Саратовский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского

В. В. Машников,

Практика решения задач на второе начало термодинамики

(Электронный вариант)

Методическое пособие для студентов

Кафедра прикладной физики
физического факультета

Саратов 2010

УДК 530.1 (075.8)

Машников Валерий Васильевич
канд.физ.-мат.н, доцент, Саратовский госуниверситет

Приведены примеры решения задач на второе начало термодинамики с использованием обобщённого алгоритма. Вывод основных соотношений для нахождения энтропии идеального газа в различных процессах приведен полностью из 2. Основное внимание уделено решению задач исследовательского характера, так как по мнению автора эти задачи содержат условия нескольких простых.

Краткая теория.

Второе начало термодинамики в энтропийной формулировке записывается как

$$TdS \geq cdT \qquad (1),$$

здесь T– абсолютная температура; S– энтропия системы; c–теплоёмкость.

Ограничимся рассмотрением равновесных процессов в идеальном газе, для которого молярная теплоемкость определяется соотношениями:

$C_v = \dfrac{R}{\gamma - 1}; \quad C_p = \gamma C_v = C_v + R, \qquad \gamma$ –показатель адиабаты.

Для политропного процесса обобщённого вида [1] $P^{\alpha} V^{\beta} T^{\sigma} = Const$ для одного моля газа уравнение (1) примет вид [2]:

$$dS=(C_v+GR)\,{}^{dT}\!/_{T} \qquad (2),$$

где $G=\dfrac{\alpha+\sigma}{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{1-n}$, n–показатель политропы, R– газовая постоянная.

Интегрирование (2) нужно провести по равновесному пути как по dT, так и по dV или по dP.

Для произвольного количества идеального газа получим изменение энтропии

$$\Delta S = \nu \frac{n-\gamma}{(\gamma-1)(n-1)} R \ln {}^{T_2}\!/_{T_1} = \nu \frac{n-\gamma}{\gamma-1} R \ln {}^{V_1}\!/_{V_2} = \nu \frac{n-\gamma}{n(\gamma-1)} R \ln {}^{P_2}\!/_{P_1}. \qquad (3).$$

Здесь ν – число молей газа; γ - показатель адиабаты.

Примеры решения задач.

Задача **№1.**

Пусть ν молей азота расширяют так, что его давление пропорционально объёму. Найти приращение энтропии при увеличении объёма в m раз.

Решение.

Для решения подобного типа задачи требуется два шага:

– найти показатель политропны n;

– подставить его в одно из соотношений (3).

В нашем случае

$$P^{\alpha} V^{\beta} T^{\sigma} = Const = P^1 V^{-1} \quad \Rightarrow P \sim V$$

имеем $\alpha = +1$, $\beta = -1$, $\sigma = 0$, $G = {}^1\!/_2$, $n = -1$.

Теперь можно записать как молярную теплоемкость

$$C = C_v + \frac{1}{2}R, \qquad \text{так и изменение энтропии:}$$

$$\Delta S = \nu\frac{-1-\gamma}{\gamma-1}R\ln V_1/V_2 = \nu\frac{\gamma+1}{\gamma-1}R\ln V_2/V_1 = \nu\frac{\gamma+1}{\gamma-1}R\ln m \qquad (4).$$

Задача **№2.**

Пусть процесс расширения одного моля одноатомного и двухатомного газов произошёл так, что их давления были пропорциональны объёмам. Каково отношение изменений энтропий этих газов, если увеличение их объёмов произошло в одинаковое число раз.

Решение.

Запишем изменение энтропии в форме (4), последовательно для одноатомного и двухатомного газов:

$$\Delta S_1 = \frac{\gamma_1+1}{\gamma_1-1}R\ln m, \qquad \Delta S_2 = \frac{\gamma_2+1}{\gamma_2-1}R\ln m.$$

Тогда искомое отношение равно

$$\Delta S_1/\Delta S_2 = \frac{\gamma_1+1}{\gamma_1-1}\cdot\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1} = 2/3.$$

Аналогично исследуется изменение энтропии в зависимости от изменения температуры или давления.

