ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

А.И. Зинина

В.И. Копнина

Численные методы линейной и нелинейной алгебры

Учебное пособие

Саратов

2016

Пособие предназначено для проведения лабораторных занятий по дисциплине "Численные методы". В учебном пособии рассмотрены уравнения и системы линейных и нелинейных уравнений. Приводятся примеры и задания для лабораторного практикума. Учебное пособие адресовано студентам, обучающимся по направлению 01.03.03 – Механика и математическое моделирование. От читателя требуются знания основ языков программирования, основ элементов высшей алгебры.

Содержание

Глава 1. Численные методы решения нелинейных уравнений с одним неизвестным.

Цель работы. Знакомство с некоторыми приближенными методами решения одного нелинейного уравнения и с их численной реализацией на ПК.

Предварительные замечания. В вычислительной практике часто приходится находить корни нелинейных уравнений вида:

$$F(x) = 0, \tag{1.1}$$

где $F(x)$ – некоторая непрерывная функция.

Нелинейные уравнения можно разделить на две группы – алгебраические и трансцендентные. Алгебраические уравнения содержат только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). Так, например, многочлен есть целая алгебраическая функция. Уравнения, которые содержат другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и т.п.), являются трансцендентными.

Методы решения нелинейных уравнений делятся на точные и итерационные. Точные методы позволяют получить корни уравнения (1.1) в результате выполнения конечного числа арифметических действий. Другими словами, эти методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения. Однако большинство нелинейных уравнений нельзя решать так просто. Для их решения используются итерационные (численные или приближенные) методы решения. При их использовании точные значения корней уравнения (1.1) получаются в результате выполнения бесконечного числа арифметических операций. Реализация численных методов состоит из двух этапов: 1) отыскание приближенного значения корня или содержащего его отрезка; 2) уточнение приближенного значения корня.

Приближенное значение корня (нулевое или начальное приближение) можно найти из физических соображений, или другими способами. Например, найти два значения x: a и b, в которых функция $F(x)$ будет принимать значения разных знаков, т.е. $F(a)\cdot F(b)<0$. В этом случае между a и b есть по крайней мере одно значение x, для которого $F(x)=0$. В качестве этого значения x приближенно можно взять, например, значения $x_0 = x_* = \dfrac{a+b}{2}$.

Итерационные методы состоят в последовательном уточнении начального приближения x_0. Каждый такой шаг называется итерацией. В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ Если при этом с увеличением n значения x_n приближаются к точному решению уравнения (1.1), то говорят, что данный итерационный процесс сходится.

Рассмотрим некоторые численные методы решения трансцендентных уравнений. Эти методы могут использоваться и при решении алгебраических уравнений.

1. 1. Метод деления отрезка пополам (метод бисекций).

Метод бисекций является одним из самых простых методов решения нелинейных уравнений вида $F(x)=0$. Главным его достоинством является то, что он всегда сходится. Недостатком этого метода является то, что он медленный.

Алгоритм рассматриваемого метода может быть следующим.

1. Пусть найден отрезок $[a,b]$, который содержит начальное приближение x_0 к корню уравнения (1.1).

2. За x_0 возьмем середину $[a,b]$, т.е. вычисляем

$$x = x_0 = \frac{a+b}{2} \tag{1.2}$$

При этом из отрезка $[a,b]$ получилось два отрезка $[a,x_0]$ и $[x_0,b]$.

3. Исследуем знак $F(x)$ на концах отрезков $[a,x]$ и $[x,b]$, т.е. вычислим значения $F(a)$, $F(x)$, $F(b)$.

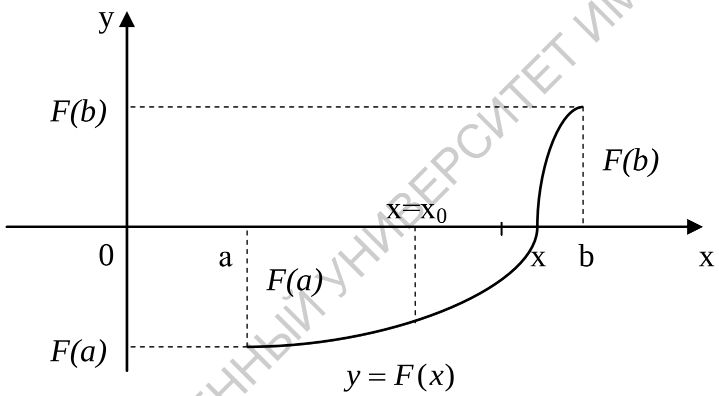
4. Выберем теперь отрезок, на концах которого $F(x)$ имеет разные знаки, другой отрезок отбросим.

5. Выбранный отрезок обозначим через $[a,b]$.

6. Перейдем к п. 2.

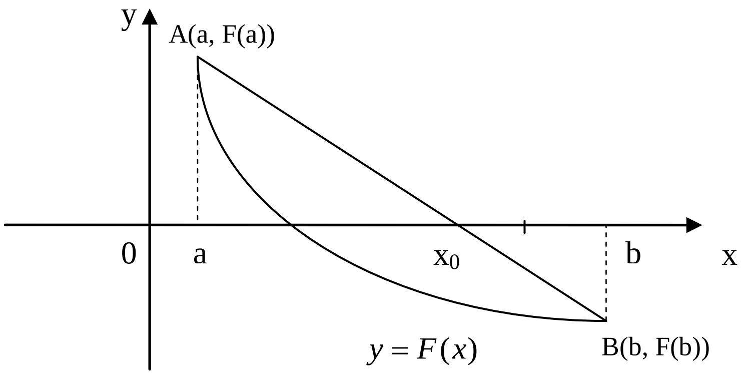
Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока значение функции $F(x)$ после n-ой итерации не станет меньше по модулю, чем некоторое $\varepsilon > 0$, т.е. пока $|F(x)| < \varepsilon$, где ε – очень маленькое положительное число (точность, с которой надо решить уравнение (1.1)). Можно закончить счет и тогда, когда длина очередного отрезка $[a,b]$ станет меньше ε.

Дадим геометрическую интерпретацию метода бисекций и приведем его блок-схему.



В данной блок-схеме 1 сужение отрезка $[a,b]$ происходит путем замены границы a или b на текущее значение корня x. При этом значение $F(a)$ вычисляется один раз, т.к. нам нужен лишь знак функции $F(x)$ на левой границе, а он в процессе итераций не меняется.

1. 2. Метод хорд (метод секущих).



Пусть найден отрезок $[a,b]$, где уравнение $F(x)=0$ имеет корень. Для определенности будем считать, что $F(a)>0$, а $F(b)<0$. В данном методе процесс итераций состоит в том, что в качестве приближений к корню уравнения (1.1) принимаются значения $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ точек пересечения хорды с осью абсцисс.

Сначала запишем уравнение хорды AB, как прямой, проходящей через две точки $A(a, F(a))$ и $B(b, F(b))$.

$$\begin{cases} AB: \quad \dfrac{y-F(a)}{F(b)-F(a)} = \dfrac{x-a}{b-a} \\ y=0 \end{cases}.$$

Тогда значение x_0, соответствующее точке пересечения хорды AB с осью Ox, будет

$$x = x_0 = a - F(a)\cdot\frac{b-a}{F(b)-F(a)} \qquad (1.3)$$

Блок-схема метода хорд аналогична блок-схеме метода бисекций с той лишь разницей, что в четвертом блоке нужно вместо формулы $x=\dfrac{a+b}{2}$ записать формулу (1.3). Кроме того, в блок-схему необходимо ввести операторы, вычисляющие значения $F(x)$ на границах новых отрезков.

Метод хорд в ряде случаев дает более быструю сходимость, чем метод деления отрезка пополам. Метод хорд, так же как и метод бисекций всегда сходится.

Пример. Корень уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ изолирован в отрезке [0;2], причем $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = 5 > 0$, однако на этом отрезке необходимые для применения метода хорд условия не выполняются, так как $f'(x) = 3x^2 - 1$ меняет знак в точке $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, а $f''(x) = 6x = 0$ при $x = 0$.

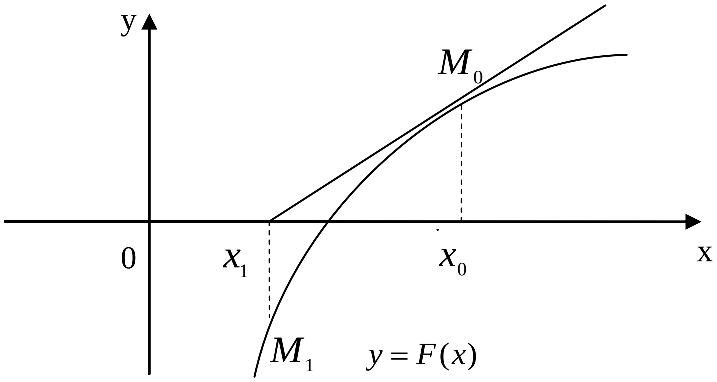
Легко проверить, что на более узком отрезке изоляции [1;2] для уточнения корня применима формула (1.3) с $x_0 = 1$.

Запишем рекуррентную формулу для вычисления значения x_1:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(2 - x_n)\left(x_n^3 - x_n - 1\right)}{6 - x_n^3 + x_n}.$$

Подставив $x_0 = 1$ и округлив результат вычисления до трех значащих цифр, получим $x_1 = 1{,}17$.

1.3. Метод Ньютона (метод касательных).



Этот метод в отличие от метода хорд на k-ой итерации вместо построения хорды требует построить касательную к кривой $y = F(x)$ при $x = x_к$, при этом за следующее приближение $x_{к+1}$ принимается точка пересечения этой касательной с осью Ох. Пользуясь этим методом не обязательно знать отрезок $[a,b]$, где содержится корень уравнения $F(x) = 0$, а достаточно лишь найти некоторое начальное приближение к корню $x = x_0$.

Запишем уравнение касательной к кривой $y = F(x)$ в точке $M_0(x_0, F(x_0))$

$$y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0) \tag{1.4}$$

Положим здесь $y = 0$, тогда x будет равен x_1.

$$-F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0)$$

и найдем отсюда

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \tag{1.5}$$

-следующее приближение к корню x уравнения (1.1).

