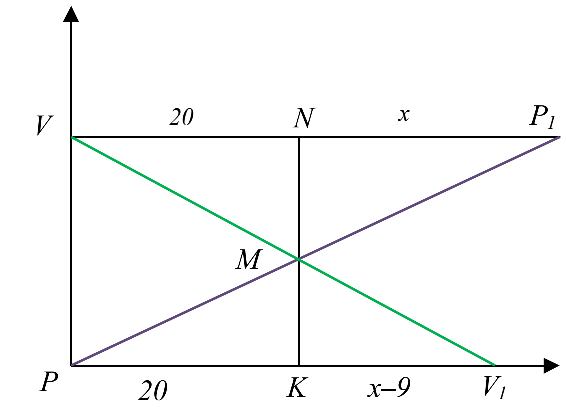
Ответ: 40 км.

962. Два поезда, выйдя одновременно из разных городов, встретились через 20 ч. За какое время каждый из поездов проходит расстояние между этими городами, если одному из них требуется для этого на 9 ч больше, чем другому. [А.В.Шевкин, статья «Решайте задачи проще!»[2]].

---

[1] Математика. Школа. Будущее [Электронный ресурс]: Сайт учителя математики А.В.Шевкина / Шевкин А.В. – Москва, 2008. – Режим доступа: http://www.shevkin.ru.

[2] Математика. Школа. Будущее [Электронный ресурс]: Сайт учителя математики А.В.Шевкина / Шевкин А.В. – Москва, 2008. – Режим доступа: http://www.shevkin.ru.



Решение. Пусть первый поезд был в пути x ч после встречи, тогда второй поезд был в пути $(x-9)$ часов после встречи. Построим схематически графики движения этих поездов: PP_1 и VV_1 соответственно. Моменту их встречи соответствует точка M пересечения графиков. Из условия задачи следует, что $NP_1 = x$, $KV_1 = x-9$, требуется найти $x+20$ и $x-9+20 = x+11$. Из подобия двух пар треугольников VMN и V_1MK, MPK и MP_1N получим пропорции: $x:20 = MN : MK$ и $MN : MK = 20 : (x-9)$, откуда $x : 20 = 20 : (x-9)$. Это уравнение имеет единственный положительный корень $x = 25$, поэтому первый поезд проходит расстояние между этими городами за $25+20 = 45$ ч, а второй – за $25+11 = 36$ ч.

Ответ: 45 ч и 36 ч.

963. Брат вышел из дома на 5 минут позже сестры вслед за ней, но шел в полтора раза быстрее, чем она. Через сколько минут после выхода брат догонит сестру? [Р.Г.Зиятдинов, учебное пособие «Решение текстовых задач»[1]].

Решение. До встречи брат и сестра прошли одно и то же расстояние, но сестра затратила на это на 5 минут больше, чем брат. Так как скорость брата в $1{,}5$ раза больше скорости сестры, то сестра шла в $1{,}5$ раза дольше, а разность скоростей (то есть скорость их сближения) составляет $1{,}5-1=0{,}5$*(раза)*, что соответствует 5 минутам. Имеем *0,5 раза – 5 мин*

1 раз – x мин

Находим x из пропорции: $x=5\cdot 1:0{,}5=10$*(мин)*.

Брат догонит сестру через 10 минут.

По-другому имеем *0,5 раза – 5 мин*

1,5 раза – y мин

Находим y из пропорции: $y=5\cdot 1{,}5:0{,}5=15$ *(мин)*. Сестра затратила на весь путь 15 минут. Тогда брат затратил на весь путь $15-5=10$ *(мин)*.

Ответ: через 10 минут.

964. Расстояние между двумя станциями А и В пассажирский поезд проходит на 45 мин быстрее, чем товарный. Определить расстояние между этими станциями, если известно, что скорость движения пассажирского поезда равна 48 км/ч, а товарного 36 км/ч. [Е.Ф.Фефилова, учебное пособие «Теория и методика обучения математике: систематизация знаний и умений по решению сюжетных задач»[2]]

---

[1] Зиятдинов Р.Г. Решение текстовых задач [Текст]: Учебное пособие / Р.Г.Зиятдинов. – Тверь: Твер.гос.ун-т, 2002. – С.63-64

[2] Фефилова Е.Ф. Теория и методика обучения математике: систематизация знаний и умений по решению сюжетных задач [Текст]: Учебное пособие / Е.Ф.Фефилова. – Архангельск: Поморский университет, 2004. – С.55.

