

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Короткова Н.В.

**Геофизическая гидродинамика
(Краткий курс лекций)**

Саратов, 2016

Аннотация

В данном учебном пособии изложены некоторые вопросы теоретической метеорологии, необходимые для подготовки студентов в области предсказания погоды. В пособии не используется более сложный математический аппарат, чем дифференциальное и интегральное исчисление, что позволяет студентам освоить предложенный материал самостоятельно.

Учебное пособие предназначено, в основном, для студентов направления 05.03.05 - Прикладная гидрометеорология дневной и заочной формы обучения, а также при подготовке к государственному экзамену по направлению.

Геофизическую гидродинамику (теоретическую физику атмосферы) можно характеризовать как науку, которая, опираясь на достижения математики, теоретической механики, физики, гидродинамики, гидромеханики, термодинамики стремится с одной стороны, дать теоретическое объяснение процессов и явлений, происходящих в атмосфере, а с другой стороны, разработать методы предвычисления развития этих процессов и явлений. Главной задачей является предвычисление метеорологических элементов или прогноз погоды количественными методами.

В пособии не используется более сложный математический аппарат, чем дифференциальное и интегральное исчисление, что позволяет студентам освоить предложенный материал самостоятельно.

Особая благодарность Фетисовой Лидии Михайловне, моему учителю, преподавателю кафедры метеорологии и климатологии, которая длительное время преподавала курсы «Геофизическая гидродинамика», «Механика жидкости и газа», «Динамическая метеорология», за помощь в подготовке и написании данного учебного пособия.

ВВЕДЕНИЕ

Геофизическая гидродинамика (механика жидкости и газа) – раздел гидромеханики, в котором изучаются движение несжимаемых жидкостей и взаимодействие их с твердыми телами.

Методами гидродинамики можно исследовать также движение газов, если скорость этого движения значительно меньше скорости звука в рассматриваемом газе. Основные уравнения гидродинамики получаются путем применения общих законов физики к элементарной массе, выделенной в жидкости.

Решение общих уравнений гидродинамики исключительно сложно и может быть доведено до конца не всегда, а только в небольшом числе частных случаев. Поэтому приходится упрощать задачи путем отбрасывания в уравнениях членов, которые в данных условиях имеют менее существенное значение для определения характера течения. Например, в ряде случаев пренебрегают вязкостью жидкости, т.е. приходят к теории идеальной жидкости. В других случаях пренебрегают ускорением, что приводит к другому приближенному решению задач гидродинамики.

Часто атмосферу разделяют на отдельные слои, для которых возможны упрощения прогностических уравнений.

При решении задачи в пределах отдельного слоя часто приходится обращаться к методу последовательных приближений, т.к. точное решение и упрощенных уравнений часто оказывается невозможным.

Идея этого метода заключается в том, что сначала оцениваются все члены, входящие в уравнения. Среди них выделяются главные, наиболее существенные, а остальные отбрасываются. Затем ищется решение этой приближенной системы уравнений. Полученное решение будет первым (грубым) приближением. Если этого недостаточно, то обращаются к отысканию второго приближения. Для этого в исходных уравнениях сохраняют малые члены, а вместо искомых функций подставляют найденное первое приближение. После этого интегрируют систему и получают второе приближение. Теоретически можно получить и третье, и последующие приближения, но практически ограничиваются обычно вторым приближением.

Лекция 1

Основные уравнения гидродинамики идеальной жидкости

Атмосферные процессы могут быть описаны на основе трех известных законов физики: закона изменения количества движения, закона сохранения массы и закона сохранения энергии.

Математическим выражением этих законов являются уравнения: движения, неразрывности и притока тепла соответственно.

Наряду с этими уравнениями при исследовании атмосферных процессов должны быть привлечены и другие соотношения, описывающие специфические свойства атмосферы.

К их числу относятся уравнение переноса влаги и уравнение состояния.

При разработке прогностических моделей атмосферы для целей краткосрочного (на 1-3 суток) и среднесрочного (на 3-10 суток) прогноза погоды выделяют три основных типа атмосферных процессов: крупномасштабные, среднемасштабные и мелкомасштабные процессы.

Крупномасштабные, или макромасштабные процессы характеризуются горизонтальными масштабами порядка тысяч (1-10 тыс) километров. Они развиваются за период времени порядка 1-10 суток. Примерами таких процессов являются циклогенез, струйные течения и др.

Среднемасштабные, или мезомасштабные процессы развиваются на площади, линейные размеры которой имеют порядок десятков и сотен километров, за период времени порядка часов.

К числу мезопроцессов можно отнести атмосферные фронты, развитие кучевой облачности, орографические возмущения и др.

Мелкомасштабные, или микромасштабные процессы характеризуются горизонтальными масштабами до нескольких сотен метров, а по времени порядка минут и секунд.

В качестве примеров можно привести атмосферную турбулентность, процессы в приземном слое.

Наиболее точно синоптические процессы описываются уравнениями гидродинамики, представленными в сферической системе координат, т.к. она учитывает шарообразную форму Земли.

Для краткосрочного прогноза сферическая система координат заменяется декартовой (или стандартной) системой. Конечно, точность уравнений снижается, но оказывается вполне достаточной для краткосрочного прогноза на небольшой территории. Эта система с координатами x, y, z . Кроме стандартной используется еще изобарическая система с координатами x, y, P .

Ось x в этих системах направлена по параллели на восток, ось y – по меридиану на север, а ось z или P – вертикально вверх.

В стандартной системе оси x и y лежат на горизонтальной плоскости. В изобарической – оси x и y лежат на изобарической поверхности.

В задачах локального прогноза, а также при описании процессов внутри приземного, пограничного слоя атмосферы предпочтительнее использовать систему координат x, y, z .

Рассмотрим эти уравнения применительно к идеальной жидкости, какой считается атмосфера при отсутствии молекулярной и турбулентной вязкости.

Можно записать уравнение движения в следующем виде: уравнение движения частицы идеальной атмосферы возникает под действием следующих сил:

- силы тяжести,
- силы Кориолиса (отклоняющей силы вращения Земли)
- силы барического градиента:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{g} - 2[\vec{\omega}\vec{V}] - \frac{1}{\rho} \text{grad}P$$

В системе прогностических уравнений первые три уравнения – это проекции на оси x, y, z основного уравнения движения атмосферы.

Итак:

$$1) \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \ell v$$

$$2) \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \ell u$$

$$3) \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

Проекция на ось z оказалась основным уравнением статики атмосферы, т.к. в нем есть ускорение силы тяжести g , которая имеет проекцию только на ось z . Поэтому все остальные проекции на ось z , по сравнению с $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, значительно меньше и ими можно пренебречь.

- 4) Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{V}) = 0$$

Это уравнение выражает закон сохранения массы в атмосфере. Оно позволяет установить связь между вертикальной и горизонтальными составляющими скорости.

5) Уравнение состояния

$$P = \rho RT$$

6) Уравнение притока тепла. Это применение к атмосфере выражения первого начала термодинамики. Оно может быть записано в различных формах. Одна из них следующая:

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{\varepsilon}{C_p \rho}$$

7) Уравнение переноса влаги. Его запишем для удельной влажности (или массовой доли водяного пара) q :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{m}{\rho}$$

Эти уравнения образуют замкнутую систему из семи уравнений для семи неизвестных искомых величин: u , v , w , P , ρ , T , q для атмосферы, рассматриваемой как идеальная жидкость.

Эта система уравнений после некоторых преобразований может быть использована как для качественного анализа, так и для предвычисления полей метеовеличин с помощью ЭВМ.

Лекция 2

Связь между метеорологическими производными

В метеорологии различают индивидуальную, локальную, или местную, и геометрическую производные.

Индивидуальная производная описывает изменение некоторого свойства f в индивидуальной частице воздуха с течением времени. Индивидуальная производная является полной производной функции $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$ по времени, т.е. $\frac{df}{dt}$.

Она характеризует индивидуальные изменения. Такие изменения метеорологических элементов в воздушной массе приводят к трансформации её. Индивидуальные изменения метеорологических элементов в воздушной массе можно вычислить или непосредственно определить, двигаясь вместе с данной воздушной частицей, например, в аэростате.

Локальная производная описывает изменения во времени некоторого свойства f в неподвижной (фиксированной) точке пространства. Локальная производная характеризуется частной производной функции $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$ по времени, т.е. $\frac{\partial f}{\partial t}$. Она описывает изменения элемента в данной точке поля.

Локальные изменения можно определить непосредственно по двум последовательным наблюдениям в данном пункте или по записи прибора.

Геометрическая производная характеризует изменения свойства f в пространстве или в данном направлении. Она является частной производной функции $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$ по направлению, т.е. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial n}$.

Метеорологические производные связаны между собой.

Запишем полную производную функции $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

В системе координат $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ изменение координаты в единицу времени в направлении траектории движущейся частицы характеризует соответствующие составляющие скорости, т.е.

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = v; \quad \frac{dz}{dt} = w$$

В силу этого можно записать

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}$$

Так как рассуждения велись для произвольного свойства, то в общем случае будет справедливым следующее соотношение, являющееся оператором:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Его называют иногда оператором Эйлера.

Следовательно, индивидуальная производная некоторого свойства равна алгебраической сумме локальной производной и составляющих геометрической производной, умноженных на соответствующие составляющие скорости его перемещения.

В случае, когда вертикальная составляющая скорости отсутствует, т.е. $w=0$, выражение оператора принимает плоский характер. В отличие от общего соотношения его обозначают индексом S :

$$\frac{d_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

Метеорологические производные входят в качестве членов как в уравнения, описывающие атмосферные процессы, так и в различные расчетные формулы, широко используемые практикой. Поэтому возникает задача практического вычисления производных по данным метеорологических и аэрологических наблюдений. Обычно такие вычисления осуществляются с помощью центральных разностей либо по двум точкам, либо по большему числу точек.

В обоих случаях считается возможным заменить значение производной некоторой функции f в точке средней величиной производной в некотором интервале от x_1 до x_2 , т.е. $\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$

Здесь $\delta f = f_2 - f_1$ и $\delta x = x_2 - x_1$ – конечные приращения функции f и независимой переменной x . (рисунок 2.1).

Таким образом, в данном случае отношение дифференциалов заменяется отношением конечных разностей.

Для определения производных, осредненных по некоторой траектории, используют систему равноотстоящих точек (узлов), которые в совокупности образуют расчетную сетку. Расстояние между соседними узлами называют шагом сетки и обозначают d . (рисунок 2.2).

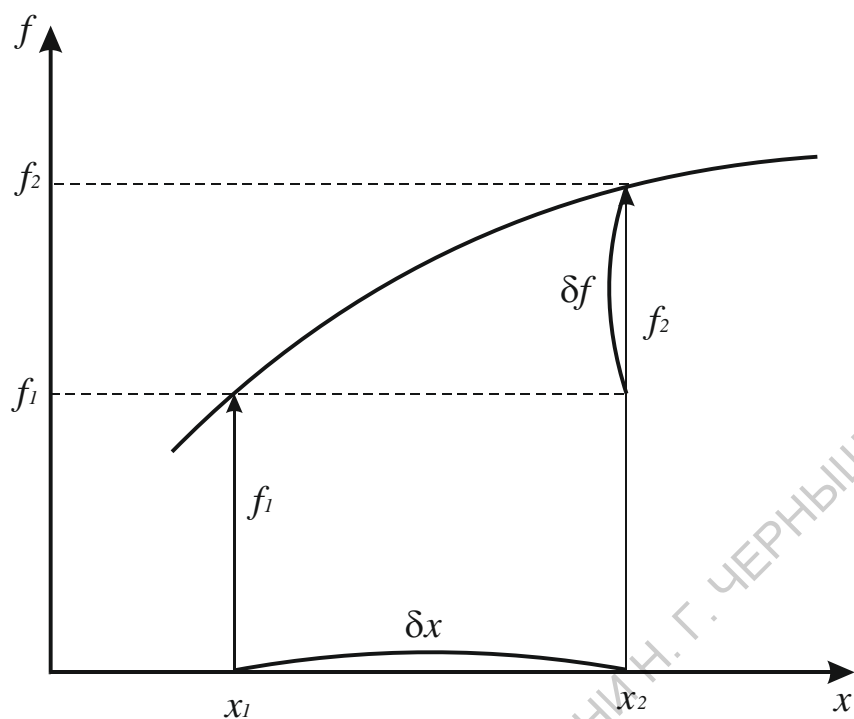


Рисунок 2.1

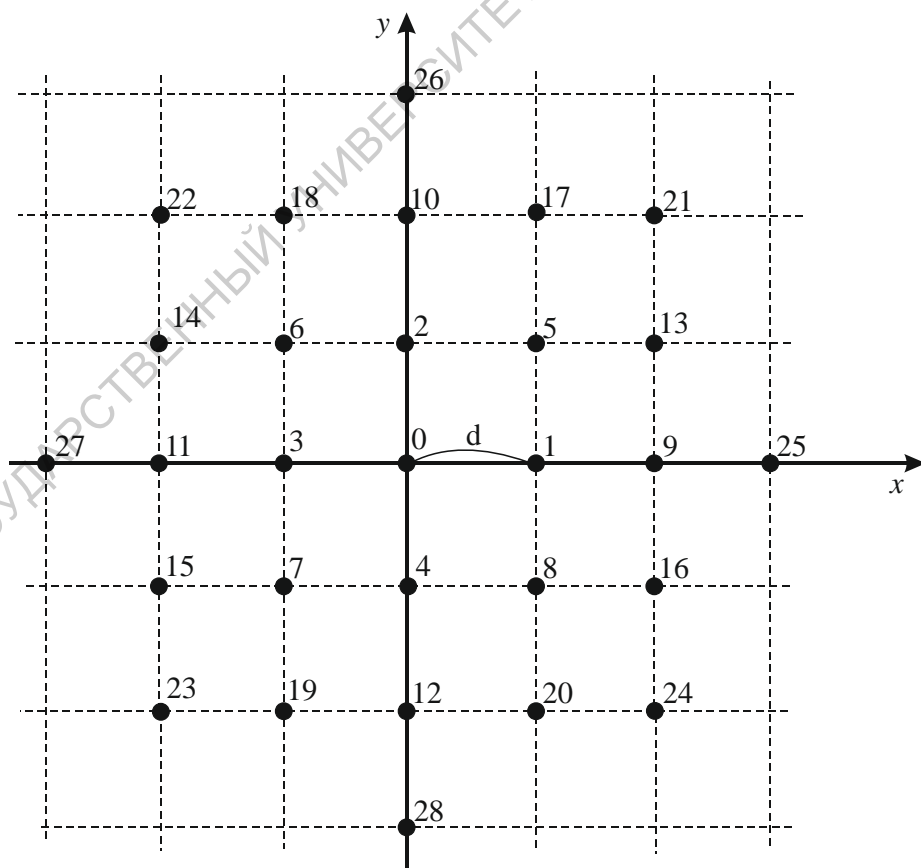


Рисунок 2.2

Формулы для определения производных выглядят таким образом:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2d}(f_1 - f_3)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{2d}(f_2 - f_4)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 &= \frac{1}{2d} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_3 \right] = \frac{1}{2d} \left[\frac{f_9 - f_0}{2d} - \frac{f_0 - f_{11}}{2d} \right] \\ &= \frac{1}{4d^2} (f_9 + f_{11} - 2f_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 &= \frac{1}{2d} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_4 \right] = \frac{1}{2d} \left[\frac{f_{10} - f_0}{2d} - \frac{f_0 - f_{12}}{2d} \right] \\ &= \frac{1}{4d^2} (f_{10} + f_{12} - 2f_0) \end{aligned}$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{4d^2} (f_9 + f_{10} + f_{11} + f_{12} - 4f_0)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 &= \frac{1}{2d} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \right] = \frac{1}{2d} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_3 \right] = \frac{1}{2d} \left[\frac{f_5 - f_8}{2d} - \frac{f_6 - f_7}{2d} \right] \\ &= \frac{1}{4d^2} (f_5 + f_7 - f_6 - f_8) \end{aligned}$$

Здесь f – величина какого-либо метеорологического элемента.