Задача **№ 3.**

Некоторый идеальный газ перевели из состояния 1 в состояние 2. Было замечено, что при изменении температуры газа на 1 К при постоянном объёме потребовалось q Дж тепла. В конце процесса объём газа увеличился в α раз, а давление уменьшилось в β раз. Найти, как изменилась температуры газа, параметры процесса и газа. (показатель политропы, теплоёмкость, показатель адиабаты и пр.), если энтропия системы изменилась на величину ΔS.

Решение.

В данном процессе изменяются все параметры состояния, следовательно, имеет место политропный процесс вида $PV^n = \mathrm{co}\nu st$.

Для начального и конечного состояний имеем:

$$P_1V_1 = \nu RT_1; \quad P_2V_2 = \nu RT_2.$$

Из этих соотношений легко находим изменение температуры газа:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2V_2}{P_1V_1} = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow T_2 = T_1\frac{\alpha}{\beta}.$$

Найдём теплоёмкость газа в этом процессе.

$$\Delta S = c\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = c\ln\frac{T_2}{T_1} = \tilde{n}\ln\frac{\alpha}{\beta}. \qquad \Rightarrow c = \frac{\Delta S}{\ln\alpha - \ln\beta}.$$

Для нахождения показателя политропы воспользуемся соотношениями (3)

$$\Delta S = \nu \frac{n-\gamma}{\gamma-1} R \ln V_1 / V_2 = \nu \frac{n-\gamma}{n(\gamma-1)} R \ln P_2 / P_1 . \Rightarrow \frac{1}{n} \ln \frac{P_2}{P_1} = \ln \frac{V_1}{V_2} \Rightarrow \frac{1}{\beta} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \Rightarrow n = \frac{\ln \beta}{\ln \alpha}.$$

Заметим, что это же выражение можно получить и из уравнения политропы.

Найдём количество газа.
По определению показателя политропы имеем:

$$n = \frac{c - \nu C_p}{c - \nu C_v} = \frac{c - \nu C_v - \nu R}{c - \nu C_v} = \frac{c - q - \nu R}{c - q} \Rightarrow \nu = \frac{(c-q)(1-n)}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{\Delta S}{\ln \alpha / \beta} - q\right)\left(1 - \frac{\ln \beta}{\ln \alpha}\right)$$

Здесь $\nu = \frac{m}{\mu}$ количество газа в молях.

В принципе, можно определить теперь и массу газа, если бы была задана его молярная масса или его химическая формула.

Найдём показатель адиабаты газа.

Из условия задачи $q = \nu C_v = \nu \frac{R}{\gamma - 1} \Rightarrow \gamma = \frac{\nu R + q}{q}$.

Задача **№4**

Теплоемкость некоторой термодинамической системы зависит от температуры как $\tilde{n} = \beta T^3$ (Зад. 2.149 З). Найти зависимость энтропии от температуры. Рассмотрим более общий случай $\tilde{n} = \alpha + \beta T^n$.

$$dS = c\frac{dT}{T} \Rightarrow dS = (\alpha + \beta T^n)\frac{dT}{T} \Rightarrow S(T) - S(T_0) = \alpha \ln T - \alpha \ln T_0 + \beta \frac{1}{n}(T^n - T_0{}^n).$$

Полагая в задаче 2.149 $\alpha = 0; n = 3$ и энтропию $S(T_0) = \alpha \ln T_0 + \beta \frac{1}{n} T_0{}^n$, получим

$$S(T) = \beta \frac{1}{3} T^3.$$

Задача **№5**

Задан закон изменения энтропии как функции параметров состояния термодинамической системы. Найти изменения самих параметров состояния, теплоёмкости, работу, изменение внутренней энергии, количество полученной теплоты и пр.

2.146 З. Один моль идеального газа α, C_v заданы .Энтропия меняется как

$$S = \alpha T + C_v \ln T. \qquad (1)$$

1. Найдём, как зависит температура газа от его объёма, если начальные параметры состояния V_0 и T_0.