Решение. Предположим, что расстояние между двумя станциями равно *144 км (144=НОК(48,36))*. Тогда получаем:

1)*144:48=3(ч)*.

2) *144:36=4(ч)*.

3) *4–3=1(ч),* а по условию разность составляет *45 мин = 3/4 ч*. Отсюда получаем отношение *1 : 3/4 = 144 : x;   x = 108*.

Ответ: *108* км.

965. Пароход по течению реки прошел путь между двумя пристанями 360 км и вернулся обратно. Собственная скорость парохода 18 км/час, а скорость течения реки – 2 км/час. Сколько времени затратил пароход на весь путь туда и обратно? [Л.М.Фридман, учебное пособие «Сюжетные задачи по математике»[1]].

Решение. В задаче заданы следующие значения величин:

(1) расстояние между пристанями (360 км);

(2) собственная скорость парохода (18 км/ч);

(3) скорость течения речи (2 км/ч);

(4) фактическая скорость парохода по течению реки (неизвестное значение);

(5) скорость парохода против течения реки (неизвестное);

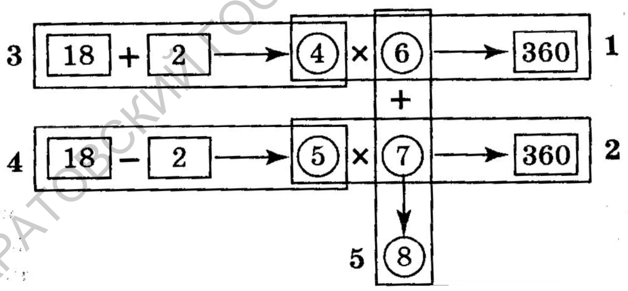
(6) время движения парохода по течению реки (неизвестное);

(7) время движения парохода против течения реки (неизвестное);

(8) общее время, затраченное пароходом на путь туда и обратно (искомое).

Эти восемь значений величин связаны между собой следующими соотношениями: 1-е, 4-е и 6-е значения связаны соотношением-зависимостью между расстоянием, временем движения и скоростью; 1-е, 5-е и 7-е значения связаны таким же соотношением зависимостью; 2-е, 3-е и 4-е значения связаны соотношением сложения частей в целое; 2-е, 3-е и 5-е значения связаны соотношением вычитания от целого его части; 6-е, 7-е и 8-е значения связаны соотношением сложения частей в целое.

Некоторые значения величин входят в качестве членов в несколько соотношений. Так, значение (1) входит в 1-е и во 2-е соотношения; значение (2) входит в 3-е и 4-е соотношения и т.д.



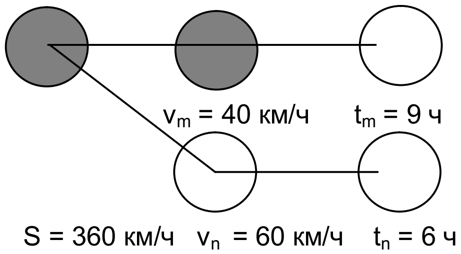
Это будет нагляднее, если построить структурную модель этой задачи.

Итак, *360:(18+2)+360:(18–2)=40,5(ч)*.

Ответ: 40,5 ч.

[1] Фридман Л.М. Сюжетные задачи по математике. История, теория. Методика [Текст]: Учебн. пособие для учителей и студентов педвузов и колледжей / Л.М.Фридман. – М.: Школьная Пресса, 2002 – (Библиотека журнала «Математика в школе», вып.15). – С. 113-114]

966. Путь от одной станции до другой товарный поезд прошел за 9 часов, а пассажирский за 6 часов. Найдите скорость пассажирского поезда, если скорость товарного поезда равна 40 км/ч. [Л.Н. Харламова, элективный курс «Решение задач с помощью графов»[1]].



Решение. Построим сетевой граф, на основании которого произведём вычисления: (1) $40 \cdot 9=360$, (2) $360:6=60$.

Ответ: 60 км/ч.

<u>*Задачи II уровня (по 0,15 баллов).*</u> *Олимпиадные задачи для младших подростков.*

967. Коля гулял после школы пять часов. Сначала он шел по горизонтальной дороге, затем поднялся в гору и, наконец, по старому маршруту возвратился назад в исходный пункт. Его скорость была 4 км/ч на горизонтальном участке пути, 3 км/ч при подъеме в гору и 6 км/ч – при спуске с горы. Какое расстояние прошел Коля?