Цифровой индекс при f , $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ указывает номер точки на сетке.

$2d$ – приращение независимых переменных x и y .

d – шаг сетки, т.е. расстояние между соседними точками.

Величину δf следует брать в зависимости от приращений независимых переменных. Так, для x и y эти приращения должны быть не менее среднего расстояния между пунктами наблюдений. Обычно при вычислении производных по картам погоды шаг сетки d выбирается в пределах 250-500 км. При уменьшении шага δf будет являться разностью близких друг к другу по величине значений.

При увеличении шага производная, определенная как средняя величина в выбранном интервале, будет значительно отличаться от производной в данной точке.

Лекция 3

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

3.1 Уравнение движения (из уравнения Навье-Стокса)

При изучении атмосферных движений в динамической метеорологии широко используются общие законы гидромеханики и термодинамики. Уравнение Навье – Стокса является самым общим уравнением движения для газа, где ν - молекулярная вязкость.

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{аб} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad P + \frac{\nu}{3} grad(div\vec{V}) + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (3.1)$$

Это уравнение записано по отношению к абсолютной системе координат. Оно следует из второго закона Ньютона

$$m \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{аб} = \vec{F} \quad (3.2)$$

Для метеорологии это неудобно, так как нас интересует движение относительно Земли. Поэтому нужно перейти к относительному движению.

Два последних члена в уравнении (1) обозначим через \vec{N} .

\vec{N} – ускорение, вызванное внутренним трением жидкости.

В атмосфере большое значение имеет не молекулярная, а турбулентная вязкость, которая наиболее сильно проявляется в приземном слое, а в свободной атмосфере вязкими силами можно пренебречь.

Из механики известно, что абсолютное ускорение на Земле складывается из относительного, переносного и ускорения, вызванного отклоняющей силой вращения Земли.

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{аб} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{от} + \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{пер} + 2[\vec{\omega} \vec{V}_{от}] \quad (3.3)$$

Нас интересует относительное ускорение $\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{от}$.

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{om} = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{a\bar{o}} - \left(\frac{dV}{dt}\right)_{пер} - 2[\bar{\omega}\bar{V}_{от}] \quad (3.4)$$

Подставим в уравнение (3.4) вместо $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{a\bar{o}}$ уравнение Навье-Стокса.

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{om} = \bar{F} - \left(\frac{dV}{dt}\right)_{пер} - 2[\bar{\omega}\bar{V}_{от}] - \frac{1}{\rho} gradP + \bar{N} \quad (3.5)$$

В уравнении (3.5) все члены имеют размерность ускорения, т.е. все силы отнесены к единице массы.

Рассмотрим член $\bar{F} - \left(\frac{dV}{dt}\right)_{пер}$

Сила \bar{F} - напряженность поля массовых сил (для силы тяжести величина \bar{F} равна ускорению свободного падения \bar{g}): $\bar{F} = \bar{g}$

$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{пер}$ - ускорение переносного движения, вызванное вращением Земли.

$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{пер} = \omega^2 r \cos\varphi$ - это величина центробежной силы, рассчитанной на

единицу массы.

$r = 6,4 \cdot 10^6$ м – средний радиус Земли

$\omega = 7,3 \cdot 10^{-5}$ 1/с – угловая скорость вращения Земли

$\omega^2 r = 0,034$ м/с²

$g \approx 10$ м/с²

$g \gg \omega^2 r$, т.е. переносное ускорение не превышает 0,3 % от ускорения

силы тяжести.

Значит, $\bar{F} - \left(\frac{dV}{dt}\right)_{пер} \approx \bar{g}$ (3.6)

Ускорение Кориолиса также невелико. Если принять $V_{om} = 10$ м/с, то

$2\omega V_{om} = 2 \cdot 7,3 \cdot 10^{-5}$ 1/с $\cdot 10$ м/с² $\approx 0,001$ м/с²

По отношению к ускорению силы тяжести g эта величина очень мала, но при горизонтальном движении g роли не играет, а остается только сила Кориолиса. Поэтому при горизонтальном движении ею пренебрегать нельзя.

В дальнейшем мы будем рассматривать только относительное движение, поэтому обозначение $\bar{V}_{от, om} \left(\frac{d\bar{V}}{dt} \right)$ не будем употреблять. И тогда основное уравнение движения атмосферы будет записано в таком виде:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{g} - 2[\bar{\omega}\bar{V}] - \frac{1}{\rho} gradP + \bar{N} \quad (3.7)$$

3.2 Уравнение движения в декартовой системе координат

Декартова система координат называется еще и стандартной системой. Запишем основное уравнение движения (3.7) и спроектируем все члены уравнения на оси декартовой системы координат (x, y, z). В декартовой системы оси x, y, z составляют правую тройку векторов. Обычно ось x направлена по параллели на восток, ось y – по меридиану на север, ось z – вертикально вверх. Она применяется обычно в теоретических расчетах.

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{g} - 2[\bar{\omega}\bar{V}] - \frac{1}{\rho} gradP + \bar{N} \quad (3.7)$$

Спроектируем все члены уравнения (3.7) на оси x, y, z.

$$\left(\frac{d\bar{V}}{dt} \right)_x = \frac{du}{dt}$$

$$\left(\frac{d\bar{V}}{dt} \right)_y = \frac{dv}{dt}$$

$$\left(\frac{d\bar{V}}{dt} \right)_z = \frac{dw}{dt}$$

Сила тяжести не имеет горизонтальной составляющей

$$g_x = 0; g_y = 0; g_z = -g$$

Прежде чем развернуть выражение для силы Кориолиса в стандартных координатах, напомним, что собой представляет угловая скорость вращения Земли ($\bar{\omega}$). Это вектор, направленный по оси вращения с юга на север. Это вектор меридиональный, поэтому его проекция на ось x равна нулю, т.е. $\omega_x=0$.

Другие компоненты ω_y и ω_z , лежащие в плоскости меридиана, легко выражаются через широту места φ .

Рассмотрим меридиональный разрез земного шара.

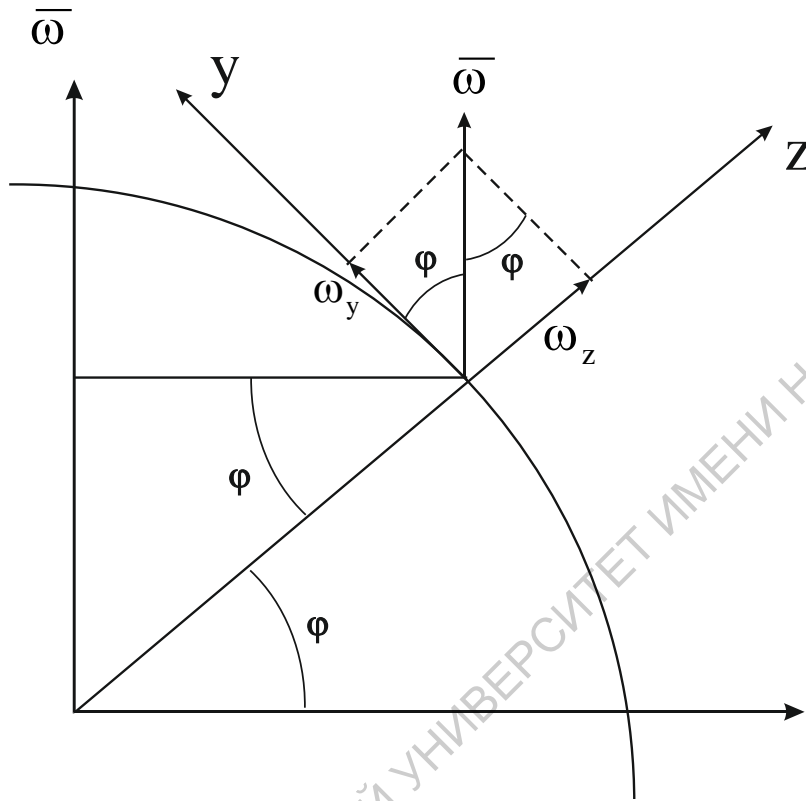


Рисунок 3.1 - Меридиональный разрез земного шара

$$\omega_y = \omega \cdot \cos\varphi$$

$$\omega_z = \omega \cdot \sin\varphi$$

Вертикальная компонента угловой скорости вращения Земли положительна в северном полушарии и отрицательна в южном.

Запишем векторное произведение $[\bar{\omega}\bar{V}]$ в стандартных координатах.

$$2[\bar{\omega}\bar{V}] = 2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & \omega_y & \omega_z \\ u & v & w \end{vmatrix} = (2\omega_y w - 2\omega_z v)\bar{i} + 2\omega_z u\bar{j} - 2\omega_y u\bar{k}$$

Компоненты силы Кориолиса:

$$2[\bar{\omega}\bar{V}]_x = 2\omega_y w - 2\omega_z v$$

$$2[\bar{\omega}\bar{V}]_y = 2\omega_z u$$

$$2[\bar{\omega}\bar{V}]_z = -2\omega_y u$$

Вертикальная скорость w значительно меньше горизонтальной (u и v) $w \ll u, v$ поэтому $w \approx 0$. Учитывая связь ω_y и ω_z с ω , запишем проекции силы Кориолиса на оси x, y, z .

$2\omega \sin\varphi = \ell$ - параметр Кориолиса.

$$2[\bar{\omega}\bar{V}]_x = -\ell v$$

$$2[\bar{\omega}\bar{V}]_y = \ell u$$

$$2[\bar{\omega}\bar{V}]_z = -2\omega \cos\varphi u$$

Запишем проекции на оси x, y, z силы барического градиента.

$$\left(\frac{1}{\rho} \text{grad}P\right)_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \text{grad}P\right)_y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \text{grad}P\right)_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$$

Вязкие силы в проекциях на оси x, y, z будут N_x, N_y, N_z . Теперь запишем проекции основного уравнения движения на оси декартовой (стандартной) системы:

$$\frac{du}{dt} = \ell v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + N_x$$

$$\frac{dv}{dt} = -\ell u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + N_y$$

$$\frac{dw}{dt} = 2\omega \cos\varphi u - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + N_z$$

Третью проекцию на ось z можно значительно упростить.

$$\frac{dw}{dt} \ll g,$$

$$N_z \ll g \text{ и } 2\omega \cos\varphi u \ll g$$

поэтому ими, по сравнению с g , можно пренебречь. Тогда от третьего уравнения остается уравнение статики атмосферы. Эта замена называется

гидростатическим приближением, или отфильтрованием мелких колебаний давления, не влияющих на погоду, на изменение давления.

Таким образом, уравнение движения в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \ell v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + N_x \\ \frac{dv}{dt} &= -\ell u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + N_y \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= -\rho g \end{aligned} \right\} (3.8)$$

3.3 Уравнение движения в сферической системе координат

Уравнения (3.8) написаны при допущении, что влиянием на атмосферные движения кривизны земной поверхности можно пренебречь. Такое допущение справедливо во всех случаях, за исключением того, когда рассматривается задача об общей циркуляции атмосферы. В этом случае масштаб рассматриваемого движения сравним с масштабом земного шара и поэтому уравнения (3.8) необходимо заменить соответствующими уравнениями в сферических координатах.

Положение точки В определяется тремя сферическими координатами: r , φ , λ .

Между сферическими и стандартными координатами есть связь.

$$\begin{aligned} \partial x &= r \cos \varphi \partial \lambda \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= u_\lambda = r \cos \varphi \frac{\partial \lambda}{\partial t} = r \cos \varphi \lambda \\ \partial y &= r \partial \varphi \end{aligned}$$

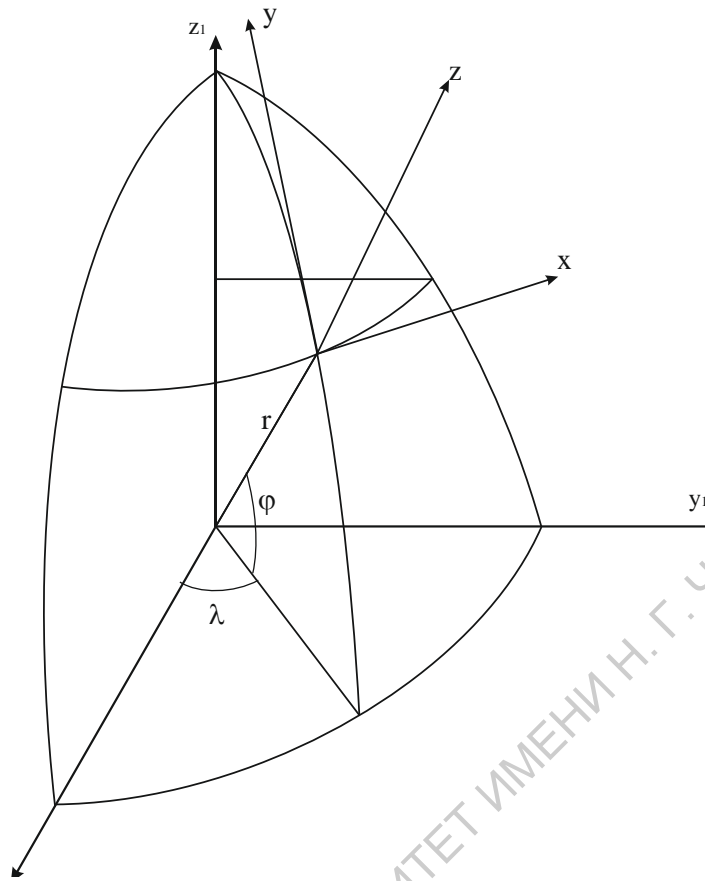


Рисунок 2 – Сферическая система координат

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v_{\varphi} = r \frac{\partial \varphi}{\partial t} = r \dot{\varphi}$$

$$\partial z = \partial r$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = w = \frac{\partial r}{\partial t} = \dot{r}$$

Теперь можно преобразовать уравнения (3.8) из стандартной в сферическую систему координат (3.9).

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \ell v - \frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial P}{\partial \lambda} + N_x \\ \frac{dv}{dt} &= -\ell u - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + N_y \\ \frac{\partial P}{\partial r} &= -\rho g \end{aligned} \right\} (3.9)$$

Строго говоря, все прогностические схемы следовало бы рассматривать в сферической системе. Но эта система очень сложна, поэтому уравнения в этой системе применяются для долгосрочных прогнозов погоды, так как за

большие промежутки времени частица огибает большие дуги. А при краткосрочном прогнозе Землю можно считать плоской и использовать уравнения в стандартных координатах.

3.4 Уравнение движения в натуральной (естественной) системе координат

Натуральная система координат $(\bar{\tau}^0, \bar{n}^0, \bar{k}^0)$ тесно связана с движением. Скорость в ней направлена по касательной к траектории движения.

$$\bar{V} = V\bar{\tau}^0$$

Ускорение частицы при произвольном горизонтальном движении в естественных координатах запишется следующим образом:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\bar{\tau}^0 + \frac{V^2}{R}\bar{n}^0,$$

где $\frac{dV}{dt}\bar{\tau}^0$ - касательное (тангенциальное) ускорение

$\frac{V^2}{R}\bar{n}^0$ - нормальное (центростремительное) ускорение.

Рассмотрим горизонтальное движение на сфере. Пусть по поверхности сферы (Земного шара) движется т. М (рисунок 3.3).