Аналогично можно найти и следующие приближения

$$x_{к+1} = x_к - \frac{F(x_к)}{F'(x_к)}, \tag{1.6}$$

здесь $к = 0,1,2,...,$ и $F'(x_k) \neq 0$.

Вычисления по формуле (1.6) надо вести до тех пор, пока

$$|F(x_{k+1})| \tag{1.7}$$

не станет меньше $\varepsilon > 0$ или не будет выполняться условие

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \tag{1.8}$$

Пример. Найти методом касательных приближений приближение x_1 к корню из отрезка [1;2] уравнения $x^3 - x - 1 = 0$. Поскольку $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$, $f''(x) = 6x > 0$ на отрезке [1;2], выбираем $x_0 = 2$. Рекуррентная формула: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}$. Подставим в правую часть x_0 и после округления результата до трех значащих цифр получим $x_1 = 1,55$.

1. 4. Модифицированный метод Ньютона.

Чтобы уменьшить количество арифметических операций на каждом шаге итераций в вычислительной практике для решения уравнений вида (1.1) часто используют модифицированный метод Ньютона. Отличие этого метода от метода Ньютона состоит в том, что в рабочей формуле (1.6) вместо величин $F'(x_k)$, стоящей в знаменателе, используют величину $F'(x_0)$, которая не зависит от номера итерации и может быть вычислена заранее всего один раз. Таким образом, рабочая формула модифицированного метода Ньютона имеет вид

$$x_{\kappa+1} = x_\kappa - \frac{F(x_\kappa)}{F'(x_0)},\ \kappa = 0,1,2,..., \tag{1.9}$$

Трудность в использовании метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона состоит в выборе начального приближения, которое обязательно должно принадлежать некоторой окрестности корня решаемого уравнения. Поэтому иногда целесообразно применить смешанный алгоритм. Он состоит в том, что сначала применяется всегда сходящийся метод (например, метод деления отрезка пополам или метод хорд), а после некоторого числа итераций – быстро сходящийся метод Ньютона.

1.5. Метод простой итерации.

При использовании этого метода исходное нелинейное уравнение (1.1) записывается в виде

$$x=\varphi(x) \tag{1.10}$$

Пусть начальное приближение к корню уравнения (1.10) известно и равно

$$x=x_0 \tag{1.11}$$

Подставим (1.11) в правую часть (1.10) и получим

$$x_1=\varphi(x_0) \tag{1.12}$$

Подставляя (1.12) в правую часть (1.10), получаем

$$x_2=\varphi(x_1) \tag{1.13}$$

и т.д.

Таким образом, рабочая формула метода простой итерации имеет вид

$$x_{\kappa+1}=\varphi(x_\kappa),\ \kappa=1,2,3,..., \tag{1.14}$$

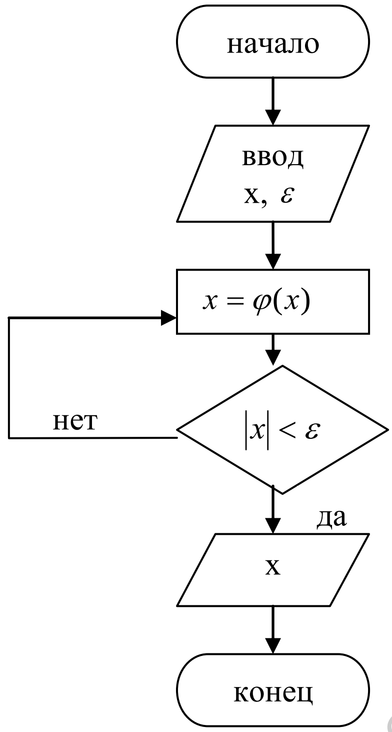
Счет по формуле (1.14) проводить до тех пор, пока не будет выполняться условие

$$|x_{\kappa+1}-x_\kappa|<\varepsilon,\ \text{или}\ |x_{\kappa+1}|<\varepsilon \tag{1.15}$$

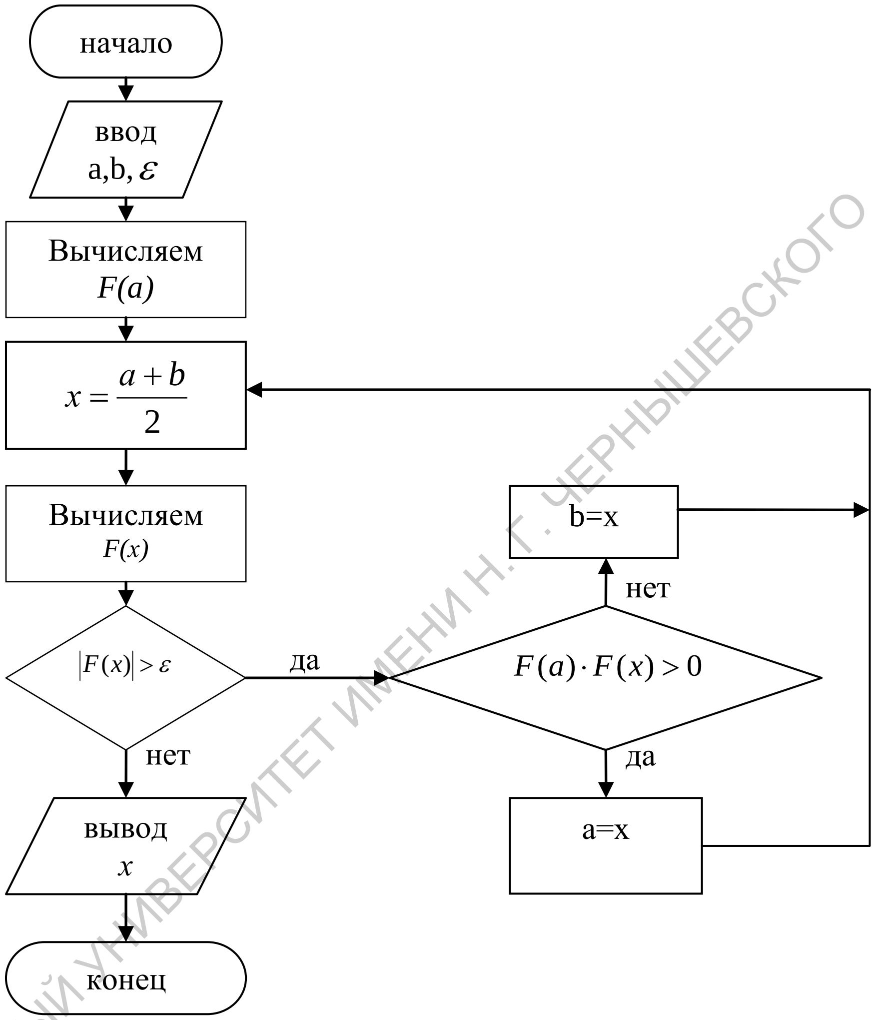
Достаточным условием сходимости метода простой итерации является условие $|\varphi'(x_0)|<1$.

Блок-схема метода простой итерации может быть следующей.

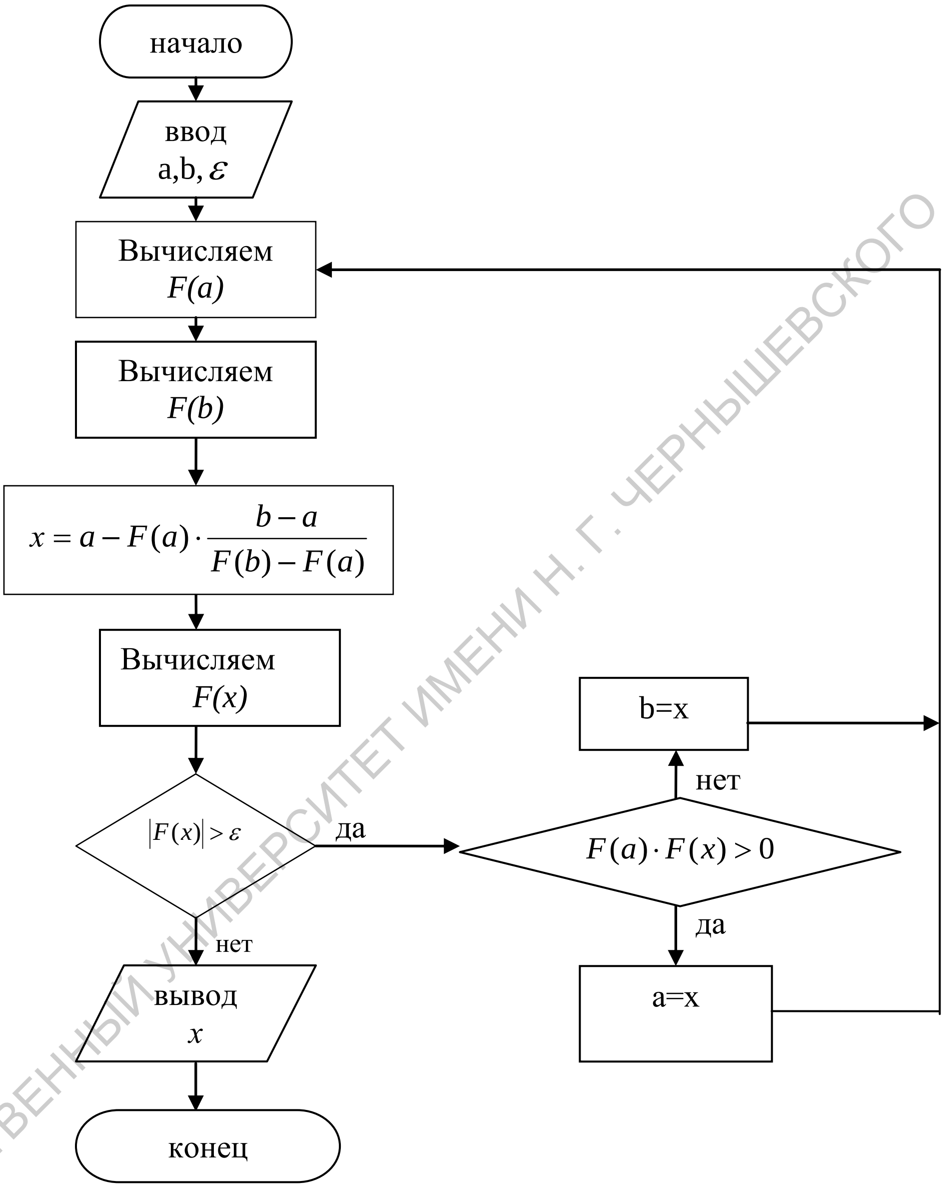
Блок-схема (метод простой итерации)