968. Марья Петровна идет по дороге со скоростью 4 км/ч. Увидев пенёк, она садится на него и отдыхает одно и то же целое число минут. Михаил Потапович идёт по той же дороге со скоростью 5 км/ч, зато сидит на каждом пеньке в два раза дольше, чем Марья Петровна. Вышли и пришли они одновременно. Длина дороги – 11 км. Сколько на ней могло быть пеньков?

969. Однажды барон Мюнхгаузен, вернувшись с прогулки, рассказал, что половину пути он шёл со скоростью 5 км/ч, а половину времени, затраченного на прогулку, – со скоростью 6 км/ч. Не ошибся ли барон?

970. Володя бежит по круговой дистанции с постоянной скоростью. В двух точках дистанции стоит по фотографу. После старта Володя 2 минуты был ближе к первому фотографу, затем 3 минуты – ближе ко второму фотографу, а потом снова ближе к первому. За какое время Володя пробежал весь круг?

971. Зелёная и синяя лягушки находились на расстоянии 2032 метров друг от друга. Ровно в 12 часов дня зелёная лягушка прыгнула навстречу синей на 9 метров. Через минуту синяя лягушка прыгает навстречу зелёной на 8 метров. Еще через минуту зелёная лягушка снова прыгает на 9 метров, и так далее. Каждый прыжок происходит мгновенно. В какое время лягушки встретятся?

972. По неподвижному эскалатору человек спускается быстрее, чем поднимается. Что быстрее: спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору или спуститься и подняться по спускающемуся эскалатору? Предполагается, что все скорости, о которых идет речь, постоянны, причём скорости эскалатора при движении вверх и вниз одинаковы, а скорость человека относительно эскалатора всегда больше скорости эскалатора.

[1] Программа элективного курса по математике «Решение задач с помощью графов» для 8-9 классов в рамках предпрофильной подготовки [Текст] / Под редакцией Л.Н.Харламовой. – Волгоград: Учитель, 2007.

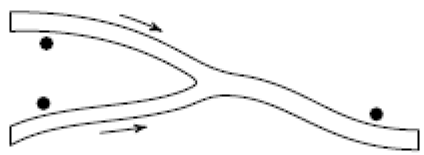
973. Два пешехода вышли на рассвете. Каждый шёл с постоянной скоростью. Один шёл из A в B, другой – из B в A. Они встретились в полдень и, не прекращая движения, пришли: один – в B в 4 часа вечера, а другой – в A в 9 часов вечера. В котором часу в тот день был рассвет?

974. Два парома одновременно отходят от противоположных берегов реки и пересекают её перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянны, но не равны. Паромы встречаются на расстоянии 720 метров от берега, после чего продолжают движение. На обратном пути они встречаются в 400 метрах от другого берега. Какова ширина реки?

975. По шоссе со скоростью 60 км/ч едет колонна машин длиной 300 метров. Проезжая мимо поста ДПС, каждая машина сбрасывает скорость до 4 км/ч. Какова будет длина колонны, когда все машины проедут пост ДПС?

976. Пройдя 4/9 длины моста, пешеход заметил, что его догоняет машина, еще не въехавшая на мост. Тогда он повернул назад и встретился с ней у начала моста. Если бы он продолжил свое движение, то машина догнала бы его у конца моста. Найдите отношение скоростей машины и пешехода.

977. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из B в A выехал велосипедист. Через час пешеход оказался ровно посередине между пунктом A и велосипедистом. Ещё через 15 минут они встретились, и каждый продолжил свой путь. Сколько времени потратил пешеход на путь из A до B? Скорости пешехода и велосипедиста постоянны.



978. На каждом из двух рукавов реки за километр до их слияния стоит по пристани, а еще одна пристань стоит в двух километрах после слияния. Лодка добралась от одной из пристаней до другой (неизвестно, какой) за 30 минут, от другой до третьей за 18 минут. За сколько минут она может добраться от третьей пристани до первой? Скорость течения реки постоянна и одинакова во всех ее частях. Собственная скорость лодки также постоянна.

979. В соревнованиях велогонщиков на круговом треке приняли участие Вася, Петя и Коля, стартовав одновременно. Вася каждый круг проезжал на две секунды быстрее Пети, а Петя – на три секунды быстрее Коли. Когда Вася закончил дистанцию, Пете осталось проехать один круг, а Коле – два круга. Сколько кругов составляла дистанция?

980. Одновременно из деревень А и Б навстречу друг другу вышли Аня и Боря (их скорости постоянны, но не обязательно одинаковы). Если бы Аня вышла на 30 минут раньше, то они встретились бы на 2 км ближе к деревне Б. Если бы Боря вышел на 30 минут раньше, то встреча состоялась бы ближе к деревне А. На сколько?