В любой момент это движение можно рассматривать как движение по окружности, центр которой легко найти. $MC = R$ - радиус кривизны в точке М.

$\angle MOC$ обозначим через α . Ось OM – это вертикальная ось (Z).

В точке М проведем линию горизонта. Эта линия пересекает OC в точке C_1 . Линия MC_1 – линия горизонта. На этой линии горизонта выберем направление нормали \bar{n}_r^0 (горизонтальная нормаль к траектории). $MC_1 = R_r$, т.е. горизонтальный радиус, который мы обнаруживаем на карте. В точке М образуется прямоугольная правая система координат.

$\bar{\tau}^0, \bar{n}_r^0, \bar{k}^0$ - это три вектора образуют правую взаимно ортогональную систему координат.

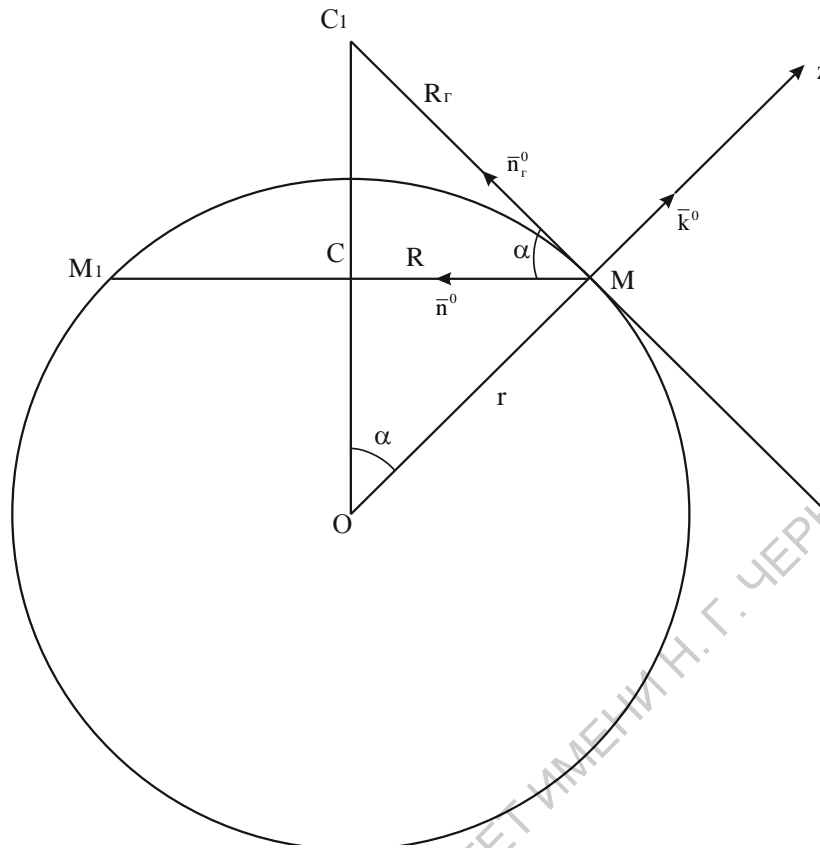


Рисунок 3.3 – Горизонтальное движение на сфере

Запишем основное уравнение движения:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{g} - 2[\bar{\omega}\bar{V}] - \frac{1}{\rho} gradP$$

Спроектируем члены уравнения движения на горизонтальные оси естественной системы координат:

$$\left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_{\bar{\tau}^0} = \frac{dV}{dt} \bar{\tau}^0 \tau^0 + \frac{V^2}{R} \bar{n}^0 \bar{\tau}^0 = \frac{dV}{dt}$$

$$\bar{\tau}^0 \bar{\tau}^0 = 1; \bar{n}^0 \bar{\tau}^0 = 0; \bar{n}^0 \bar{n}_r^0 = \cos\alpha \text{ (из } \Delta CMC_1)$$

$$\left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_{\bar{n}_r^0} = \frac{V^2}{R} \bar{n}^0 \bar{n}_r^0 = \frac{V^2}{R} \cos\alpha = \frac{V^2}{\frac{R}{\cos\alpha}} = \frac{V^2}{R_r}$$

Из ΔCMC_1 :

$$\frac{R}{R_r} = \cos\alpha \rightarrow R_r = \frac{R}{\cos\alpha}$$

$$\left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_{\bar{k}^0} = \frac{V^2}{R} \bar{n}^0 \bar{k}^0 = \frac{V^2}{R} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{V^2}{R} \sin\alpha = -\frac{V^2}{r}$$

Из ΔCOM :

$$R = r \sin\alpha \rightarrow \frac{R}{\sin\alpha} = r$$

Спроектируем правую часть на оси $\bar{\tau}^0, \bar{n}_r^0, \bar{k}^0$.

Сила тяжести не имеет горизонтальной составляющей. Поэтому единственной отличной от нуля составляющей будет вертикальная компонента силы тяжести.

$$\bar{g} = -g \bar{k}^0$$

Сила Кориолиса в натуральных координатах выразится так:

$$2[\bar{\omega}\bar{V}] = 2 \begin{vmatrix} \bar{\tau}^0 & \bar{n}_r^0 & \bar{k}^0 \\ \omega_\tau & \omega_n & \omega_z \\ V & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\omega_z \bar{n}_r^0 V - 2\omega_n V \bar{k}^0$$

$$\omega_z = \omega \sin\varphi$$

$$2\omega_z = 2\omega \sin\varphi = \ell$$

$$2[\bar{\omega}\bar{V}] = \ell V \bar{n}_r^0 - 2\omega_n \bar{k}^0$$

Мы видим, что сила Кориолиса не имеет составляющей в направлении движения. Она лишь отклоняет частицу перпендикулярно ее траектории. Поэтому она и называется отклоняющей силой вращения Земли.

Градиент давления в естественных координатах можно представить так:

$$\text{grad}P = \frac{\partial P}{\partial s} \bar{\tau}^0 + \frac{\partial P}{\partial n_r} \bar{n}_r^0 + \frac{\partial P}{\partial z} \bar{k}^0$$

Теперь запишем проекции уравнения движения на оси натуральной системы координат.

на ось $\bar{\tau}^0$:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}$$

Изменение скорости вдоль траектории произойдет, если будет изменяться вдоль траектории давление.

на ось \bar{n}_r^0 :

$$\frac{V^2}{R_r} = -\ell V - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n_r}$$

на ось \bar{k}^0 :

$$-\frac{V^2}{r} = -g + 2\omega_n V - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$$

Последнее уравнение мы можем упростить, отбросив $\frac{V^2}{r}$, $2\omega_n V$, которые очень малы по сравнению с g . От третьей проекции остается уравнение статики

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

Можно сделать вывод, что каков бы ни был горизонтальный ветер, распределение давления по вертикали будет такое же, как в случае покоя.

Умножим первое уравнение (проекцию на $\bar{\tau}^0$) на $\bar{\tau}^0$, а второе (проекцию на \bar{n}_r^0) на \bar{n}_r^0 и сложим, получим проекции уравнения движения на оси натуральной системы координат.

$$\frac{dV}{dt} \bar{\tau}^0 + \frac{V^2}{R} \bar{n}_r^0 = -\ell V \bar{n}_r^0 - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial s} \bar{\tau}^0 + \frac{\partial P}{\partial n_r} \bar{n}_r^0 \right)$$

$$\frac{dV}{dt} \bar{\tau}^0 + \frac{V^2}{R} \bar{n}_r^0 = \left(\frac{dV}{dt} \right)_r - \text{полная горизонтальная производная, т.е.}$$

горизонтальное ускорение.

Рассмотрим, что такое $V \bar{n}_r^0$?

Раскроем векторное произведение $[\bar{k}^0 \bar{V}]$

$$[\bar{k}^0 \bar{V}] = \begin{vmatrix} \bar{\tau}^0 & \bar{n}_r^0 & \bar{k}^0 \\ 0 & 0 & 1 \\ V & 0 & 0 \end{vmatrix} = V \bar{n}_r^0$$

Следовательно, $V \bar{n}_r^0 = [\bar{k}^0 \bar{V}]$

Введем понятие горизонтального градиента давления

$$\text{grad}_r P = \nabla_r P = \frac{\partial P}{\partial s} \bar{\tau}^0 + \frac{\partial P}{\partial n_r} \bar{n}_r^0$$

Запишем уравнение горизонтального движения в натуральных координатах.

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_r &= -\ell[\bar{k}^0\bar{V}] = -\frac{1}{\rho}\nabla_r P \\ \left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_r &= \frac{dV}{dt}\bar{\tau}^0 + \frac{V^2}{R}\bar{n}_r \\ \nabla_r P &= \frac{\partial P}{\partial s}\bar{\tau}^0 + \frac{\partial P}{\partial n_r}\bar{n}_r \end{aligned} \right\} (3.10)$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Лекция 4
Волновые движения в атмосфере

4.1 Основные понятия о волновых движениях

При волновых движениях материальные частицы совершают колебания около положения равновесия или около основного движения. Эти колебания могут происходить, например, параллельно какой-либо прямой или по круговым орбитам.

Классическим и простейшим примером волнового движения являются волны на поверхности воды.

Примером волновых движений в атмосфере могут служить волны, возникающие на поверхности раздела двух воздушных слоев, движущихся с разными скоростями и имеющих различные плотности. При благоприятных условиях эти волны становятся видимыми. А именно, когда частицы, поднимаясь в области гребня волны, достигают уровня конденсации, а частицы, опускающиеся в области ложбин, удаляются от состояния насыщения, образуются волнистые облака.

Тот факт, что такие волнистые облака возникают одновременно над огромной территорией, свидетельствует о возможном наличии волнового движения и в том случае, когда волновых облаков нет. Верхняя граница сплошного облачного покрова обычно имеет вид поверхности взволнованного моря.

Характерным для волновых движений является то, что при сравнительно малых колебаниях материальных частиц имеют место большие перемещения некоторых элементов волны, например, гребня или впадины волны. При этом скорость перемещения волны не связана с поступательными движениями частиц. Заметим еще, что изменения колебательного характера испытывают не только координаты частиц, но все метеорологические параметры (температура, плотность, давление, скорость и пр.).

Колебательные движения в атмосфере могут быть вызваны проявлением «внешних» по отношению к атмосфере факторов. Такими факторами могут быть, например, притяжение Луны, влияние горных массивов и др. **Волновые движения, вызванные внешними факторами, называют вынужденными колебаниями.** Примерами вынужденных волновых колебаний являются лунные приливы, волны препятствий и др.

Волновые движения, не связанные непосредственно с внешними факторами, называют собственными, или свободными, колебаниями. Эти колебания можно разбить на три основных класса: крупномасштабные, гравитационные и акустические волны.

Крупномасштабные волны – это проявление инерционных сил. Волны этого класса иногда называют инерционными, а также длинными волнами, волнами Россби. Они возможны лишь на вращающейся Земле. Волны этого класса имеют длину до нескольких тысяч километров, скорость – до десятков метров в секунду, период – до нескольких суток. Их амплитуда оказывается значительной и составляет, например, в поле давления 20-100 гПа. С точки зрения задач прогноза погоды движение и эволюция этих волн представляет наибольший интерес. **Это метеорологически значимые волны.** Их можно обнаружить на любой карте погоды. Гребень волны в поле давления совпадает с центром антициклона или осью барического гребня, а впадина волны – с центром циклона или осью ложбины.

Гравитационные волны связаны с проявлением силы тяжести, то есть с влиянием гравитационного поля Земли (что и обуславливает их название). Они возникают при изменяющейся с высотой плотности воздуха, когда вышедшая по каким-либо причинам из состояния равновесия воздушная частица испытывает действие архимедовой силы, стремящейся вернуть ее в прежнее положение. Колебания и смещения при этом происходят в вертикальной плоскости. Следовательно, равенство нулю вертикальной скорости ($w=0$) свидетельствует об отсутствии гравитационных волн. Периоды колебаний, связанных с гравитационными волнами в атмосфере, составляют около 330 с, а скорость перемещения этих волн изменяется от десятков до сотен м/с, достигая в отдельных случаях 300 м/с.

Амплитуды гравитационных волн невелики. Однако при наложении ряда отдельных волн может возникнуть значительное возмущение. Так, например, амплитуда возмущения в поле скоростей, обусловленная гравитационными волнами, может достигать 5-10 м/с. Длина гравитационных волн достигает нескольких десятков или сотен километров.

Акустические волны, или волны сжатия, обусловлены сжатием или разрежением среды. Период колебаний этих волн не превышает 300 с. Так как к этому классу относятся и волны, воспринимаемые органами слуха человека (с частотой от 20 до 20 000 Гц), то эти волны называют также звуковыми.

Скорость перемещения акустических волн велика и колеблется около 300 м/с (скорость звуковых волн, воспринимаемых органами слуха человека в сухой атмосфере, составляет около 330 м/с).

Амплитуды этих волн невелики и, например, для давления составляют всего десятые доли гектопаскаля (за исключением случаев взрывных волн, когда амплитуды резко возрастают).

Перейдем теперь к рассмотрению отдельных типов волн.

4.2 Гравитационные волны на свободной поверхности несжимаемой жидкости

Рассмотрим сначала простейший случай волнового движения на свободной поверхности слоя несжимаемой жидкости толщиной h , простирающегося по горизонтали во все стороны неограниченно. Влияние вращения Земли мы не рассматриваем.

Постановка задачи

Рассматривается жидкость, которая в начальный момент имеет горизонтальную поверхность. Возникновение волны происходит, если в некотором месте прикладывается импульс, т.е. возникает давление.

Таким образом, возникновение волны связано с импульсным повышением давления.

$$J = \sum_0^{\delta t} p dt$$

δt – малый промежуток времени

J – импульс – это мгновенное действие большого давления

Сделаем допущения:

- 1) Жидкость несжимаема ($\rho = \text{const}$)
- 2) Жидкость идеальная (без трения) $N = 0$
- 3) Массовая сила есть сила потенциальная (сила геопотенциала) $\vec{F} = \vec{g}$

Вообще-то воздух сжимаем, но при медленных движениях сжимаемость себя не проявляет.

Возьмем уравнение движения для идеальной жидкости

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{g} - 2[\bar{\omega}\bar{V}] - \frac{1}{\rho} \text{grad}P$$

От этого уравнения остается уравнение Эйлера, т.к. мы игнорируем действие силы Кориолиса. Действительно, в таких случаях сила Кориолиса исчезающе мала.

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad}P - \text{уравнение Эйлера}$$

Чтобы определить характер движения жидкости после действия импульса, нужно уравнение проинтегрировать:

$$\int_0^{\delta t} \frac{d\bar{V}}{dt} dt = \int_0^{\delta t} \bar{g} dt - \int_0^{\delta t} \frac{1}{\rho} \text{grad}P dt$$

1) $\int_0^{\delta t} \frac{d\bar{V}}{dt} dt = \bar{V}$ – это приращение скорости за время δt , т.е. это скорость, вызванная действием импульса

$$2) \int_0^{\delta t} \bar{g} dt = \bar{g} \delta t \approx 0$$

Т.к. δt – величина очень малая, то влияние постоянной силы \bar{g} за время δt очень мало. Сила тяжести \bar{g} выходит за знак интеграла как постоянная, а $\delta t \approx 0$.

Таким образом сила тяжести не может вызвать волн.

$$3) \int_0^{\delta t} \frac{1}{\rho} \text{grad}P dt = \frac{1}{\rho} \int_0^{\delta t} \left(\bar{i} \frac{\partial P}{\partial x} dt + \bar{j} \frac{\partial P}{\partial y} dt + \bar{k} \frac{\partial P}{\partial z} dt \right) =$$

$$\frac{1}{\rho} \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta t} P dt + \frac{1}{\rho} \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\delta t} P dt + \frac{1}{\rho} \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\delta t} P dt = \frac{1}{\rho} \text{grad}J$$

Под знаком интеграла стоит импульс, или ударная сила.