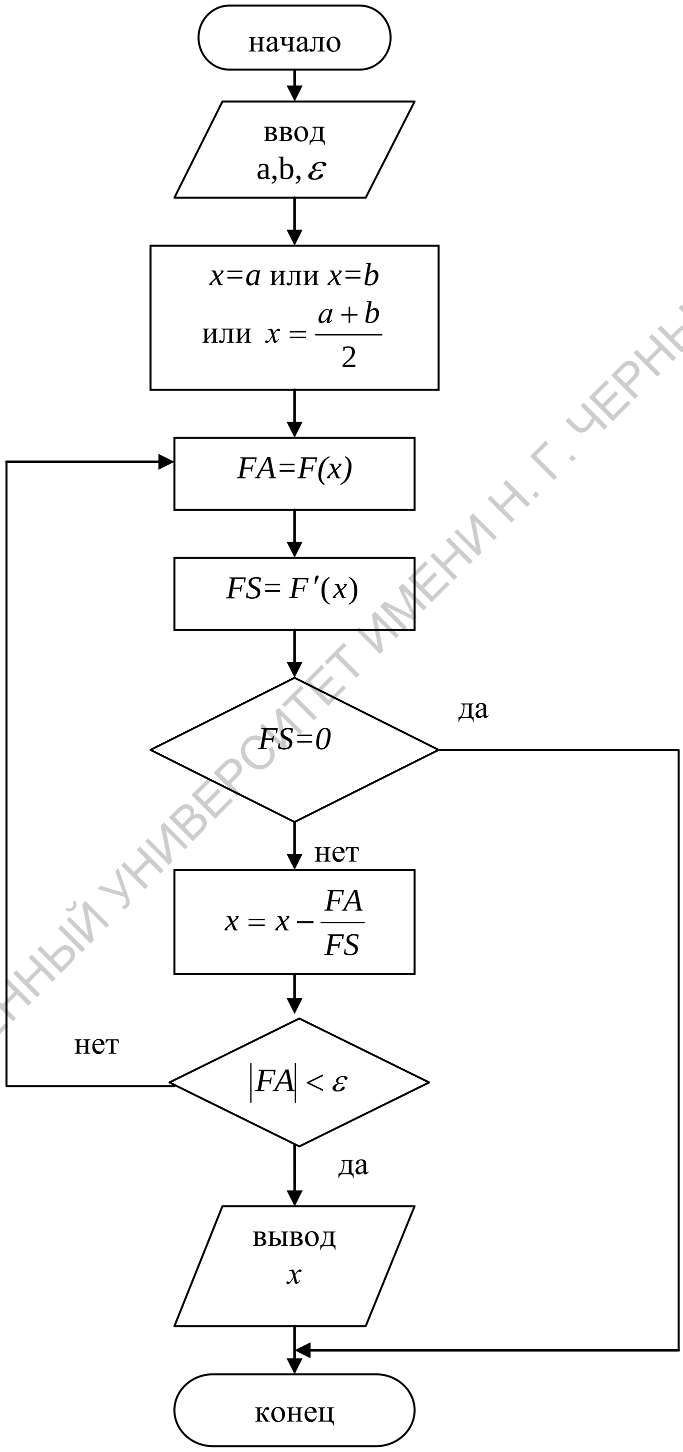
Блок-схема (метод бисекций)



Блок-схема (метод секущих)



Блок-схема (метод касательных)



Задания.

Во всех заданиях уточнить действительные корни уравнений с заданной точностью ε одним из описанных выше методов.

1. $x=\sin x,\ x_0\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right],\ \varepsilon=10^{-3}$

2. $x=\sin x,\ x_0\in\left[-\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{3}\right],\varepsilon=10^{-3}$

3. $x=\sin x,\ x_0\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right],\varepsilon=10^{-3}$

4. $x=\cos x,\ x_0\in\left[\frac{\pi}{6},\pi\right],\varepsilon=10^{-3}$

5. $x=tg\,x,\ x_0\in\left[-\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{3}\right],\varepsilon=10^{-3}$

6. $3tg^2x-8tgx+5=0,\ x_0\in\left[\frac{\pi}{6},\pi\right],\varepsilon=10^{-3}$

7. $3tg^2x-8tgx+5=0,\ x_0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right],\varepsilon=10^{-3}$

8. $tg^2x-5tgx-6=0,\ x_0\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{6}\right],\varepsilon=10^{-3}$

9. $tgx=2\sin x,\ x_0\in\left[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right],\varepsilon=10^{-3}$

10. $tgx=2\sin x,\ x_0\in\left[\frac{4\pi}{3},\frac{8\pi}{3}\right],\varepsilon=10^{-3}$

11. $x+\lg x=0,5,\ x_0\in[0.6,0.7],\varepsilon=10^{-3}$

12. $x^3+5x^2-15x-7=0,x_0\in[2.4,2.5],\varepsilon=10^{-3}$

13. $x^3+3x^2-1=0,x_0\in[-3,-2],\varepsilon=10^{-3}$

14. $x^3-0.4x+0.08=0,x_0\in[0.15,0.25],\varepsilon=10^{-3}$

15. $e^{0.424x}-2.831x=0,\ x_0\in[0.45,0.55],\varepsilon=10^{-3}$

Глава 2. Численные методы решения систем нелинейных уравнений.

Цель работы. Знакомство с приближёнными методами решения систем нелинейных уравнений и их численной реализацией на ПК.

Предварительные замечания. Методы решения систем уравнений обычно разделяют на две большие группы. К первой группе относят методы, которые называют точными. Они позволяют для любых систем найти точные значения неизвестных после конечного числа арифметических операций, каждая из которых выполняется точною. Ко второй группе относятся все методы, которые не являются точными. Их называют приближёнными, или численными, или итерационными. Точное решение при использовании этих методов получается в результате бесконечного процесса приближений.

Рассмотрим некоторые приближённые методы решения систем нелинейных уравнений и алгоритмы их численной реализации на ПК. Будем предполагать, что решение этих систем должно быть получено с точностью до ε, где ε - очень маленькое положительное число.

2.1.Метод простой итерации.

Запишем систему нелинейных уравнений в виде

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

или коротко в виде $F_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, где $i = 1,2,...,n$.

Здесь функции, стоящие слева в (2.1) определены и непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой области D, которой принадлежит точное решение рассматриваемой системы уравнений. Точное решение системы (2.1) обозначим

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \tag{2.2}$$

Для того чтобы систему (2.1) решить методом простой итерации, во-первых, преобразуем её к виду

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ x_2 &= f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned} \tag{2.3}$$

или, коротко к виду, $x_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $i = 1,2,...,n$.

Функции, стоящие справа в (2.3) обладают теми же свойствами, что и функции в (2.1).

Во-вторых, в области D выберем любую точку $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ и назовём её нулевым приближением к точному решению системы (2.3).

В-третьих, координаты точки X^0 подставим в правую часть системы (2.3) и вычислим значения величин, стоящих слева в этой системе.

Будем иметь

$$\begin{aligned} x_1^1 &= f_1(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \\ x_2^1 &= f_2(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^1 &= f_n(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \end{aligned} \tag{2.4}$$

или коротко $x_i^1 = f_i(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0), i = 1,2,...,n.$

Величины $x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1$, стоящие слева в формулах (2.4), будем считать координатами точки $X^1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$. Эту точку назовём первым приближением к точному решению исходной системы, т.е. к $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$. Теперь мы имеем два приближённых решения системы (2.3). Этими решениями являются $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ и $X^1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$.

В четвёртых, сравним эти два приближённых решения на ε:

$$
\begin{aligned}
&|x_1^0 - x_1^1| \le \varepsilon \\
&|x_2^0 - x_2^1| \le \varepsilon \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&|x_n^0 - x_n^1| \le \varepsilon
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

или коротко $|x_i^0 - x_i^1| \le \varepsilon, i = 1,2,\ldots,n.$

Если все неравенства (2.5) выполняются, то за приближённое решение исходной системы можно выбрать как $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, так и $X^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$, поскольку эти два решения отличаются друг от друга не больше чем на ε.

На этом решение исходной системы методом простой итерации заканчивается. Если же хотя бы одно из неравенств (2.5) не выполняется, то надо компоненты первого приближения подставить в правую часть системы (2.3) и вычислить второе приближение $X^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$. Здесь

$$
\begin{aligned}
x_1^2 &= f_1(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) \\
x_2^2 &= f_2(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n^2 &= f_n(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

или коротко $x_i^2 = f_i(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1), \quad i = 1,2,\ldots,n.$

Далее надо сравнить приближения X^1 и X^2 на ε по формуле (2.5). Строить приближения надо до тех пор, пока два соседних приближения $X^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$ и $X^{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1})$ будут отличаться друг от друга не больше чем на ε.

Запишем рабочие формулы метода простой итерации для системы (2.3) в компактном виде.

Вычислить

$$x_i^{k+1} = f_i(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k), \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{2.7}$$

и построить приближения к решению системы (2.3)

$$X^{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}) \text{ для всех } i = 1,2,\ldots,n \text{ и } k = 0,1,2,\ldots \tag{2.8}$$

Сформулируем алгоритм вычислений по формулам (2.7) и (2.8).

1. Выберем $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, принадлежащую D.

2. В (2.7) положим $k = 0$, получим $x_i^1 = f_i(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0),\ i = 1,2,...,n.$

3. По (2.8) построим $X^1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$.