981. На середине дороги от Васиного дома до школы стоит светофор. В понедельник Вася попал на зелёный сигнал светофора. Во вторник он шел с той же скоростью, но простоял на светофоре 5 минут, а после этого увеличил скорость вдвое. И в понедельник, и во вторник он потратил на путь от дома до школы одинаковое время. Какое?

982. Расстояние между пунктами A и B равно 40 км. Пешеход вышел из A в 4 часа. Когда он прошёл половину пути, его догнал велосипедист, который выехал из A в 7:20. Через час после этого пешеход встретил другого велосипедиста, который выехал из B в 8:30. Скорости велосипедистов одинаковы. Определить скорость пешехода.

983. Товарный поезд, отправившись из Москвы в x часов y минут, прибыл в Саратов в y часов z минут. Время в пути составило z часов x минут. Найдите все возможные значения x.

984. Мальчик стоит на автобусной остановке и мёрзнет, а автобуса нет. Ему хочется пройтись до следующей остановки. Мальчик бегает вчетверо медленнее автобуса и может увидеть автобус на расстоянии 2 км. До следующей остановки ровно километр. Имеет ли смысл идти, или есть риск упустить автобус?

985. Вася и Петя соревнуются в решении задач. Им предложено 100 задач, причем за каждую решенную задачу тот, кто решил ее первым, получает 4 балла, а тот, кто решил ее вторым, получает 1 балл. Вася и Петя решили по 60 задач и вместе набрали 312 баллов. Сколько задач решены обоими мальчиками?

Задачи III уровня (по 0,2 балла). Решите задачи.

986. Дорожки в зоопарке образуют равносторонний треугольник, в котором проведены средние линии. Из клетки сбежала обезьянка. Её ловят два сторожа. Смогут ли они поймать обезьянку, если все трое будут бегать только по дорожкам, скорость обезьянки и скорости сторожей равны и они видят друг друга?

987. По окружности в одном направлении на равных расстояниях курсируют n поездов. На этой дороге в вершинах правильного треугольника расположены станции А, В и С (обозначенные по направлению движения). Ира входит на станцию А и одновременно Лёша входит на станцию В, чтобы уехать на ближайших поездах. Известно, что если они входят на станции в тот момент, когда машинист Рома проезжает лес, то Ира сядет в поезд раньше Лёши, а в остальных случаях Лёша – раньше Иры или одновременно с ней. Какая часть дороги проходит по лесу?

988. По шоссе мимо наблюдателя проехали «Москвич», «Запорожец» и двигавшаяся им навстречу «Нива»[1]. Скорости автомашин считаем постоянными. Известно, что когда с наблюдателем поравнялся «Москвич», то он был равноудален от «Запорожца» и «Нивы», а когда с наблюдателем поравнялась «Нива», то она была равноудалена от «Москвича» и «Запорожца». Докажите, что «Запорожец» в момент проезда мимо наблюдателя был равноудален от «Нивы» и «Москвича». В рассматриваемые моменты равноудаленные машины находились по разные стороны от наблюдателя.

[1] Марки российских автомобилей (XX век)

989. В центре квадратного пруда плавает ученик. Внезапно к вершине квадрата подошел учитель. Учитель не умеет плавать, но бегает в 4 раза быстрее, чем ученик плавает. Ученик бегает быстрее. Сможет ли он убежать?

990. По пустыне равномерно движется караван верблюдов длиной в 1 км. Всадник проехал от конца каравана к началу и вернулся к концу каравана. За это время караван прошел 1 км. Какой путь проехал всадник, если скорость его была постоянной?

991. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки. Сначала они бежали по улице до стадиона, а потом до финиша – три круга по стадиону. Всю дистанцию оба бежали с постоянными скоростями, и в ходе забега первый бегун дважды обогнал второго. Докажите, что первый бежал по крайней мере вдвое быстрее, чем второй.

992. Два поезда, в каждом из которых по 20 одинаковых вагонов, двигались навстречу друг другу по параллельным путям с постоянными скоростями. Ровно через 36 секунд после встречи их первых вагонов пассажир Вова, сидя в купе четвертого вагона, поравнялся с пассажиром встречного поезда Олегом, а еще через 44 секунды последние вагоны поездов полностью разъехались. В каком по счету вагоне ехал Олег?