Итак, скорость частицы, вызванная импульсом силы, будет равна:

$$\bar{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}J \quad (4.1)$$

Так как скорость является градиентом некоторой скалярной функции J , то существует потенциал скорости такой, что

$$\bar{V} = \text{grad}\phi \text{ (из гидродинамики)}$$

Это означает:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Скалярная величина φ - это потенциал скорости. Чтобы найти три компоненты скорости, достаточно найти функцию φ .

Наша задача сводится к определению этой функции.

Определение функции φ

Для отыскания функции φ мы можем воспользоваться уравнением Коши – Лагранжа, которое справедливо для безвихревого (потенциального) движения.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi = f(t)$$

Функция $f(t)$ – функция времени, от координат не зависит, т.е. она во всех точках одна и та же.

$$\mathcal{P} = \int \frac{dP}{\rho}$$

$\Pi = gz$ – потенциал массовых сил (потенциальная энергия)

Нужно сделать некоторые упрощающие предположения, т.к. в общем виде задача не может быть решена:

- 1) $g = \text{const}$
- 2) $\rho = \text{const}$ – жидкость несжимаема, тогда $\int \frac{dP}{\rho} = \frac{P}{\rho}$
- 3) $V^2 \approx 0$, т.к. скорость частицы в волновом движении мала, то ее квадратом можно пренебречь.

Тогда уравнение Коши-Лагранжа будет иметь такой вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gz = f(t) \quad (4.2)$$

Так функция f зависит только от времени, то введем новую функцию φ_1 , чтобы

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f(t) + \frac{P_0}{\rho} \quad (4.3)$$

где P_0 – давление на свободной поверхности (атмосферное давление). Оно постоянно, т.к. мы рассматриваем колебания поверхности с постоянным давлением.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$f(t) = \text{const}$ и $\frac{P_0}{\rho} \text{const}$, поэтому $\frac{\partial}{\partial x}$ от этих функций = 0

$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ – это одна из скоростей

Такая замена функции φ функцией φ_1 не отразится на движении, а уравнение станет проще, т.к. неизвестная функция f включена в неизвестную функцию φ_1 .

Подставим $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ из уравнения (4.2) в уравнение (4.3).

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f(t) + \frac{P_0}{\rho} = -\frac{P}{\rho} - gz + f(t) - f(t) + \frac{P_0}{\rho}$$

Отбросим значок 1 у φ_1 . Вместо φ_1 будем писать φ , т.к. будем иметь дело только с φ_1 .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz + \frac{P - P_0}{\rho} = 0 \quad (4.4)$$

Теперь нужно определить φ . Это можно сделать из уравнения неразрывности.

Уравнение неразрывности выражает условия сохранения массы, т.е. тот факт, что если в данном бесконечно малом объеме втекание и истечение жидкости не равны, то происходит изменение массы, что невозможно.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Т.к. $\rho = \text{const}$, то уравнение неразрывности будет:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

или

$$\text{div} \vec{V} = 0$$

Подставим: $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$; $w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

Получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.5)$$

Это получился оператор **Лапласа**.

Нужно найти такую функцию φ , которая удовлетворяла бы оператору Лапласа.

Такие функции носят название гармонических функций.

Это задача Дирихле – т.е. задача об отыскании гармонической функции по ее значениям, заданным на границе рассматриваемой области (Б.С.Э. с.297).

Дирихле Петер Густав – немецкий математик (1805-1859).

Таким образом, постановка задачи Дирихле выглядит так:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz + \frac{P - P_0}{\rho} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \end{cases} \text{ система (A)}$$

Для решения задачи должны быть сформулированы граничные условия.

Граничные условия:

1) Поверхность волны есть изобарическая поверхность, т.е. при $z=0$ $P=P_0$

Т.к. амплитуда волны очень мала, то давление P будет равно P_0 на свободной поверхности, где $z=0$. Но уравнение свободной поверхности будет: при $z=z_0$ следовательно $P=P_0$.

Тогда из уравнения задачи Дирихле мы получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz + \frac{P - P_0}{\rho} = 0 \text{ при } P=P_0 \text{ } z=z_0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz_0 = 0$$

Уравнение свободной поверхности $z_0 = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4.6)$

2) На глубине h находится твердая стенка (дно).

При $z=-h$, т.е. на дне выполняется условие на твердой стенке (рисунок 4.1):

$$v_n = w = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Это условие непроницаемости дна.

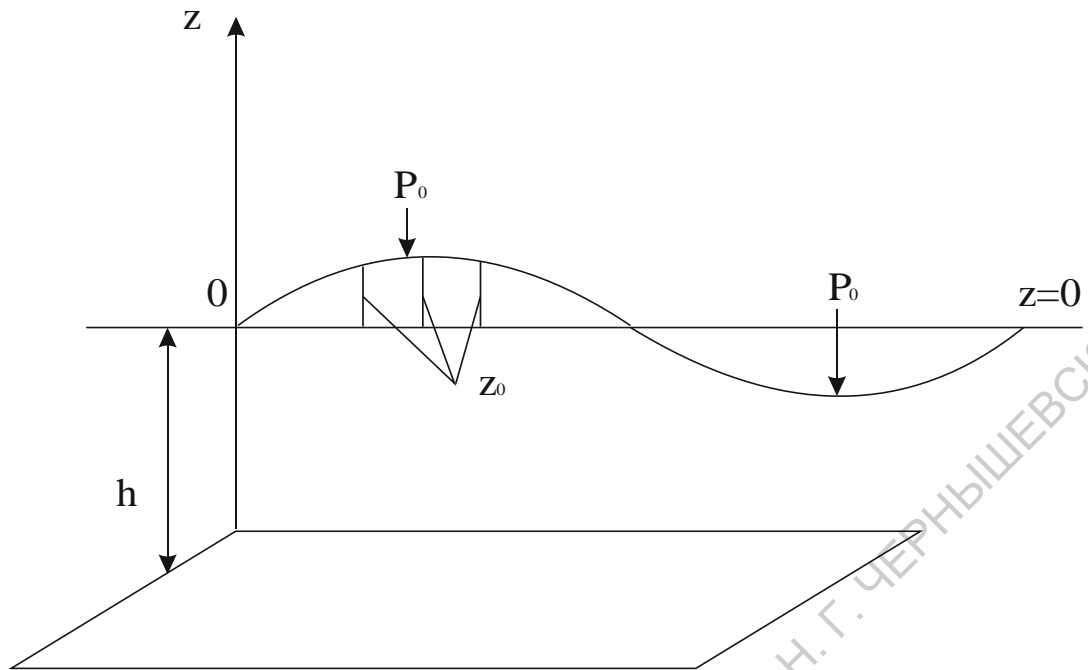


Рисунок 4.1

Используя второе граничное условие, найдем вертикальную скорость на свободной поверхности.

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

С другой стороны, $w = \frac{dz_0}{dt}$

$$\frac{dz_0}{dt} = \frac{\partial z_0}{\partial t} + u \frac{\partial z_0}{\partial x} + v \frac{\partial z_0}{\partial y} \rightarrow \frac{dz_0}{dt} = \frac{\partial z_0}{\partial t}$$

$u \frac{\partial z_0}{\partial x} + v \frac{\partial z_0}{\partial y}$ — эти члены имеют порядок квадрата скорости $V^2 \approx 0$

Приравняем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial z_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \text{ или:}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad (4.7)$$

Это справедливо для свободной поверхности.

4.3 Плоские волны

Плоская волна – это волна между двумя параллельными вертикальными стенками (рисунок 4.2). В этом случае волна может распространяться только в направлении оси y , а $x=c$ и $u=0$.

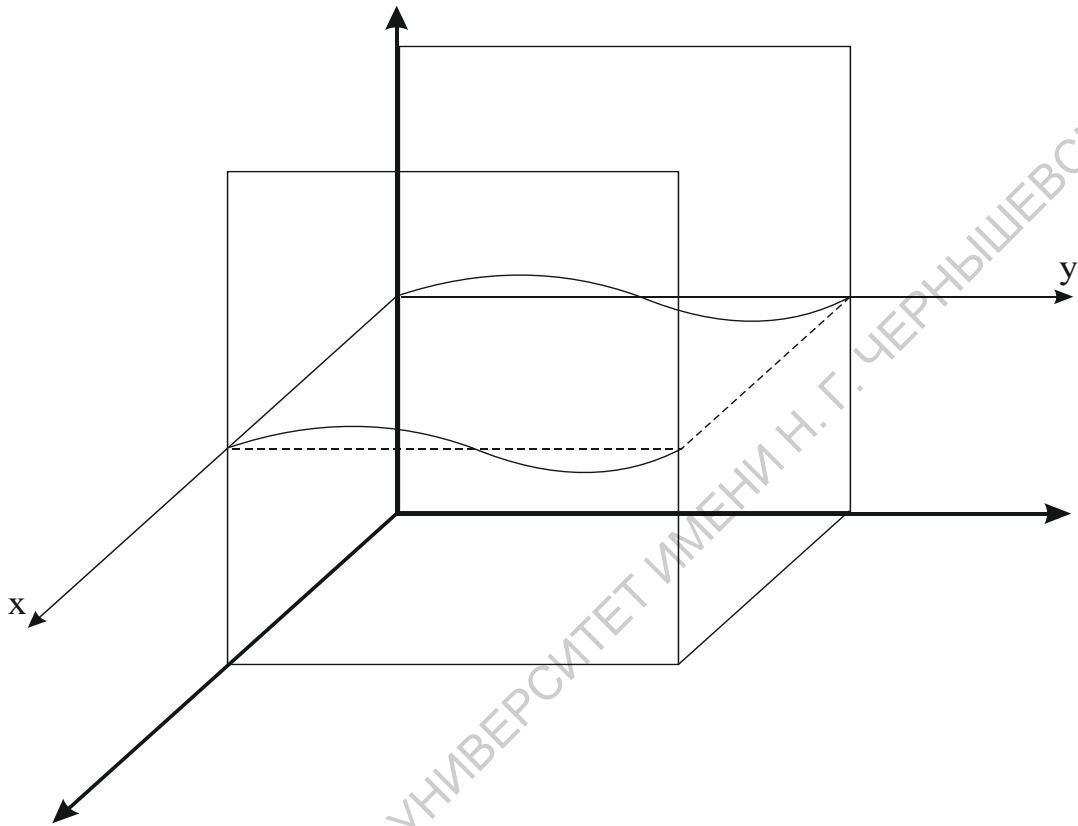


Рисунок 4.2

Это допущение является вынужденным, для упрощения задачи.

Для этой плоской волны мы и должны решить задачу Дирихле.

Будем искать функцию φ , представив её как произведение трех функций.

$$\varphi = \Theta(t)Y(y)Z(z)$$

Подставим эту функцию в уравнение

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0$$

Это второе уравнение системы (А) задачи Дирихле. $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$, т.к. $x=c$ и

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$\Theta Y'' Z + \Theta Y Z'' = 0$$

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} = -K^2$$

Правая часть уравнения зависит только от Z , а левая – только от Y .

Так как эти две функции не зависят друг от друга, то такое равенство возможно, если эти отношения есть величина постоянная. Обозначим ее $-K^2$

Это уравнение разбивается на два:

$Y'' + K^2 Y = 0$ – Это уравнение простых гармонических колебаний.

$Z'' - K^2 Z = 0$ – Это уравнение сложнее, оно выражается через гиперболические функции.

Подставим функцию φ в условие (4.7) на свободной поверхности.

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad (4.7)$$

$$\Theta'' Y Z + g Z' \Theta Y = 0$$

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -g \frac{Z''}{Z} = -\sigma^2$$

Опять такое уравнение может выполняться, если только это отношение постоянно. Обозначим его $-\sigma^2$

$$(4.8) \begin{cases} \Theta'' + \sigma^2 \Theta = 0 \\ Y'' + K^2 Y = 0 \\ Z'' - K^2 Z = 0 \end{cases}$$

Мы имеем три уравнения. Интегрируя их, мы найдем все функции.

Лекция 5

Динамика свободной атмосферы

5.1 Геострофическое движение

Если нормальная и тангенциальная компоненты ускорения равны нулю, то горизонтальное движение без трения называется геострофическим.

$$\text{Если } \left(\frac{dV}{dt}\right)_r = \frac{dV}{dt} \bar{\tau}^0 + \frac{V^2}{R_r} \bar{n}_r^0 = 0, \text{ то } \bar{V} = \bar{V}_g$$

\bar{V}_g – геострофический ветер.

Условие требует, чтобы обе проекции по отдельности равнялись нулю. Проекция уравнения на ось $\bar{\tau}^0$ натуральной системы координат выглядит так:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}$$

По условию геострофического движения проекция $\frac{dV}{dt}$ на ось $\bar{\tau}^0$ равна нулю, значит $\frac{\partial P}{\partial s} = 0$, т.е. геострофический ветер направлен вдоль изобары и траектория движения является изобарой.

$$\frac{V^2}{R_r} = 0$$

Это равенство осуществляется тогда, когда $R_r = \infty$. На карте это прямая линия. Значит, при геострофическом движении траектория является прямой линией. В системе (3.10) было:

$$\left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)_r = -\ell [\bar{k}^0 V] = -\frac{1}{\rho} \nabla_r P$$

При геострофическом движении ускорение равно нулю. Тогда получим

$$[\bar{k}^0 \bar{V}_g] = -\frac{1}{\rho \ell} \nabla_r P \quad (5.1)$$

Из этого уравнения (5.1) желательно получить вектор геострофической скорости. Для этого умножим векторно обе части уравнения на \bar{k}^0 .

$$[[\bar{k}^0 \bar{V}_g] \bar{k}^0] = -\frac{1}{\rho \ell} [\nabla_r P \bar{k}^0]$$

Раскроем двойное векторное произведение

$$[[\bar{a}\bar{b}]\bar{c}] = (\bar{c}\bar{a})\bar{b} - (\bar{c}\bar{b})\bar{a}$$

У нас получится:

$$(\bar{k}^0\bar{k}^0)\bar{V}_g - (\bar{V}_g\bar{k}^0)\bar{k}^0 = -\frac{1}{\rho\ell}[\nabla_{\Gamma}P\bar{k}^0]$$

Скалярное произведение $(\bar{V}_g\bar{k}^0) = 0$, т.к. \bar{V}_g находится в горизонтальной плоскости \bar{k}^0 – в вертикальной и скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов равно нулю: $(\bar{a}\bar{b}) = a \cdot b \cdot \cos \widehat{\bar{a}\bar{b}}$. Скалярное произведение коллинеарных векторов равно единице: $(\bar{k}^0\bar{k}^0) = 1$. Тогда наше уравнение примет вид:

$$\bar{V}_g = \frac{1}{\rho\ell}[\bar{k}^0\nabla_{\Gamma}P] \quad (5.2)$$

Минуса перед правой частью нет, т.к. мы поменяли местами векторы в векторном произведении ($[[\bar{a}\bar{b}]] = -[[\bar{b}\bar{a}]]$).

Полный градиент давления ∇P состоит из градиента вертикального и горизонтального: $\nabla P = \nabla_{\text{в}}P + \nabla_{\Gamma}P$.

Горизонтальный градиент давления приблизительно в 2500 раз меньше, чем вертикальная составляющая.