Возьмём дифференциал от (1):

$$dS = \alpha dT + C_v \frac{dT}{T} = \frac{dQ}{T} = C_v \frac{dT}{T} + \frac{PdV}{T} \Rightarrow \frac{PdV}{T} = \alpha dT = \frac{RT}{V}\frac{dV}{T} \Rightarrow R \ln \frac{V}{V_0} = \alpha (T - T_0)$$

$$T = T_0 + \frac{R}{\alpha} \ln \frac{V}{V_0}$$

2. Найдём теплоёмкость.

$$TdS = CdT \Rightarrow T\alpha dT + C_v \frac{dT}{T} T = CdT \Rightarrow C = C_v + \alpha T$$

Теперь легко найти все величины, применяя первое начало термодинамики.

3. Количество теплоты:

$$\Delta Q = \int_{T_0}^{T} CdT = C_v (T - T_0) + \alpha \frac{T^2 - T_0^2}{2}.$$

4. Найдём работу газа и изменение внутренней энергии:

$$A = \int (C - C_v) dT = \frac{\alpha}{2}(T^2 - T_0^2) \qquad \Delta U = C_v (T - T_0)$$

Применим метод обобщения к решению обратной задачи: по заданной энтропии найти уравнение процесса в общем случае Для одного моля газа

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV = C_v \, dT/T + R\frac{dV}{V} \Rightarrow d\left[S - R\ln(VT^{C_V/R}) \right] = 0.$$ Тогда

$$VT^{C_V/R} \exp(-S/R) = const. \qquad (5),$$

будет одном из уравнений равновесного процесса.

Задача **№6** Правильность формулы (5) проверим на задаче 2.146 [3]

Энтропия меняется как $S = \alpha T + C_V \ln T$, здесь α - положительная постоянная.

Найти, уравнение процесса и зависимость температура газа от его объёма, если начальные параметры состояния V_0 и T_0.

Подставив значение энтропии в(5), будем иметь

$$VT^{C_V/R} \exp(-\frac{\alpha T + C_V \ln T}{R}) = V \exp(-\frac{\alpha T}{R}) = const = V_0 \exp(-\frac{\alpha T_0}{R}). \qquad (6).$$

Получили уравнение процесса в переменных V, T:

$V \exp(-\frac{\alpha T}{R}) = const$ Из начальных условий находим постоянную:

$const = V_0 \exp(-\frac{\alpha T_0}{R}).$

Логарифмируя соотношение (6), получим:

$$\ln V - \frac{\alpha}{R} T = \ln V_0 - \alpha/R \, T_0 \Rightarrow T = T_0 + \frac{R}{\alpha} \ln \frac{V}{V_0}.$$

Задача **№7**

Один моль идеального газа с известной теплоёмкостью C_v совершает процесс, в котором его энтропия S зависит от температуры как $S = \alpha/T$,где α – известная постоянная Температура газа изменилась от T_1 до T_2 (2.153, [3]) Найти:

а) уравнение процесса в переменных V, T;
б) молярную теплоёмкость;
в) количество тепла, сообщённое газу;
г) работу совершенную газом.

Решение.

Формула (5) позволяет сразу получить искомое уравнение процесса:

$$V\,T^{C_v/R}\exp(-\alpha/RT) = Const.$$

б) молярная теплоёмкость $TdS = CdT \Rightarrow C = T\dfrac{dS}{dT} = -\dfrac{\alpha}{T}.$

в) $\Delta Q = \int\limits_{T_1}^{T_2} CdT = \alpha \ln\dfrac{T_1}{T_2}.$

г) А$= \int\limits_{T_1}^{T_2}(C - C_v)dT = \alpha \ln\dfrac{T_1}{T_2} + C_v(T_1 - T_2).$

Предлагаемый метод решения и исследования задач на второе начало термодинамики, по нашему мнению, будет полезен для более глубокого понимания студентами этой темы в курсе общей физики.

Библиографический список.

1. Машников В.В. и др. Вопросы прикладной физики. Саратов.2003. Вып.9.С.30-31.
2. Машников В.В., Никитин А.А., Вопросы прикладной физики. Саратов,2005.Вып.12. С.50-51.
3..Иродов И.Е. Задачи по общей физике.М.1988.