4. Проверим условие (2.5) на ε: $\left| x_i^0 - x_i^1 \right| \le \varepsilon, i = 1,2,...,n.$

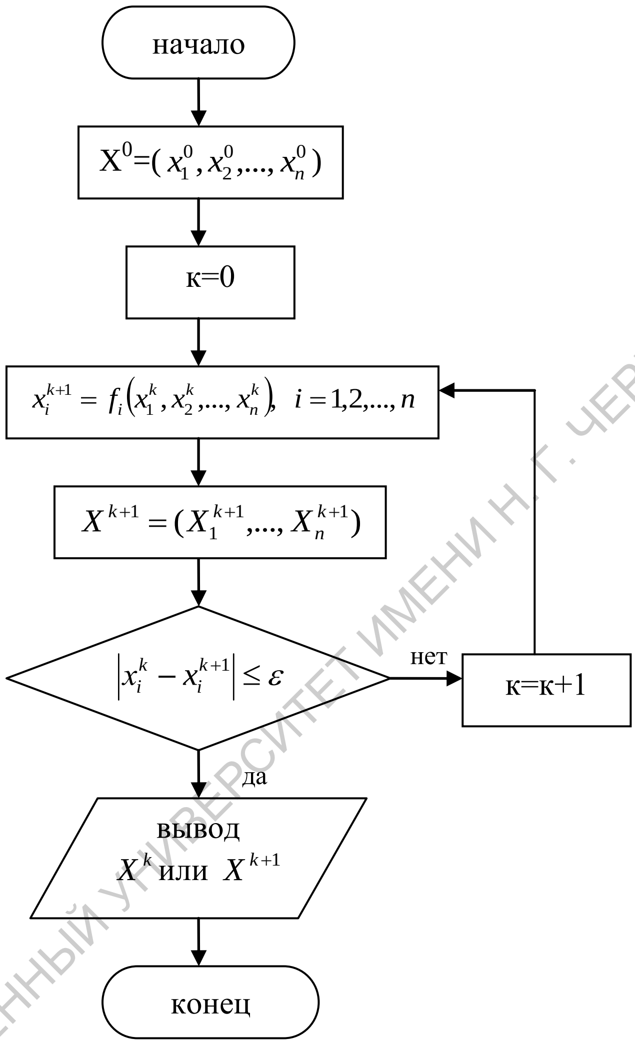
5. Если все условия в п.4 выполнены, то заканчиваем вычисления, выбрав за приближённое решение исходной системы $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ или $X^1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$ всё равно, т.к. эти решения отличаются друг от друга не больше чем на ε. Если хотя бы одно из условий в п.4 не выполнилось, то переходим к п.6.

6. В (2.7) положим $k = k + 1$ и получим $x_i^2 = f_i\left(x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1\right), i = 1,2,...,n.$

7. По (2.8) построим $X^2 = \left(x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2\right)$.

8. Перейдём к п.4, при этом верхние индексы в условии (2.5) изменятся и станут на единицу больше.

Запишем этот алгоритм геометрически.



2.2. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений.

Этот метод обладает гораздо более быстрой сходимостью, чем метод простой итерации. В основе метода Ньютона для системы уравнений (2.1) лежит использование разложения функций

$$F_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \text{ где } i = 1,2,...,n \qquad (2.9)$$

в ряд Тейлора, причём члены, содержащие вторые и более высокие порядки производных, отбрасываются. Такой подход позволяет решение одной нелинейной системы (2.1) заменить решением ряда линейных систем.

Итак, систему (2.1) будем решать методом Ньютона. В области D выберем любую точку $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ и назовём её нулевым приближением к точному решению $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in D$ исходной системы. Теперь функции (2.9) разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Будем иметь

$$F_i(x_1, x_2, ..., x_n) \cong F_i(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) + \frac{\partial F_i}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + ... + \frac{\partial F_i}{\partial x_n}(x_n - x_n^0), i = 1,2,...n. \qquad (2.10)$$

Т.к. левые части (2.10) должны обращаться в ноль согласно (2.1), то и правые части (2.10) тоже должны обращаться в ноль. Поэтому из (2.10) имеем

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\Delta x_1^0 + ... + \frac{\partial F_i}{\partial x_n}\Delta x_n^0 = -F_i(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0), i = 1,2,...,n. \qquad (2.11)$$

Здесь

$$\Delta x_i^0 = x_i - x_i^0, \; i = 1,2,...,n. \qquad (2.12)$$

Все частные производные в (2.11) должны быть вычислены в точке $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$.

(2.11) есть система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\Delta x_i^0 = x_i - x_i^0, i = 1,2,...,n.$ Эту систему можно решить методом

Крамера, если её основной определитель будет отличен от нуля и найти величины $\Delta x_i^0 = x_i - x_i^0, i = 1,2,...,n.$

Теперь можно уточнить нулевое приближение $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, построив первое приближение с координатами

$$x_1^1 = x_1^0 + \Delta x_1^0, x_2^1 = x_2^0 + \Delta x_2^0, ..., x_n^1 = x_n^0 + \Delta x_n^0, \quad (2.13)$$

т.е. $X^1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$. (2.14)

Выясним, получено ли приближение (2.14) с достаточной степенью точности. Для этого проверим условие

$$\max\left|\Delta x_i^0\right| \le \varepsilon, \ i = 1,2,...,n \quad (2.15)$$

где ε наперёд заданное малое положительное число (точность, с которой должна быть решена система (2.1)). Если условие (2.15) будет выполнено, то за приближённое решение системы (2.1) выберем (2.14) и закончим вычисления. Если же условие (2.15) выполняться не будет, то выполним следующее действие. В системе (2.11) вместо $x_i^0, i = 1,2,...,n$ возьмём уточнённые значения

$$x_i^1, i = 1,2,...,n, \quad (2.16)$$

т.е. выполним следующие действия

$$x_i^0 = x_i^1, i = 1,2,...,n. \quad (2.17)$$

После этого система (2.11) будет системой линейных алгебраических уравнений относительно величин $\Delta x_i^1 = x_i - x_i^1, i = 1,2,...,n.$ Определив эти величины, следующее второе приближение $X^2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$ к решению системы (2.1) найдём по формулам

$$x_1^2 = x_1^1 + \Delta x_1^1, x_2^2 = x_2^1 + \Delta x_2^1, ..., x_n^2 = x_n^1 + \Delta x_n^1. \quad (2.18)$$

Теперь проверим условие (2.15) $\max\left|\Delta x_i^1\right| \le \varepsilon, i = 1,2,...,n.$

Если это условие выполняется, то заканчиваем вычисления, приняв за приближённое решение системы (2.1) второе приближение $X^2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$. Если же это условие не выполняется, то продолжаем строить следующее приближение, приняв в (2.11) $x_i^1 = x_i^2, i = 1,2,...,n.$ Строить приближения нужно до тех пор, пока условие на ε не будет выполнено.

Рабочие формулы метода Ньютона для решения системы (2.1) можно записать в виде.

Вычислить последовательность

$$X^{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, ..., x_n^{k+1}), k = 0,1,2,..., \quad (2.19)$$

где $x_1^{k+1} = x_1^k + \Delta x_1^k, x_2^{k+1} = x_2^k + \Delta x_2^k, ..., x_n^{k+1} = x_n^k + \Delta x_n^k.$ (2.20)

Здесь $\Delta x_i^{k+1}, i = 1,2,...,n$ являются решением системы

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1} \Delta x_1^k + ... + \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \Delta x_n^k = -F_i(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k), i = 1,2,...,n. \quad (2.21)$$

Сформулируем алгоритм вычислений по формулам (2.19)-(2.21).

1. Выберем нулевое приближение $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, принадлежащее области D.

2. В системе линейных алгебраических уравнений (2.21) положим $k = 0$,а $i = 1,2,...,n$.

3. Решим систему (2.21) и найдём величины $\Delta x_i^k, i = 1,2,...,n$.

4. В формулах (2.20) положим $k = 0$и вычислим компоненты следующего приближения $X^{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, ..., x_n^{k+1})$.

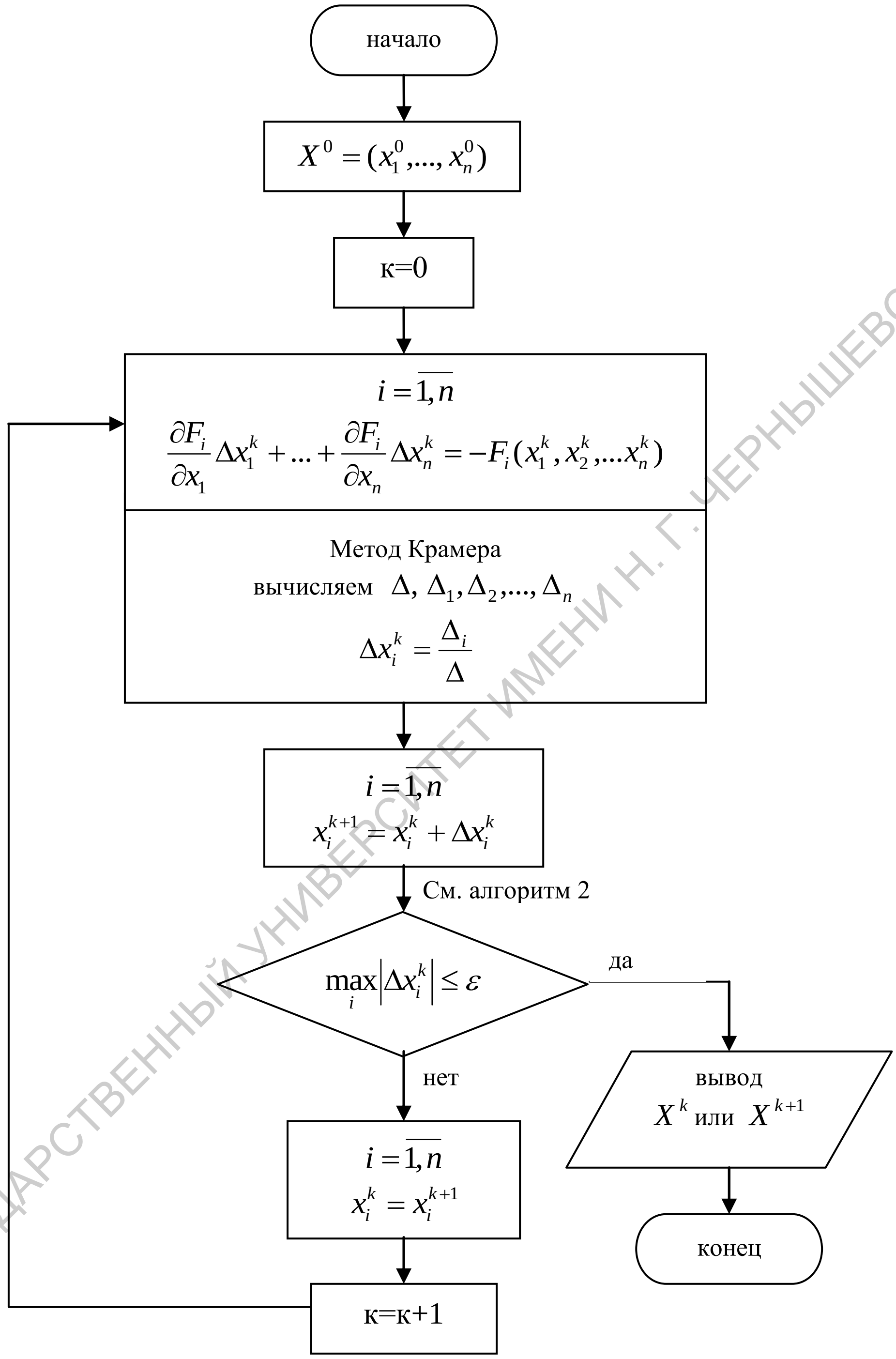
5. Проверим условие (2.15) на ε: $\max\left|\Delta x_i^k\right| \le \varepsilon, i = 1,2,...,n.$ (См. алгоритм вычисления максимума нескольких величин на стр.27)

6. Если это условие выполняется, то заканчиваем вычисления, выбрав за приближённое решение системы (2.1) приближение $X^{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, ..., x_n^{k+1})$. Если же это условие не выполняется, то перейдём к п.7.