Составим векторное произведение $[\bar{k}^0\nabla P]$

$$[\bar{k}^0\nabla P] = [\bar{k}^0\nabla_{\text{в}}P] + [\bar{k}^0\nabla_{\Gamma}P]$$

$[\bar{k}^0\nabla_{\text{в}}P] = 0$, т.к. $\bar{k}^0 \parallel \nabla_{\text{в}}P$

Следовательно: $[\bar{k}^0\nabla P] = [\bar{k}^0\nabla_{\Gamma}P]$

Тогда скорость геострофического ветра запишется так:

$$\bar{V}_g = \frac{1}{\rho\ell}[\bar{k}^0\nabla P] \quad (5.3)$$

Таким образом, **прямолинейное равномерное движение воздуха в горизонтальной плоскости под действием силы барического градиента и силы Кориолиса при отсутствии силы трения называется геострофическим ветром.**

5.1.1 Геострофический ветер в стандартной системе координат

Найдем проекции геострофической скорости на оси стандартной системы координат

$$\bar{V}_g = \frac{1}{\rho \ell} [\bar{k}^0 \nabla P] = \frac{1}{\rho \ell} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial P}{\partial y} \bar{i} + \frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial P}{\partial x} \bar{j}$$

$$\left. \begin{aligned} u_g &= -\frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial P}{\partial y} \\ v_g &= \frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial P}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

$$V_g = \sqrt{u_g^2 + v_g^2} = \frac{1}{\rho \ell} \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial P}{\partial n}$$

$$V_g = \frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial P}{\partial n} \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) позволяет рассчитать модуль геострофической скорости.

Вспомним проекции уравнения движения на оси x и y стандартной системы координат (3.8). Для свободной атмосферы (без учета трения) первые два уравнения будут выглядеть так:

$$\frac{du}{dt} = \ell v_g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -\ell u_g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Из этих уравнений видно, что геострофический ветер имеет место при уравнивании отклоняющей силы вращения Земли и силы барического градиента. Определим угол между вектором скорости \bar{V}_g и градиентом

давления ∇P . Для этого первое уравнение системы (5.4) умножим на v_g , второе на u_g и сложим их.

$$-u_g v_g + v_g v_g = \frac{1}{\rho l} \frac{\partial P}{\partial y} v_g + \frac{1}{\rho l} \frac{\partial P}{\partial x} u_g = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} v_g + \frac{\partial P}{\partial x} u_g = (\text{grad} P \cdot \bar{V}_g) = 0$$

Если скалярное произведение векторов равно нулю, то эти векторы взаимно перпендикулярны.

Значит $\bar{V}_g \perp \nabla P$.

Если бы не было разности давлений, то есть силы барического градиента, то не возникло бы движение частиц воздуха. Но как только под влиянием каких-то причин возникла разность давлений, частица из точки А начинает движение в сторону низкого давления (рис. 5.1).

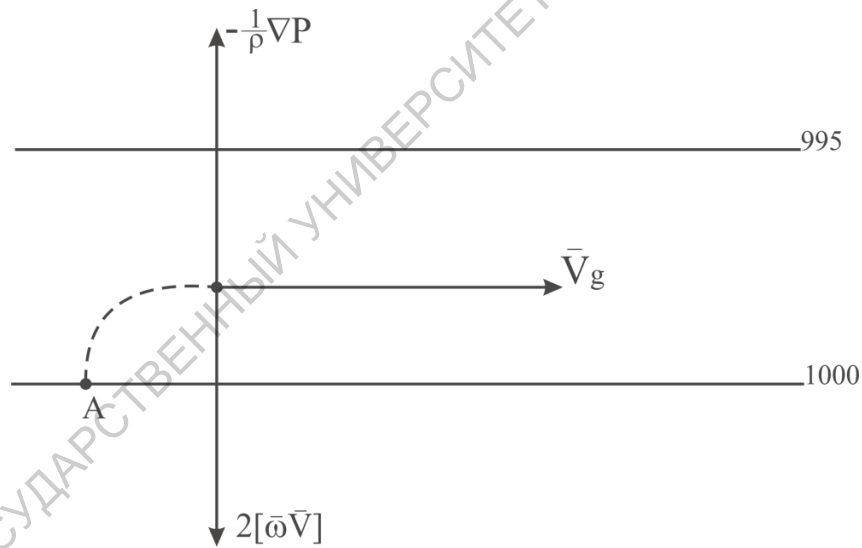


Рисунок 5.1 – движение частицы из т. А в сторону низкого давления

Если бы Земля не вращалась, то движение происходило бы всегда от большего давления к меньшему. Но с появлением и увеличением скорости движения одновременно начинает действовать все возрастающая отклоняющая сила вращения Земли. Под ее влиянием возникающий ветер будет все больше и больше отклоняться от направления силы барического градиента в северном полушарии вправо, а в южном – влево. Наконец, ветер

отклонится от силы градиента на прямой угол, при котором силы барического градиента и отклоняющая направлены противоположно друг другу. В таком положении сила барического градиента уже не может вызвать увеличение скорости, поэтому возрастание скорости ветра прекратится. При равенстве сил барического градиента и отклоняющей силы вращения Земли ветер приобретает устойчивое направление и постоянную скорость, то есть движение становится установившимся, а ветер геострофическим, направленным вдоль траектории (изобары), так что высокое давление остается справа (в северном полушарии).

Таким образом, мы можем сформулировать барический закон ветра:

Геострофический ветер направлен вдоль изобар (параллельно изобарам) таким образом, что справа от него расположено повышенное давление (в северном полушарии).

5.1.2 Геострофический ветер в изобарических координатах

Получим формулу для расчета геострофического ветра на карте барической топографии, т.е. на изобарической поверхности.

$$V_g = \frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial P}{\partial n}$$

Введем в формулу геопотенциальную высоту изобарической поверхности.

$$H = \frac{\Phi}{9,8} = \frac{gz}{9,8}$$

$$\partial H = \frac{\Phi}{9,8} = \frac{gz}{9,8} \rightarrow g \partial z = 9,8 \partial H$$

$$\partial P = |\rho g \partial z| = |\rho \cdot 9,8 \cdot \partial H|$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \rho \cdot 9,8 \frac{\partial H}{\partial n}$$

$$V_g = \frac{1}{\rho \ell} \rho \cdot 9,8 \frac{\partial H}{\partial n} = \frac{9,8 \partial H}{\ell \partial n}$$

Таким образом:

$$V_g = \frac{9,8 \partial H}{\ell \partial n} \quad (5.6)$$

$$\left. \begin{aligned} u_g &= -\frac{9,8 \partial H}{\ell \partial y} \\ v_g &= \frac{9,8 \partial H}{\ell \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Здесь $\frac{\partial H}{\partial n}$ - горизонтальный градиент геопотенциальной высоты (геопотенциала) по нормали к изогипсам;

$\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}$ - горизонтальный градиент геопотенциала вдоль осей ОХ и ОУ соответственно.

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2}$$

5.2 Изменение геострофического ветра с высотой

В приземном (средняя толщина слоя около 100 м) и пограничном (толщина около 1,5 км) слоях атмосферы ветер изменяется с высотой в основном под влиянием земной поверхности и турбулентного обмена. В свободной атмосфере скорость ветра также изменяется с высотой по величине и направлению, но основную роль в изменении скорости здесь играют уже не силы трения, а изменение градиента давления под влиянием горизонтального градиента температуры.

Для выяснения физической стороны явления рассмотрим следующий случай (рис. 5.2). Пусть на некоторой высоте ($z_1 = 1$ км) горизонтальный градиент давления $\nabla_r P = 0$ и, как следствие, $V_g = 0$. Но температура столба воздуха над точкой А выше температуры столба над точкой В, то есть выше уровня z_1 наблюдается градиент температуры, направленный от т.В к т.А, т.е. в сторону возрастания температуры (математический градиент).

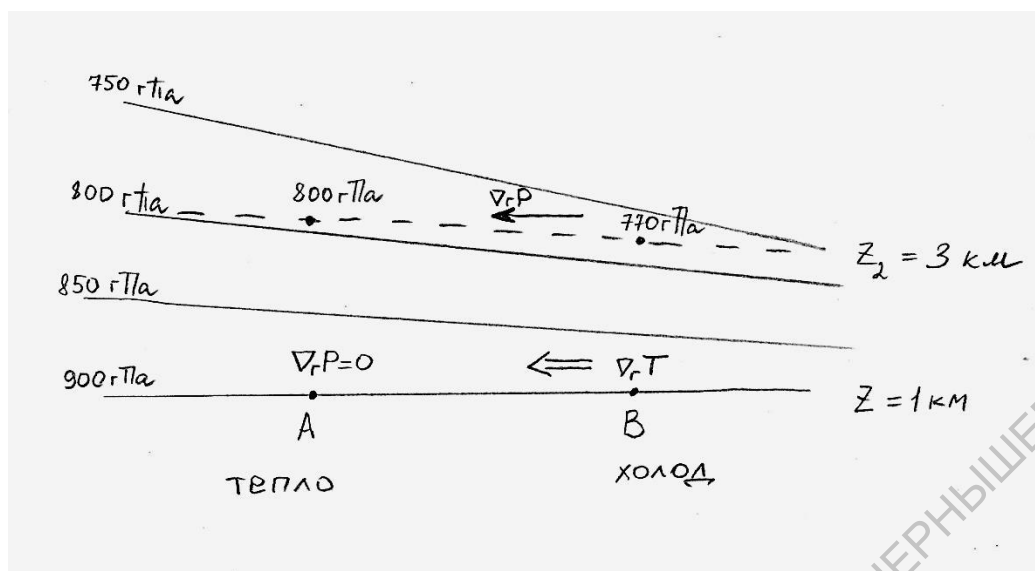


Рисунок 5.2 – изменение геострофического ветра с высотой

Так как давление в холодной массе падает с высотой быстрее, чем в теплой (барическая ступень в холодной массе меньше, чем в теплой), то на всех уровнях выше z_1 будет наблюдаться градиент давления, направленный от В к А. Под влиянием градиента давления возникает движение, геострофический ветер, направленный в соответствии с барическим законом ветра, вдоль изобар так, что справа остается повышенное давление.

Вспомним уравнение (5.2)

$$\bar{V}_g = \frac{1}{\rho \ell} [\bar{k}^0 \nabla_r P]$$

Из уравнения видно, что при постоянной широте ветер с высотой должен изменяться, т.е. расти, так как плотность с высотой убывает. Но плотность по уравнению состояния связана с температурой и давлением, поэтому не обязательно скорость ветра будет расти. В формировании геострофического ветра участвует горизонтальный градиент давления. Заменим в уравнении

(5.2) ρ по уравнению состояния: $\rho = \frac{P}{RT}$, получим:

$$\bar{V}_g = \frac{RT}{\ell P} [\bar{k}^0 \nabla_r P] \quad (5.8)$$

В выражение (5.8) входят два фактора: давление и температура, которые по-разному изменяются с высотой. Исключим один из них. Разделим обе части уравнения (5.8) на T , а $\frac{1}{P}$ введем в векторное произведение:

$$\frac{\bar{V}_g}{T} = \frac{R}{\ell} \left[\bar{k}^0 \frac{1}{P} \nabla_r P \right] \quad (5.9)$$

Рассмотрим, что такое $\frac{1}{P} \nabla_r P$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} \nabla_r P &= \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial x} \bar{i} + \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial y} \bar{j} = \frac{\partial}{\partial x} \ln P \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \ln P \bar{j} = \nabla_r \ln P \\ \frac{\bar{V}_g}{T} &= \frac{R}{\ell} \left[\bar{k}^0 \nabla_r \ln P \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Изучим изменение \bar{V}_g с высотой. Для этого рассмотрим изменение с высотой правой и левой частей уравнения (5.10).

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{V}_g}{T} \right) dz = \frac{R}{\ell} \left[\bar{k}^0 \frac{\partial}{\partial z} \nabla_r \ln P \right] dz \quad (5.11)$$

Рассмотрим $\frac{\partial}{\partial z} \nabla_r \ln P$.

$$\frac{\partial}{\partial z} \nabla_r \ln P = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln P \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \ln P \bar{j} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} \bar{j} = \nabla_r \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} \right)$$

Вспомним уравнение гидростатики

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g = -\frac{Pg}{RT}$$

$$\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{g}{RT}$$

$$\nabla_r \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \nabla_r \left(-\frac{g}{RT} \right) = -\frac{g}{R} \nabla_r \frac{1}{T} = -\frac{g}{R} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \right) \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{T} \right) \bar{j} \right] \quad (5.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \right) &= -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{T} \right) &= -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Тогда:

$$\nabla_r \left(\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{g}{R T^2} \nabla_r T \quad (5.14)$$

Запишем:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{V}_g}{T} \right) dz = \frac{R}{\ell} \left[\bar{k}^0 \frac{g}{R T^2} \nabla_r T \right] dz \quad (5.15)$$

Проинтегрируем правую и левую части уравнения (5.15). В правой части интеграл возьмем после векторного произведения, т.к. горизонтальный градиент температуры не зависит от высоты и его можно вынести за знак интеграла, а температура зависит от высоты.

$$\int \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{V}_g}{T} \right) dz = \frac{g}{\ell} [\bar{k}^0 \nabla_r T] \int \frac{dz}{T^2} \quad (5.16)$$

Температура линейно меняется с высотой.

$$T = T_0 - \gamma z; \quad dT = -\gamma dz \rightarrow dz = -\frac{dT}{\gamma}$$

Этому условию удовлетворяют все политропические процессы.

Рассмотрим

$$\int \frac{dz}{T^2} = \int -\frac{1}{\gamma} \frac{dT}{T^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{T} + C$$

$$\left(\frac{\bar{V}_g}{T} \right) = \frac{g}{\ell} [\bar{k}^0 \nabla_r T] \frac{1}{\gamma T} + C \quad (5.17)$$

Исключим постоянную C. Для этого введем начальные условия:

$$\text{при } z=z_0; \quad \bar{V}_g = \bar{V}_{g_0}; \quad T=T_0$$

$$\left(\frac{\bar{V}_{g_0}}{T_0} \right) = \frac{g}{\ell} [\bar{k}^0 \nabla_r T] \frac{1}{\gamma T_0} + C \quad (5.18)$$

Вычтем из уравнения (5.17) уравнение (5.18).

$$\begin{aligned} \frac{\bar{V}_g}{T} - \frac{\bar{V}_{g_0}}{T_0} &= \frac{g}{\ell \gamma} [\bar{k}^0 \nabla_r T] \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \\ \bar{V}_g &= \frac{T}{T_0} \bar{V}_{g_0} + \frac{gT}{\ell \gamma} [\bar{k}^0 \nabla_r T] \left(\frac{T_0 - T}{T T_0} \right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$T_0 - T = T_0 - T_0 + \gamma \Delta z = \gamma \Delta z$$

Подставим в уравнение (5.19) $T_0 - T = \gamma \Delta z$

$$\bar{V}_g = \frac{T}{T_0} \bar{V}_{g_0} + \frac{g \Delta z}{\ell T_0} [\bar{k}^0 \nabla_r T] \quad (5.20)$$

Таким образом, вектор геострофического ветра на уровне z равен сумме вектора геострофического ветра на уровне z_0 , уменьшенного на отношение $\frac{T}{T_0}$, и добавочного вектора, который назвали термическим ветром.

$$\bar{V}_T = \frac{g \Delta z}{\ell T_0} [\bar{k}^0 \nabla_r T] \quad (5.21)$$

Следовательно, вектор термического ветра является добавочным вектором и в сумме с вектором геострофического ветра на нижнем уровне образует вектор геострофического ветра на верхнем уровне.