993. У реки живет племя Мумбо-Юмбо. Однажды со срочным известием в соседнее племя одновременно отправились молодой воин Мумбо и мудрый шаман Юмбо. Мумбо побежал со скоростью 11 км/ч к ближайшему хранилищу плотов, и затем поплыл на плоту в соседнее племя. А Юмбо, не торопясь, со скоростью 6 км/ч, пошел к другому хранилищу плотов и поплыл в соседнее племя оттуда. В итоге Юмбо приплыл раньше, чем Мумбо. Река прямолинейна, плоты плывут со скоростью течения; эта скорость всюду одинакова и выражается целым числом км/ч, не меньшим 6. Каково наибольшее возможное её значение?

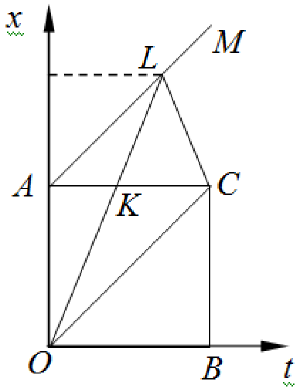
994. Из пункта A в другие можно попасть двумя способами: 1) выйти сразу и идти пешком; 2) вызвать машину и, подождав ее определённое время, ехать на ней. В каждом случае используется способ передвижения, требующий меньшего времени. При этом оказывается, что

если конечный пункт отстоит на	то понадобится на дорогу
1 км	10 мин
2 км	15 мин
3 км	17,5 мин

Скорости пешехода и машины, а также время ожидания машины, принимаются неизменными. Сколько понадобится времени для достижения пункта, отстоящего от A на 6 км?

995. Три гнома живут в разных домах на плоскости и ходят со скоростями 1, 2 и 3 км/ч соответственно. Какое место для ежедневных встреч нужно им выбрать, чтобы сумма времён, необходимых каждому из гномов на путь от своего дома до этого места (по прямой), была наименьшей?

996. *Творческое задание (1 балл).* Разработайте структуру информационной табличной модели, описывающей какой-либо класс геометрических задач «на вычисление длин, площадей, объемов».



997. *Творческое задание (1 балл).* Для решения задачи № 990 был построен чертёж, с учётом того, что скорость каравана равной 1.

OC – график движения хвоста, *AM* – график движения начала каравана. Расстояние *OA* равно 1 км.

Дайте интерпретацию другим отрезкам чертежа и решите задачу, используя необходимые положения геометрии.

Обобщите результат. Подберите ещё несколько задач, использующих изученный к решению.

998. *Творческое задание (1 балл).* Много олимпиадных задач описывает ситуации, связанные с движением стрелок часов. Например: «На стене висят двое правильно идущих совершенно одинаковых часов. Одни показывают московское время, другие – местное. Минимальное расстояние между концами их часовых стрелок равно m, а максимальное – M. Найдите расстояние между центрами этих часов».

Проведите систематизацию задач , связанных с движением стрелок часов. Выделите для более детального исследования один из классов и опишите подход к их решению.

999. *Творческое задание (1 балл).* К какому классу задач «на движение» можно отнести следующую задачу: «По прямому шоссе со скоростью 60 км в час едет машина. Недалеко от шоссе стоит параллельный ему 100-метровый забор. Каждую секунду пассажир машины измеряет угол, под которым виден забор. Докажите, что сумма всех измеренных им углов меньше 1100°». Приведите ещё несколько задач данного класса и укажите подход к их решению.

1000. *Творческое задание (1 балл).* К какому классу задач «на движение» можно отнести следующую задачу: «Дан выпуклый четырёхугольник *ABCD*. Пешеход Петя выходит из вершины *A*, идёт по стороне *AB* и далее по контуру четырёхугольника. Пешеход Вася выходит из вершины *A* одновременно с Петей, идёт по диагонали *AC* и одновременно с Петей приходит в *C*. Пешеход Толя выходит из вершины *B* в тот момент, когда её проходит Петя, идёт по диагонали *BD* и одновременно с Петей приходит в *D*. Скорости пешеходов постоянны. Могли ли Вася и Толя прийти в точку пересечения диагоналей *O* одновременно?». Приведите ещё несколько задач данного класса и укажите подход к их решению. Приведите ещё несколько задач данного класса и укажите подход к их решению.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Светлана Владимировна Лебедева

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА: ВВЕДЕНИЕ

На обложке: School teacher, Jan Havickszoon Steen (Ян Стен), Голландия, 1668

Работа издана в авторской редакции

Подписано в печать | Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$
Усл. печ. л. 9,5 | Гарнитура Times