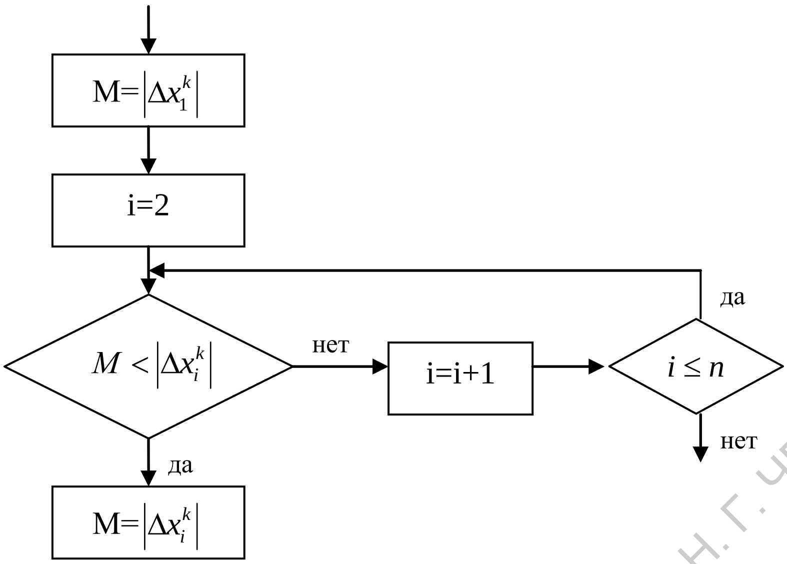
7. Положим $x_i^k = x_i^{k+1}$ для всех $i = 1,2,...,n$.

8. Выполним п.3, положив $k = k + 1$.

Геометрически этот алгоритм можно записать в виде.



Алгоритм вычисления максимума нескольких величин.



Пример 1. Рассмотрим использование метода Ньютона для решения системы двух уравнений.

Методом Ньютона с точностью до ε решить следующую систему нелинейных уравнений

$$\begin{matrix} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{matrix}, \tag{2.22}$$

здесь $i=1,2$. Выберем нулевое приближение $X^0=(x^0,y^0)$, принадлежащее области D. Построим систему линейных алгебраических уравнений (2.11). Она будет иметь вид

$$\begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x-x^0)+\frac{\partial F_1}{\partial y}(y-y^0)=-F_1(x^0,y^0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x-x^0)+\frac{\partial F_2}{\partial y}(y-y^0)=-F_2(x^0,y^0) \end{matrix} \tag{2.23}$$

Обозначим

$$x-x^0=\Delta x^0, y-y^0=\Delta y^0 \tag{2.24}$$

Решим систему (2.23) относительно неизвестных $\Delta x^0,\Delta y^0$, например методом Крамера . Формулы Крамера запишем в виде

$$\Delta x^0=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \Delta y^0=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{2.25}$$

где основной определитель системы (2.23)

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(x^0,y^0)}{\partial x} & \frac{\partial F_1(x^0,y^0)}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2(x^0,y^0)}{\partial x} & \frac{\partial F_2(x^0,y^0)}{\partial y} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{2.26}$$

а вспомогательные определители системы (2.23) имеют вид

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -F_1(x^0,y^0) & \frac{\partial F_1(x^0,y^0)}{\partial y} \\ -F_2(x^0,y^0) & \frac{\partial F_2(x^0,y^0)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1(x^0, y^0)}{\partial x} & -F_1(x^0, y^0) \\ \dfrac{\partial F_2(x^0, y^0)}{\partial x} & -F_2(x^0, y^0) \end{vmatrix}.$$

Найденные значения $\Delta x^0, \Delta y^0$ подставим в (2.16) и найдём компоненты $x^1 = x^0 + \Delta x^0, y^1 = y^0 + \Delta y^0$ первого приближения X^1 к решению системы (2.23).

Проверим условие

$$\max(|\Delta x^0|, |\Delta y^0|) \le \varepsilon, \qquad (2.27)$$

если это условие выполняется, то заканчиваем вычисления, приняв за приближённое решение системы (2.23) первое приближение, т. е. $X^1 = (x^1, y^1)$. Если условие (2.27) не выполняется, то положим $x^0 = x^1$, $y^0 = y^1$ и построим новую систему линейных алгебраических уравнений (2.23). Решив её, найдём второе приближение $X^2 = (x^2, y^2)$. Проверим его на ε. Если это условие будет выполняться, то за приближённое решение системы (2.23) выберем $X^2 = (x^2, y^2)$. Если условие на ε не будет выполняться, положим $x^1 = x^2$, $y^1 = y^2$ и построим следующую систему (2.23) для нахождения $X^3 = (x^3, y^3)$ и т. д.

Пример 2 (с числовыми значениями). Решить систему уравнений методом простых итераций

$$\begin{cases} x - y^2 = 0, \\ \cos x - y = 0. \end{cases}$$

Решение. Выразим из первого уравнения *y*, из второго – *x*:

$$\begin{cases} x = \arccos y, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$$

Проверим условие сходимости.

Для этого найдем частные производные

$$\begin{cases} \varphi_1(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \arccos \mathrm{y}, & \dfrac{\partial\varphi_1(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial x} = 0, \ \dfrac{\partial\varphi_1(x,\mathrm{y})}{\partial y} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \\ \varphi_2(x,y) = \sqrt{x}, & \dfrac{\partial\varphi_2(x,y)}{\partial x} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \dfrac{\partial\varphi_2(x,y)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Так как при любых допустимых значениях переменных верно неравенство

$$\left|\frac{\partial\varphi_1(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial y}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \geq 1,$$

то не существует значений аргументов, при которых выполняются условия сходимости. Следовательно, для системы

$$\begin{cases} x = \arccos y, \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

нельзя гарантировать сходимость метода итераций.

Выразим теперь из первого уравнения переменную x, а из второго – y и найдем частные производные:

$$\begin{cases} x = y^2, \ \varphi_1(x,y) = y^2, \ \dfrac{\partial\varphi_1(x,y)}{\partial x} = 0, \ \dfrac{\partial\varphi_1(x,y)}{\partial y} = 2y, \\ y = \cos x, \ \varphi_2(x,y) = \cos x, \ \dfrac{\partial\varphi_2(x,y)}{\partial x} = -\sin x, \ \dfrac{\partial\varphi_2(x,y)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что в окрестности точки x=0,641; y=0,801 условия сходимости также не выполняются. Тем не менее, примем за начальные значения x=0,641; y=0,801и выполним итерации. В результате метод итераций будет сходиться, хотя и очень медленно.

Пример 3. Решить методом Ньютона систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - y^2 = 0, \\ \cos x - y = 0. \end{cases}$$

Решение.

Найдем определитель матрицы Якоби:

$$f_1(x,y)=x-y^2;\quad f_2(x,y)=\cos x-y;$$

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 1 & -2y \\ -\sin x & -1 \end{pmatrix}=-1-2y\sin x.$$

Очевидно, что в некоторой окрестности точки (0,641;0,801) определитель матрицы Якоби не равен нулю.

Найдем матрицу, обратную матрице Якоби:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y \\ -\sin x & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1-2y\sin x}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2y \\ \sin x & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь для данной системы метод Ньютона можно записать в виде итерационных формул:

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix}+\frac{1}{1+2y^{(k)}\sin x^{(k)}}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2y^{(k)} \\ \sin x^{(k)} & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x^{(k)} & -\left(y^{(k)}\right)^2 \\ \cos x^{(k)} & -y^{(k)} \end{pmatrix},$$

k=0, 1, …

В таблице приведены результаты расчетов по этим формулам с начальным приближением (0,5;0,5).

k	x^k	y^k
0	0,5	0,5
1	0,586237906918075	0,836237906918075
2	0,642171611104366	0,802083615782865
3	0,641713916176861	0,801071121263283
4	0,641714370872886	0,801070765209299
5	0,641714370872883	0,801070765209218
6	0,641714370872883	0,801070765209218

Третий шаг итераций дает результаты, совпадающие до трех цифр с решением предыдущего примера, а пятый и шестой шаги дают значения, совпадающие друг с другом точно. Это говорит о том, что достигнута максимальная точность. Данные результаты объясняются высокой скоростью сходимости метода Ньютона.

Задания.

Во всех заданиях требуется:

1. Составить программу численной реализации одним из методов, описанных выше.
2. Получить результаты вычислений.
3. Проверить полученные результаты.

Задана система двух нелинейных уравнений.

1. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}5 \\ x + \cos y = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \cos(y+0{,}5) + x = 0{,}8 \\ \sin x - 2y = 1{,}6 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1{,}3 \\ y + \sin(x+1) = 0{,}8 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0 \\ y + \sin x = -0{,}4 \end{cases}$
6. $\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1 \\ x + \cos(y-2) = 0 \end{cases}$
7. $\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1{,}5 \\ x + \cos(y-2) = 0{,}5 \end{cases}$
8. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}5 \\ x + \sin y \cos y = 0{,}4 \end{cases}$
9. $\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 1 \\ \sin y - 2x = 2 \end{cases}$
10. $\begin{cases} \sin(x-1) + y = 1{,}5 \\ x - \sin(y+1) = 1 \end{cases}$
11. $\begin{cases} \cos(x-1) + \ln y = 0{,}5 \\ 3x - \cos y = 3 \end{cases}$
12. $\begin{cases} \cos(x+1{,}8) + 2y = 0{,}5 \\ \ln x + \cos y = 0{,}3 \end{cases}$
13. $\begin{cases} tg(x-1) + 3y = 0{,}5 \\ 4x - \cos y = 0{,}6 \end{cases}$
14. $\begin{cases} \cos x + \log_3 y = 1{,}5 \\ xy + \cos y = 3 \end{cases}$
15. $\begin{cases} \cos(x+5) - xy = 2{,}5 \\ \ln x + y^2 = 3 \end{cases}.$

Глава 3. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Цель работы. Знакомство с некоторыми приближёнными методами решения СЛАУ и их численной реализацией на ПК.

Предварительные замечания. Все методы решения СЛАУ обычно разделяют на две большие группы. К первой группе относятся методы, которые принято называть точными. Эти методы позволяют для любых систем найти точные значения неизвестных после конечного числа арифметических операций, каждая из которых выполняется точно.

Ко второй группе относятся все методы, не являющиеся точными. Их называют итерационными, или численными, или приближёнными. Точное решение, при использовании таких методов, получается в результате бесконечного процесса приближений. Привлекательной чертой таких методов является их самоисправляемость и простота реализации на ПК.

Рассмотрим некоторые приближённые методы решения СЛАУ и построим алгоритмы их численной реализации. Приближённое решение СЛАУ будем получать с точностью до ε, где ε некоторое очень маленькое положительное число.

3.1. Метод итерации.

Пусть СЛАУ задана в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

Эту систему можно записать в матричном виде

$$X = AX + B, \tag{3.2}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов при неизвестных в системе (3.1), $B = (b_1, b_2, ..., b_n)'$ - столбец свободных членов, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)'$ - столбец неизвестных системы (3.1).

Будем считать, что система (3.1) определена и совместна, т.е. имеет единственное решение. Это решение обозначим

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)\,. \tag{3.3}$$

Решим систему (3.1) методом итерации. Для этого выполним следующие действия.

Во-первых. Выберем нулевое приближение

$$X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \tag{3.4}$$

к точному решению (3.3) системы (3.1). Компонентами нулевого приближения могут быть любые числа. Но удобнее за компоненты нулевого приближения взять либо нули $(x_i^0 = 0, i = 1,2,...,n)$, либо свободные члены системы (2.9) $(x_i^0 = b_i, i = 1,2,...,n)$.

Во-вторых. Компоненты нулевого приближения подставим в правую часть системы (3.1) и вычислим

$$\begin{aligned} x_1^1 &= a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + ... + a_{1n}x_n^0 + b_1 \\ x_2^1 &= a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + ... + a_{2n}x_n^0 + b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^1 &= a_{n1}x_1^0 + a_{n2}x_2^0 + ... + a_{nn}x_n^0 + b_n \end{aligned} \tag{3.5}$$

Величины, стоящие слева в (3.5) являются компонентами первого приближения $X^1 = (x_1^1, x_2^1...., x_n^1)$. Действия, в результате которых получилось первое приближение, называются итерацией.

В-третьих. Проверим нулевое и первое приближения на ε

$$\begin{aligned}&|x_1^1 - x_1^0| \le \varepsilon\\&|x_2^1 - x_2^0| \le \varepsilon\\&\dots\dots\dots\dots\\&|x_n^1 - x_n^0| \le \varepsilon\end{aligned} \qquad (3.6)$$

Если все условия (3.6) выполняются, то за приближённое решение системы (3.1) выберем, либо $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, либо $X^1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$.всё равно, т.к. они отличаются друг от друга не больше чем на ε и закончим вычисления. Если хотя бы одно из условий (3.6) не будет выполнено, то перейдём к следующему действию.

В-четвёртых. Выполним следующую итерацию, т.е. в правую часть системы (3.1) подставим компоненты первого приближения и вычислим компоненты второго приближения $X^2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$, где

$$\begin{aligned}&x_1^2 = a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^1 + ... + a_{1n}x_n^1 + b_1\\&x_2^2 = a_{21}x_1^1 + a_{22}x_2^1 + ... + a_{2n}x_n^1 + b_2\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&x_n^2 = a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + ... + a_{nn}x_n^1 + b_n\end{aligned}$$

В-пятых. Проверим $X^1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$ и $X^2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$ на ε, т.е. проверим условие (3.6) для этих приближений. Если все условия (3.6) будут выполнены, то за приближённое решение системы (3.1) выберем, либо $X^1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$, либо $X^2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$ всё равно, т.к. они отличаются друг от друга не больше чем на ε. В противном случае будем строить следующую итерацию, подставив компоненты второго приближения в правую часть системы (3.1).

Итерации нужно строить до тех пор, пока два соседних приближения $X^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$ и $X^{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, ..., x_n^{k+1})$ будут отличаться друг от друга не больше, чем на ε.

Рабочую формулу метода итерации решения системы (3.1) можно записать в виде

$$x_i^{k+1} = a_{i1}x_1^k + a_{i2}x_2^k + \ldots + a_{in}x_n^k + b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^k + b_i, i = 1,2,\ldots,n; k = 0,1,2,\ldots \quad (3.7)$$

Алгоритм численной реализации формулы (3.7) может быть таким.

1. Выберем $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, где $x_i^0 = b_i, i = 1,2,\ldots,n$, если не оговорено особо.

2. Положим $k = 0$.

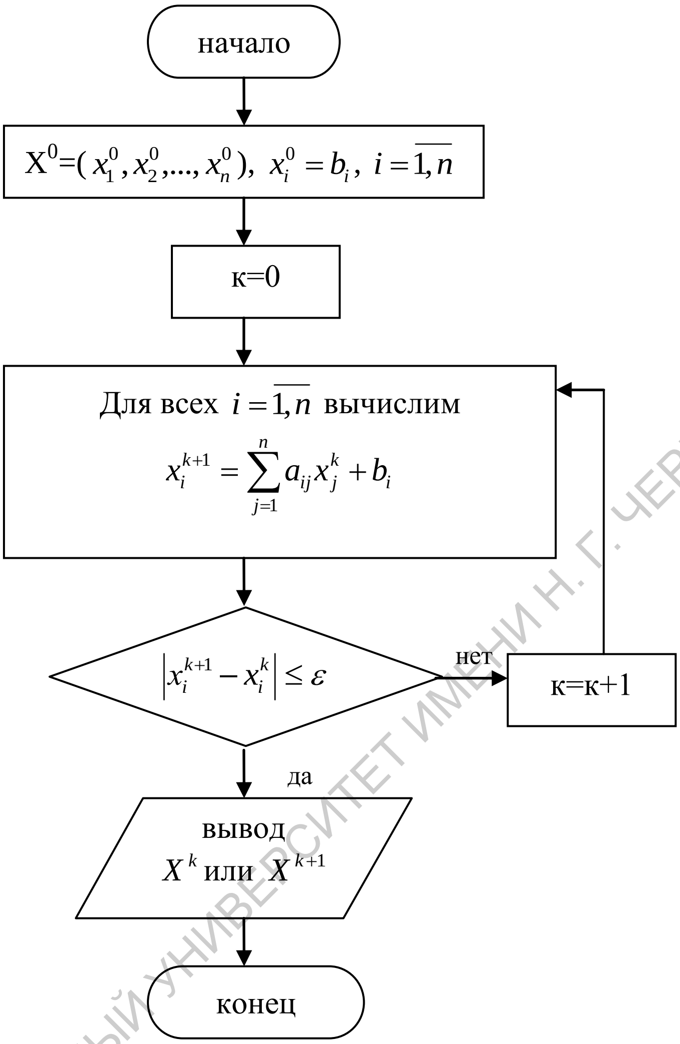
3. Вычислим для всех $i = \overline{1,n}$ $x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^k + b_i$

4. Проверим условия $\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right| \le \varepsilon$, $i = \overline{1,n}$.

5. Если все условия в п.4 будут выполнены, то за приближённое решение системы (3.1) выберем либо $X^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$, либо $X^{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1})$ и закончим вычисления. Если хотя бы одно условие в п.4 не будет выполнено, перейдём к п.6.

6. Положим $k = k + 1$ и перейдём к п.3.

Этот алгоритм можно записать геометрически.



Достаточные условия сходимости метода итерации для системы (3.1) имеют вид

1. $\sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right| < 1,\ \ i = 1,2,...,n$.

2. $\sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij} \right| < 1,\ \ j = 1,2,...,n$.

3. $\sum_{i,j=1}^{n} \left| a_{ij} \right|^2 < 1.$

3.2. Метод простой итерации.

Пусть система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) задана в виде

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Чтобы систему (3.8) решить методом простой итерации, её сначала надо привести к виду

$$\begin{aligned} & x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \\ & x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & x_n = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \ldots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1} + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{aligned} \qquad (3.9)$$

В системе (3.9) i-ое уравнение представляет собой i-ое уравнение системы (3.8), разрешённое относительно i –ой неизвестной ($i = \overline{1,n}$).

Метод решения системы (3.8), состоящий в сведении её к системе (3.9) с последующим решением системы (3.9) методом итерации, называется методом простой итерации для системы (3.8).

Таким образом, рабочие формулы метода простой итерации решения системы (3.8) будут иметь вид

$$\begin{aligned} & x_1^{k+1} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^k - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^k - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^k + \frac{b_1}{a_{11}} = -\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j^k + \frac{b_1}{a_{11}} \\ & x_2^{k+1} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^k - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^k - \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^k + \frac{b_2}{a_{22}} = -\sum_{j=1, j\neq 2}^{n}\frac{a_{2j}}{a_{22}}x_j^k + \frac{b_2}{a_{22}} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ & x_n^{k+1} = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^k - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^k - \ldots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^k + \frac{b_n}{a_{nn}} = -\sum_{j=1}^{n-1}\frac{a_{nj}}{a_{nn}}x_j^k + \frac{b_n}{a_{nn}}, k = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Формулы (3.10) можно записать в виде

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = 1,2,...n, k = 0,1,2,... \qquad (3.11)$$

Алгоритм численной реализации метода простой итерации для системы (3.8) по формулам (3.11) может быть таким.