Таким образом, изменение геострофического ветра с высотой происходит за счет изменения температуры $\frac{T}{T_0}$ и за счет добавочного термического ветра. До большой высоты множитель $\frac{T}{T_0}$ близок к единице. На уровне моря $\frac{T}{T_0} = 1$, на высоте 5 км $\frac{T}{T_0} \approx 0,89$, на высоте 11 км $\frac{T}{T_0} \approx 0,75$, то есть $\frac{T}{T_0}$ можно приравнять к единице в тропосфере.

$$\text{Тогда } \bar{V}_g = \bar{V}_{g_0} + \bar{V}_T$$

Исследуем направление термического ветра \bar{V}_T по отношению к горизонтальному градиенту температуры $\nabla_r T$. По формуле (5.21) \bar{V}_T пропорционален векторному произведению $[\bar{k}^0 \nabla_r T]$. По правилу векторного произведения вектор \bar{V}_T направлен перпендикулярно плоскости векторов \bar{k}^0 и $\nabla_r T$ и с конца его должен быть виден переход от векторов \bar{k}^0 к $\nabla_r T$ против часовой стрелки. Покажем это на рисунке 5.3: на горизонтальной плоскости проведем изотермы. Горизонтальный градиент температуры направлен в математике в сторону увеличения температуры, а вектор \bar{k}^0 - вертикально вверх. **Тогда вектор термического ветра должен быть направлен по изотерме так, чтобы высокая температура оставалась справа.**

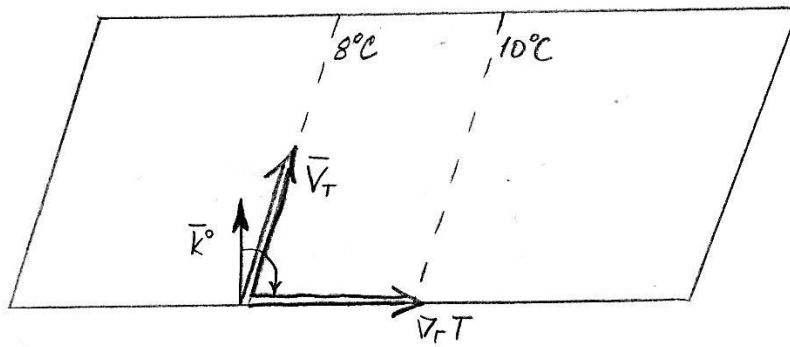


Рисунок 5.3 – направление термического ветра

Следовательно, для термического ветра средний горизонтальный градиент температуры играет ту же роль, что и барический градиент для геострофического ветра.

Найдем компоненты \bar{V}_T в стандартных координатах.

$$\bar{V}_T = \frac{g\Delta z}{\ell T_0} [\bar{k}^0 \nabla_r T] = \frac{g\Delta z}{\ell T_0} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{g\Delta z}{\ell T_0} \frac{\partial T}{\partial y} \bar{i} + \frac{g\Delta z}{\ell T_0} \frac{\partial T}{\partial x} \bar{j}$$

$$u_T = -\frac{g\Delta z}{\ell T_0} \frac{\partial T}{\partial y} - \text{проекция на ось } x$$

$$v_T = \frac{g\Delta z}{\ell T_0} \frac{\partial T}{\partial x} - \text{проекция на ось } y$$

Модуль скорости термического вектора будет равен корню квадратному из суммы квадратов проекций.

$$V_T = \sqrt{u_T^2 + v_T^2} = \frac{g\Delta z}{\ell T_0} \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2}$$

$$V_T = \frac{g\Delta z}{\ell T_0} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (5.22)$$

Наличие угла между изобарами и изотермами приводит к перестройке термобарического поля. Так как геострофический ветер направлен по изобаре, то поворот геострофического ветра с высотой связан с поворотом изобар.

Рассмотрим влияние термобарического поля на изменение геострофического ветра с высотой. Ранее было:

$$\bar{V}_g = \bar{V}_{g_0} + \bar{V}_T \quad (5.23)$$

Найдем модуль геострофической скорости $|\bar{V}_g|$. Для этого уравнение (5.23) возведем в квадрат.

$$\bar{V}_g^2 = \bar{V}_{g_0}^2 + 2\bar{V}_{g_0} \bar{V}_T + \bar{V}_T^2$$

Скалярное произведение $\bar{V}_{g_0} \bar{V}_T = V_{g_0} V_T \cos(\widehat{\bar{V}_{g_0} \bar{V}_T})$.

Обозначим угол между векторами \bar{V}_{g_0} и \bar{V}_T через α . Покажем это на рисунке 5.4.

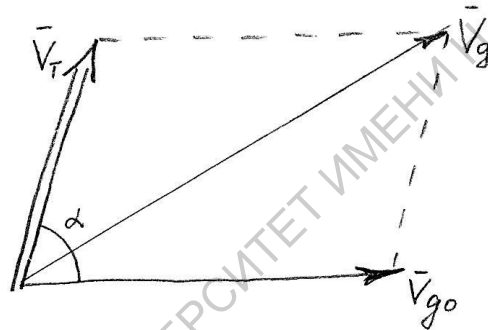


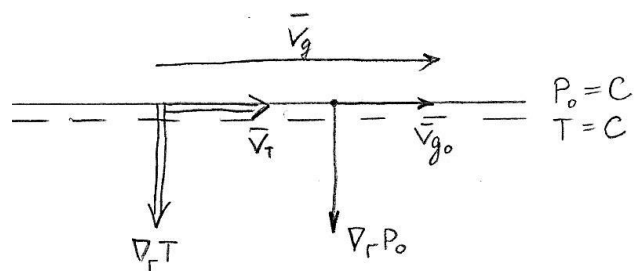
Рисунок 5.4 - угол между векторами \bar{V}_{g_0} и \bar{V}_T

$$V_g^2 = V_{g_0}^2 + V_{g_0} V_T \cos \alpha + V_T^2$$

Таким образом, значение ветра на высоте зависит и от угла α между изобарой и изотермой. Рассмотрим некоторые закономерности изменения геострофического ветра с высотой. Будем считать горизонтальный градиент температуры не меняющийся с высотой.

Проанализируем четыре характерных случая изменения геострофического ветра с высотой.

1) В первом случае барический и термический градиенты совпадают по направлению, а значит изобары и изотермы параллельны.



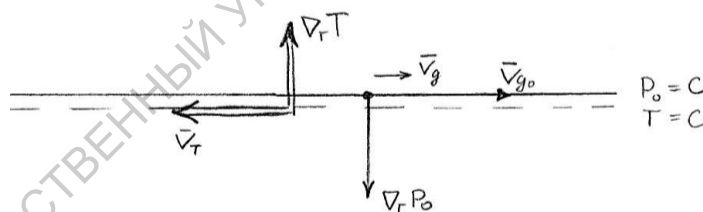
$$\angle \alpha = 0 \quad \cos \alpha = 1$$

$$V_g^2 = (V_{g_0} + V_T)^2$$

$$V_g = V_{g_0} + V_T$$

Геострофический ветер на нижнем уровне и термический ветер в слое направлены в одну сторону и алгебраически складываются. Это значит, что при совпадении направления градиентов температуры и давления ветер с высотой усиливается, не меняя своего направления.

2) Во втором случае градиент температуры направлен противоположно градиенту давления, т.е. изобары и изотермы антипараллельны.



$$\angle \alpha = 180^\circ; \quad \cos \alpha = -1$$

$$V_g^2 = (V_{g_0} - V_T)^2$$

$$V_g = V_{g_0} - V_T$$

Рассмотрим изменение ветра с высотой на рисунке 5.5:

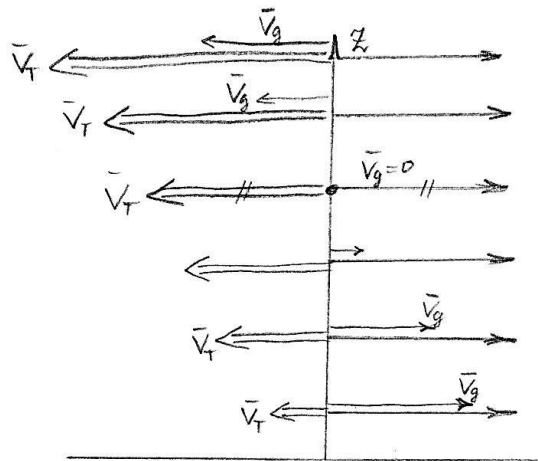


Рисунок 5.5 – изменение ветра с высотой

Из рисунка видно, что в случае, когда градиенты давления и температуры направлены противоположно друг другу, геострофический ветер с высотой ослабевает, на некоторой высоте обращается в нуль, а затем принимает противоположное направление, постепенно усиливаясь с высотой, если первоначальное условие относительного расположения векторов $\nabla_r T$ и $\nabla_r P$ сохраняется на всех рассматриваемых высотах. Таким образом, ветер как бы поворачивает на 180° , т.е. происходит обращение ветра.

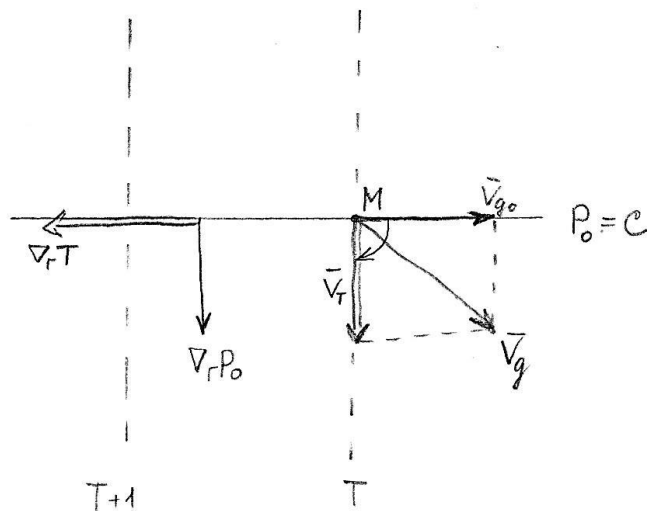
$$V_g = V_{g_0} - V_T = V_{g_0} - \frac{g \Delta z}{\ell T_0} \frac{\partial T}{\partial n}$$

Если $\Delta z = z_{\text{обр}}$, то $V_g = 0$ и

$$V_{g_0} = \frac{g z_{\text{обр}}}{\ell T_0} \frac{\partial T}{\partial n}$$

$$z_{\text{обр}} = \frac{\ell T_0 V_{g_0}}{g \frac{\partial T}{\partial n}} \quad (5.24)$$

3) В третьем случае градиент температуры направлен вправо от градиента давления. Следовательно, область более высоких температур располагается в направлении, противоположном направлению ветра. В результате в т. М с течением времени будут приходить частицы с все более высокой температурой, т.е. этот случай соответствует адвекции тепла.



$\angle \alpha = -\frac{\pi}{2}$, т.к. угол отсчитывается по часовой стрелке от \bar{V}_{g_0} к \bar{V}_T

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

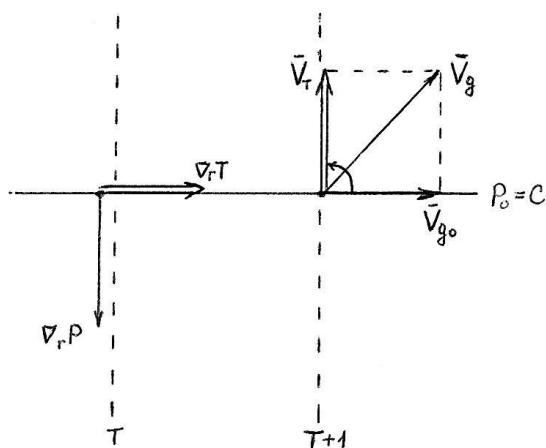
$$V_g^2 = V_{g_0}^2 + 2V_{g_0}V_T \cos \alpha + V_T^2$$

$$V_g^2 = V_{g_0}^2 + V_T^2$$

Значение скорости ветра на верхнем уровне может быть найдено по теореме Пифагора. Из рисунка видно, что ветер с высотой повернул вправо.

Таким образом, в слое адвекции тепла геострофический ветер поворачивает с высотой вправо.

4) В четвертом случае градиент температуры направлен влево от градиента давления, что соответствует расположению области более низких температур в направлении, противоположном направлению ветра. В результате в т. М с течением времени будут приходить частицы с все более низкой температурой, то есть имеет место адвекция холода.



$\angle \alpha = \frac{\pi}{2}$; $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ $\angle \alpha > 0$, т.к. от \bar{V}_{g_0} к \bar{V}_T отсчитывается против часовой стрелки

$$V_g^2 = V_{g_0}^2 + 2V_{g_0} V_T \cos \alpha + V_T^2$$

$$V_g^2 = V_{g_0}^2 + V_T^2$$

Так же, как и в случае 3) квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Видно, что ветер с высотой повернул влево.

Таким образом, **в слое адвекции холода геострофический ветер поворачивает с высотой влево.**

Изменение геострофического ветра с высотой во всех остальных случаях промежуточных положений $\nabla_r T$ и $\nabla_r P$ легко объяснить на основе рассмотренных основных схем. Это имеет большое значение, так как позволяет не только объяснить наблюдающиеся в атмосфере изменения ветра с высотой, но и сделать выводы относительно последующих изменений температуры на той или иной высоте. Действительно, если наблюдения радиозондирования обнаруживают левый поворот ветра с высотой, что связано с адвекцией холодных масс, следует ожидать понижения температуры на данном уровне, при правом повороте – повышения температуры. В свою очередь, с адвекцией холода, то есть с притоком более плотных масс воздуха, связано адвективное повышение давления воздуха у поверхности земли, а с адвекцией тепла – адвективное понижение давления у поверхности земли. Таким образом, по изменению ветра с высотой можно в известной мере судить о последующих изменениях давления воздуха у поверхности земли. Вычитая

из вектора ветра на верхнем уровне вектор ветра на нижнем уровне, получаем вектор термического ветра, что позволяет судить о величине и направлении среднего горизонтального температурного градиента в слое.

Рассмотрим рисунок 5.6.

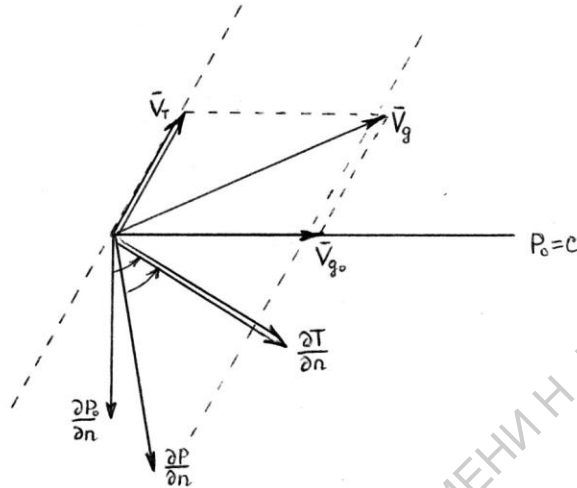


Рисунок 5.6 - Изменение ветра с высотой

На нижнем уровне горизонтальный градиент давления $\frac{\partial P_0}{\partial n}$ и скорость ветра \bar{V}_{g_0} . На высоте $-\frac{\partial P}{\partial n}$ и \bar{V}_g . Из рисунка видно, что с высотой горизонтальный барический градиент приближается по направлению к горизонтальному градиенту температуры, т.е. угол между градиентом давления на нижнем уровне и средним горизонтальным градиентом температуры больше, чем угол между градиентом давления на высоте и тем же градиентом температуры. Опыт показывает, что уже на высоте около пяти километров эти градиенты близки между собой, то есть изобары и изотермы приблизительно параллельны. Поэтому области холода в районе полюсов на картах средней и верхней тропосферы соответствует область пониженного давления. Наличие в средней и верхней тропосфере области пониженного давления приводит к тому, что на этих высотах изобары направлены в общем вдоль параллелей с запада на восток, т.е. преобладает западное (широтное) течение воздуха.