1. Выберем $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, $x_i^0 = \dfrac{b_i}{a_{ii}}, i = 1,2,...,n,$ если не оговорено особо.

2. Положим $k = 0$.

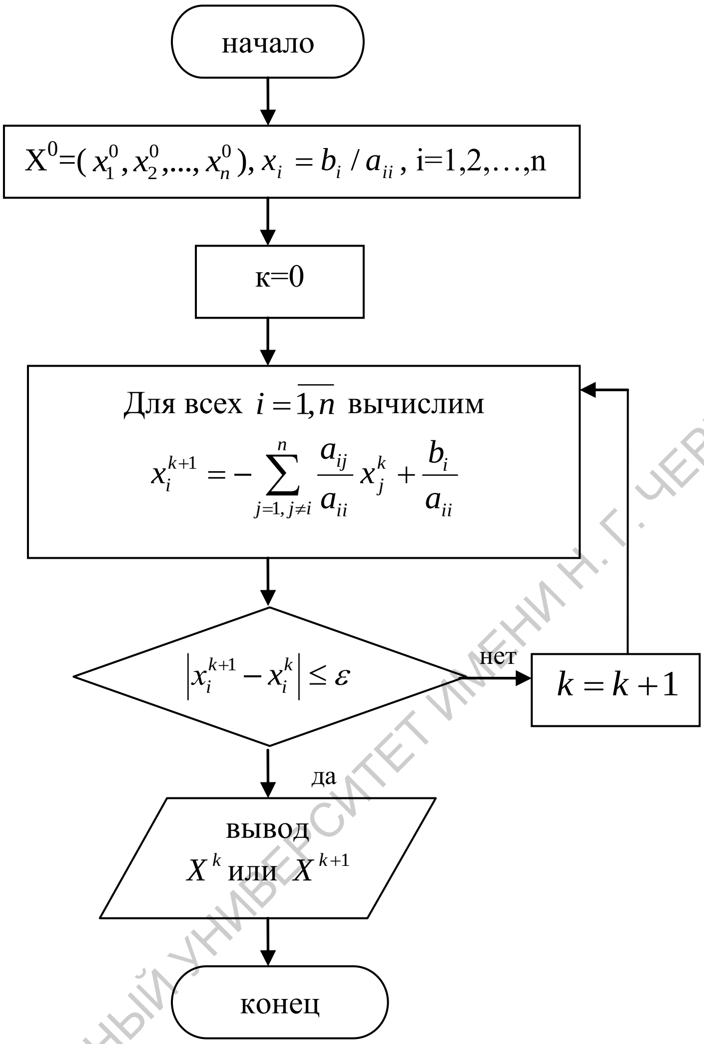
3. Для всех $i = 1,2,...,n$ вычислим $x_i^{k+1} = -\sum\limits_{j=1,\, j\neq i}^{n} \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \dfrac{b_i}{a_{ii}}$.

4. Проверим условия $\left| x_i^{k+1} - x_i^k \right| \le \varepsilon$, $i = 1,2,...,n$.

5. Если все условия в п.4 будут выполнены, то за приближённое решение системы (3.8) выберем, либо $X^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$, либо $X^{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, ..., x_n^{k+1})$ и закончим вычисления. Если хотя бы одно условие в п.4 не будет выполнено, перейдём к п.6.

6. Положим $k = k + 1$ и перейдём к п.3.

Этот алгоритм можно записать геометрически.



Достаточные условия сходимости метода простой итерации для системы (3.8) имеют вид

1. $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1,\ i = 1,2,...,n.$

2. $\sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1,\quad j = 1,2,...,n.$

3. $\sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^2 < 1.$

3.3. Стационарный метод Зейделя.

Метод Зейделя решения СЛАУ отличается от метода итерации тем, что найдя какое-то приближение для i-той компоненты, мы сразу же используем его для отыскания следующих $(i+1)$, $(i+2)$, …, n-ой компонент. Такой подход позволяет обеспечить более высокую скорость сходимости метода Зейделя по сравнению с методом итерации.

Пусть СЛАУ задана в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_n \end{aligned} \tag{3.12}$$

Пусть $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ - нулевое приближение к точному решению $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ системы (3.12). И пусть найдено k-ое приближение $X^\kappa = (x_1^\kappa, x_2^\kappa, ..., x_n^\kappa)$. Определим компоненты $(k+1)$-ого приближения $X^{\kappa+1} = (x_1^{\kappa+1}, x_2^{\kappa+1}, ..., x_n^{\kappa+1})$ по формулам

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= a_{11}x_1^k + a_{12}x_2^k + ... + a_{1n}x_n^k + b_1 \\ x_2^{k+1} &= a_{21}x_1^{k+1} + a_{22}x_2^k + ... + a_{2n}x_n^k + b_2 \\ x_3^{k+1} &= a_{31}x_1^{k+1} + a_{32}x_2^{k+1} + a_{33}x_3^k + ... + a_{3n}x_n^k + b_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{k+1} &= a_{n1}x_1^{k+1} + a_{n2}x_2^{k+1} + ... + a_{nn-1}x_{n-1}^{k+1} + a_{nn}x_n^k + b_n \end{aligned} \tag{3.13}$$

Формулы (3.13) можно записать в компактном виде

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^k + b_i\ ,\ i = \overline{1,n},\ k = 0,1,2,.... \tag{3.14}$$

Алгоритм численной реализации метода Зейделя решения системы (3.12) по формулам (3.14) может быть таким.

1. Выберем $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, например, $x_i^0 = b_i$, $i = \overline{1,n}$

2. Положим $k = 0$.

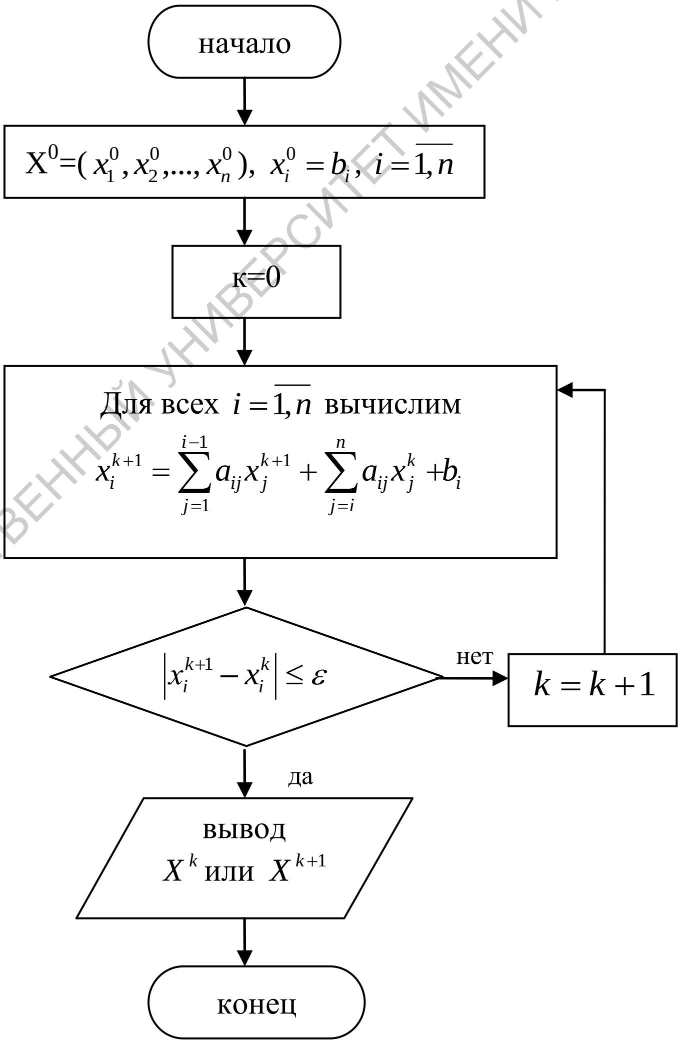
3. Для всех $i = \overline{1, n}$ вычислим $x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{k} + b_i$.

4. Для всех $i = \overline{1, n}$ проверим условия $\left| x_i^k - x_i^{k+1} \right| \le \varepsilon$.

5. Если все условия в п.4 будут выполнены, то за приближенное решение системы (3.12) выберем либо $X^{\kappa} = (x_1^{\kappa}, x_2^{\kappa}, ..., x_n^{\kappa})$, либо $X^{\kappa+1} = (x_1^{\kappa+1}, x_2^{\kappa+1}, ..., x_n^{\kappa+1})$ и закончим вычисления. Если хотя бы одно условие в п.4 не будет выполнено, перейдем к п.6.

6. Положим $k = k + 1$и перейдем к п.3

Этот алгоритм можно записать геометрически.



Достаточное условие сходимости метода Зейделя для системы (3.12) имеет вид $\sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right| < 1$, $i = \overline{1, n}$.

3.4. Нестационарный метод Зейделя.

Этот метод решения СЛАУ (3.12) обеспечивает еще более высокую скорость сходимости метода Зейделя.

Пусть каким-либо образом для системы (3.12) найдены компоненты k-ого приближения $X^{\kappa} = (x_1^{\kappa}, x_2^{\kappa}, ..., x_n^{\kappa})$ и $(k+1)$-ого приближения $X^{\kappa+1} = (x_1^{\kappa+1}, x_2^{\kappa+1}, ..., x_n^{\kappa+1})$.

Вычислим вектор поправки

$$\Delta X^{k+1} = X^{k+1} - X^{k} = (x_1^{k+1} - x_1^{k}, ..., x_n^{k+1} - x_n^{k}). \qquad (3.14)$$

Подсчитаем величины

$$\left|\Delta x_i^{k+1}\right| = \left|x_i^{k+1} - x_i^{k}\right|, \ i = \overline{1, n} \qquad (3.15)$$

Расположим величины $\left|\Delta x_i^{k+1}\right|, \ i = \overline{1, n}$ в порядке их убывания.

В таком же порядке перепишем уравнения в системе (3.12) и неизвестные в этой системе.

И уже к «новой» системе применим стационарный метод Зейделя. При этом в первую очередь будут уточняться значения тех неизвестных, для которых погрешность в предыдущем приближении была наибольшей. Это и обеспечивает более высокую сходимость метода Зейделя.

3.5. Метод Некрасова.

Пусть СЛАУ задана в виде

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \qquad (3.18)$$

Будем решать ее методом Некрасова. Для этого, во-первых, каждое уравнение системы (3.18) разрешим относительно соответствующей переменной (см. метод простой итерации на стр.12).

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \\
x_2 &= -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n + \frac{b_2}{a_{22}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \ldots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1} + \frac{b_n}{a_{nn}}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Систему (3.19) можно записать компактно

$$x_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}},\ i = \overline{1,n}. \tag{3.20}$$

Во-вторых, систему (3.20) будем решать стационарным методом Зейделя по формулам:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k} + \frac{b_i}{a_{ii}},\ i = \overline{1,n},\ k = 0,1,2,.... \tag{3.21}$$

Алгоритм численной реализации метода Ньютона для решения системы (3.18) по формулам (3.21) может быть таким.

1. Выберем $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, например, $x_i^0 = \dfrac{b_i}{a_{ii}},\ i = \overline{1,n}$

2. Положим $k = 0$.

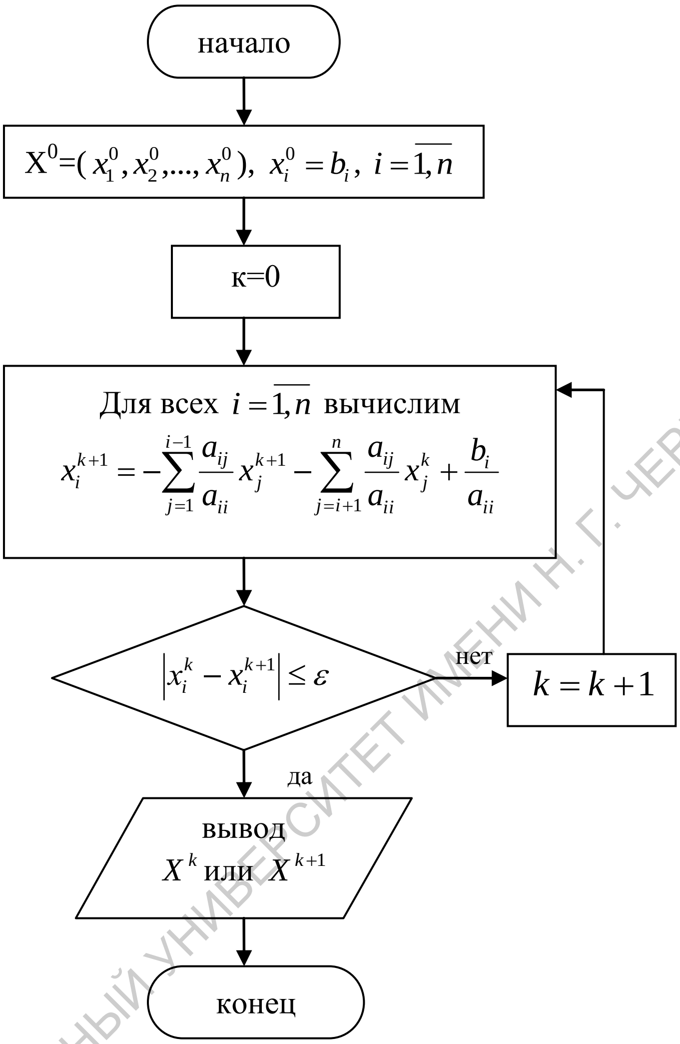
3. Для всех $i = \overline{1,n}$ вычислим $x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k} + \dfrac{b_i}{a_{ii}}$.

4. Для всех $i = \overline{1,n}$ проверим условия $\left| x_i^{k+1} - x_i^{k} \right| \le \varepsilon$.

5. Если все условия в п.4 будут выполнены, то за приближенное решение системы (3.18) выберем либо $X^{\kappa} = (x_1^{\kappa}, x_2^{\kappa}, ..., x_n^{\kappa})$, либо $X^{\kappa+1} = (x_1^{\kappa+1}, x_2^{\kappa+1}, ..., x_n^{\kappa+1})$ и закончим вычисления. Если хотя бы одно условие в п.4 не будет выполнено, перейдем к п.6.

6. Положим $k = k + 1$и перейдем к п.3.

Изложенный алгоритм можно записать геометрически.



Достаточным условием сходимости метода Некрасова является требование, чтобы матрица А, элементами которой являются коэффициенты при неизвестных в системе (3.18), была симметричной и положительно определенной.

Задания.

Коэффициенты при переменных x_i и свободные члены b_i в системе уравнений даны в виде расширенной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Во всех заданиях требуется:

1. Составить программу численной реализации одним из методов, описанных выше.
2. Получить результаты вычислений.
3. Проверить полученные результаты.

$$1.\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2,15 & 0,84 & 0,31 & 0,16 & 3,18 \\ 0,84 & 3,14 & 0,62 & 0,21 & 4,61 \\ 0,32 & 0,62 & 4,82 & 0,82 & 5,96 \\ 0,16 & 0,21 & 0,82 & 6,41 & 8,14 \end{array}\right) \qquad 2.\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1,12 & 0,13 & 0,14 & 0,14 & 1,55 \\ 0,16 & 1,17 & 0,18 & 0,19 & 1,65 \\ 0,20 & 0,21 & 1,22 & 0,23 & 1,75 \\ 0,24 & 0,25 & 0,26 & 1,27 & 1,85 \end{array}\right)$$

$$3.\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0.78 & -0.02 & -0.12 & -0.14 & 0.76 \\ -0.02 & 0.86 & -0.04 & 0,06 & 0.08 \\ -0.12 & -0.04 & 0.72 & -0.08 & 1.12 \\ -0.14 & 0.06 & -0.08 & 0.74 & 0.68 \end{array}\right) \ 4.\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,42 & 0,54 & 0,66 & 0,3 \\ 0,42 & 1 & 0,32 & 0,44 & 0,5 \\ 0,54 & 0,32 & 1 & 0,22 & 0,7 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1 & 0,9 \end{array}\right)$$

$$5.\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2,37 & 0,93 & 0,35 & 0,18 & 3,50 \\ 0,93 & 3,46 & 0,69 & 0,23 & 5,07 \\ 0,35 & 0,69 & 5,30 & 0,91 & 6,56 \\ 0,18 & 0,23 & 0,91 & 7,05 & 8,96 \end{array}\right) \qquad 6.\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1,23 & 0,14 & 0,15 & 0,16 & 1,70 \\ 0,17 & 1,28 & 0,19 & 0,21 & 1,81 \\ 0,22 & 0,23 & 1,34 & 0,25 & 1,92 \\ 0,26 & 0,27 & 0,28 & 1,39 & 2,03 \end{array}\right)$$

$$7.\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0,86 & -0,02 & -0,13 & -0,15 & 0,84 \\ -0,02 & 0,95 & -0,04 & 0,48 & 0,09 \\ -0,13 & -0,04 & 0,79 & -0,09 & 1,23 \\ -0,15 & 0,48 & -0,09 & 0,81 & 0,75 \end{array}\right) \ 8.\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1,1 & 0,46 & 0,59 & 0,73 & 0,33 \\ 0,46 & 1,1 & 0,35 & 0,48 & 0,55 \\ 0,59 & 0,35 & 1,1 & 0,24 & 0,77 \\ 0,73 & 0,48 & 0,24 & 1,1 & 0,99 \end{array}\right)$$

$$9.\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0,84 & 3,14 & 0,62 & 0,21 & 4,61 \\ 2,15 & 0,84 & 0,31 & 0,16 & 3,18 \\ 0,32 & 0,62 & 4,82 & 0,82 & 5,96 \\ 0,16 & 0,21 & 0,82 & 6,41 & 8,14 \end{array}\right) \qquad 10.\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0,20 & 0,21 & 1,22 & 0,23 & 1,75 \\ 0,16 & 1,17 & 0,18 & 0,19 & 1,65 \\ 1,12 & 0,13 & 0,14 & 0,14 & 1,55 \\ 0,24 & 0,25 & 0,26 & 1,27 & 1,85 \end{array}\right)$$

$$11.\ \begin{pmatrix} 0,26 & 0,27 & 0,28 & 1,39 & | & 2,03 \\ 0,17 & 1,28 & 0,19 & 0,21 & | & 1,81 \\ 0,22 & 0,23 & 1,34 & 0,25 & | & 1,92 \\ 1,23 & 0,14 & 0,15 & 0,16 & | & 1,70 \end{pmatrix} \quad 12.\ \begin{pmatrix} -0,77 & -0,04 & 0,21 & -0,18 & | & -1,24 \\ 0,25 & -1,23 & 0,16 & -0,09 & | & 1,12 \\ -0,21 & 0,16 & 0,80 & -0,13 & | & 2,56 \\ 0,15 & -0,31 & 0,06 & 1,12 & | & -0,77 \end{pmatrix}$$

$$13.\ \begin{pmatrix} 0,24 & 0,25 & 0,26 & 1,27 & | & 1,85 \\ 0,16 & 1,17 & 0,18 & 0,19 & | & 1,65 \\ 0,20 & 0,21 & 1,22 & 0,23 & | & 1,75 \\ 1,12 & 0,13 & 0,14 & 0,14 & | & 1,55 \end{pmatrix} \quad 14.\ \begin{pmatrix} 0,93 & -0,04 & 0,21 & -0,18 & | & -1,24 \\ 0,25 & -1,23 & 0,07 & -0,09 & | & -0,84 \\ -0,21 & 0,07 & 0,80 & -0,13 & | & 2,56 \\ 0,15 & -0,31 & 0,06 & -0,84 & | & 0,93 \end{pmatrix}$$

$$15.\ \begin{pmatrix} 0,22 & 0,23 & 1,34 & 0,25 & | & 1,92 \\ 0,17 & 1,28 & 0,19 & 0,21 & | & 1,81 \\ 1,23 & 0,14 & 0,15 & 0,16 & | & 1,70 \\ 0,26 & 0,27 & 0,28 & 1,39 & | & 2,03 \end{pmatrix}$$

Список использованных источников

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
2. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие. – М.: Эдиториал УРСС, 2000.
4. Поршнев С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе Mathcad. – Спб.: БХВ-Петербург, 2005.