5.2.1 Определение термического ветра на карте относительной топографии

Вспомним формулу для расчета относительного геопотенциала:

$$H_{\text{отн}} = 67,4 T_{\text{cp}} \lg \frac{P_1}{P_2} = H_1^2 \quad (5.25)$$

$H_{\text{отн}} = H_2 - H_1$ – толщина слоя между изобарическими поверхностями P_1 и P_2 . Обозначим постоянные $67,4 \lg \frac{P_1}{P_2}$ через a_{1-2} .

$$H_{\text{отн}} = H_2 - H_1 = a_{1-2} T_{\text{cp}}$$

Продифференцируем последнее уравнение по x и y .

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial x} &= \frac{\partial H_1}{\partial x} + a_{1-2} \frac{\partial T_{\text{cp}}}{\partial x} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y} &= \frac{\partial H_1}{\partial y} + a_{1-2} \frac{\partial T_{\text{cp}}}{\partial y} \end{aligned}$$

Умножим обе части уравнения $\frac{9,8}{\ell}$ и вспомним, что $\frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H}{\partial x} = v_g$, а $\frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H}{\partial y} =$

u_g

$$\begin{aligned} \frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H_2}{\partial x} &= \frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H_1}{\partial x} + a_{1-2} \frac{9,8}{\ell} \frac{\partial T_{\text{cp}}}{\partial x} \\ + \\ \frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H_2}{\partial y} &= \frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H_1}{\partial y} + a_{1-2} \frac{9,8}{\ell} \frac{\partial T_{\text{cp}}}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\bar{V}_{g_2} = \bar{V}_{g_1} + \bar{V}_T$$

$$\bar{V}_T = \frac{9,8}{\ell} a_{1-2} \frac{\partial T_{\text{cp}}}{\partial n}$$

$$a_{1-2} \frac{\partial T_{\text{cp}}}{\partial n} = \frac{\partial H_{\text{отн}}}{\partial n} = \frac{\partial H_1^2}{\partial n}$$

$$\bar{V}_T = \frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H_1^2}{\partial n} \quad (5.26)$$

Формула для расчета скорости термического ветра на карте относительной топографии (ОТ) по внешнему виду такая же, как и формула для расчета геострофической скорости на карте абсолютной топографии (АТ),

только в формуле (5.26) $\frac{\partial H_1^2}{\partial n} = \frac{\partial H_{\text{отн}}}{\partial n}$ - градиент относительного геопотенциала.

А барический закон выполняется и для термического ветра:

Термический ветер, направлен вдоль изотерм (или изогипс карты ОТ), так что область повышенных температур (относительного геопотенциала) остается справа.

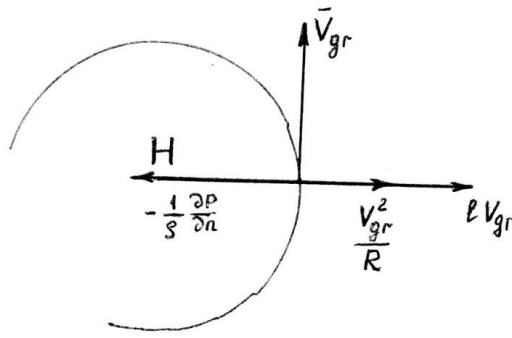
5.3 Градиентный ветер

Понятие геострофического ветра очень удобно, т.к. дает возможность по градиенту давления определить главную составляющую ветра. Но для анализа движения частицы атмосферы по криволинейным траекториям на карте геострофический ветер не очень удобен, так как он направлен по прямолинейным траекториям. Поэтому введено понятие градиентного ветра (V_{gr}), а геострофический ветер является частным случаем градиентного, когда изобары, выпрямляются. Таким образом, **градиентным ветром называется ветер, дующий с постоянной скоростью вдоль траектории.**

Если траектория движения криволинейная или замкнутая, то кроме сил барического градиента и Кориолиса появляется центробежная сила. При равномерном движении по криволинейной или круговой траектории эти три силы должны уравновеситься.

5.3.1 Рассмотрим равновесие сил в циклоне

Сила барического градиента $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n}$ направлена в сторону пониженного давления, т.е. к центру циклона. Центробежная сила $\frac{V_{gr}^2}{R}$ всегда направлена от центра, и она меньше силы барического градиента.



Одна она уравновесить силу барического градиента не может, поэтому сила Кориолиса направлена противоположно силе барического градиента и примерно одного порядка с ней, поэтому может ее уравновесить. Сила Кориолиса направлена под углом 90° вправо от направления движения. Поэтому движение в циклоне должно быть против часовой стрелки. Таким образом, сумма сил центробежной и Кориолиса уравновешивает силу барического градиента.

$$\frac{V_{gr}^2}{R} + \ell V_{gr} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n}$$

$$V_{gr}^2 + \ell R V_{gr} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} = 0$$

$$\frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial P}{\partial n} = V_g$$

$$V_{gr}^2 + \ell R V_{gr} - R \ell V_g = 0$$

Решим квадратное уравнение

$$V_{gr} = -\frac{\ell R}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\ell R}{2}\right)^2 + \ell R V_g}$$

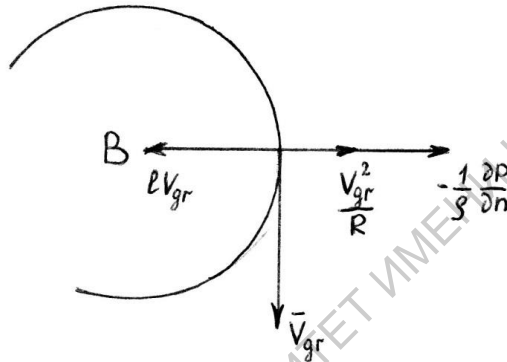
$$V_{gr} = -\frac{\ell R}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4V_g}{\ell R}} \right]$$

Перед корнем надо выбрать знак. Если $V_g = 0$, то $V_{gr} = 0$, а это будет, когда скобка обращается в нуль. Значит перед корнем нужно оставить знак минус. Тогда:

$$V_{gr} = \frac{\ell R}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4V_g}{\ell R}} - 1 \right] \quad (5.27)$$

Формула (5.27) – для расчета скорости градиентного ветра при циклонической кривизне траектории.

5.3.2 Рассмотрим равновесие сил в антициклоне



$$\frac{V_{gr}^2}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} = \ell V_{gr}$$

$$V_{gr}^2 - \ell R V_{gr} + \frac{R}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} = 0$$

$$V_{gr}^2 - \ell R V_{gr} + R \ell V_g = 0$$

$$V_{gr} = \frac{\ell R}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\ell R}{2}\right)^2 - \ell R V_g}$$

$$V_{gr} = \frac{\ell R}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4V_g}{\ell R}} \right]$$

При $V_g = 0$, то $V_{gr} = 0$. Перед корнем должен стоять знак минус. Тогда:

$$V_{gr} = \frac{\ell R}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4V_g}{\ell R}} \right] \quad (5.28)$$

Формулы для циклона и антициклона следующим образом:

(циклон)
$$V_{gr}^2 + \ell R V_{gr} - R \ell V_g = 0$$

$$\text{(антициклон)} \quad V_{gr}^2 - \ell R V_{gr} + R \ell V_g = 0$$

$$\text{(циклон)} \quad V_{gr} = V_g - \frac{V_{gr}^2}{\ell R} \quad (5.29)$$

$$\text{(антициклон)} \quad V_{gr} = V_g + \frac{V_{gr}^2}{\ell R} \quad (5.30)$$

Из формул (5.29) и (5.30) видно, что циклоническая кривизна уменьшает скорость ветра, по сравнению с геострофической, а антициклоническая – увеличивает.

В формуле (5.28) для антициклона под корнем стоит разность. Поэтому $\frac{4V_g}{\ell R}$ не может быть больше единицы, т.к. в противном случае будут мнимые корни, которые физического смысла не имеют. Поэтому в антициклоне

$$1 - \frac{4V_g}{\ell R} \geq 0, \text{ а } V_g \leq \frac{\ell R}{4}$$

Значит, геострофический ветер и градиент давления не могут быть какими угодно, а зависят от размеров антициклона. Из формулы (5.8) следует, что существует максимальное значение скорости градиентного ветра в антициклоне больше которого она на данной широте и на данном расстоянии от центра кривизны быть не может.

$$V_{gr \max} = \frac{\ell R}{2} \quad (5.31)$$

В циклоне же величина градиента давления, а значит, скорость ветра теоретически могут быть сколь угодно большими. Никаких ограничений на эти величины не налагается. Таким образом, циклоны в атмосфере могут быть сколь угодно глубокими, в то время как интенсивность антициклонов ограничена.

Лекция 6

Геострофическая адвекция

Мы хотим предсказать изменение температуры в данной точке. Для этого запишем полную производную по времени от температуры по оператору Эйлера.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$$

Изменение температуры в данной точке $\frac{dT}{dt}$ происходит за счет изменения температуры внутри частицы $\frac{dT}{dt}$ и за счет адвекции. Обычно предполагают, что для краткосрочных прогнозов можно считать $\frac{dT}{dt} = 0$, т.е. частица переходит с места на место, не меняя своей температуры. Это предположение близко к истине, т.к. радиационное изменение температуры внутри частицы происходит очень медленно. Тогда:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} - w \frac{\partial T}{\partial z}$$

Так как основной перенос происходит только в горизонтальном направлении, то главным направлением в данной точке является геострофический ветер. Поэтому мы можем заменить фактический ветер геострофическим:

$$u_g = -\frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial P}{\partial y}; v_g = \frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial P}{\partial x}; w_g = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u_g \frac{\partial T}{\partial x} - v_g \frac{\partial T}{\partial y} \quad (6.1)$$

Это приращение температуры и носит название геострофической адвекции, т.е. приращения температуры за счет геострофического переноса.

Подставим в формулу (6.1) вместо u_g и v_g их выражения через градиенты давления.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho \ell} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (6.2)$$

Скобка в уравнении (6.2) получила в метеорологической литературе название «адвективный фактор Погосьяна-Таборовского», а в математике – это оператор Якоби (якобиан).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho \ell} \{T, P\}$$

Свойства якобиана:

- перестановка аргументов в якобиане приведет к изменению знака:

$$\{T, P\} = -\{P, T\}$$

- якобиан от одной и той же величины равен нулю: $\{T, T\} = 0$

В случае баротропной среды, когда плотность является функцией только давления или температуры, геострофическая адвекция не существует, т.к. в этом случае получится : $\{T, T\} = \{P, P\} = 0$.

Значит, адвекция температуры происходит только в бароклинной, т.е. реальной, атмосфере, когда $P = \rho RT$.

Выразим якобиан через горизонтальные градиенты температуры и давления.

$$\text{grad}_r T = \frac{\partial T}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \bar{j} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} \right) T = \nabla_r T$$

Составим векторное произведение градиентов $\nabla_r T$ и $\nabla_r P$.

$$[\nabla_r T \nabla_r P] = \frac{\partial T}{\partial n} \frac{\partial P}{\partial n} \sin(\nabla_r T \widehat{\nabla_r P}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} = \{T, P\}$$

Значит, якобиан – это векторное произведение двух векторов градиентов.

Таким образом, запишем формулы для расчета геострофической адвекции.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial T}{\partial n} \frac{\partial P}{\partial n} \sin(\nabla_r T \widehat{\nabla_r P}) \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{\rho \ell} \{T, P\} = \frac{1}{\rho \ell} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Угол, отсчитываемый против часовой стрелки – положительный, а по часовой стрелке – отрицательный.

На картах барической топографии формулы (13) использовать нельзя, т.к. на них наносятся абсолютные геопотенциальные высоты той или иной изобарической поверхности. Поэтому формулы для расчета геострофической адвекции на картах барической топографии можно получить, подставив в уравнение (6.1) проекции геострофической скорости в изобарической системе координат.

$$u_g = -\frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H}{\partial y}; v_g = \frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{9,8}{\ell} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{9,8}{\ell} \{T, H\} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{9,8}{\ell} \frac{\partial T}{\partial n} \frac{\partial H}{\partial n} \sin(\widehat{\nabla_r T \nabla_r H}) \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Обычно считается, что за период краткосрочного прогноза якобиан остается постоянным, поэтому уравнения (6.3) и (6.4) являются прогностическими.

Выведем формулу для расчета геострофической адвекции в слое атмосферы в зависимости от поворота ветра с высотой.

Возьмем формулу из системы (6.3)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial T}{\partial n} \frac{\partial P}{\partial n} \sin(\widehat{\nabla_r T \nabla_r P})$$

Заменим в этой формуле $\frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial P}{\partial n} = V_g$, а $\frac{\partial T}{\partial n}$ заменим из следующих соображений. Обозначим через δ угол между изобарой и изотермой и рассмотрим изменение величины и направления геострофического ветра в очень тонком слое от z_0 от z (рис. 6.1)

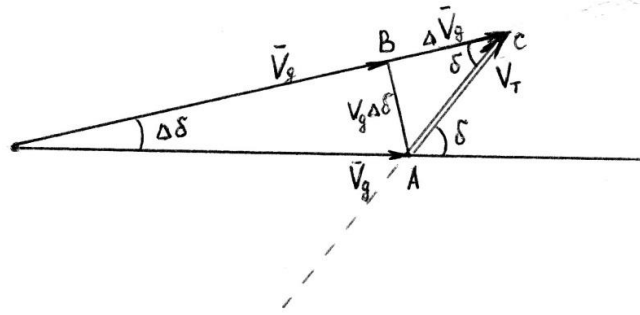


Рисунок 6.1 - изменение величины и направления геострофического ветра в очень тонком слое от z_0 от z

$$(\bar{V}_g + \Delta\bar{V}_g) = \bar{V}_g + \bar{V}_T$$

Так как угол $\Delta\delta$ очень мал, то из ΔABC получим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_g &= V_T \cos \delta \\ V_g \Delta\delta &= V_T \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Подставим в (6.5) $V_T = \frac{g \Delta z}{\ell T} \frac{\partial T}{\partial n}$

Разделим уравнения (6.5) на Δz и перейдем к пределу при $\Delta z \rightarrow 0$.

$$\frac{dV_g}{dz} = \frac{g}{\ell T} \frac{\partial T}{\partial n} \cos \delta \quad (6.6)$$

$$\frac{d\delta}{dz} = \frac{1}{V_g} \frac{g}{\ell T} \frac{\partial T}{\partial n} \sin \delta \quad (6.7)$$

Из уравнения (6.7) выразим $\frac{\partial T}{\partial n}$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{V_g}{g} \frac{\ell T}{\sin \delta} \frac{d\delta}{dz} \quad (6.8)$$

Подставим (6.8) в уравнение (6.3) $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial T}{\partial n} \frac{\partial P}{\partial n} \sin \delta$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial P}{\partial n} \frac{V_g}{g} \frac{\ell T}{\sin \delta} \frac{d\delta}{dz} \sin \delta \quad (6.9)$$

В уравнении (6.9) $\frac{1}{\rho \ell} \frac{\partial P}{\partial n} = V_g$

Таким образом, геострофическая адвекция в слое Δz запишется так:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\ell T}{g} V_g^2 \frac{d\delta}{dz} \quad (6.10)$$

В формуле (6.10) угол δ - это угол, отсчитываемый от барического градиента к термическому против часовой стрелки.

При правом повороте ветра, когда $d\delta > 0$, наблюдается адвекция тепла. При левом повороте $d\delta < 0$ и адвекция холода в слое от z_0 до z .

Получим формулу для расчета геострофической адвекции по повороту ветра при переходе с одной изобарической поверхности на другую. Воспользуемся формулой (6.10), вспомним основное уравнение статики.

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \rightarrow dz = -\frac{dP}{\rho g}$$

Подставим dz в уравнение (20):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\ell T}{g} V_g^2 \frac{d\delta}{dP} \rho g \quad (6.11)$$

$\rho = \frac{P}{RT}$ – подставим в уравнение (6.11)

Получим:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\ell}{R} P V_g^2 \frac{d\delta}{dP} \quad (6.12)$$

В уравнении (6.12) так же, как и в уравнении (6.10), угол δ - это угол, отсчитываемый от барического градиента к термическому против часовой стрелки.

Лекция 7

7.1 Циркуляция

В атмосфере наблюдаются движения самых различных масштабов, начиная от движений, возникающих между неоднородными по своим физическим свойствам небольшими участками земной поверхности, и кончая движениями, сравнимыми по своим размерам с размерами материков и океанов. К числу последних относятся движения в циклонах и антициклонах, муссонная циркуляция, пассатные ветры и т.п.

Проблема образования циклонов и антициклонов и их движения представляет собой одну из важнейших проблем синоптической и динамической метеорологии. Циклоническая деятельность является важной составной частью общей циркуляции атмосферы.

С гидродинамической точки зрения, циклоны и антициклоны представляют собой большого масштаба вихри, в которых воздух совершает вращательное движение.

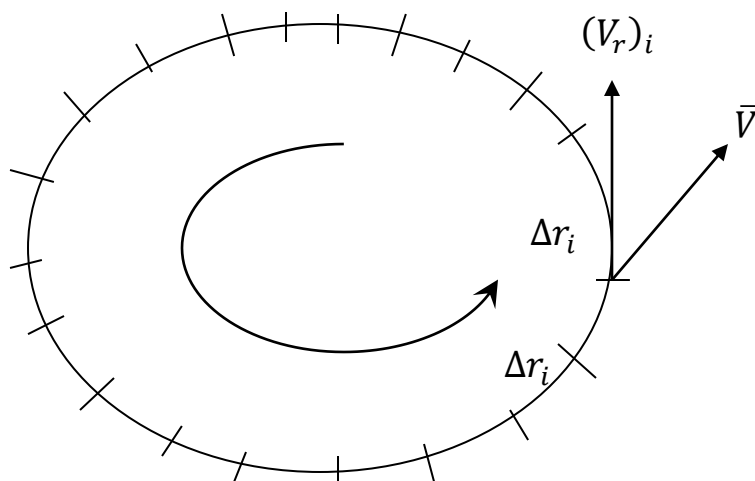
Для жидкости или газа можно выделить произвольный замкнутый контур в пространстве, составленный из движущихся частиц, и рассмотреть значения скоростей частиц в каждой точке этого контура, а также суммарный эффект движения вдоль контура. Такой анализ позволяет вскрыть особенности движения данной жидкости или газа.

Циркуляцией скорости \bar{V} по замкнутому контуру Γ называется следующее выражение:

$$\Gamma = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (V_r)_i \Delta r_i \quad (7.1)$$

где Γ (гамма) – циркуляция

V_r – проекция скорости на направление контура в заданной точке, а суммирование распространяется по всему контуру Γ .



Вводя криволинейный интеграл, можно написать:

$$\Gamma = \oint_r V_r dr \quad (7.2)$$

Или, так как $V_r dr = V dr \cos(\vec{V} d\vec{r}) = (\vec{V} d\vec{r})$

Следовательно,

$$\Gamma = \oint_r \vec{V} d\vec{r} \quad (7.3)$$

Как видно из написанных формул, циркуляция скорости есть суммарная характеристика вращательной составляющей движения по контуру r .

В правой системе координат обход контура r производится против часовой стрелки. Поэтому $\Gamma > 0$ означает, что суммарная вращательная составляющая скорости направлена против часовой стрелки, а $\Gamma < 0$ – по часовой стрелке.

Наибольшее значение циркуляции будет тогда, когда рассматриваемый контур совпадает с направлением вращения жидкости или газа. Тогда в каждой точке контура проекция скорости V_r численно равна величине самой скорости и при обходе контура сохраняется один и тот же знак.

Направление интегрирования и элемент dr в формуле Γ считаются положительными при обходе контура против часовой стрелки. Таким образом,

относительная циркуляция в циклоне положительная, а в антициклоне отрицательная.

7.2 Вихрь

Вихрь ($\bar{\Omega}$ – омега) связан с циркуляцией Γ (гамма) теоремой Стокса:

$$\Gamma = \oint_S \bar{V} d\bar{r} = \int_{\sigma} \bar{\Omega} \bar{n} d\sigma = \int_{\sigma} rot \bar{V} \bar{n} d\sigma$$

Циркуляция скорости (Γ) по произвольной замкнутой кривой S равна потоку вихря скорости через поверхность σ , ограниченную этой кривой.

Если циркуляция определяется по некоторой области, то вихрь определяется в точке. Вектор вихря $\bar{\Omega}$ определяется формулой:

$$\bar{\Omega} = rot \bar{V} = [\nabla \bar{V}]$$

Разложим векторное произведение $[\nabla \bar{V}]$ по определителю.

$$[\nabla \bar{V}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \bar{k} \quad (7.4)$$

Каждая из составляющих вихря по осям декартовой (стандартной) системы координат x, y, z характеризует тенденцию вращательного движения частиц воздуха вокруг соответствующей оси. Поскольку вращательные движения в вертикальной плоскости (вокруг осей x и y) в крупномасштабных атмосферных процессах очень малы (примерно в 100 раз меньше вращательных движений в горизонтальной плоскости), то для таких процессов достаточно ограничиться рассмотрением вертикальной составляющей вихря скорости, характеризующей тенденцию вращательного движения в горизонтальной плоскости вокруг оси z .

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7.5)$$

Вихрь скорости является очень важной характеристикой атмосферных процессов, так как с его изменениями тесно связаны изменения барического поля во времени.

7.3 Связь вихря скорости с давлением и геопотенциалом

Если вместо фактической скорости в уравнении (7.5) взять геострофическую, то вихрь можно назвать геострофическим, и он будет выражен через давление или геопотенциал.

$$\begin{aligned}
 u_g &= -\frac{1}{\rho\ell} \frac{\partial P}{\partial y}; \\
 v_g &= \frac{1}{\rho\ell} \frac{\partial P}{\partial x} \\
 \Omega_g &= \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{\rho\ell} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

В скобке стоит оператор Лапласа от давления, или лапласиан ($\nabla^2 = \Delta$)

$$\Omega_g = \frac{1}{\rho\ell} \nabla^2 P = \frac{1}{\rho\ell} \Delta P \tag{7.7}$$

$$u_g = -\frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H}{\partial y};$$

$$v_g = \frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H}{\partial x};$$

$$\Omega_g = \frac{9,8}{\ell} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right)$$

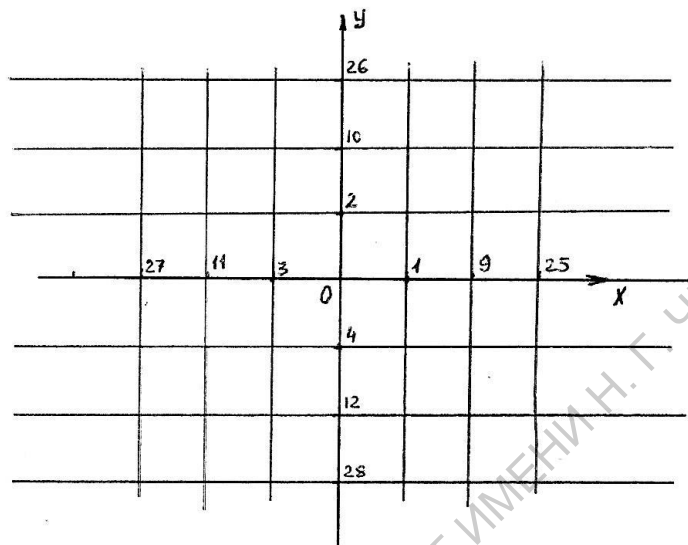
$$\Omega_g = \frac{9,8}{\ell} \nabla^2 H = \frac{9,8}{\ell} \Delta H \tag{7.8}$$

Лапласианы давления и геопотенциала можно рассчитать по карте, пользуясь методом замены производных через конечные разности, по прямоугольной сетке с шагом от 150 до 300 км ($d \approx 250$ км)

$$\Delta P = \frac{1}{4d^2} (P_9 + P_{10} + P_{11} + P_{12} - 4P_0) \tag{7.9}$$

$$\Delta H = \frac{1}{4d^2} (H_9 + H_{10} + H_{11} + H_{12} - 4H_0) \quad (7.10)$$

0, 9, 10, 11, 12 – номера точек, находящихся на расстоянии $2d$ от центральной (нулевой) по осям x и y .



Из формул (7.7) и (7.8) видно, что знак вихря может быть оценен по знаку лапласиана давления или геопотенциала.

Из формул (7.9) и (7.10) следует, что в циклоне лапласиан положительный, а значит и $\bar{\Omega} > 0$, т.е. направлен вверх по оси z . В антициклоне лапласиан, а следовательно, и вихрь отрицательный $\bar{\Omega} < 0$, т.е. направлен противоположно оси z , вниз.

7.4 Анализ локального изменения геопотенциальных высот изобарической поверхности

Из формулы (7.5) видно, что вертикальный вихрь Ω образуется за счет деформации поля скоростей $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Если поле скоростей неоднородно, то обязательно возникнет вихревое движение. Чтобы получить уравнение изменения (тенденции) вихря, надо воспользоваться основным уравнением движения в проекциях на оси x и y в декартовой системе координат (x, y, z) или в изобарической (x, y, p) системе

координат. Чтобы связать изменение вихря с локальным изменением геопотенциальных высот изобарической поверхности, нужно взять уравнение движения атмосферы в изобарической системе координат.

$$\text{Проекция на ось } x: \frac{\partial u}{\partial t} = \ell v - 9,8 \frac{\partial H}{\partial x} \quad (7.11)$$

$$\text{Проекция на ось } y: \frac{\partial v}{\partial t} = -\ell u - 9,8 \frac{\partial H}{\partial y} \quad (7.12)$$

Полную производную $\frac{d}{dt}$ можно разложить по оператору Эйлера:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial}{\partial p} \quad (7.13)$$

Вспомнив, что $\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, продифференцировав уравнение (7.12) по x , а уравнение (7.11) по y , и вычитая $\frac{\partial}{\partial y}$ (7.11) из $\frac{\partial}{\partial x}$ (7.12), разложив полные (индивидуальные) производные по оператору Эйлера, сгруппировав некоторые члены, получим уравнение вихря (тенденции вихря) скорости в изобарической системе координат:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \Omega}{\partial p} \right) - (\Omega + \ell) D - v \beta - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \quad (7.14)$$

В уравнении (7.14) $\tilde{w} = \frac{dp}{dt}$ - аналог вертикальной скорости; $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ - дивергенция скорости; $\beta = \frac{\partial \ell}{\partial y}$ - параметр Россби.

Из уравнения (7.14) видно, что локальное изменение вихря скорости, то есть его тенденция $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$, определяется действием ряда факторов, представленных в правой части уравнения.

Первое слагаемое справа характеризует зависимость $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$ от адвекции (горизонтального переноса) вихря скорости. Это слагаемое больше всех других и называется вихревой составляющей уравнения тенденции вихря.

Переносом вихря по вертикали (конвективной составляющей) $\tilde{w} \frac{\partial \Omega}{\partial p}$ обычно пренебрегают, т.к. вертикальные скорости значительно меньше горизонтальных.

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)_{\text{вихр}} = -\left(u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)$$

Второе слагаемое характеризует зависимость $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$ от горизонтальной дивергенции скорости и его называют дивергентной составляющей уравнения тенденции вихря.

$$\text{div} \bar{V} = \nabla \bar{V} = D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

В отличие от относительного вихря скорости Ω , множитель $(\Omega + \ell)$ является абсолютным вихрем скорости, в котором учтено не только вращение частиц воздуха относительно поверхности Земли, но и вращение Земли вокруг своей оси. Оценка порядка величин показывает, что в умеренных и высоких широтах параметр Кориолиса ℓ примерно в 10 раз больше Ω , так что

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)_{\text{див}} = -(\Omega + \ell)D \approx -\ell D$$

Третье слагаемое характеризует зависимость $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$ от меридиональных смещений воздушных масс и часто называется меридиональной составляющей уравнения тенденции вихря.

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)_{\text{мерид}} = -v \frac{\partial \ell}{\partial y} = \beta v$$

Четвертое слагаемое характеризует зависимость $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$ от горизонтального градиента вертикальной скорости и изменения ветра с высотой. В свободной атмосфере этим членом обычно пренебрегают.

Уравнение (7.14) является прогностическим, так как справа стоят члены, не содержащие производных по времени, следовательно, они могут быть вычислены по одной карте.

Уравнение (7.14) можно преобразовать в уравнение, содержащее только геопотенциал, подставив в него геострофический ветер вместо фактического и геострофический вихрь.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{9,8}{\ell} \Delta H \right) = \frac{9,8}{\ell} \frac{\partial}{\partial t} \Delta H = \frac{9,8}{\ell} \Delta \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7.15)$$

$\frac{\partial H}{\partial t}$ - локальное изменение геопотенциальной высоты изобарической поверхности, которое нам и надо рассчитать. Но расчет $\frac{\partial H}{\partial t}$ очень усложнился, т.к. $\frac{\partial H}{\partial t}$ входит в уравнение под знаком лапласиана. Учитывая найденную эмпирическую связь $\nabla^2 \frac{\partial H}{\partial t} = -m \frac{\partial H}{\partial t}$, можно получить формулу, определяющую локальное изменение геопотенциальной высоты в зависимости от вихревой и дивергентной составляющих:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{9,8}{\ell} \{H, \Delta H\} + \frac{\ell^2}{9,8m} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (7.16)$$

Эмпирический коэффициент m изменяется от $2 \cdot 10^{-12}$ до $13 \cdot 10^{-12} \text{ м}^{-2}$.

$$\{H, \Delta H\} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta H - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta H - \text{якобиан.}$$

В свободной атмосфере ветер можно считать геострофическим, а дивергенция от геострофической скорости равна нулю.

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{9,8}{\ell} \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{9,8}{\ell} \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

Поэтому от уравнения (7.16) останется вихревая составляющая, знак которой можно определить качественно, представив градиент геопотенциала и лапласиан от геопотенциала в натуральных координатах.

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{\text{вихр}} = \frac{9,8}{m\ell} H_n (kH_{ns} + k_s H_n + H_{nns}) \quad (7.17)$$

В уравнении (7.17):

$H_n = \frac{\partial H}{\partial n}$ - градиент геопотенциала, который всегда имеет положительный знак;

k - кривизна изогипсы

$k > 0$ при циклонической кривизне;

$k < 0$ при антициклонической кривизне;

$k_s = \frac{\partial k}{\partial s}$ - изменение кривизны изогипс в направлении потока;

$H_{ns} = \frac{\partial}{\partial s} H_n$ – изменение градиента геопотенциала в направлении потока (сходимость или расходимость изогипс);

$H_{nms} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial n} H_n$ – изменение степени и направления сгущения изогипс вдоль потока.

Из формулы (7.17) следует, что влияние горизонтального переноса вихря скорости определяется тремя факторами:

- 1) Сходимостью (расходимостью) изогипс различной кривизны вдоль потока kH_{ns} ;
- 2) Изменением кривизны изогипс вдоль потока $k_s H_n$;
- 3) Изменением степени и направления сгущения изогипс вдоль потока H_{nms} . Этим фактором обычно пренебрегают.

Предполагается, что знак вихревого фактора, найденный для начального момента, сохраняется в течение времени, соответствующего заблаговременности прогноза.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО