Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

М. Б. АБРОСИМОВ

ГРАФОВЫЕ МОДЕЛИ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОСТИ

Саратов
ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2012

УДК 519.17
ББК 22.176
А16

Абросимов, М. Б.
А16 Графовые модели отказоустойчивости / М. Б. Абросимов. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. – 192 с. : ил.
ISBN 978-5-292-04132-0

В монографии рассматриваются конструкции специального вида над графами – вершинные и реберные расширения. Эти конструкции появились в связи с исследованиями проблем отказоустойчивости дискретных систем, особенно многопроцессорных систем, мультикомпьютеров и параллельных вычислительных систем. Вершинные и реберные расширения оказались связанными со многими направлениями в теории графов.

Для научных работников, аспирантов, студентов, занимающихся или интересующихся теорией графов и ее приложениями.

Р е ц е н з е н т ы :

доктор технических наук, заведующий кафедрой
«Защита информации и криптографии» *Г. П. Агибалов*
(Томский государственный университет)
доктор физико-математических наук, профессор кафедры
«Математика и моделирование» *Д. А. Бредихин*
(Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина)

Работа издана по тематическому плану 2012 года
(утвержден на Ученом совете Саратовского государственного университета,
протокол № 6 от 15 мая 2012 года)

УДК 519.17
ББК 22.176

Работа издана в авторской редакции

ISBN 978-5-292-04132-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

Г л а в а 1. Основные свойства 9

1.1. Основные понятия теории графов 9
1.2. Отказоустойчивость 17
1.3. Расширения графов 26
1.4. Вычислительная сложность 29

Г л а в а 2. Вершинные расширения 32

2.1. Основные определения и свойства 32
2.2. Сложность задачи 61
2.3. Неизоморфные расширения 63
2.4. Циклы 67
2.5. Предполные графы 80
2.6. Деревья 101
2.7. Орграфы 118

Г л а в а 3. Реберные расширения 132

3.1. Основные определения и свойства 132
3.2. Сложность задачи 137
3.3. Неизоморфные расширения 141
3.4. Циклы 143
3.5. Предполные графы 149
3.6. Деревья 156
3.7. Орграфы 164

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 178

Список литературы 181

ВВЕДЕНИЕ

Надежность является важнейшим аспектом при использовании вычислительных систем в критических областях. Авиация, энергетика, космос… Количество таких критических областей со временем только увеличивается. Выход из строя хотя бы одного элемента системы может привести к критическим последствиям.

Авиженис (Avižienis, 1975) выделил два подхода для повышения надежности (reliability) реальных вычислительных систем: предотвращение ошибок и отказоустойчивость.

Первое направление связано с уменьшением вероятности возникновения ошибки и состоит в разработке высоконадежных компонентов системы. На этом пути можно отметить большие успехи. Время наработки на отказ первых компьютеров измерялось минутами, а современных – годами.

Во втором направлении используется добавление в систему избыточных структур для придания ей дополнительных свойств отказоустойчивости. Понятие отказоустойчивости было определено Авиженисом как обеспечение системы способностью противостоять ошибке и возможностью продолжать работу в присутствии этой ошибки. Выделяют следующие уровни отказоустойчивости:

1) полная отказоустойчивость – система продолжает работать в присутствии ошибок без существенной потери функциональных свойств;

2) амортизация отказов – система продолжает работать в присутствии ошибок с частичной деградацией функциональных возможностей.

Некоторое время назад (Laprie, 1985 ; Dependability …, 1992 ; Avižienis et al., 2004 ; Харченко, 2006 ; Харченко, 2009) стали рассматривать более общее понятие, чем надежность (reliability), – гарантоспособность (dependability). Под гарантоспособностью понимается комплексное свойство системы предоставлять требуемые услуги, которым можно оправданно доверять. В работе (Avižienis et al., 2004) дается подробная таксономия для гарантоспособности. В частности, надежность является атрибутом гарантоспособности, а отказоустойчивость – одним из средств ее достижения.

В данной работе будет исследоваться конструкция минимального вершинного и реберного расширения графа, основанная на идеях формализации понятия полной отказоустойчивости технических систем, предложенных в 1976 г. Хейзом (Hayes, 1976).

Технической системе S сопоставим помеченный граф $G(S)$, вершины которого соответствуют элементам системы S, ребра – связям между элементами, а метки указывают тип элементов. Под *отказом* элемента технической системы S понимается удаление соответствующей ему вершины из графа системы $G(S)$ и всех связанных с ней ребер.

Говорят, что система S^* является *k-отказоустойчивой реализацией* системы S, если отказ любых k элементов системы S^* приводит к графу, в который можно вложить граф системы S с учетом меток вершин. Построение k-отказоустойчивой реализации системы S можно представить себе как введение в нее определенного числа новых элементов и связей. При этом предполагается, что в нормальном режиме работы избыточные элементы и связи *маскируются*, а в случае отказа происходит *реконфигурация* системы до исходной структуры. Следует заметить, что процесс реконфигурации в общем случае (с учетом частичной деградации функциональных возможностей системы) является достаточно сложной процедурой и составляет самостоятельную область исследования (см. например, Livingston, Stout, 1988 ; Dutt, Hayes, 1991 ; Graham et al., 1993 ; Пархоменко, 2000). Для нас далее представляет интерес оптимизация k-отказоустойчивой реализации.

Пусть в системе S встречается t различных типов элементов. Очевидно, что любая ее k-отказоустойчивая реализация должна содержать не менее k дополнительных элементов каждого типа. Легко видеть, что такого числа дополнительных элементов достаточно для построения k-отказоустойчивой реализации системы S. В самом деле, добавим k элементов каждого типа и соединим их все между собой и с элементами системы S. Тогда любой отказавший элемент можно будет заменить одним из добавленных элементов соответствующего типа. Далее построенную таким образом k-отказоустойчивую реализацию будем называть *тривиальной*.

k-отказоустойчивая реализация S^* системы S, состоящей из t элементов различного типа, называется *оптимальной*, если система S^* отличается от системы S на k элементов каждого из t типов системы S и среди всех k-отказоустойчивых реализаций с тем же числом элементов система S^* имеет наименьшее число ребер.

На практике элементы технических систем часто оказываются однотипными. Так, если рассматриваются многопроцессорные системы, то элементами являются процессоры; в распределенных вычислениях элементами могут являться компьютеры; в многоагентных интеллектуальных системах – интеллектуальные агенты. При исследовании отказоустойчивости в подобных системах метки элементов опускаются и в качестве графа системы рассматривается граф без меток. В этом случае оптимальная k-отказоустойчивая реализация будет содержать в точности k дополнительных элементов.

Данный подход впервые был изложен Хейзом в работе (Hayes, 1976). Там же были предложены процедуры построения оптимальной k-отказоустойчивой реализации для цепи, цикла и помеченного дерева. Позднее Хейз совместно с Харари обобщил модель на случай отказов связей между элементами, предложив понятие *реберной отказоустойчивости* (Harary, Hayes, 1993). Модель отказоустойчивости, в которой рассматриваются только отказы элементов, было предложено называть *вершинной отказоустойчивостью* (Harary, Hayes, 1996). Последующее расширение модели связано с рассмотрением как отказов элементов, так и отказов связей между ними. Подобная модель, называемая *комбинированной отказоустойчивостью,* рассматривается в работах (Sung et al., 1998 ; Wang et al., 1998, 2000 ; Huang et al., 1999 ; Hung et al., 2000, 2001 ; Sung et al., 2000 ; Hsu, Lin, 2009).

А. В. Киреева рассматривала вершинную отказоустойчивость в ориентированных графах (Киреева, 1995). Ею описана вершинная оптимальная 1-отказоустойчивая реализация произвольного функционального графа. Санг и другие (Sung et al., 1998) использовали модель Хейза для нахождения вершинной и реберной оптимальной 1-отказоустойчивой реализации ориентированного цикла.

Иногда рассматривают вершинную отказоустойчивость с несколько иной интерпретацией отказов элементов (например, (Каравай, 1996 ; Каравай, 2000)): отказавший элемент исключается из модели, однако все его связи сохраняются, что приводит к новой системе, в которой каждая пара элементов, связанных с отказавшим, также будет связана.

На сегодняшний день не известно полиномиального алгоритма построения оптимальной k-отказоустойчивой реализации для произвольного графа. Далее будет доказано, что задача относится к классу NP-полных задач. В поисках аналитического решения предпринимались попытки ослабить требование минимальности и рассматривались неприводимые, T-неприводимые, почти оптимальные реализации. Однако это не позволяет выйти из класса вычислительно сложных задач. Видимо, полное аналитическое описание оптимальных в таких смыслах реализаций невозможно. В связи с этим последующее развитие исследований связано с описанием оптимальных k-отказоустойчивых реализаций для наиболее интересных с точки зрения практического применения классов графов. Таковыми являются деревья и циклы.

Деревья. Задачу описания оптимальных k-отказоустойчивых реализаций деревьев сформулировал Хейз (Hayes, 1976). Там же была предложена вершинная оптимальная 1-отказоустойчивая реализация для полного n-арного дерева с метками. Харари и Хуррум (Harary, Khurum, 1995) описали схему построения оптимальной 1-отказоустойчивой реализации деревьев специального вида: гусениц и звездоподобных деревьев. Еще один результат для частного случая гусениц (цепи колес) был получен М. А. Кабановым (Кабанов, 1997). Звездоподобным (сверхстройным) деревьям далее будет уделено достаточное внимание. Кван и Тойда (Kwan, Toida, 1982) описали схему построения оптимальной 2-отказоустойчивой реализации для полного бинарного дерева с метками. Сложность задачи для общего случая привела к понятию *почти оптимальной k-отказоустойчивой реализации* (Dutt, Hayes, 1990). Задача нахождения реберной оптимальной k-отказоустойчивой реализации дерева с метками исследуется в работе (Ku, Hayes, 1996). Определенного успеха удалось добиться С. Г. Курносовой при описании Т-неприводимых 1-расширений полных бинарных деревьев (Курносова, 2005, *а* ; Курносова, 2006).

Циклы. Задача нахождения оптимальных k-отказоустойчивых реализаций циклов впервые была поставлена и решена Хейзом (для отказов элементов в (Hayes, 1976), а для отказов связей между элементами в (Harary, Hayes, 1993). В работе (Harary, Hayes, 1996) Харари и Хейз поставили задачу нахождения оптимальных k-отказоустойчивых реализаций циклов, отличных от тех, что были предложены в (Hayes, 1976). Махопадхья и Синха (Mukhopadhyaya, Sinha, 1992) указали первое такое семейство оптимальных 1-отказоустойчивых реализаций циклов. Ряд других семейств приводится в работах (Paoli et al., 1984, 1986 ; Wang et al., 1998, 2000 ; Hung et al., 1999, 2000, 2001 ; Sung et al., 2000 ; Абросимов, 2000, *а* ; Hsu, Lin, 2009). Заметим, что только схемы построения, предложенные Хейзом, Махопадхья и Синхом, позволяют указать оптимальную 1-отказоустойчивую реализацию для цикла с любым числом вершин, в том числе и для цикла с четным числом вершин. Далее будет предложена еще одна схема построения оптимальной 1-отказоустойчивой реализации для цикла с любым числом вершин, отличная от схемы Хейза.

Отдельно следует выделить исследования, связанные с нахождением оптимальной 1-отказоустойчивой реализации ориентированного цикла, в работе (Sung et al., 1998).

Особый интерес в рамках данного направления представляет описание негамильтоновых минимальных вершинных 1-расширений циклов. Эти исследования тесно связаны с поиском *гипогамильтоновых* графов, то есть негамильтоновых графов, каждый максимальный подграф которых является гамильтоновым.

Задача нахождения гипогамильтоновых графов была сформулирована в 1963 году Сусельером (Sousselier, 1963). Год спустя Годин, Херц и Росси (Gaudin et al., 1964) показали, что наименьшим гипогамильтоновым графом является граф Петерсена. Позднее исчерпывающий компьютерный поиск показал, что не существует гипогамильтоновых графов с числом вершин 11, 12 (Herz et al., 1966), 14 (Collier, Schmeichel, 1978) и 17 (Aldred et al., 1997). С другой стороны, были найдены гипогамильтоновы графы с числом вершин $n = 10$, 13, 15 и 16, а также для всех $n \geq 18$ (Herz et al., 1967 ; Lindgren, 1967 ; Bondy, 1972 ; Chvatal, 1973 ; Thomassen, 1974, *а*, *б* ; Doyen, van Diest, 1975 ; Holton, Sheehan, 1993). Подробный обзор вопроса можно найти в книге Холтона и Шихана (Holton, Sheehan, 1993), последний результат – об отсутствии 17-вершинных гипогамильтоновых графов – содержится в работе Алдреда, Маккея и Вормальда (Aldred et al., 1997).

Интересное применение Т-неприводимые расширения нашли в криптографии (Салий, 2003). Расширения графов можно рассматривать в контексте задач реконструкции, когда из заданного графа требуется построить новый граф, обладающий определенными свойствами (Салий, 2008). Многие результаты, полученные при исследовании оптимальных k-отказоустойчивых реализаций графов, оказались тесно переплетены с результатами, полученными в рамках «чистой» теории графов. В рамках технической диагностики задача описания оптимальных k-отказоустойчивых реализаций рассматривается для графов, являющихся моделями технических систем, что накладывает ограничение на класс графов, представляющих интерес для исследования. Далее конструкция вершинной оптимальной k-отказоустойчивой реализации будет рассматриваться как абстрактная конструкция над графами, однако особое внимание будет уделено полезным с практической точки зрения классам графов, таким как звезды и их ориентации, цепи, циклы, звездоподобные (сверхстройные) деревья, турниры.

Работа состоит из введения и трех глав. В первой главе вводятся основные понятия, вторая глава посвящена исследованию отказов элементов – вершинным расширениям, а третья глава посвящена отказам связей между элементами – реберным расширениям.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю – профессору Вячеславу Николаевичу Салию за внимание, помощь и поддержку во время исследований.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

1.1. Основные понятия теории графов

1.1.1. Неориентированные графы

Неориентированным графом (везде далее просто *графом, или неографом*) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α – симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. Если $(u,v) \in \alpha$, то говорят, что вершины u и v *смежны* и эти вершины соединены *ребром* (u, v). При этом (u, v) и (v, u) это одно и то же ребро, которое обозначают $\{u, v\}$. Говорят, что ребро $\{u, v\}$ *инцидентно* каждой из вершин u и v. Графы в указанном смысле иногда называются *простыми* (нет петель и кратных ребер). Далее для графа $G = (V, \alpha)$ множество вершин V будем иногда обозначать через $V(G)$, а число ребер – через $|\alpha|$. Граф, любые две вершины которого смежны, называется *полным* и обозначается $K_{|V|}$. По определению, $K_{|V|} = G(V, V \times V - \Delta)$, где через Δ обозначено тождественное отношение на множестве V. Граф без ребер, то есть с пустым отношением смежности α, называется *вполне несвязным*, или *нульграфом*, и обозначается $O_{|V|}$. Граф называется *двудольным*, если множество его вершин V может быть разбито на два подмножества вершин V_1 и V_2, такие что концы любого ребра графа принадлежат разным подмножествам. Если граф содержит все ребра, соединяющие вершины из множеств V_1 и V_2, то он называется *полным двудольным графом* и обозначается $K_{m,n}$, где m и n – число вершин в множествах V_1 и V_2. Граф вида $K_{1,n}$ называется *звездой, звездным графом,* или *колесом*. Основные определения мы используем в соответствии с книгами (Богомолов, Салий, 1997) или (Харари, 2003). Данные по числу различных объектов даются преимущественно по работе (Sloane, Plouffe, 1995) и сопровождаются соответствующей ссылкой на сайт числовых последовательностей «*Integer Sequences*»: http://oeis.org/.

Степенью вершины v в неориентированном графе G будем называть количество вершин в G, смежных с v, и обозначать через $d(v)$. Набор чисел, являющихся степенями вершин графа G, называют его *степенным множеством*, а вектор, составленный из степеней вершин графа G в порядке убывания, – *вектором степеней*. Говорят, что граф является *реализацией* своих вектора степеней и степенного множества.

Два графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называются *изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное соответствие $f: V_1 \to V_2$, сохраняющее отношение смежности: $(u, v) \in \alpha_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2$, для любых $u, v \in V_1$. В этом случае пишут $G_1 \cong G_2$.

Граф, вершинам которого приписаны метки, называется *помеченным*. *Непомеченным* или *абстрактным* графом называется класс изоморфных графов. Количество непомеченных графов с ростом числа вершин быстро растет: 1, 2, 4, 11, 34, 156, 1044, 12346, 274668, 12005168[1].

Изоморфное отображение графа на себя называется *автоморфизмом*. Тождественное отображение $\Delta: V \to V$ является автоморфизмом для любого графа. Автоморфизмы графа образуют группу. Граф, имеющий только тождественный автоморфизм, называется *асимметричным*, или *тождественным*. Минимальным тождественным графом является одновершинный граф. Тождественных графов с числом вершин 2, 3, 4, 5 не существует, а, начиная с 6 вершин, количество тождественных графов быстро увеличивается: 8, 152, 3696, 135004, 7971848, 805364776[2].

Две вершины u и v называются *подобными*, если существует автоморфизм f, такой что $f(u) = v$. Граф, все вершины которого подобны, называется *вершинно-симметрическим*. Два ребра $\{u_1, v_1\}$ и $\{u_2, v_2\}$ называются *подобными*, если существует автоморфизм, который переводит одно ребро в другое. Граф, все ребра которого подобны, называется *реберно-симметрическим*.

Инвариантом графа G называется набор его характеристик, одинаковых для всех изоморфных ему графов. Инвариантами графа являются, например, число вершин графа, количество дуг или ребер. *Полным инвариантом* называется такой инвариант, который определяет граф однозначно с точностью до изоморфизма. Одним из известных числовых инвариантов является максимальный (минимальный) матричный код графа.

Матрица отношения смежности графа называется его *матрицей смежности*. Пусть $G = (V, \alpha)$ – n-вершинный граф. Тогда его матрица смежности $A = M(\alpha)$ имеет размерность $n \times n$, а на позиции (i, j) стоит 1, если есть дуга (v_i, v_j) и 0 в противном случае:

[1] См. последовательность A000088: http://oeis.org/A000088
[2] См. последовательность A003400: http://oeis.org/A003400

$$A = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \ldots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \ldots & x_{2,n} \\ & \ldots & & \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \ldots & x_{n,n} \end{pmatrix}$$

Если выписать элементы матрицы смежности по строкам, то получится некоторое двоичное число – *код* графа:

$$x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots x_{1,n}, x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots x_{2,n}, \ldots, x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots x_{n,n}.$$

Само по себе это число не является инвариантом, так как матрицы смежности у изоморфных графов могут различаться, однако если среди всех изоморфных графов выбрать матрицу смежности с максимальным (*максимальный код*) или минимальным (*минимальный код*) значением кода, то получится инвариант, причем полный. Очевидно, что для n-вершинного графа размер кода будет n^2 бит. Для некоторых классов графов, например для неориентированных графов, достаточно хранить только часть матрицы смежности, расположенную над главной диагональю. В этом случае размер кода будет составлять $n(n-1)/2$ бит.

Если вектор степеней имеет единственную реализацию, то говорят, что вектор степеней определяет *униграф*. Все графы с числом вершин до 5 являются униграфами. Далее число униграфов по сравнению с общим числом графов растет существенно медленнее: 1, 2, 4, 11, 28, 72, 170, 407, 956, 2252[3]. *Однородным* (или *регулярным*) n-вершинным графом $R_{n,p}$ порядка p называют граф, в котором все степени вершин равны p. Однородный граф порядка 3 называется *кубическим*. Очевидно, что кубические графы существуют только при четном количестве вершин, начиная с 4. Единственный кубический 4-вершинный граф – полный граф K_4. С ростом числа вершин количество кубических графов быстро растет: 1, 2, 6, 21, 94, 540, 4207, 42110, 516344[4]. Однородный граф порядка 4 называется *биквадратным*. Биквадратные графы существуют при любом количестве вершин, начиная с 5. Единственный биквадратный 5-вершинный граф – полный граф K_5. С ростом числа вершин количество биквадратных графов быстро растет: 1, 1, 2, 6, 16, 60, 266, 1547, 10786, 88193, 805579, 8037796, 86223660, 985883873, 11946592242, 15280899376[5].

Путем в графе $G = (V, \alpha)$ называется последовательность вершин и ребер вида $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, v_n$. При этом говорят, что v_0 – *начальная вершина* пути, а v_n – *конечная*. Говорят также, что путь соединяет вершины v_0 и v_n, и вершина v_n *достижима* из v_0. Путь в графе можно задавать

[3] См. последовательность A122423: http://oeis.org/A122423
[4] См. последовательность A005638: http://oeis.org/A005638
[5] См. последовательность A033301: http://oeis.org/A033301

перечислением входящих в него вершин в порядке их прохождения: $v_0,\ldots,v_n$. Путь, каждая вершина которого принадлежит не более чем двум его ребрам, считается *простым*. Если начальная вершина простого пути совпадает с конечной, путь называют *циклом*, в противном случае – *цепью*. Цикл или цепь, содержащие все вершины графа, называются *гамильтоновыми*. Граф, содержащий гамильтонов цикл, также называется *гамильтоновым*. Цепи и циклы, кроме указанного выше смысла, могут иметь еще интерпретацию как графы специального вида.

Цепью P_n называется граф $G = (V, \alpha)$, где $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, и $\alpha = \{(v_i, v_j)\colon |i - j| = 1\}$, а *циклом* C_n – граф $G = (V, \alpha)$, где $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, и $\alpha = \{(v_i, v_j)\colon |i - j| = 1\} \cup \{(v_1, v_n), (v_n, v_1)\}$.

Дополнением графа $G = (V, \alpha)$ называется граф $G' = (V, \alpha')$, где $\alpha' = (V \times V)/(\alpha \cup \Delta)$. Граф, изоморфный своему дополнению, назовем *самодополнительным*.

Соединением двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$, не имеющих общих вершин, называется граф

$$G_1 + G_2 := (V_1 \cup V_2, \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_1).$$

Очевидно, что операция соединения двух графов коммутативна.

Соединением n графов $G_i = (V_i, \alpha_i)$, не имеющих общих вершин, назовем граф $G_1 + G_2 + \ldots + G_n := (\ldots(G_1 + G_2) + \ldots) + G_n$.

ЛЕММА 1.1.1. *Операция соединения n графов ассоциативна и коммутативна. Причем имеет место следующее соотношение:*

$$G_1 + \ldots + G_n := (V_1 \cup \ldots \cup V_n, \alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_n \cup \bigcup_{\substack{1 \le i, j \le n \\ i \ne j}} V_i \times V_j).$$

Доказательство очевидно.□

Будем обозначать через G^m соединение m графов $G_1,\ldots,G_m$, таких, что никакие два из них не имеют общих вершин, и каждый граф G_i изоморфен графу G.

Объединением двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется граф $G_1 \cup G_2 := (V_1 \cup V_2, \alpha_1 \cup \alpha_2)$. Далее, если явно не указано обратное, мы будем полагать, что множества V_1 и V_2 не пересекаются.

Объединением графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$, …, $G_n = (V_n, \alpha_n)$ называется граф $G_1 \cup \ldots \cup G_n := (V_1 \cup \ldots \cup V_n, \alpha_1 \cup \ldots\ldots \cup \alpha_2)$.

Очевидно, что операция объединения графов коммутативна.

Будем обозначать через mG объединение m графов $G_1,\ldots,G_m$, таких, что никакие два из них не имеют общих вершин, и каждый граф G_i изоморфен графу G.

Будем считать, что каждая вершина достижима из самой себя. Тогда отношение достижимости является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. Классы этого отношения называются *компонентами связности* графа. Граф с универсальным отношением достижимости называется *связным*. Связный граф без циклов называется *деревом*. Дерево с одной вершиной называется *тривиальным*. *Корневым* называется дерево с выделенной вершиной, а эта выделенная вершина называется *корнем*. Вершины степени 1, кроме корневой, называются *листьями*. *Высота* корневого дерева есть наибольшая из длин цепей от корневой вершины до листьев. Дерево без выделенной вершины называется *свободным*. Приведем количество связных[6] n-вершинных графов и свободных деревьев[7]:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Связные	1	1	2	6	21	112	853	11117	261080	11716571
Деревья	1	1	1	2	3	6	11	23	47	106

Подразбиением ребра $\{u, v\}$ в графе называется операция, состоящая из удаления ребра $\{u, v\}$, добавления новой вершины w и двух ребер $\{u, w\}$ и $\{v, w\}$. Два графа называются *гомеоморфными*, если они могут быть получены из одного графа с помощью последовательности подразбиений ребер.

Дерево, в котором только одна вершина имеет степень больше 2, называется *сверхстройным* (или *звездоподобным*). Очевидно, что сверхстройное дерево гомеоморфно звезде.

На сверхстройное дерево можно смотреть как на объединение цепей с общей концевой вершиной. При этом дерево можно закодировать вектором, состоящим из длин цепей в порядке невозрастания: $(m_1, \ldots, m_k)$, где $m_1 \geq \ldots \geq m_k$. Очевидно, что такое кодирование сверхстройных деревьев при $k > 2$ является взаимно однозначным. В самом деле, любому вектору $(m_1, \ldots, m_k)$ будет соответствовать единственное с точностью до изоморфизма сверхстройное дерево с числом вершин $m_1 + \ldots + m_k + 1$. В этом дереве корневая вершина будет иметь степень k, k вершин будут иметь степень 1, а остальные $m_1 + \ldots + m_k - k$ вершин будут иметь степень 2. Будем называть такой код *век-тором цепей*.

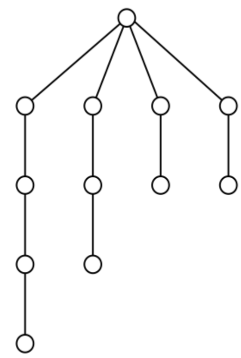


Рис. 1.1.1. Сверхстройное дерево (4,3,2,2)

Пример. На рис. 1.1.1 изображено сверхстройное дерево с 12 вершинами, являющееся объединением четырех цепей с общей концевой вершиной: P_5, P_4, P_3 и P_3. Это дерево имеет вектор цепей (4,3,2,2) и вектор степеней $(4,2^7,1^4)$.

[6] См. последовательность A001349: http://oeis.org/A001349

[7] См. последовательность A000055: http://oeis.org/A000055

Утверждение. *Дерево является сверхстройным тогда и только тогда, когда количество листьев равно наибольшей из степеней вершин.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть T – сверхстройное дерево, а v – его корень. Из определения сверхстройного дерева следует, что степень вершины v является наибольшей среди степеней остальных вершин. Пусть u – произвольная вершина, смежная с v. По определению, она либо является листом, либо имеет степень 2. Но тогда есть еще в точности одна вершина смежная с u, кроме v. Продолжая рассуждение, приходим к выводу, что в дереве T количество листьев равно степени корневой вершины v.

Достаточность. Пусть в дереве T вершина v имеет наибольшую степень. Выберем ее в качестве корня. Заметим, что каждая ветвь, исходящая из корня, заканчивается не менее чем одним листом. Ветвь заканчивается одним листом тогда и только тогда, когда она является цепью, то есть когда все вершины этой ветви, кроме первой (корня) и последней (листа), имеют степень 2. Утверждение доказано. □

Таким образом, вектор степеней сверхстройного дерева имеет вид $(k,2,\ldots,\ 2,1,\ldots,1)$, где $k > 2$ и количество листьев равно k. Кратко вектор степеней сверхстройного дерева может быть записан в виде $(k,2^m,1^k)$. Среди сверхстройных деревьев есть представители других хорошо известных семейств графов.

Мы рассматриваем сверхстройные деревья, у которых степень корневой вершины $k > 2$. Однако если это ограничение убрать, то при $k = 1$ или $k = 2$ сверхстройное дерево является цепью P_n.

Если $m = 0$, то сверхстройное дерево является звездой $K_{1,k}$.

Вектора цепей подсказывают способ перечисления всех сверхстройных деревьев с заданным числом вершин n. Так как $n = m_1 + \ \ldots + m_k + 1$, то, построив все разложения числа $n - 1$ на три и более слагаемых, мы найдем все возможные вектора цепей n-вершинных сверхстройных деревьев. Количество сверхстройных деревьев с числом вершин 4,5, ... есть 1, 2, 4, 7, 11, 17, 25, 36, 50, 70, 94, 127, 168, 222, 288, 375, 480[8], ...

Вершина v в графе G называется *точкой сочленения*, если ее удаление увеличивает число компонент связности. Связный граф без точек сочленения называется *неразделимым*. Ребро $\{u,\ v\}$ в графе G называется *мостом*, если его удаление увеличивает число компонент связности.

Если после удаления любых k вершин вместе с инцидентными им ребрами граф остается связным, то говорят, что он k-*вершинно связный*. Наибольшее k, при котором граф G k-вершинно связный, называется *вер-*

[8] См. последовательность A004250: http://oeis.org/A004250

шинной связностью графа G. Граф с точкой сочленения имеет вершинную связность равную 1.

Если после удаления любых k ребер граф остается связным, то говорят, что он *k-реберно связный*. Наибольшее значение k, при котором граф G является k-реберно связным, называется *реберной связностью* графа G. Граф с мостом имеет реберную связность равную 1.

В связном графе расстояние $d(u, v)$ между вершинами u и v есть длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины. Расстояние от вершины u графа $G = (V, \alpha)$ до наиболее удаленной от нее вершины называется *эксцентриситетом* $e(u)$ вершины u: $e(u) = \max_{v \in V} d(u,v)$.

Наименьший из эксцентриситетов вершин называется *радиусом* $r(G)$ графа G, а наибольший – *диаметром* $d(G)$:

$$r(G) = \min_{u \in V} e(u) = \min_{u \in V} \max_{v \in V} d(u,v), \qquad d(G) = \max_{u \in V} e(u) = \max_{u \in V} \max_{v \in V} d(u,v).$$

Вершина, эксцентриситет которой равен радиусу, называется *центральной*. *Центр* графа – это множество его центральных вершин. Вершина, эксцентриситет которой равен диаметру, называется *периферийной*. *Окраина* графа – это множество его периферийных вершин.

Подграфом графа $G = (V, \alpha)$ называется пара $G' = (V', \alpha')$, где $V' \subseteq V$ и $\alpha' = (V' \times V') \cap \alpha$. Подграф графа G называется *максимальным*, если он получается из G удалением одной вершины и всех связанных с ней ребер. Будем обозначать через $G - v$ максимальный подграф, получающийся из графа G удалением вершины v. Через $G - F$, где $F \subset V$, будем обозначать подграф, получающийся из графа G удалением всех вершин из F.

Вложением графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в граф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется такое взаимно однозначное отображение $f: V_1 \to V_2$, что для любых вершин $u, v \in V_1$ выполняется следующее условие:

$$(u, v) \in \alpha_1 \Rightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2.$$

1.1.2. Ориентированные графы

Ориентированным графом (далее, для краткости, *орграфом*) называется пара $\vec{G} = (V, \alpha)$, где V – конечное непустое множество (*множество вершин*), $\alpha \subseteq V \times V$ – отношение на множестве вершин V, называемое *отношением смежности*. Пара $(u,v) \in \alpha$ называется *дугой* графа с началом в u и концом v. Дуга вида $(u,u) \in \alpha$ называется *петлей*. Вершина, не являющаяся началом никакой дуги, кроме, быть может, петли, называется *стоком*, а вершина, не являющаяся концом никакой дуги, кроме, быть может, петли, называется *источником*. *Полустепенью исхода* $d^+(v)$ вершины v называется число дуг, имеющих вершину v своим началом. *Полустепенью захода* $d^-(v)$ вершины v называется число дуг, имеющих вершину v своим концом. Орграф с универсальным отношением смежности называется *полным* и обозначается $\overrightarrow{K_{|V|}}$. По определению $\overrightarrow{K_{|V|}} = G(V, V \times V)$.

Орграф $\vec{G} = (V, \alpha)$ называется *направленным графом*, или *диграфом*, если отношение α антисимметрично. Полный направленный граф называется *турниром*. В каждой вершине турнира есть петля, однако при изображении турнира петли опускаются. Иногда турниром называют полный диграф без петель. *Транзитивный турнир* – это турнир, у которого из существования дуг (u, v) и (v, w) вытекает существование дуги (u, w). На рис. 1.1.2 изображены 3-вершинные турниры, которые называются *транзитивной тройкой* и *циклической тройкой* соответственно.

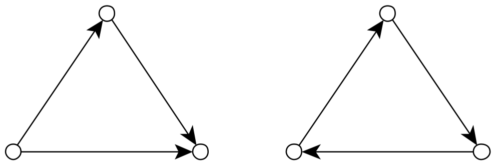


Рис. 1.1.2. 3-вершинные турниры

Далее приведено количество n-вершинных орграфов[9], диграфов[10] и турниров[11]:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Орграфы	1	3	16	218	9608	1540944	$\approx 9*10^8$	$\approx 2*10^{12}$	$\approx 1*10^{16}$	$\approx 3*10^{20}$
Диграфы	1	2	7	42	582	21480	2142288	575016219	$4*10^{11}$	$8*10^{14}$
Турниры	1	1	2	4	12	56	456	6880	191536	9733056

Маршрутом в орграфе $G = (V, \alpha)$ называется последовательность дуг $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$. При этом говорят, что v_0 – *начальная вершина* маршрута, а v_n – *конечная*. Говорят также, что вершина v_n *достижима* из v_0. Маршрут, в котором никакая дуга не встречается более одного раза, называется *путем*. Если начальная и конечная вершины пути совпадают, то путь называется *циклическим*. Путь, каждая вершина которого принадлежит не более чем двум его дугам, считается *простым*. Простой циклический путь называется *контуром*, а простой путь, не являющийся контуром, называется *ориентированной цепью*. Петля называется *тривиальным кон-*

[9] См. последовательность A000055: http://oeis.org/A000055

[10] См. последовательность A001174: http://oeis.org/A001174

[11] См. последовательность A000568: http://oeis.org/A000568

туром. Орграф, не имеющий нетривиальных контуров, называется *бесконтурным*.

Симметризацией орграфа $\vec{G}=(V,\alpha)$ называется граф $G=(V,(\alpha \cup \alpha^{-1})\setminus \Delta)$, то есть симметризация орграфа получается заменой дуг ребрами и удалением петель. Например, симметризацией полного орграфа $\overrightarrow{K_{|V|}}$ будет полный неограф $K_{|V|}$.

Орграф называется *связным*, если его симметризация является связным графом. Орграф называется *сильносвязным*, или *сильным*, если все его вершины взаимно достижимы.

Большинство понятий, сформулированных в предыдущем разделе параграфа для неориентированных графов, без изменений переносятся и на ориентированные графы. Там, где различия существенны, мы будем уточнять отдельно.

С практической точки зрения наличие в системе петли не представляет особого интереса, поэтому мы будем рассматривать преимущественно орграфы с антирефлексивным отношением смежности, то есть без петель.

1.2. Отказоустойчивость

В технике большое значение имеют высоконадежные системы, которые могут сохранять работоспособность, даже если некоторые их компоненты выходят из строя. Первые компьютеры, появившиеся в 1940-х годах, отличались своей ненадежностью (Carter, Bouricius, 1971). Например, ENIAC[12] – первый электронный цифровой компьютер был построен в 1946 г. и состоял из почти 18000 ламп. Его среднее время наработки на отказ составляло 7 минут, а за 4 года работы задачи решались правильно в 54% случаев. В последующих компьютерах надежность существенно возросла. Разработка EDVAC[13] была завершена в 1949 г. при участии фон Неймана. В отличие от ENIAC это был компьютер, основанный на двоичной системе счисления, а не на десятичной. В EDVAC использовалось 2 АЛУ[14], результаты работы которых сравнивались для обнаружения отказа. UNIVAC I[15] появился в 1951 г. В нем также было реализовано дублирование элементов, кроме этого использовались коды с коррекцией ошибок и контролем четности для передачи и хранения информации.

[12] ENIAC, сокр. от англ. Electronic Numerical Integrator and Computer.
[13] EDVAC, сокр. от англ. Electronic Discrete Variable Automatic Computer.
[14] АЛУ – арифметико-логическое устройство.
[15] UNIVAC I, сокр. от англ. UNIVersal Automatic Computer I.

Прошло более 60 лет с момента появления компьютеров. Современные процессоры строятся на существенно более надежной основе, другие составные части компьютера также являются более надежными, чем ранее. Например, время наработки на отказ современных процессоров измеряется годами. Однако мощнейшие суперкомпьютеры содержат десятки тысяч процессоров, избежать сбоев и отказов компонентов таких систем невозможно.

Авиженис (Avižienis, 1975) предложил два подхода для повышения надежности реальных вычислительных систем: предотвращение ошибок и отказоустойчивость. Первое направление связано с уменьшением вероятности возникновения ошибки и состоит в разработке высоконадежных компонентов системы. Во втором направлении используется введение в систему избыточных структур для придания ей дополнительных свойств отказоустойчивости.

В последующие годы исследования в области надежности вычислительных систем проводились весьма интенсивно. Некоторое время назад (Laprie, 1985 ; Dependability …, 1992 ; Avižienis et al., 2004 ; Харченко, 2006 ; Теслер, 2008 ; Харченко, 2009) стали рассматривать более общее понятие, чем надежность (*reliability*), – гарантоспособность (*dependability*). В работе (Avižienis et al., 2004) дается подробная таксономия для гарантоспособности и сопутствующих понятий.

Под *системой* понимается сущность, которая взаимодействует с другими сущностями, в том числе и с другими системами. *Вычислительные системы* характеризуются своими фундаментальными свойствами: *функциональностью*, *производительностью*, *гарантоспособностью*, *безопасностью* и *стоимостью*. *Функциональная спецификация* описывает функции системы с точки зрения функциональности и производительности. Под *поведением* (*behavior*) системы понимается то, каким образом она реализует свои функции. Поставляемые системой *услуги* (*service*) – это поведение системы с точки зрения ее пользователей, то есть потребителей услуг. Обслуживание считается *правильным*, если предо-ставленные услуги соответствуют функциям системы. Под *гарантоспособностью* (*dependability*) понимается комплексное свойство системы предоставлять требуемые услуги, которым можно оправданно доверять. Свойствами гарантоспособности являются:

- *готовность* (*availability*) – готовность к правильному обслуживанию;
- *надежность* (*reliability*) – непрерывность правильного обслуживания;
- *безопасность* (*safety*) – отсутствие катастрофических последствий для пользователей и окружающей среды;

- *целостность* (**integrity**) – отсутствие некорректных изменений системы;
- *обслуживаемость* (**maintainability**) – способность подвергаться модификациям и ремонту.

Угрозами гарантоспособности являются сбои, ошибки и отказы.

Отказ (**failure**) означает, что предоставляемые системой услуги отличаются от правильных. Отказ означает, что поведение системы в одном или более состояний отличается от ожидаемого поведения при правильном обслуживании. Это отличие называется *ошибкой* (**error**). Установленная или гипотетическая причина ошибки называется *сбоем* (**fault**). Сбой системы может быть внутренним и внешним. Внутренний сбой может не приводить к ошибке и отказу системы. *Отказоустойчивость* (**fault tolerance**) означает возможность избежать отказа системы в присутствии сбоя. Очевидно, что отказоустойчивость является важнейшей предпосылкой для гарантоспособности больших систем. В качестве других средств достижения гарантоспособности отмечаются: *предотвращение сбоев* (**fault prevention**), *устранение сбоев* (**fault removal**) и *предсказание сбоев* (**fault forecasting**).

Считается, что первая теоретическая работа по исследованию отказоустойчивости принадлежит фон Нейману (von Neumann, 1956). Он предложил и исследовал концепцию *тройной модульной избыточности*, которая и сейчас не утратила актуальности.

Понятие *отказоустойчивости* было введено Авиженисом (Avižienis, 1967 ; Авиженис, 1978) как обеспечение системы способностью противостоять ошибке и возможностью продолжать работу в присутствии этой ошибки. Выделяют два уровня отказоустойчивости:

1) *полная отказоустойчивость* – система продолжает работать в присутствии ошибок без существенной потери функциональных свойств;

2) *амортизация отказов* – система продолжает работать в присутствии ошибок с частичной деградацией функциональных возможностей.

Если говорить о вычислительных системах, то отказы могут возникать как в аппаратной (аппаратурной), так и в программной части. В случае полной отказоустойчивости отказавший элемент должен быть заменен исправным, который возьмет на себя выполнение соответствующих функций. Это означает, что отказоустойчивая система должна обладать определенной *избыточностью*. В общем, можно выделить несколько уровней, где могут возникать ошибки и может потребоваться избыточность (Hayes, 1998):

- *аппаратная избыточность* (**hardware redundancy**) – добавляются копии критических компонентов системы;
- *программная избыточность* (**software redundancy**) – различные версии программ для выполнения критических операций;

- *информационная избыточность* (*information redundancy*) – коды для обнаружения и исправления ошибок;
- *временная избыточность* (*time redundancy*) – повторные выполнения критических операций.

Иногда выделяют и другие уровни. Так, в работе (Теслер, 2008) автор приводит 13 видов избыточности, отдельно выделяя *коммуникационную*, *алгоритмическую*, *архитектурную* избыточности. Каждому из указанных выше уровней посвящены обширные исследования. Более того, в рамках каждого уровня существует множество различных моделей для исследования и построения отказоустойчивых систем. Так, в рамках аппаратной избыточности выделяют статические и динамические модели.

Статическая избыточность означает, что избыточные компоненты используются как постоянная часть системы. Простейшим примером является следующая схема (n-*модульная избыточность*[16]): предположим, что некоторый модуль генерирует сигнал X. Разместим $n \geq 3$ копий этого модуля, сконфигурировав систему так, чтобы все модули работали параллельно. Выходы модулей подаются на вход специального устройства «голосования», выходом из которого является сигнал, чаще других встретившийся на входе. Таким образом, ошибка, порожденная отказавшим модулем, будет маскироваться модулем голосования. При $n = 3$ получается *тройная модульная избыточность*[17]. На рис. 1.2.1 изображены 3 модуля M. Из выходов X_1, X_2 и X_3 этих модулей выбирается такой, который встречается чаще. Устройство голосования *Voter* в двоичном случае описывается хорошо известной формулой:

$$X = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3.$$

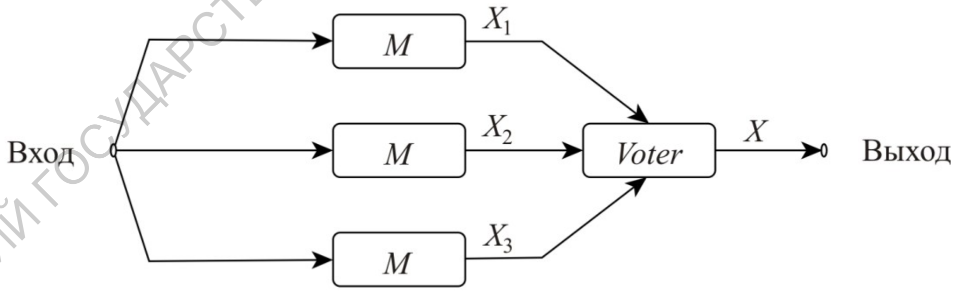


Рис. 1.2.1. Тройная модульная избыточность

Выше уже приводился пример с компьютером EDVAC: использовалось 2 АЛУ, результаты работы которых сравнивались для обнаружения отказа. Это, однако, не дает отказоустойчивости. В чешском компьютере

[16] N-modular redundancy, NMR (англ.).
[17] Triple modular redundancy, TMR (англ.).

SAPO использовалась тройная модульная избыточность (Svoboda, 1989), и это позволяет считать SAPO первым отказоустойчивым компьютером. Компонентой может быть не только физический модуль. Разновидностью данной схемы является *мультиверсионное* (*многоверсионное*) *программирование*[18], впервые предложенное в 1977 году Авиженисом и Ченом (Avižienis, Chen, 1977) для программной избыточности: решение задачи пишется независимо, например, *N* различными группами программистов. Далее эти *N* различных программ запускаются параллельно. Если выходы программ различаются, то правильным считается тот результат, который встречается чаще. В (Avižienis, Chen, 1977) предполагается, что ошибки, допушенные в реализации, будут отличаться у различных разработчиков, однако эта гипотеза часто оспаривается (см., например, (Knight, Leveson, 1986)). Тем не менее мультиверсионное программирование получило широкое распространение: 2, 3 и 4 версии программы управляют движением поездов и осуществляют контроль полетов (Avižienis, 1995). Дальнейшим развитием идеи является многоверсионное проектирование: различные версии программ реализуют различные алгоритмы и исполняются на различных платформах. Например, система противоаварийной защиты, разработанная фирмой Westinghause, состоит из двух компонент на основе микропроцессоров фирм Intel и Motorola, а программная часть написана на языках C++ и Ada (Харчен-ко, 2009).

При *динамической* избыточности система перестраивается так, что функции отказавшего элемента передаются исправному элементу. При этом выделяются дополнительные задачи:

1. *Обнаружение отказа* – диагностические процедуры должны позволять обнаруживать отказавший элемент.

2. *Исключение отказа* – отказавший элемент исключается из системы и либо заменяется исправным, либо система реконфигурируется, чтобы избежать использования отказавшего элемента.

3. *Восстановление* – выполняется приведение системы в рабочее состояние.

Простейшим примером для данной схемы является *дублирование* устройств. В 1987 году Петтерсон, Гибсон и Катц (Patterson et al., 1988) предложили решение для повышения надежности хранения информации на жестких дисках: RAID – *Redundant Array of Inexpensive Disks* (избыточный массив недорогих дисков). Со временем RAID стали расшифровывать как *Redundant Array of Independent Disks* (избыточный массив независимых дисков). RAID представляет собой объединение нескольких жестких дис-

[18] N-version programming или multiversion programming (англ.).

ков в один массив, который воспринимается как единое целое. Существуют различные уровни спецификации RAID. Например, RAID 0[19] повышает скорость работы дисков без отказоустойчивости: информация разбивается на блоки и записывается на несколько дисков одновременно. В контексте нашего рассмотрения представляет интерес RAID 1[20], который обеспечивает отказоустойчивость дублированием дисков: информация параллельно записывается на $2n$ дисков вместо n. В случае выхода из строя одного диска контроллер обнаруживает это и выдает оповещение, однако работа продолжается. Отказавший диск заменяется исправным, на него копируется информация, и отказоустойчивость восстанавливается. На рис. 1.2.2 показан пример системы с двумя дублированными модулями.

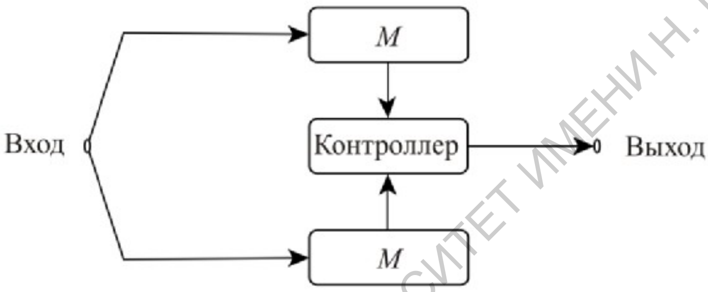


Рис. 1.2.2. Дублирование модулей

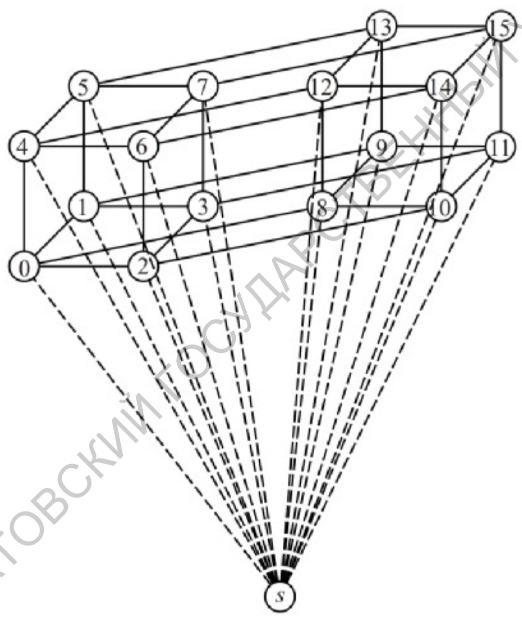


Рис. 1.2.3. Кластер из 16 процессоров и один избыточный *S*

Более сложным примером динамического типа избыточности является схема отказоустойчивости, реализованная в компьютерах *nCUBE* и *Parsytec GigaCube* (Cin et al., 1997 ; Encyclopedia …, 2011). В этих системах была использована достаточно распространенная схема соединения процессоров по топологии гиперкуба. К каждому вычислительному узлу (кластеру) из 16 рабочих процессоров добавляется один избыточный процессор *S*, который соединяет-ся с каждым рабочим процессором (рис. 1.2.3).

[19] Striping (англ.) — «чередование».
[20] Mirroring (англ.) — «зеркалирование».

В случае отказа одного рабочего процессора он заменяется избыточным процессором, и система перестраивает таблицу связей процессоров, так чтобы исключить работу отказавшего процессора. Многие современные суперкомпьютеры используют аналогичные схемы. Например, архитектура Blue Gene фирмы IBM, на основе которой построено несколько десятков суперкомпьютеров, входящих в рейтинг 500 самых мощных общественно известных компьютерных систем мира[21]. В этой архитектуре один вычислительный модуль состоит из 16 рабочих процессоров, одного системного и одного избыточного.

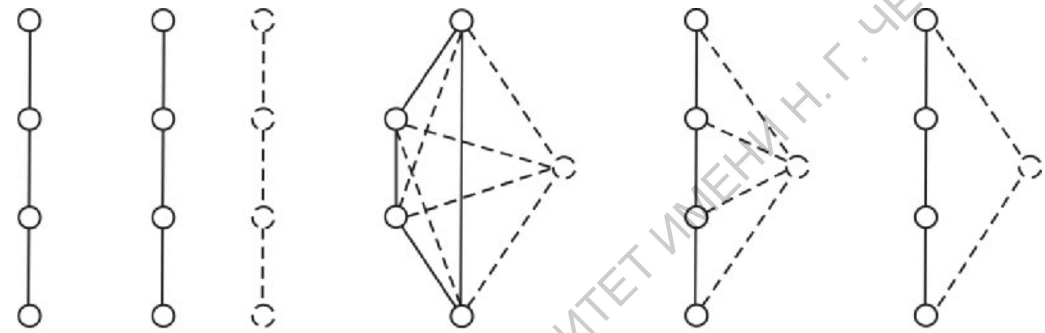
Рассмотрим модель отказоустойчивости, основанную на графах. Технической системе S сопоставляется помеченный граф G(S), вершины которого соответствуют элементам системы S, ребра (или дуги) – связям между элементами, а метки указывают тип элементов. Под *полным отказом* элемента системы S понимается удаление соответствующей ему вершины из графа системы G(S) и всех связанных с ней ребер. При полном отказе элемент перестает функционировать и информация через него не распространяется. Можно рассматривать *частичный отказ,* при котором элемент не может выполнять свои основные функции, но информация через него может передаваться. В случае частичного отказа элемента удаляется соответствующая ему вершина из графа системы и все связанные с ней ребра, но добавляются ребра, соединяющие вершины, смежные с удаленной вершиной. Очевидно, что граф для системы с частичным отказом элемента содержит в себе граф для системы с полным отказом этого элемента.

В 1976 г. Хейз в работе (Hayes, 1976) предложил модель для исследования полной отказоустойчивости. Говорят, что система S* является *k-отказоустойчивой реализацией* системы S, если отказ любых k элементов системы S* приводит к графу, в который можно вложить граф системы S с учетом меток вершин. Построение k-отказоустойчивой реализации системы S можно представить себе как введение в нее определенного числа избыточных элементов и связей. При этом предполагается, что в нормальном режиме работы избыточные элементы и связи *маскируются,* а в случае отказа происходит *реконфигурация* системы до исходной структуры.

Рассмотрим простейшую систему из 4-х однотипных элементов и 3-х связей, графом которой является цепь P_4 (рис. 1.2.4, *а*). Для получения 1-отказоустойчивой реализации достаточно построить новую систему, составленную из двух экземпляров исходной (рис. 1.2.4, *б*), однако в такой системе будет в два раза больше элементов и связей по сравнению с исходной. Если взять систему из 5 элементов, в которой каждый элемент свя-

[21] http://www.top500.org/

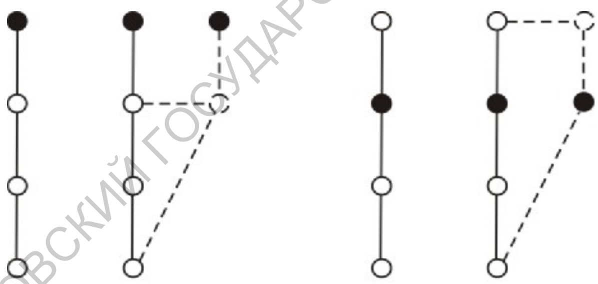
зан с каждым (рис. 1.2.4, *в*), то такая система, очевидно, также будет 1-отказоустойчивой реализацией, однако количество дополнительных связей составит 7. Двигаясь в направлении уменьшения числа дополнительных связей, можно заметить, что, добавив один элемент и связав его с каждым элементом исходной системы (рис. 1.2.4, *г*), мы снова получим 1-отказоустойчивую реализацию, так как при отказе любого элемента его можно будет заменить добавленным. Количество дополнительных связей в построенной системе составит 4. Наконец, на рис. 1.2.4, *д* показана 1-отказоустойчивая реализация с минимально возможным числом дополнительных связей.



а *б* *в* *г* *д*

Рис. 1.2.4. Цепь P_4 и ее 1-отказоустойчивые реализации

Если элементы системы имеют разный тип, то количество избыточных элементов в отказоустойчивой реализации будет больше по сравнению с системой из однотипных элементов. Пусть в системе из рассмотренного примера один элемент будет иметь тип, отличный от типа трех других элементов. Возможны две различные конфигурации, которые показаны на рис. 1.2.5 вместе со своими 1-отказоустойчивыми реализациями. Элементы одного типа обозначаются белыми кружками, а другого типа – черными.



а *б*

Рис. 1.2.5. Цепь P_4 с вершинами двух типов

Пусть в системе S встречается t различных типов элементов. Очевидно, что любая ее k-отказоустойчивая реализация должна содержать не менее k дополнительных элементов каждого типа. Легко видеть, что такого числа дополнительных элементов достаточно для построения k-отказоустойчивой реализации системы S. В самом деле, добавим k элементов каждого типа и соединим их все между собой и с элементами системы S. Тогда любой отказавший элемент можно будет заменить одним из добавленных элементов соответствующего типа. Построенную таким образом (*тривиальную*) k-отказоустойчивую реализацию можно использовать для оценки числа дополнительных вершин и ребер k-отказоустойчивых реализаций.

k-отказоустойчивая реализация S^* системы S, состоящей из элементов t различных типов, называется *оптимальной*, если система S^* отличается от системы S на k элементов каждого из t типов системы S и среди всех k-отказоустойчивых реализаций с тем же числом элементов система S^* имеет наименьшее число связей.

Если элементы технической системы однотипны, то метки элементов опускаются и в качестве графа системы рассматривается граф без меток. В этом случае оптимальная k-отказоустойчивая реализация будет содержать в точности k дополнительных элементов. На практике такая ситуация встречается достаточно часто. Например, массивно параллельные вычислительные системы состоят из однородных узлов. Каждый узел состоит из одного или нескольких процессоров, локальной памяти и некоторых других компонент.

Хейз предложил процедуры построения оптимальной k-отказоустойчивой реализации для цепи, цикла и помеченного дерева особого вида. Позднее Хейз и Харари в работе (Harary, Hayes, 1993) обобщили модель на случай отказов связей между элементами, предложив понятие *реберной отказоустойчивости*[22]. Модель отказоустойчивости, в которой рассматриваются отказы элементов, в работе (Harary, Hayes, 1996) было предложено называть *вершинной отказоустойчивостью*[23]. В той же работе было введено понятие *точной k-отказоустойчивой реализации*. Можно заметить, что если система является вершинно отказоустойчивой при полных отказах элементов, то она будет являться и вершинно отказоустойчивой при частичных отказах элементов.

Недостатком полной отказоустойчивости является ее повышенная стоимость, обусловленная необходимостью введения избыточных элементов и связей. Например, суперкомпьютер последнего поколения серии Blue Gene/Q, созданной фирмой IBM в 2011 г., содержит 65 536 рабочих процессоров и 4096 избыточных процессоров, которые активируются при выходе из строя основных процессоров. В обычном режиме избыточные процессоры не функционируют. В текущем рейтинге, составленном в ноябре 2011 г., этот компьютер занимает 17-ю позицию с результатом 677.1

[22] Edge fault tolerance (англ.).
[23] Node fault tolerance (англ.).

Тфлопс[24]. В данное время запускается следующий суперкомпьютер этой серии Sequoia для Ливерморской национальной лаборатории. Он будет состоять из 1 572 864 рабочих процессоров и 98 304 избыточных. Планируется, что производительность составит 20 Пфлопс, что в два раза превышает производительность суперкомпьютера Fujitsu K computer, который на данный момент является самым производительным[25].

При амортизации отказов система сохраняет работоспособность, возможно, с частичной потерей функций. Например, система считается работоспособной, если соответствующий ей граф является связным. Система называется вершинной (реберной) k-отказоустойчивой, если после отказа k элементов (связей) система остается работоспособной. Так как минимально связным графом является дерево, то при исследовании такой отказоустойчивости исследуются задачи определения вершинной и реберной k-связности определенных графов (гиперкубы, торы, закольцованные деревья и др.) и вложения в них деревьев (Despain, Patterson, 1978 ; Horowitz, Alessandro, 1981 ; Grey et al., 1984 ; Srinivasan, Sood, 1990) или других структур (Livingston, Stout, 1988 ; Dutt, Hayes, 1991 ; Graham et al., 1993 ; Пархоменко, 2000).

Данная монография посвящена исследованию полной отказоустойчивости в смысле Хейза с полным отказом одного или более элементов или связей между элементами системы.

1.3. Расширения графов

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *вершинным* (*реберным*) k-*расширением* (k – натуральное) графа $G = (V, \alpha)$, если граф G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k вершин (ребер). Очевидно, что k-расширение должно содержать не менее k дополнительных элементов – вершин или ребер соответственно. Для построения вершинного k-расширения этого оказывается и достаточно: если к произвольному графу G добавить k вершин и соединить их ребрами между собой и с остальными вершинами графа G, то построенный граф, как можно заметить, будет являться вершинным (и реберным) k-расширением графа G. Такое

[24] Флопс (FLOPS – от англ. Floating point OPerations per Second) – единица, используемая для измерения производительности компьютеров, показывающая, сколько операций с плавающей запятой в секунду выполняет данная вычислительная система.

[25] http://www.top500.org/list/2011/11/100

расширение называется *тривиальным k-расширением*. Легко показать, что выполняется

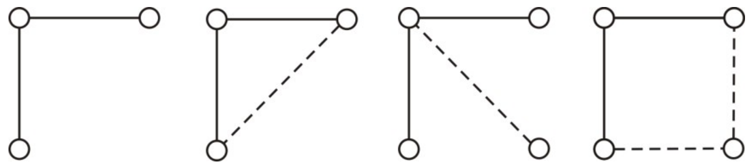
ТЕОРЕМА 1.3.1. *Вершинное k-расширение любого графа является и его реберным k-расширением.*

Доказательство. Пусть граф G^* является вершинным k-расширением графа G. По определению удаление из графа G^* любых k вершин приводит к графу, в который можно вложить граф G. Если граф G является вполне несвязным, то утверждение очевидно. Будем далее считать, что граф G содержит ребра.

Пусть граф G^* содержит p ребер: $e_1,\ldots, e_p$. Если $p < k$ ребер, то, удалив из графа G^* по одной вершине каждого ребра, мы получим вполне несвязный граф, в который граф G вкладываться не может. Следовательно, число ребер графа G^* больше k.

Выберем произвольные k ребер графа G^*: $e_1,\ldots, e_k$. Покажем, что граф $G^* - \{e_1,\ldots, e_k\}$ допускает вложение графа G. Выберем множество F из k вершин графа G^*, так чтобы в это множество попало по крайней мере по одной концевой вершине из ребер $e_1,\ldots, e_k$. По условию граф $G^* - F$ допускает вложение графа G, однако легко видеть, что сам граф $G^* - F$ вкладывается в граф $G^* - \{e_1,\ldots, e_k\}$. Таким образом, граф $G^* - \{e_1,\ldots, e_k\}$ допускает вложение графа G. В силу произвольности выбора ребер $e_1,\ldots, e_k$ получаем, что граф G^* является реберным k-расширением графа G.□

Заметим, что обратное теореме 1.3.1 утверждение в общем случае неверно: реберное k-расширение может даже не иметь достаточного количества дополнительных вершин. На рис. 1.3.1, *а* представлен граф P_3, его реберные 1-расширения (см. рис. 1.3.1, *б* и 1.3.1, *в*), которые не являются вершинными 1-расширениями, и вершинное 1-расширение (см. рис. 1.3.1, *г*).



а *б* *в* *г*

Рис. 1.3.1

Для реберного k-расширения может быть недостаточно k дополнительных ребер. Рассмотрим далее оптимизационную задачу: будем уменьшать количество ребер в произвольном k-расширении до тех пор, пока у него будет сохраняться свойство «быть k-расширением». Получившийся граф назовем *неприводимым k-расширением*. Если в качестве исходного вершинного k-расширения было выбрано тривиальное, то неприводимое вершинное k-расширение называется *Т-неприводимым k-расширением*. Среди всех неприводимых k-расширений можно выбрать *минимальные* – те, которые будут иметь минимально возможное число вершин и ребер.

Вершинное (*реберное*) *k-расширение* (k – натуральное) графа $G = (V, a)$ называется *неприводимым*, если никакая его собственная часть не является вершинным (реберным) k-расширением графа G.

Граф G_t^* называется *точным вершинным* (*реберным*) *k-расширением* графа G, если любой граф, получающийся удалением произвольных k вершин (ребер) графа G_t^*, изоморфен графу G.

Граф $G^* = (V^*, a^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* n-вершинного графа $G = (V, a)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением графа G;
2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
3) a^* имеет минимальную мощность среди всех графов, удовлетворяющих условиям 1) и 2).

Граф $G^* = (V^*, a^*)$ называется *минимальным реберным k-расширением* n-вершинного графа $G = (V, a)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является реберным k-расширением G;
2) граф G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
3) a^* имеет минимальную мощность среди всех графов, удовлетворяющих условиям 1) и 2).

В определении минимального вершинного 1-расширения в первую очередь минимизируется количество вершин. Это означает, что могут существовать расширения графов (как вершинные, так и реберные), которые имеют меньшее количество ребер, чем минимальные расширения. С практической точки зрения вершины обычно моделируют более дорогие компоненты, чем ребра: например, процессоры или компьютеры по сравнению с соединяющими их линиями. Поэтому основное внимание уделяется в основном именно минимальным расширениям. Однако можно поменять местами и поставить на последнее место требование минимазации числа вершин или вообще убрать его – такие расширения назовем *экстремальными*.

Граф $G^* = (V^*, a^*)$ называется *p-минимальным вершинным* (*реберным*) *k-расширением* n-вершинного графа $G = (V, a)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным (реберным) k-расширением графа G;
2) граф G^* содержит не более $n + k + p$ вершин, то есть $|V^*| \le |V| + k + p$;
3) a^* имеет минимальную мощность среди всех графов, удовлетворяющих условиям 1) и 2).

Граф $G^* = (V^*, a^*)$ называется *экстремальным вершинным* (*реберным*) *k-расширением* графа $G = (V, a)$, если среди всех вершинных (реберных) k-расширений графа G граф G^* имеет минимально возможное число ребер.

Иногда на расширения накладываются и другие требования, обусловленные практическими потребностями, например, ограничение на максимальную степень вершины.

1.4. Вычислительная сложность

В этом параграфе обсудим некоторые общие вопросы, связанные с определением эффективности алгоритмов и вычислительной сложности. Схематично введем основные понятия в соответствии с работами (Гэри, Джонсон, 1982 ; Пападимитру, Стайглиц, 1995), опуская некоторые формальные детали.

Под *массовой* задачей понимается некоторый общий вопрос, на который требуется дать определенный ответ. Например, найти вершинное k-расширение графа. Также задача содержит определенные параметры, например, граф, для которого требуется найти вершинное k-расширение. *Индивидуальная* задача получается из массовой, если всем параметрам задачи указаны конкретные значения. В нашем случае это означает задание конкретного графа.

Под *алгоритмом* понимаем пошагово выполняемую процедуру решения задачи. Говорят, что алгоритм *решает* массовую задачу *П*, если он применим к любой индивидуальной задаче из *П* и дает ее решение. Эффективность разных алгоритмов, решающих данную задачу, обычно оценивается с точки зрения затраты временных и емкостных ресурсов. Временные затраты являются более важными с практической точки зрения, и поэтому преимущественно рассматривается именно временная эффективность алгоритма.

Время работы алгоритма удобно выражать функцией от переменных, характеризующих размерность индивидуальной задачи. Выбирается некоторая схема кодирования входных данных для задачи, и объем этих входных данных используется как характеристика размера индивидуальной задачи.

Временная сложность алгоритма характеризует время, требующееся для его работы. Это функция, которая каждому значению размерности индивидуальной задачи ставит в соответствие максимальное время, затрачиваемое алгоритмом на решение индивидуальных задач размерности n.

Обычно временная сложность описывается в специальных терминах, указывающих скорость роста.

Говорят, что $f(n) = O(g(n))$, если найдется такая константа $c > 0$ и такое число n_0, что $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ для всех $n \geq n_0$.

Полиномиальным алгоритмом (или *алгоритмом полиномиальной временной сложности*) называется алгоритм, у которого временная сложность равна $O(p(n))$, где $p(n)$ – некоторая полиномиальная функция, а n – параметр, описывающий размерность задачи. Алгоритмы, временная сложность которых не поддается такой оценке, называются *экспоненциальными*. Большинство экспоненциальных алгоритмов представляют собой перебор всех возможных вариантов решения. Говорят, что задача *разрешима за полиномиальное время*, если существует полиномиальный алгоритм для ее решения. Традиционно полиномиальные алгоритмы считаются *хорошими* или *эффективными*, а задачи, для которых не существует полиномиальных алгоритмов решения, называются *труднорешаемыми*.

Для графов в качестве характеристики размерности индивидуальной задачи обычно используются либо количество вершин n, либо количество ребер m. Для кодирования графа обычно используется матрица смежности, что требует n^2 бит, или список ребер, что требует $m \log_2 n$ бит. При «разумных ограничениях» схемы кодирования для одной задачи отличаются не более чем «полиномиальным образом», то есть любой алгоритм, имеющий полиномиальную временную сложность при одной схеме кодирования, будет также обладать полиномиальной временной сложностью при других схемах кодирования. Таким образом, выяснение вопроса, является ли данная задача труднорешаемой, не зависит от выбора конкретной схемы кодирования.

Среди труднорешаемых задач можно выделить два аспекта. Первый аспект состоит в том, что для отыскания решения требуется экспоненциальное время. Второй состоит в том, что длина самого решения не может быть представлена полиномом от размерности задачи. Например, такая ситуация может иметь место при поиске всех вершинных расширений для произвольного графа.

Основы теории NP-полных задач заложил С. Кук в работе 1971 г., где доказал, что задача выполнимости булевой формулы является NP-полной. Затем Карп доказал NP-полноту 21 задачи. В книге Гэри и Джонсона (Гэри, Джонсон, 1982) содержится уже более 300 NP-полных задач. Так, среди задач теории графов можно отметить такие NP-полные задачи: задача о клике, о гамильтоновом цикле, о вершинном покрытии.

В теории сложности рассматриваются задачи распознавания свойств или задачи принятия решений, то есть такие задачи, решениями в которых является ответ «да» или «нет». Класс P[26] определяется как класс задач принятия решений, разрешимых за полиномиальное время. Неформально класс NP[27] можно определить как класс задач принятия решений, для которых за полиномиальное время можно проверить правильность решения при наличии сертификата решения. Класс P очевидно входит в класс NP: P Í NP. Если P ≠ NP, то задачи из NP \ P являются труднорешаемыми.

Особый интерес представляет класс NP-полных задач. Задача *A* называется NP-полной, если *A* принадлежит классу NP и любая другая задача из NP может быть полиномиально сведена к *A*.

Рассмотрим известную NP-полную задачу:

ИЗОМОРФИЗМ ПОДГРАФУ
УСЛОВИЕ. Даны графы $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$.
ВОПРОС. Верно ли, что в графе *G* есть часть, изоморфная графу *H*?

К этой задаче, очевидно, можно полиномиально свести задачу о клике: верно ли, что заданный граф содержит полный подграф с заданным числом вершин? Интересно, что для относительно похожей по формулировке задачи, в которой требуется ответить на вопрос об изоморфизме данных графов, пока не удалось доказать, что она принадлежит к классу P или является NP-полной. Частным случаем задачи об изоморфизме подграфу является другая хорошо известная NP-полная задача:

ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ
УСЛОВИЕ. Дан граф $G = (V, \alpha)$.
ВОПРОС. Верно ли, что в графе *G* имеется гамильтонов цикл?

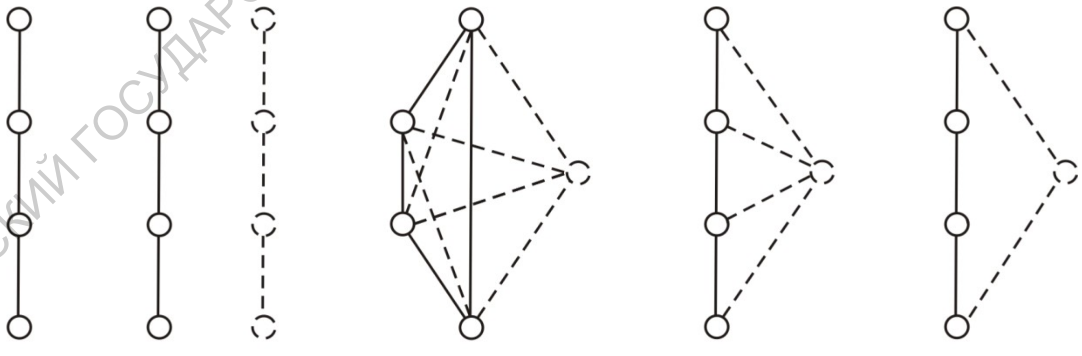
Задача о гамильтоновом цикле остается NP-полной, если граф *G* является планарным или кубическим графом.

[26] P – polinomial (полиномиальные).
[27] NP – nondeterministic polinomial (недетерминированные полиномиальные).

Г Л А В А 2. ВЕРШИННЫЕ РАСШИРЕНИЯ

2.1. Основные определения и свойства

Назовем граф $G_R = (V_R, \alpha_R)$ *вершинным k-расширением* (k – натуральное) графа $G = (V, \alpha)$, если граф G можно вложить в каждый подграф графа G_R, получающийся удалением любых его k вершин и всех связанных с ними ребер. Заметим, что определение не теряет смысла и при $k = 0$. Мы будем рассматривать преимущественно графы без меток, однако, если вершины имеют метки, то подразумевается вложение с учетом меток. Если F – некоторый набор вершин графа G, то есть $F \subseteq V$, то будем обозначать через $G – F$ граф, получающийся из G удалением всех вершин, принадлежащих F, и связанных с ними ребер. Очевидно, что число вершин любого вершинного k-расширения графа по крайней мере на k вершин каждого типа больше, чем у самого графа. На рис. 2.1.1, *а* изображена цепь P_4, а на рис. 2.1.1, *б–д* – несколько ее вершинных 1-расширений. Пунктиром обозначаются дополнительные вершины и ребра.



а *б* *в* *г* *д*

Рис. 2.1.1. Цепь P_4 (*а*) и ее вершинные 1-расширения (*б–д*)

Вершинное k-расширение графа $G = (V, \alpha)$ называется *неприводимым*, если никакая его собственная часть не является вершинным k-расширением графа G. Например, расширения на рис. 2.1.1, *б* и *д* являются неприводимыми 1-расширениями цепи P_4, а на рис. 2.1.1, *в* и *г* – таковыми не являются.

Граф G_t^* называется *точным вершинным k-расширением* графа G, если любой граф, получающийся удалением произвольных k вершин графа G_t^*, изоморфен графу G. Граф на рис. 2.1.1, *д* является точным вершинным 1-расширением цепи P_4. Очевидно, что точные вершинные k-расширения могут быть только у графов с вершинами одного типа.

Граф $G_t = (V_t, \alpha_t)$ называется *тривиальным k-расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если граф G_t получается из графа G добавлением k вершин каждого типа, соединением их со всеми вершинами графа G и друг с другом. Для графов с вершинами одного типа граф G_t есть соединение графа G и полного графа $K_k = (V_k, \alpha_k)$:

$$G_t = (V_t, \alpha_t) = (V \cup V_k, \alpha \cup \alpha_k \cup V \times V_k \cup V_k \times V).$$

Очевидно, что тривиальное k-расширение графа является и его вершинным k-расширением, однако в общем случае оно может не являться неприводимым. На рис. 2.1.1, *г* показано тривиальное 1-расширение цепи P_4, и оно не является неприводимым, так как его часть – граф на рис. 2.1.1, *д* – тоже является 1-расширением цепи P_4. Неприводимое вершинное k-расширение, которое является частью тривиального k-расширения, называется *T-неприводимым k-расширением*.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* (иногда будем использовать сокращение – МВ-kР) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением графа G, то есть граф G вкладывается с учетом меток вершин в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;
2) граф G^* содержит минимально возможное число вершин;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Приведенное определение является общим, однако в настоящей работе рассматриваются преимущественно графы с вершинами одного типа, поэтому определение можно переформулировать следующим образом: граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$ с вершинами одного типа, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением графа G;
2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Будем считать, что граф является минимальным вершинным 0-расширением для самого себя. Очевидно, что для любого графа минимальное вершинное k-расширение всегда существует и, как будет видно в дальнейшем, в общем случае не одно. Введем частичную операцию получения минимального вершинного k-расширения графа, считая ее неопределенной для графов, которые имеют более одного минимального вершинного k-расширения.

Пусть G – некоторый граф, а H – его минимальное вершинное k-расширение. Обозначим через $(G)^{*k}$ результат операции получения минимального вершинного k-расширения графа G. Тогда, если граф G имеет единственное минимальное вершинное k-расширение, то $(G)^{*k} = H$. В противном случае результат операции получения минимального вершинного k-расширения считается неопределенным для графа G. Будем использовать для операции получения минимального вершинного 1-расширения обозначение $(G)^{*}$.

Граф может иметь несколько неизоморфных неприводимых вершинных k-расширений с различным числом ребер. Граф также может иметь неизоморфные минимальные вершинные k-расщирения, однако число ребер у них будет одинаковым. Заметим, что число ребер минимального вершинного k-расширения графа не более чем у его тривиального k-расширения, то есть $|\alpha^*| \le |\alpha| + |V|k + \frac{k-1}{2}k$. Будем говорить, что минимальное вершинное k-расширение содержит $|\alpha^*| - |\alpha|$ *дополнительных* ребер. Обозначим через $ec(G, k)$ число дополнительных ребер минимального вершинного k-расширения графа G:

$$0 \le ec(G,k) \le |V|k + \frac{k-1}{2}k.$$

Для любого графа, кроме вполне несвязного, количество дополнительных ребер больше 0. Далее будут описаны графы, у которых

$$0 \le ec(G,1) \le 3.$$

Из определения следует очевидный переборный

<u>Алгоритм 2.1.1.</u> *Построение всех минимальных вершинных k-расширений для заданного графа G, отличного от вполне несвязного.*

1. $m := 0$.
2. $m := m + 1$.
3. Строим все графы, получающиеся из графа G добавлением k вершин и m дополнительных ребер.
4. Выбираем среди построенных на шаге 3 графов вершинные k-расширения графа G.
5. Если на шаге 4 не было найдено графов, то переходим на шаг 2.

6. Среди графов, выбранных на шаге 4, оставляем по одному представителю от изоморфных графов. Полученные графы будут являться минимальными вершинными k-расширениями графа G.

Обоснование. В силу приведенной выше оценки для числа дополнительных ребер минимального вершинного k-расширения алгоритм закончит свою работу за конечное число шагов. Алгоритм имеет экспоненциальную сложность, что ограничивает его применение малыми значениями k и числа вершин графа G. В следующем параграфе вычислительная сложность задачи будет обсуждаться более подробно, и станет ясно, что эффективного универсального алгоритма для поиска минимальных вершинных k-расширений, по-видимому, не существует.

Будем говорить: вершинное расширение, тривиальное расширение, минимальное вершинное расширение, имея в виду вершинное 1-расширение, тривиальное 1-расширение и минимальное вершинное 1-расширение соответственно.

В табл. 2.1.1 приведены все 2-, 3- и 4-вершинные графы, отличные от вполне несвязных, и их минимальные вершинные 1-расширения. Для каждого графа указывается его вектор степеней, а для расширений в скобках приводится число дополнительных ребер.

Заметим, что все графы с числом вершин меньше 5 имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение. В работе (Абросимов, 2000, *в*) приведены минимальные вершинные 1-расширения для графов с числом вершин 5 и 6.

Докажем несколько вспомогательных утверждений о свойствах минимальных вершинных k-расширений.

ЛЕММА 2.1.1. *Минимальное вершинное k-расширение графа без изолированных вершин не содержит вершин со степенью ниже $k + 1$.*

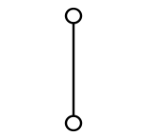
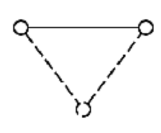
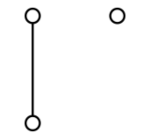
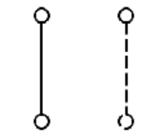
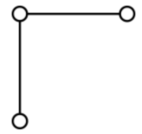
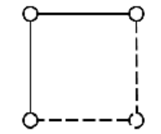
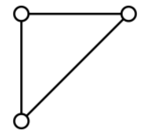
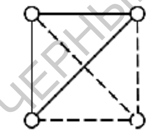
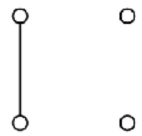
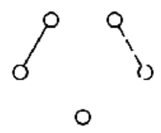
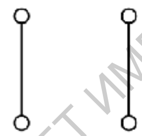
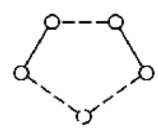
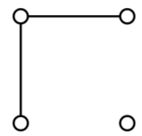
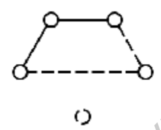
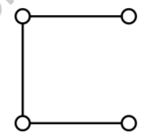
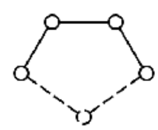
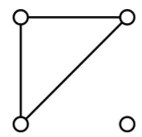
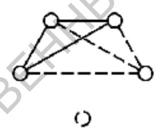
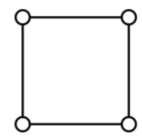
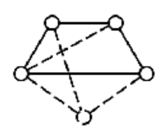
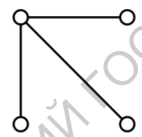
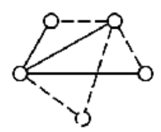
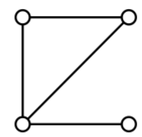
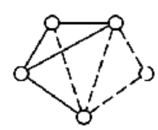
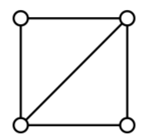
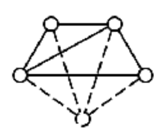
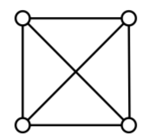
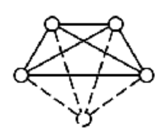
ЛЕММА 2.1.2. *Пусть наибольшая из степеней вершин графа G есть s и в точности m вершин имеют такую степень, тогда минимальное вершинное k-расширение графа G содержит, по крайней мере, $k + m$ вершин степенью не ниже s.*

ЛЕММА 2.1.3. *Если максимальная степень вершины графа G есть $d > 0$, то его минимальное вершинное k-расширение G^* содержит не менее kd дополнительных ребер.*

ЛЕММА 2.1.4. *Если минимальная степень вершины графа G есть $d > 0$, то его минимальное вершинное k-расширение G^* не содержит вершин степени ниже $d + k$.*

Таблица 2.1.1

Минимальные вершинные 1-расширения 2-, 3- и 4-вершинных графов

Граф	МВ-1Р	Граф	МВ-1Р
 (1,1)	 (2,2,2) (+2)	 (1,1,0)	 (1,1,1,1) (+1)
 (2,1,1)	 (2,2,2,2) (+2)	 (2,2,2)	 (3,3,3,3) (+3)
 (1,1,0,0)	 (1,1,1,1,0) (+1)	 (1,1,1,1)	 (2,2,2,2,2) (+3)
 (2,1,1,0)	 (2,2,2,2,0) (+2)	 (2,2,1,1)	 (2,2,2,2,2) (+2)
 (2,2,2,0)	 (3,3,3,3,0) (+3)	 (2,2,2,2)	 (4,3,3,3,3) (+4)
 (3,1,1,1)	 (4,4,2,2,2) (+4)	 (3,2,2,1)	 (4,4,3,3,2) (+4)
 (3,3,2,2)	 (4,4,4,3,3) (+4)	 (3,3,3,3)	 (4,4,4,4,4) (+4)

ЛЕММА 2.1.5. *Если максимальная степень вершины минимального вершинного* 1*-расширения графа есть* **d**, *то число дополнительных ребер в расширении не меньше* **d**.

Доказательство. Пусть граф G есть n-вершинный граф из условия соответствующей леммы.

Докажем более общие утверждения – все леммы справедливы не только для минимальных вершинных k-расширений, но для любых вершинных неприводимых k-расширений с числом вершин $n + k$, например, Т-неприводимых k-расширений.

Пусть G^* – $(n + k)$-вершинное неприводимое вершинное k-расширение графа G.

1. Лемма 2.1.1 является частным случаем леммы 2.1.4.
2. Если бы число вершин степени не ниже s в G^* было меньше $k + m$, то, удалив k таких вершин (если число вершин меньше k, в этом случае можно удалить все вершины степени не ниже s и подходящее количество любых других вершин), был бы получен граф, в котором было бы менее m вершин степени не ниже s. В такой граф нельзя вложить граф G.
3. После удаления любых k вершин из графа G^* в получившемся графе должна оставаться по-крайней мере одна вершина степени d. Будем выбирать для удаления из графа G^* последовательно k вершин наибольшей степени. Так как степень каждой вершины не меньше d, то и количество удаленных ребер – не менее kd.
4. Пусть G^* имеет вершину v степени ниже $d + k$. Рассмотрим подграф, получающийся из G^* удалением k смежных с v вершин (если степень вершины v меньше k, то в этом случае можно удалить все смежные с ней вершины и подходящее количество любых других вершин, кроме v). Он будет содержать вершину степени ниже d и в него нельзя будет вложить граф G.
5. Удаление вершины v наибольшей степени d из графа G^* приводит к удалению и d ребер, а по условию граф $G^* – v$ допускает вложение графа G.□

Замечание 1. Утверждения лемм останутся справедливыми, если вместо минимального вершинного k-расширения рассматривать любое вершинное k-расширение с таким же числом вершин, то есть на k больше, чем у заданного графа (например, Т-неприводимое расширение).

Замечание 2. Из лемм 2.1.1 и 2.1.5 следует, что минимальное вершинное 1-расширение любого связного графа содержит как минимум 2 дополнительных ребра.

Замечание 3. Все утверждения леммы формулируются и доказываются для графов с вершинами одного типа. Например, леммы 2.1.1 и 2.1.4 для графов с вершинами разных типов утрачивают свою справедливость. На рис. 2.1.2 представлены соответствующие примеры – полные графы K_2 (см. рис. 2.1.2, *а*) и K_3 (см. рис. 2.1.2, *б*), в которых одна вершина

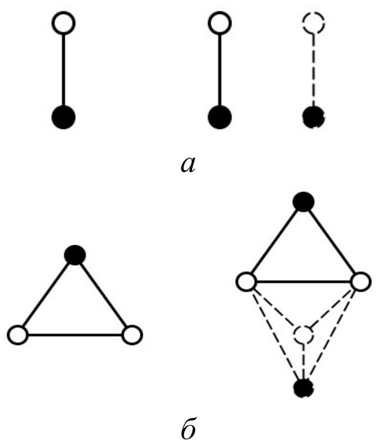


Рис. 2.1.2. Полные двухцветные графы K_2 (*а*) и K_3 (*б*) и их МВ-1Р

имеет тип, отличный от остальных, и их минимальные вершинные 1-расширения.

Доказательство лемм показывает общую схему рассуждений для доказательства того, что граф G^* является минимальным вершинным k-расширением графа G:

1. Показать, что граф G^* является вершинным k-расширением графа G.
2. Показать, что не существует вершинного k-расширения графа G с меньшим числом ребер, чем у графа G^*.

В некотором смысле доказательство того, что граф G^* является неприводимым вершинным k-расширением графа G, несколько проще:

1. Показать, что граф G^* является вершинным k-расширением графа G.
2. Показать, что в графе G^* нет ребра $\{u, v\}$, такого, что граф $G^* - \{u, v\}$ является вершинным k-расширением графа G.

На шаге 2 достаточно исследовать только части данного графа.

Леммы 2.1.1–2.1.5 позволяют несколько повысить эффективность алгоритма 2.1.1 выбором значения m на шаге 1 и построением на шаге 3 графов с необходимыми свойствами. Еще больше повысить эффективность поиска всех неизоморфных минимальных вершинных k-расширений можно, если заранее известен вектор степеней любого возможного минимального вершинного k-расширения. Подобная ситуация, как будет видно в дальнейшем, возникает, например, при поиске минимальных вершинных расширений циклов (параграф 2.4 данной главы) или при нахождении графов, являющихся точными вершинными расширениями.

Очевидным образом формулируется

Алгоритм 2.1.2. *Построение всех минимальных вершинных k-расширений для графа G с заданным вектором степеней.*

1. Строятся все неизоморфные реализации заданного вектора степеней.
2. Среди построенных графов отбираются вершинные k-расширения графа G.

Поскольку на шаге 1 требуется организовать поиск всех реализаций для заданного вектора степеней, то этот алгоритм, хотя и позволяет существенно сократить поиск, может быть использован по-прежнему только для небольших значений n (см. например, (Bender, Canfield, 1978)).

С помощью лемм легко аналитически установить вид минимальных вершинных k-расширений для некоторых классов графов.

ТЕОРЕМА 2.1.1. *Минимальное вершинное k-расширение, причем единственное с точностью до изоморфизма, полного n-вершинного графа K_n есть полный $(n + k)$-вершинный граф K_{n+k}, то есть справедливо соотношение:*

$$(K_n)^{*k} = K_{n+k}.$$

Доказательство. Проверим, что выполняются все три пункта из определения минимального вершинного k-расширения – большинство теорем будет доказываться по этой схеме.

Удаление k вершин из полного графа K_{n+k} приведет к полному графу K_n, то есть граф K_{n+k} является вершинным k-расширением графа K_n и отличается на k дополнительных вершин.

Пусть G^* – минимальное вершинное k-расширение полного n-вершинного графа K_n. По лемме 2.1.4 $(n + k)$-вершинный граф G^* не может содержать вершин степени ниже $n – 1 + k$, таким образом, полный $(n + k)$-вершинный граф K_{n+k} действительно является минимальным вершинным k-расширением графа K_n. □

ТЕОРЕМА 2.1.2. *Минимальное вершинное k-расширение, причем единственное с точностью до изоморфизма, вполне несвязного n-вершинного графа O_n, есть вполне несвязный $(n + k)$-вершинный граф O_{n+k}, то есть справедливо соотношение:*

$$(O_n)^{*k} = O_{n+k}.$$

Доказательство. Очевидно. Вполне несвязные графы и только они имеют минимальные вершинные k-расширения, которые не содержат дополнительных ребер. Далее по этой причине, а также в силу тривиальности, мы не будем рассматривать вполне несвязные графы.□

Заметим, что минимальные вершинные k-расширения и полного, и вполне несвязного графов являются также их точными вершинными и Т-неприводимыми k-расширениями.

ТЕОРЕМА 2.1.3 (Hayes, 1976). *Минимальное вершинное* 1-*расширение n-вершинной цепи P_n есть $(n + 1)$-вершинный цикл C_{n+1}.*

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что цикл C_{n+1} является вершинным 1-расширением цепи P_n. Минимальность следует из лемм 2.1.1, 2.1.3 или 2.1.4. □

ТЕОРЕМА 2.1.4. *Минимальное вершинное* 1-*расширение n-вершинной цепи P_n единственно с точностью до изоморфизма, то есть справедливо соотношение:*

$$(P_n)^* = C_{n+1}.$$

Доказательство. Пусть граф G^* является минимальным вершинным 1-расширением цепи P_n. Очевидно, что G^* является связным графом, причем по лемме 2.1.4 степень любой его вершины не меньше двух. По теореме 2.1.3 цикл C_{n+1}, содержащий $n + 1$ ребро, является минимальным вершинным 1-расширением цепи P_n, следовательно, граф G^* также содержит $n + 1$ ребро, и, значит, степень любой его вершины в точности равна двум. Заметим, что G^* не дерево и, следовательно, содержит цикл некоторой длины k. Если $k < n + 1$, то нарушается условие связности графа G^*, следовательно, $k = n + 1$, то есть G^* изоморфен C_{n+1}. □

Из леммы 2.1.1 или 2.1.4 следует, что любое минимальное вершинное k-расширение цепи P_n не содержит вершин степени ниже $k + 1$. Хейз в работе (Hayes, 1976) доказал следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 2.1.5 (Hayes, 1976). *Для любого натурального k минимальное вершинное k-расширение $(n+1)$-вершинного цикла C_{n+1} есть минимальное вершинное $(k+1)$-расширение n-вершинной цепи P_n и наоборот.*

В четвертом параграфе будет показано, что циклы имеют в общем случае более одного минимального вершинного 1-расширения, поэтому и цепи в общем случае имеют более одного минимального вершинного 2-расширения. Совершенно аналогично теоремам 2.1.3 и 2.1.4 можно доказать утверждение о Т-неприводимом 1-расширении цепи.

ТЕОРЕМА 2.1.6. *Единственным с точностью до изоморфизма Т-неприводимым 1-расширением n-вершинной цепи P_n является $(n + 1)$-вершинный цикл C_{n+1}.*

Для цикла, также как и для любого другого однородного графа, конструкция Т-неприводимого 1-расширения не представляет особенного интереса, так как всегда совпадает с тривиальным 1-расширением.

ТЕОРЕМА 2.1.7. *Единственным с точностью до изоморфизма Т-неприводимым 1-расширением однородного n-вершинного графа является тривиальное 1-расширение.*

Доказательство. Пусть G – однородный n-вершинный граф порядка m, а G^* – его Т-неприводимое 1-расширение. Очевидно, что G^* является связным графом, причем по лемме 2.1.4 степень любой его вершины не меньше $m + 1$. Это означает, что из добавленной вершины есть ребро в каждую вершину графа G. □

Заметим, что вопрос о Т-неприводимом k-расширении при $k > 1$ не является столь тривиальным. Так, например, цикл C_4 имеет Т-неприводимым 2-расширением граф вида $O_2 + C_4$, а Т-неприводимым 3-расширением – тривиальное 3-расширение.

В следующем параграфе обсудим вычислительную сложность задачи описания вершинных k-расширений и увидим, что уже задача определения, является ли заданный граф вершинным k-расширением, является NP-полной. Это означает, что, скорее всего, невозможно указать общую схему построения минимального вершинного k-расширения для произвольного графа, а можно лишь выделить некоторые семейства графов, для которых можно предложить частичное или полное аналитическое решение задачи. Интересно было бы двигаться и в противоположном направлении – описать графы, которые имеют минимальное вершинное 1-расширение с одним дополнительным ребром, двумя и т. д. Однако уже для трех дополнительных ребер эта задача оказывается сложной. Для связных графов, как мы уже видели, минимальное вершинное 1-расширение содержит не менее 2 дополнительных ребер, поэтому только несвязные графы могут иметь минимальное вершинное 1-расширение с одним дополнительным ребром.

ТЕОРЕМА 2.1.8. *Графы со степенным множеством* {1,0} *и только они имеют минимальное вершинное* 1*-расширение, которое отличается на одно дополнительное ребро, причем это расширение единственно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный граф G. Обозначим через d максимальную из степеней его вершин. Пусть далее G^* – минимальное вершинное 1-расширение графа G, которое отличается от него на одно дополнительное ребро. Граф G отличен от вполне несвязного, так как минимальное вершинное 1-расширение вполне несвязного графа по теореме 2.1.2 не имеет дополнительных ребер. Следовательно, $d > 0$.

По лемме 2.1.3 $d < 2$, так как в противном случае число дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения было бы больше единицы. Итак, установлено, что $d = 1$.

Если граф не содержит изолированных вершин, то его степенное множество будет иметь вид {1} – это графы, являющиееся объединением некоторого количества полных 2-вершинных графов K_2. По лемме 2.1.1 минимальное вершинное 1-расширение любого такого графа не содержит вершин со степенью ниже 2, а по лемме 2.1.5 количество дополнительных ребер будет также не менее 2. Таким образом, только графы со степенным множеством {1,0} могут иметь минимальное вершинное 1-расширение, отличающееся на одно дополнительное ребро. Покажем, что они действительно имеют такое расширение, причем единственное.

Граф G со степенным множеством {1,0} можно представить в виде $K_2 \cup \ldots \cup K_2 \cup O_p$, где $p > 0$ (см. рис. 2.1.3, *а*). На рис. 2.1.3, *б*

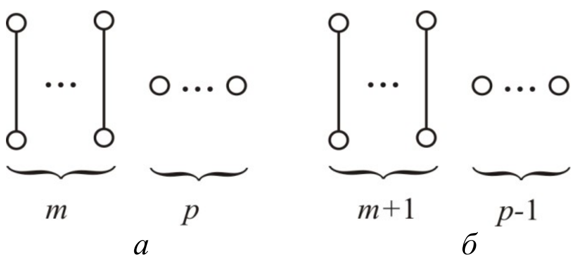


Рис. 2.1.3. Граф со степенным множеством {1,0} и его МВ-1Р

представлено минимальное вершинное 1-расширение графа G, которое отличается как раз на одно дополнительное ребро. Легко видеть, что других минимальных вершинных 1-расширений граф G иметь не может: при $p > 1$ минимальное вершинное 1-расширение будет иметь степенное множество $\{1,0\}$, а при $p = 1$ – степенное множество $\{1\}$.□

ТЕОРЕМА 2.1.9. *Среди связных графов только цепи имеют минимальное вершинное 1-расширение, которое отличается на два дополнительных ребра, причем это расширение единственно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный связный граф G. Обозначим через d максимальную из степеней его вершин. Пусть далее G^* – минимальное вершинное 1-расширение графа G, которое отличается от него на два дополнительных ребра. По лемме 2.1.1 граф G^* не содержит вершин степени меньше 2, а по лемме 2.1.5 он не может содержать вершин степени больше 2, таким образом, граф G^* является однородным графом порядка 2.

Так как граф G связный, то $d > 0$. По лемме 2.1.3 $d < 3$, так как в противном случае число дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения было бы больше двух. Итак, установлено, что $d = 1$ или $d = 2$. Рассмотрим оба случая.

Если $d = 1$, то граф G это 2-вершинная цепь P_2, которая имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение – цикл C_3, причем количество дополнительных ребер в точности равно двум.

Если $d = 2$, то граф G может иметь степенное множество либо $\{2\}$, либо $\{2,1\}$. В первом случае по лемме 2.1.4 его минимальное вершинное 1-расширение не может содержать вершин степени ниже 3, а по лемме 2.1.5 получаем, что и количество дополнительных ребер должно быть не менее трех.

Заметим, что все проведенные до этого момента рассуждения справедливы не только для связных графов, но и для любых графов без изолированных вершин.

Таким образом, среди связных графов только граф со степенным множеством $\{2,1\}$ может иметь минимальное вершинное 1-расширение, отличающееся на два дополнительных ребра. Однако связные графы со степенным множеством $\{2,1\}$ – это цепи. По теоремам 2.1.3 и 2.1.4 цепи удовлетворяют утверждению теоремы.□

ТЕОРЕМА 2.1.10. *Среди несвязных графов без изолированных вершин только графы вида* $P_n \cup C_{n+1} \cup \ldots \cup C_{n+1}$ *при* $n > 1$ *имеют минимальное вершинное 1-расширение, которое отличается на два дополнительных ребра, причем это расширение имеет вид* $C_{n+1} \cup C_{n+1} \cup \ldots \cup C_{n+1}$ *и оно единственно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный несвязный граф G без изолированных вершин. Пусть G^* – минимальное вершинное 1-расширение графа G, которое отличается от него на два дополнительных ребра.

Как было установлено в доказательстве предыдущей теоремы, граф G^* является однородным графом порядка 2, а граф G имеет степенное множество вида {2,1}. По условию граф G^* отличается от графа G на одну дополнительную вершину и два дополнительных ребра, следовательно, в графе G может быть только две вершины степени 1, которые соединяются в графе G^* ребрами с дополнительной вершиной. Из этих рассуждений можно сделать несколько выводов:

1) граф G имеет единственную компоненту, которой является цепь, а все остальные компоненты являются циклами;

2) все компоненты графа G^* являются циклами;

3) граф G^* – единственное минимальное вершинное 1-расширение графа G.

Докажем, что все компоненты связности графа G^* изоморфны.

Обозначим через P_n компоненту связности графа G, являющуюся цепью. Рассмотрим удаление произвольной вершины v в графе G^*. Граф $G^* - v$ имеет столько же ребер, сколько и граф G, причем граф G вкладывается в граф $G^* - v$, следовательно, $G^* - v$ изоморфен графу G. Но тогда компонента графа G^* с удаленной вершиной v изоморфна цепи P_n, то есть исходная компонента в графе G^* была циклом C_{n+1}. В силу произвольности выбора получаем, что все компоненты связности в графе G^* изоморфны циклу C_{n+1}, то есть граф G^* имеет вид $C_{n+1} \cup \ldots \cup C_{n+1}$, а граф G имеет вид $P_n \cup C_{n+1} \cup \ldots \cup C_{n+1}$.□

З а м е ч а н и е . В теоремах 2.1.9 и 2.1.10 минимальные вершинные 1-расширения являются и точными вершинными 1-расширениями.

ТЕОРЕМА 2.1.11. *Связные графы, имеющие минимальные вершинные* 1-*расширения с тремя дополнительными ребрами, могут иметь только следующий вид:*

1) *полный граф* K_3*;*
2) *графы с вектором степеней вида* (3,…,3,2,2,2), *имеющие точное вершинное* 1-*расширение;*
3) *графы с вектором степеней* (3,3,3, …,3,2,…,2,1) *особого вида*.

Доказательство. Рассмотрим произвольный связный n-вершинный граф G. Пусть G^* – минимальное вершинное 1-расширение графа G, которое отличается на три дополнительных ребра. По лемме 2.1.3 в графе G не может быть вершин со степенью больше 3. Перечислим все возможные степенные множества для графа G и затем последовательно их рассмотрим: {1}, {2}, {2,1}, {3}, {3,1}, {3,2}, {3,2,1}. Заметим, что по лемме 2.1.5 в графе G^* не может быть вершины со степенью больше 3. Кроме того, если в графе G^* есть вершина v степени 3, то граф $G^* - v$ будет изоморфен графу G: действительно, граф G должен вкладываться в любой максимальный подграф графа G^*, но граф $G^* - v$ содержит столько же ребер, сколько и граф G, откуда и следует их изоморфизм.

{1}: из связных графов такое степенное множество может иметь только цепь P_2, единственное минимальное вершинное 1-расширение которой есть цикл C_3.

{2}: из связных графов такое степенное множество могут иметь только циклы C_n. По леммам 2.1.4 и 2.1.5 граф G^* должен быть кубическим графом. Посчитаем количество ребер в графах G и G^*: n и $3(n + 1)/2$. Тогда количество дополнительных ребер графа G^* составит $(n + 3)/2$. В данном случае только при $n = 3$ число дополнительных ребер будет равно трем. Цикл C_3 изоморфен полному графу K_3, и его минимальное вершинное 1-расширение – полный граф K_4 – отличается на три дополнительных ребра. Это пункт 1 из формулировки теоремы.

{2,1}: из связных графов такое степенное множество может иметь только цепь P_n. Единственное минимальное вершинное 1-расширение цепи P_n – цикл C_{n+1}, и оно отличается на 2 дополнительных ребра.

{3}: по лемме 2.1.4 в графе G^* степень вершин будет не ниже 4, а по лемме 2.1.5 число дополнительных ребер тогда будет также не менее 4, следовательно, этот случай исключается.

{3,1}: с учетом леммы 2.1.4 граф G^* может иметь степенное множество вида {3} или {3,2}. Первое степенное множество соответствует кубическому графу и в данном случае не подходит, так как при удалении одной вершины кубического графа не может получиться граф с вершиной степени 1. Итак, граф G^* может иметь только степенное множество вида {3,2}. Рассмотрим удаление из графа G^* произвольной вершины v степени 3. Как было отмечено ранее, граф $G^* - v$ изоморфен графу G. Если бы вершина v была смежна хотя бы с одной другой вершиной степени 3, то в графе $G^* - v$, а значит, и в графе G была бы вершина степени 2, что невозможно. Но тогда в графе G^* вершина v должна была быть смежна только с вершинами степени 2. В силу произвольности выбора вершины степени 3 получаем, что граф G^* в данном случае может иметь только вид $K_{3,2} = O_3 + O_2$ (см. рис. 2.1.4, *а*). Но тогда граф G будет иметь вид $K_{3,1} = O_1 + O_3$. Легко видеть, что граф $K_{3,2}$ не является минимальным вершинным 1-расширением графа $K_{3,1}$. В самом деле, удаление любой вершины степени 2 из графа $K_{3,2}$ приводит к графу C_4, в котором нет вершин степени 3. На рис. 2.1.4 изображен граф $K_{3,2}$, а также граф $K_{3,1}$ и его минимальное вершинное 1-расширение.

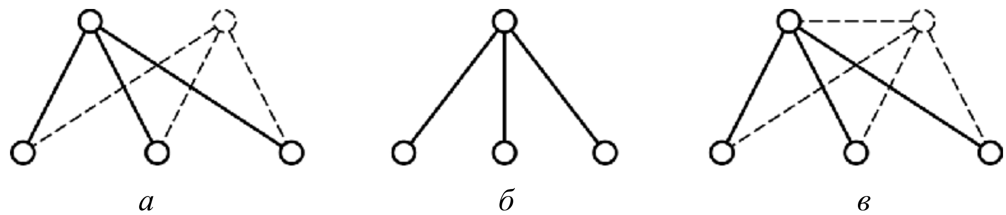


Рис. 2.1.4. Граф $K_{3,2}$ (*а*), граф $K_{3,1}$ (*б*) и его МВ-1Р (*в*)

{3,2}: С учетом леммы 2.1.4 граф G^* будет являться кубическим графом. Любой максимальный подграф графа G^* изоморфен графу G, то есть граф G^* является точным вершинным 1-расширением графа G. Получаем пункт 2 из формулировки теоремы.

{3,2,1}: Аналогично степенному множеству {3,1} приходим к выводу, что граф G^* должен иметь степенное множество {3,2}. Рассмотрим удаление вершины v степени 3 из графа G^*. Получившийся граф будет иметь столько же ребер, сколько и граф G, следовательно, граф $G^* - v$ изоморфен графу G. В силу произвольности выбора вершины v это означает, что каждая вершина степени 3 в графе G^* соединена с одинаковым количеством вершин степени 2: с 0, 1, 2 или 3 вершинами. Первый случай можно исключить из рассмотрения, так как если вершины степени 3 не смежны ни с одной вершиной степени 2, то граф G^* будет несвязным. Рассмотрим оставшиеся случаи. Обозначим для определенности через m_1 количество вершин степени 3 в графе G^*. По теореме о четности числа вершин нечетной степени число m_1 – четно. Через v обозначим произвольную вершину степени 3 в графе G^*, а через u – произвольную вершину степени 2. Как было отмечено выше, граф $G^* - v$ изоморфен графу G.

Случай I. Рассмотрим случай, когда каждая вершина степени 3 графа G^* смежна с 3 *вершинами* степени 2. Предположим, что в графе G^* есть вершина u степени 2, смежная с двумя вершинами степени 3 (рис. 2.1.5, *а*). Но тогда в графе $G^* - v$ (а значит, и в графе G) будет $m_1 - 1$ вершин степени 3 (см. рис. 2.1.5, *б*), а в графе $G^* - u$ будет $m_1 - 2$ вершин степени 3 (см. рис. 2.1.5, *в*), то есть граф G не будет вкладываться в граф $G^* - u$, что противоречит предположению.

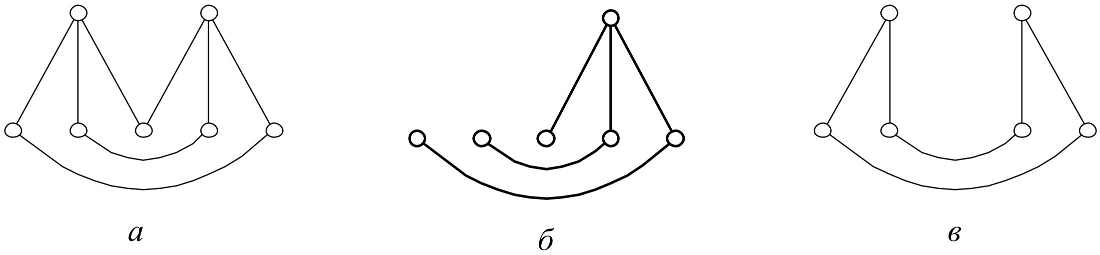


Рис. 2.1.5. Иллюстрация к случаю I: есть вершина степени 2, смежная с двумя вершинами степени 3

Итак, в графе G^* каждая вершина степени 2 смежна не более чем с одной вершиной степени 3 (рис. 2.1.6, *а*). Это означает, что вершины степени 3 соединены цепями, состоящими из вершин степени 2. Обозначим кратчайшее расстояние между вершинами степени 3 через d_3:

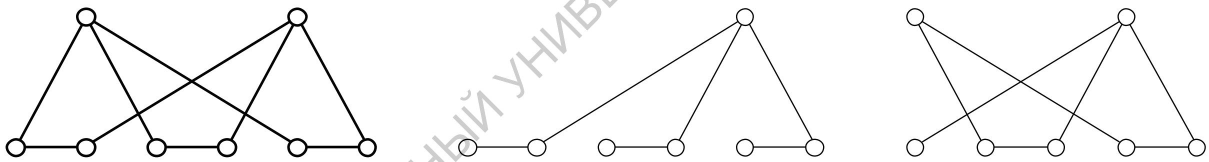
$$d_3 = \min_{v_1, v_2 \in V : d(v_1) = d(v_2) = 3} d(v_1, v_2).$$

Так как вершины степени 3 несмежны между собой, то $d_3 > 1$. Более того, как было установлено ранее, в графе G^* нет вершин степени 2 смежных с двумя вершинами степени 3, поэтому $d_3 > 2$. Не ограничивая общности, будем считать, что расстояние между вершинами v_1 и v_2 равно d_3:

$$d(v_1, v_2) = d_3.$$

Рассмотрим граф $G^* - v_1$. В этом графе будет $m_1 - 1$ вершин степени 3, из вершины v_2 будет выходить цепь длины $d_3 - 1$ и это будет самая короткая по длине цепь (см. рис. 2.1.6, *б*).

Рассмотрим граф, получающийся удалением из графа G^* первой вершины степени 2 в цепи, соединяющей вершину v_1 с v_2. В этом графе также будет $m_1 - 1$ вершин степени 3, а из вершины v_2 будет выходить цепь длины $d_3 - 2$ (см. рис. 2.1.6, *в*). Очевидно, что этот граф не может содержать в себе граф $G^* - v_1$.



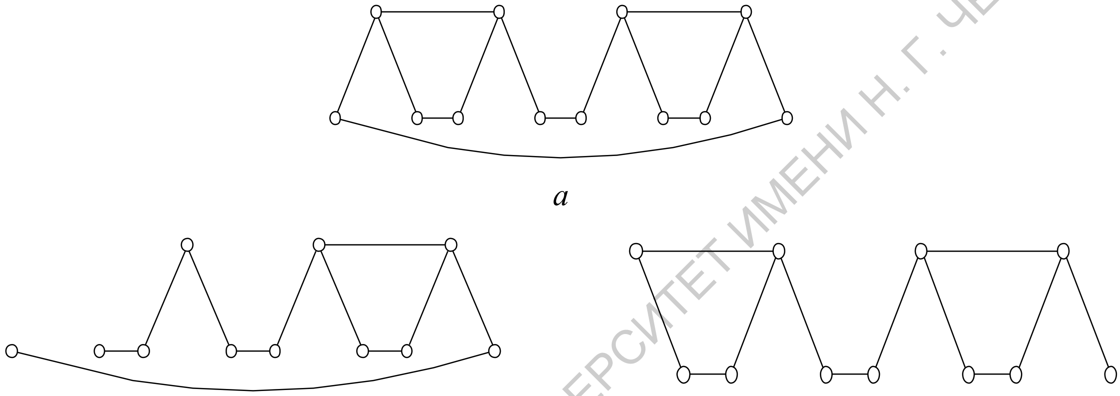
а *б* *в*

Рис. 2.1.6. Иллюстрация к случаю I: вершины степени 2 смежны не более чем с одной вершиной степени 3

Случай II. Пусть каждая вершина степени 3 смежна с 2 вершинами степени 2. Рассмотрим пару вершин u_1, u_2 степени 2 смежных с вершиной v степени 3. Если вершины u_1 и u_2 смежны, то граф $G^* - v$ будет несвязный. Следовательно, граф G^* представляет собой $m_1/2$ пар смежных вершин степени 3. С каждой вершиной степени 3 смежна пара несмежных вершин степени 2 (рис. 2.1.7, *а*). Рассмотрим граф $G^* - v$. В этом графе будет $m_1/2 - 1$ пар смежных вершин степени 3 и 2 вершины степени 1, смежные с вершинами степени 2. Таким образом, расстояние от вершины степени 1 до ближайшей вершины степени 3 будет не менее 2 (см. рис. 2.1.7, *б*).

Рассмотрим граф $G^* - u$, где u – произвольная вершина степени 2 (см. рис. 2.1.7, *в*). Этот граф должен допускать вложение графа G (или изоморфного ему графа $G^* - v$) и отличаться от него на одно дополнительное ребро. В графе G^* вершина u смежна с одной вершиной степени 3 и с одной вершиной степени 2. Для определенности, обозначим эти вершины u_1

и w. В графе $G^* - u$, следовательно, будет $m_1/2 - 1$ пар смежных вершин степени 3 и еще одна вершина u_2 степени 3, смежная только с вершинами степени 2. Вершина w в графе $G^* - u_1$ будет единственной вершиной степени 1, причем вершина w будет смежна с вершиной степени 3. Предположим, что вложение графа G в граф $G^* - u$ построено. Тогда вершине u_2 может соответствовать только вершина степени 2, и лишнее ребро – ребро, инцендентное вершине u_2. Обозначим через H граф, получающийся из графа $G^* - u$ после удаления этого ребра. Тогда граф H должен быть изоморфен графу $G^* - v$, но в графе H вершина степени 1 смежна с вершиной степени 3, а в графе вершины степени 1 смежны вершинам степени 2. Получаем противоречие.



а

б *в*

Рис. 2.1.7. Иллюстрация к случаю II

Случай III. Остается последняя возможность. Пусть каждая вершина степени 3 смежна с одной вершиной степени 2 и, соответственно, с 2 вершинами степени 3. Но тогда в графе G^* должно быть не менее 4 вершин степени 3, и это число должно быть четным. Рассмотрим граф $G^* - v$, где v – произвольная вершина степени 3. Этот граф должен быть изоморфен графу G. В графе $G^* - v$ одна вершина имеет степень 1, а остальные имеют степень 2 или 3.

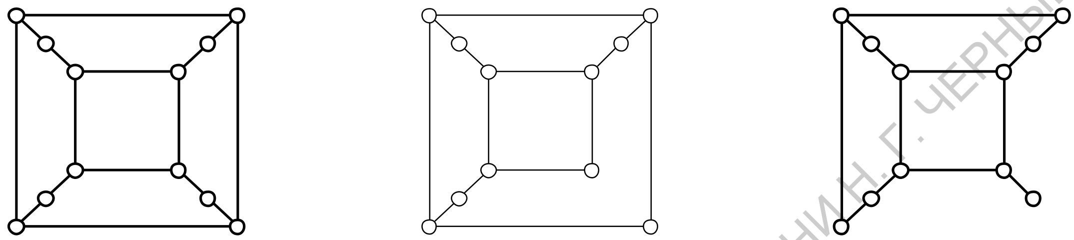
Пусть u – произвольная вершина графа G^* степени 2. Вершина u не может быть смежна с двумя вершинами степени 2, так как в этом случае в графе $G^* - u$ окажется 2 вершины степени 1, и вложение графа G будет невозможно. Таким образом, каждая вершина степени 2 смежна либо с двумя вершинами степени 3, либо с одной.

Каждая вершина степени 3 графа G^* смежна с двумя другими вершинами степени 3, то есть граф, индуцированный всеми вершинами степени 3, представляет собой цикл или объединение нескольких циклов. Покажем, что последнее невозможно. Предположим противное и, для определенности, обозначим через k количество циклов, составленных из вершин степени 3. Будем рассматривать далее только эти циклы. Граф G изоморфен графу, получающемуся из G^* удалением любой вершины степени 3.

Удалив одну вершину степени 3, мы разомкнем один цикл, составленный из вершин степени 3, и в получившемся графе окажется на один цикл меньше: $k-1$.

Относительно вершин степени 2 рассмотрим две возможности.

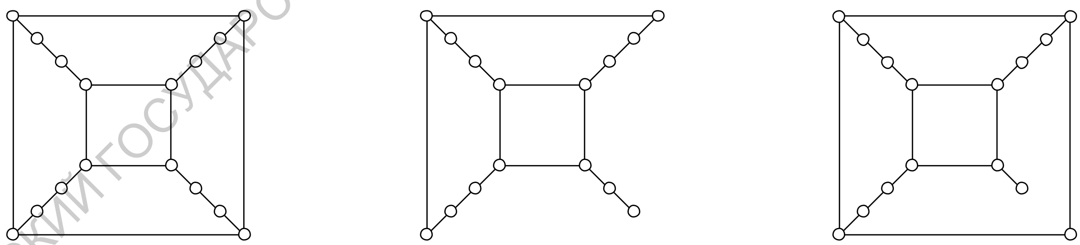
1. В графе G^* есть вершина u степени 2, смежная с двумя вершинами степени 3, принадлежащим различным циклам (рис. 2.1.8, *а*). Удаление вершины u из графа G^* приведет к тому, что циклов останется $k-2$ (см. рис. 2.1.8, *б*). Тогда в граф G^*-u нельзя будет вложить граф G (см. рис. 2.1.8, *в*).



а *б* *в*

Рис. 2.1.8. Иллюстрация к случаю III

2. В графе G^* нет вершины u степени 2, смежной с двумя вершинами степени 3, принадлежащим различным циклам. Это означает, что все вершины степени 2 смежны с одной вершиной степени 3 и с одной вершиной степени 2 (рис. 2.1.9, *а*). Удаление вершины u степени 2 из графа G^* приведет к тому, что циклов останется $k-1$, как и в графе G (см. рис. 2.1.9, *б*). Однако в графе G единственная вершина степени 1 будет смежна с вершиной степени 3, а в графе G^*-u расстояние от единственной вершины степени 1 до вершины степени 3 будет равно двум. Очевидно, что в граф G^*-u нельзя будет вложить граф G (см. рис. 2.1.9, *в*).



а *б* *в*

Рис. 2.1.9. Иллюстрация к случаю III

Таким образом, получается, что граф G^*, если он является минимальным вершинным 1-расширением графа G и отличается от него на 3 дополнительных ребра, должен иметь следующий вид:

1) степенное множество $\{3,2\}$;
2) количество вершин степени 3 должно быть четным и больше 3;
3) вершины степени 2 смежны либо с двумя вершинами степени 3, либо с одной вершиной степени 3 и одной вершиной степени 2; то

есть вершины степени 3 соединяются цепью, состоящей не более чем из трех ребер;

4) вершины степени 3 смежны с двумя другими вершинами степени 3, причем граф, индуцированный всеми вершинами степени 3, представляет собой цикл.

Получаем пункт 3 из формулировки теоремы.Теорема доказана.□

Следствие. *Семейство из* 3*-го пункта теоремы содержит графы с числом вершин* $3k - 1$ *и* $4k - 1$, $k > 1$.

Доказательство. Из пункта 3 свойств минимальных вершинных 1-расширений графов рассматриваемого семейства получается, что каждая пара вершин степени 3 соединяется цепью либо из одной, либо из двух вершин степени 2. Если обозначить через $2k$ количество вершин степени 3, то получается, что на каждую из k пар вершин степени 3 приходится либо одна, либо две вершины степени 2 минимального вершинного 1-расширения. В первом случае получаем $3k$ вершин, а во втором – $4k$.

Заметим, что для заданного числа вершин всегда можно построить соответствующего представителя семейства. Для этого достаточно построить цикл с числом вершин $2k$ и каждую пару смежных вершин соединить цепью из одной или двух вершин. Удалив любую вершину степени 3 из получившегося графа, получим искомого представителя семейства. Следствие доказано.□

На рис. 2.1.10 представлены все графы и их минимальные вершинные 1-расширения с числом вершин до 8, попадающие под пункт 3 доказанной теоремы.

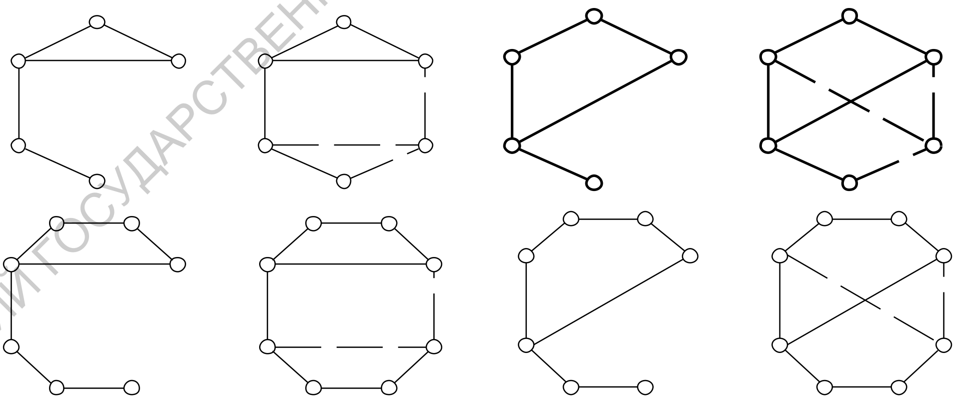


Рис. 2.1.10. Графы со степенным множеством {3,2,1} и их МВ-1Р с 3 дополнительными ребрами

З а м е ч а н и е . Полученные результаты удалось перенести и на ориентированные графы (Абросимов, Моденова, 2012). Описание графов, минимальное вершинное 1-расширение которых отличается на 4 и более дополнительных ребер, приводит к рассмотрению слишком большого числа случаев. Интересной представляется задача описания графов, для которых минимальным вершинным 1-расширением является тривиальное 1-расширение. Такие графы существуют, например, почти все предполные графы имеют единственное минимальное вершинное k-расширение, которым является тривиальное k-расширение (см. параграф 2.5).

Интересно было бы установить связь конструкции минимального вершинного k-расширения с алгебраическими операциями над графам, а именно: если известны все минимальные вершинные k-расширения для графов G_1 и G_2, то можно ли аналитически указать хотя бы одно минимальное вершинное k-расширение для графов, являющихся дополнениями G_1 и G_2 или графов $G_1 + G_2$ и $G_1 \cup G_2$?

В рамках изучения связи конструкции минимального вершинного k-расширения и операции дополнения графа сформулируем общую постановку задачи.

Задача. *Дан граф G и все его минимальные вершинные k-расширения. В каком случае дополнение одного из минимальных вершинных k-расширений графа G является минимальным вершинным k-расширением дополнения графа G?*

Будем говорить, что граф G обладает свойством *дополнительности k-расширения*, если дополнение хотя бы одного его минимального вершинного k-расширения является минимальным вершинным k-расширением дополнения графа G. При $k = 1$ будем говорить, что граф обладает свойством *дополнительности расширения*. Заметим, что если граф обладает свойством дополнительности k-расширения, то и его дополнение также обладает этим свойством.

Нетрудно видеть, что графы, обладающие свойством дополнительности k-расширения, существуют. Рассмотрим полный n-вершинный граф K_n и его дополнение – вполне несвязный n-вершинный граф O_n. При любом $k > 0$ эти графы имеют по теоремам 2.1.1 и 2.1.2 единственные с точностью до изоморфизма минимальные вершинные k-расширения: K_{n+k} для K_n и O_{n+k} для O_n, которые являются дополнительными графами. Далее этот случай будем называть тривиальным и не будем больше им интересоваться.

Нетривиальным случаем при $k = 1$ является цепь P_n. В частности, цепь P_4 (см. рис. 2.1.11) является самодополнительным графом, причем единственное минимальное вершинное 1-расширение цепи P_4 – цикл C_5 – также является самодополнительным графом. Таким образом, цепь P_n обладает свойством дополнительности расширения.

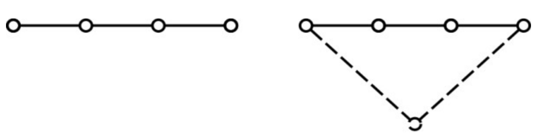


Рис. 2.1.11. Цепь P_4 и цикл C_5

Будем говорить, что граф G обладает свойством *самодополнительно-*

сти k-расширения, если и граф G, и некоторое его минимальное вершинное k-расширение являются самодополнительными графами. Следующий пример показывает, что не всякий самодополнительный граф обладает самодополнительным минимальным вершинным k-расширением.

На рис. 2.1.12 представлен самодополнительный граф C_5, его единственное минимальное вершинное 1-расширение, построенное на основании результатов параграфа 2.4 этой главы, а также дополнение минимального вершинного 1-расширения.

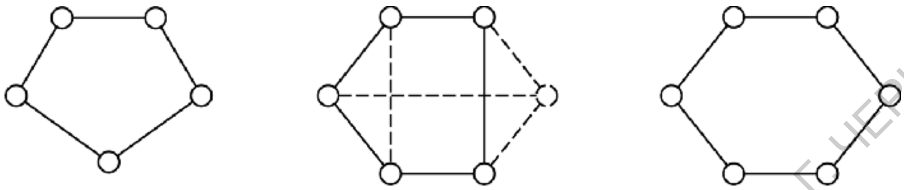


Рис. 2.1.12. Цикл C_5, его МВ-1Р и дополнение МВ-1Р

Как будет видно далее, не каждый граф обладает свойством дополнительности расширения. В работе (Абросимов, 2001, *б*) приводятся все графы с числом вершин до 11, обладающие свойством дополнительности расширения. Далее решается задача описания графов, обладающих свойством дополнительности k-расширения, а потом мы увидим, что такие графы обладают и рядом других интересных свойств.

Пусть отличный от полного и вполне несвязного граф G с вектором степеней $(a_1, \ldots, a_n)$ обладает свойством дополнительности расширения. Дополнение графа G – граф G' – имеет вектор степеней $(b_n, \ldots, b_1)$, G^* – минимальное вершинное 1-расширение графа G из определения дополнительности расширения, а $G'^* @ (G^*)'$ – минимальное вершинное 1-расширение графа G', являющееся дополнением для G^*. Для компонент векторов степеней справедливо соотношение:

$$b_i = n - 1 - a_i, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Пусть m^* и m'^* – число дополнительных ребер в минимальных вершинных 1-расширениях G^* и G'^* графа G и его дополнения соответственно. Так как G'^* является дополнением для G^*, то

$$m^* + m'^* = C_{n+1}^2 - C_n^2 = n.$$

Далее, поскольку a_1 и b_n – наибольшие степени вершин графов G и G', то по лемме 2.1.3

$$m^* \geq a_1 \quad \text{и} \quad m'^* \geq b_n = n - 1 - a_n.$$

Тогда

$$a_1 + n - 1 - a_n \leq m^* + m'^* = n,$$

откуда

$$0 \leq a_1 - a_n \leq 1.$$

Таким образом, графы, обладающие свойством дополнительности расширения, следует искать среди графов, минимальная и максимальная из степеней вершин которых различаются не более чем на единицу. Рассмотрим оба случая.

$a_1 - a_n = 0$, то есть G – однородный граф порядка a_1. Так как G отличен от вполне несвязного графа, то его минимальное вершинное 1-расширение G^* отличается от G на некоторое число дополнительных ребер. Из этого следует, что старшая из степеней вершин в G^* будет больше a_1, тогда минимальная из степеней вершин a^* в дополнении графа G^* будет

$$a^* < n + 1 - 1 - a_1 = b_1 + 1 > 0,$$

откуда

$$a^* \leq b_1.$$

Это означает, что в минимальном вершинном 1-расширении графа G' минимальная степень вершины не больше минимальной степени вершины в G', однако в силу леммы 2.1.4 такое возможно, только если G' является вполне несвязным графом. Сформулируем полученный результат в следующем утверждении:

ТЕОРЕМА 2.1.12 (*об отсутствии нетривиальных случаев среди однородных графов*). *Среди всех однородных графов только вполне несвязные и полные графы обладают свойством дополнительности расширения. Причем минимальные вершинные 1-расширения этих графов единственны с точностью до изоморфизма.*

Вспоминая, что через «*» мы обозначали унарную операцию получения минимального вершинного 1-расширения в том случае, если оно единственно, утверждение теоремы 2.1.12 для полных графов и вполне несвязных графов можно записать в следующем виде:

$$(G^*)' \cong (G')^*.$$

$a_1 - a_n = 1$. В этом случае вектор степеней графа G имеет вид $(a,\ldots,a,a-1,\ldots,a-1)$, а графа G': $(b,\ldots,b,b-1,\ldots,b-1)$, где $b = n - a$. Обозначим через k_1 и $k_2 = n - k_1$ число вершин степени соответственно a и $a - 1$ в графе G. Минимальное вершинное 1-расширение графа G должно содержать не менее a дополнительных ребер, а минимальное вершинное 1-расширение графа G' – не менее b, то есть

$$m^* \geq a, \qquad m'^* \geq b.$$

С другой стороны, суммарное число дополнительных ребер в обоих минимальных вершинных 1-расширениях в точности равно n. Тогда неравенства превращаются в точные равенства:

$$m^* = a, \qquad m'^* = b.$$

Рассуждая далее, получаем, что любая вершина минимального вершинного 1-расширения графа G не может иметь степень ниже a. Но по лемме 2.1.3 степень любой вершины не больше a. Следовательно, минимальные вершинные 1-расширения для G^* и G'^* являются однородными графами порядка a и $b = n - a$ соответственно. Более того, из наших рассуждений следует, что эти минимальные вершинные 1-расширения единственны с точностью до изоморфизма, причем число вершин степени $a - 1$ в графе G в точности равно a. Аналогично для дополнения, с той разницей, что в графе G' число вершин степени $b - 1$ в точности равно b. Сосчитаем сумму степеней вершин графа G:

$$ak_1 + (a - 1)k_2 = a(n - a) + (a - 1)a = a(n - 1).$$

По теореме о необходимой четности суммы степеней вершин графа получаем, что при нечетном a число вершин графа должно быть также нечетным. Таким образом, можно сформулировать два необходимых условия существования нетривиального решения задачи.

ТЕОРЕМА 2.1.13 (*Первое необходимое условие дополнительности расширения для графа, отличного от полного и вполне несвязного*). *Пусть граф G отличен от вполне несвязного и полного графов. Тогда для того, чтобы граф G обладал свойством дополнительности расширения, необходимо, чтобы граф G имел степенное множество вида* $\{a, a - 1\}$, *причем число вершин степени* $a - 1$ *должно в точности равняться* a.

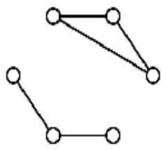
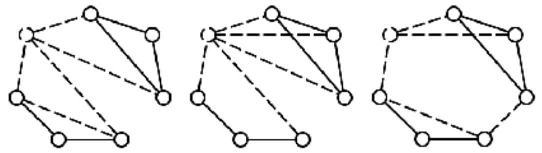
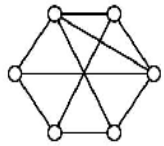
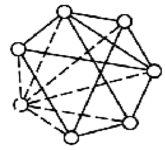
ТЕОРЕМА 2.1.14 (*Второе необходимое условие дополнительности расширения для графа*). *Пусть G – некоторый граф, а* G^* *– его минимальное вершинное* 1*-расширение. Тогда для того, чтобы граф G обладал свойством дополнительности расширения, необходимо, чтобы граф* G^* *был однородным.*

Очевидно, что второе необходимое условие не является достаточным (см. рис. 2.1.12). Однако и первое необходимое условие не является достаточным, что показывает следующий пример.

6-вершинный граф G_{615} с вектором степеней (2,2,2,2,1,1), удовлетворяющий условию теоремы 2.1.13, имеет три неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения, отличающихся от графа G_{615} на пять дополнительных ребер, причем ни одно из них не является однородным графом. Дополнение графа G_{615} – граф G_{6107} с вектором степеней (4,4,3,3,3,3) имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение с шестью дополнительными ребрами (см. табл. 2.1.2).

Таблица 2.1.2

Два 6-вершинных графа и их МВ-1Р

 G_{615}	 МВ-1Р графа G_{615}	 G_{6107}	 МВ-1Р графа G_{6107}

Итак, из того, что граф удовлетворяет первому необходимому условию, не следует, что дополнение его минимального вершинного 1-расширения является минимальным вершинным 1-расширением дополнения, более того, не следует и что граф удовлетворяет второму необходимому условию, то есть имеет минимальным вершинным 1-расширением однородный граф. Очевидно, что обратное тоже верно: не всякий граф, минимальное вершинное 1-расширение которого является однородным графом, удовлетворяет первому необходимому условию. Оказывается, что объединение обоих необходимых условий является достаточным условием для определения нетривиального решения.

ТЕОРЕМА 2.1.15 (*Критерий существования нетривиального решения задачи*). *Для того чтобы граф G обладал свойством дополнительности расширения, необходимо и достаточно, чтобы граф G имел степенное множество вида $\{b,b-1\}$, причем число вершин степени $b-1$ в точности равнялось b, а его минимальное вершинное 1-расширение было однородным графом порядка b. При этом и граф G и его дополнение имеют единственные с точностью до изоморфизма минимальные вершинные 1-расширения, поэтому справедлива запись:*

$$(G^*)' \cong (G')^*.$$

Доказательство. *Достаточность.* Обозначим через G^* однородный граф, являющийся минимальным вершинным 1-расширением графа G. Заметим, что по n-вершинному графу G из условия однородный $(n+1)$-вершинный граф порядка b можно построить единственным образом, а именно, добавив новую вершину и соединив ее с каждой вершиной порядка $b-1$. По условию полученный граф является минимальным вершинным 1-расширением для графа G. Тогда удаление любой его вершины приводит к удалению в точности b дополнительных ребер, то есть каждый максимальный подграф графа G^* изоморфен графу G.

Рассмотрим удаление произвольной вершины v из дополнения графа G^*. Очевидно, что если мы сначала возьмем дополнение дополнения графа G^* (то есть просто G^*), удалим из него вершину v, а затем возьмем дополнение получившегося графа, то результат будет изоморфен максимальному подграфу дополнения графа G^*, получающемуся после удаления вершины v. Как мы уже установили, удаление любой вершины графа G^* дает граф G, следовательно, каждый максимальный подграф дополнения графа G^* изоморфен дополнению графа G, то есть дополнение графа G^* является вершинным 1-расширением дополнения G и отличается от него на $n + 1 - b$ дополнительных ребер. Поскольку наибольшая из степеней вершин дополнения G есть $n - (b - 1) = n + 1 - b$, то минимальное вершинное 1-расширение дополнения не может иметь дополнительных ребер меньше $n + 1 - b$, значит, дополнение G^* является минимальным вершинным 1-расширением дополнения графа G.

Покажем, что и граф G, и его дополнение имеют единственные минимальные вершинные 1-расширения. В силу симметрии достаточно рассмотреть граф G.

По рассмотренному выше, никакое минимальное вершинное 1-расширение G^* графа G не может иметь вершин со степенью ниже b. Однако вершин со степенью выше b граф G^* также иметь не может, поскольку отличается от G в точности на b ребер. Наконец, только один однородный граф порядка b является минимальным вершинным 1-расширением для графа G, что и доказывает теорему.

Необходимость была доказана ранее.□

Следствие 1. *Максимальный подграф минимального вершинного* 1*-расширения любого графа G, обладающего свойством дополнительности расширения, изоморфен самому графу G.*

Доказательство. Утверждение справедливо для полных и вполне несвязных графов. Для всех остальных графов, обладающих свойством дополнительности расширения, справедливость утверждения следует из доказательства теоремы 2.1.15.□

Следствие 2. *Каждый граф, обладающий свойством самодополнительности расширения, имеет* $4k$ *вершин и степенное множество вида* $\{2k, 2k - 1\}$.

Доказательство. Пусть n-вершинный граф G обладает свойством самодополнительности расширения. Тогда по теореме 2.1.15 его степенное множество имеет вид $\{b, b - 1\}$, причем в точности b вершин имеют степень $b - 1$. Поскольку граф G самодополнительный, то $n - 1 - b = b - 1$, откуда $n = 2b$. Таким образом, b вершин графа G имеют степень вершин b, а остальные b вершин имеют степень $b - 1$. Поскольку либо b, либо $b - 1$ нечетно, а число нечетных вершин графа должно быть четно, то из этого следует, что b – четное, то есть $b = 2k$. □

З а м е ч а н и е . Из теоремы 2.1.15 следует очевидный алгоритм для поиска всех n-вершинных графов, обладающих свойством дополнительно-

сти расширения. В работе (Абросимов, 2001, *б*) приводятся все графы с числом вершин до 11, обладающие свойством дополнительности рас ширения.

ТЕОРЕМА 2.1.16. *При $k > 1$ только полный и вполне несвязный графы обладают свойством дополнительности k-расширения.*

Доказательство. То, что полный и вполне несвязный графы обладают свойством дополнительности k-расширения, было отмечено в начале параграфа. Покажем, что только такие графы и обладают исследуемым свойством при $k > 1$.

Предположим противное. Пусть отличный от полного и вполне несвязного граф G имеет вектор степеней $(a_1,\ldots,a_n)$, дополнение G – граф G' – имеет вектор степеней $(b_n,\ldots,b_1)$. Далее пусть G^{k*} и G'^{k*} – минимальные вершинные k-расширения для графов G и G', являющиеся дополнениями друг друга, а их вектора степеней обозначим $(a_1^k,\ldots,a_{n+k}^k)$ и $(b_{n+k}^k,\ldots,b_1^k)$. Для компонент векторов степеней справедливо соотношение:

$$b_i = n - 1 - a_i, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

аналогично

$$a_i^k + b_i^k = n + k - 1.$$

Минимальная степень вершины в графе G равна a_n, тогда по лемме 2.1.4 минимальная степень вершины в графе G^* должна быть не меньше $a_n + k$. Откуда старшая степень вершины в G'^*

$$b_n^k = n + k - 1 - a_n^k \le n + k - 1 - (a_n + k) = n - 1 - a_k = b_k.$$

То есть старшая степень вершины в минимальном вершинном k-расширении графа G' (аналогично и для графа G) равна старшей степени вершины в его минимальном вершинном k-расширении. Далее получаем:

$$a_1 = a_1^k \ge a_n^k \ge a_n + k,$$

но

$$b_n = n - 1 - a_n \ge n + k - 1 - a_1.$$

С другой стороны,

$$b_1^k = n + k - 1 - a_1^k = n + k - 1 - a_1 = b_1 + k,$$

то есть минимальная степень вершины в минимальном вершинном k-расширении в точности на k больше минимальной степени вершины графа.

Обозначим через m и m' число дополнительных ребер минимальных вершинных k-расширений G^{k*} и G'^{k*}. Оценим число дополнительных ребер минимального вершинного k-расширения графа G. Поскольку старшая степень вершины и в G, и в G^{k*} равна a_1, то число дополнительных ребер по лемме 2.1.3 для G^{k*} не может быть менее a_1k: $m \geq a_1k$. Аналогично для дополнения графа G оценим снизу число дополнительных ребер: $m' \geq b_nk$. Поскольку общее число дополнительных ребер должно быть в точности равно

$$n + (n+1) + \ldots + (n+k-1) = nk + \frac{k(k-1)}{2},$$

то получаем:

$$a_1k + b_nk = k(a_1 + n - 1 - a_n) \le m + m' = nk + \frac{k(k-1)}{2},$$

далее

$$k(n+k-1) \le k(a_1 + n - 1 - a_n),$$

откуда

$$k(k-1) \le \frac{k(k-1)}{2}.$$

Последнее неравенство выполняется только при $k = 1$. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы.□

Понятие точного вершинного k-расширения было введено Харари и Хейзом в работе (Harary, Hayes, 1996). Там же приводятся следующие примеры графов, обладающих точным вершинным k-расширением: минимальное вершинное k-расширение полного n-вершинного графа K_n – полный $(n + k)$-вершинный граф K_{n+k} – является его точным вершинным k-расширением; $(n + 1)$-вершинный цикл C_{n+1} является точным вершинным 1-расширением для n-вершинной цепи P_n. Однако точное вершинное k-расширение есть не у каждого графа. Например, при $n > 3$ минимальное вершинное 1-расширение цикла C_n не является его точным расширением. Очевидно, что только однородный граф может являться точным вершинным k-расширением, но, как показывает случай с циклом, это условие не является достаточным. Далее в работе (Harary, Hayes, 1996) Харари и Хейз ставят вопрос описания точных вершинных k-расширений графов. Из результатов, полученных Раджави и Розенталем (Radjavi, Rosenthal, 1972), можно сделать вывод, что для неориентированных графов никакой граф кроме O_n и K_n не может быть точным вершинным k-расширением при $k > 1$. Для ориентированных графов ситуация оказывается более интересной, это будет подробнее рассмотрено в параграфе 2.7. Неожиданным является обнаруженное в ходе вычислительного эксперимента (Абросимов, Долгов, 2007, 2008) и описанное затем А. А. Долговым в работе (Долгов, 2010) семейство турниров, которое обладает особым свойством. Неориентированный граф может иметь точное вершинное k-расширение либо только при $k = 1$, либо при всех натуральных значениях k (полные и вполне несвязные графы). Турниры из описанного А. А. Долговым семейства имеют точное вершинное 1- и 2-расширение, но не имеют точного вершинного k-расширения при $k > 2$.

В следующей теореме утверждается эквивалентность проблемы описания точных вершинных k-расширений и решенной выше проблемы описания графов, обладающих свойством дополнительности k-расширения.

ТЕОРЕМА 2.1.17. *Граф G тогда и только тогда имеет точное вершинное k-расширение, когда он обладает свойством дополнительности k-расширения.*

Доказательство. *Необходимость*. Пусть граф G имеет точным вершинным k-расширением граф G^*. Покажем, что граф G обладает свойством дополнительности k-расширения.

Выберем F – произвольный набор из k вершин графа G^*. По условию $G \cong G^* - F$. Тогда, взяв дополнения для графов, стоящих слева и справа от знака изоморфизма, получим: $G' \cong (G^* - F)' \cong (G^*)' - F$. То есть удаление любых k-вершин из дополнения графа G^* приводит к графу, изоморфному дополнению графа G, то есть граф G обладает свойством дополнительности k-расширения.

Достаточность. Покажем, что любой граф, который обладает свойством дополнительности k-расширения, имеет точное расширение.

При $k = 1$ имеем следствие 1 из теоремы 2.1.15, согласно которому минимальное вершинное 1-расширение графа со свойством дополнительности 1-расширения является и его точным вершинным 1-расширением.

При $k > 1$ только полные и вполне несвязные графы по теореме 2.1.16 обладают свойством дополнительности k-расширения. Как уже было отмечено, эти графы имеют и точное k-расширение.□

Следствием из теорем 2.1.15, 2.1.16 и 2.1.17 является следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 2.1.18. *Если n-вершинный граф G имеет точное вершинное k-расширение G^*, то при $n > 1$ граф G^* является единственным с точностью до изоморфизма минимальным вершинным k-расширением графа G.*

Заметим, что если бы существовал граф, имеющий неизоморфные точные вершинные 1-расширения, то он не был бы вершинно реконструируемым, то есть его нельзя было бы с точностью до изоморфизма восстановить по списку максимальных подграфов. Теорема 2.1.18 сформулирована для неориентированных графов, а для орграфов подобный результат пока неизвестен. Удалось показать (Абросимов, Долгов, 2011), что все известные семейства орграфов, имеющих точные вершинные 1-расширения, удовлетворяют теореме 2.1.18. Более того, все семейства Стокмейера нереконструируемых орграфов (Stockmeyer, 1981) не являются точными вершинными 1-расширениями.

ТЕОРЕМА 2.1.19. *Граф G является точным вершинным 1-расширением тогда и только тогда, когда он является вершинно-симметрическим.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть граф G является вершинно-симметрическим. Любые две его вершины u и v подобны, откуда очевидным образом следует, что $G - u$ будет изоморфен $G - v$.

Достаточность. Пусть граф G является точным вершинным 1-расширением. Тогда для любых двух вершин u и v графы $G - u$ и $G - v$ изоморфны. В общем случае из того, что $G - u$ изоморфен $G - v$, не следует, что вершины u и v подобны (Харари, 2003). Покажем, что в случае точных вершинных 1-расширений это выполняется.

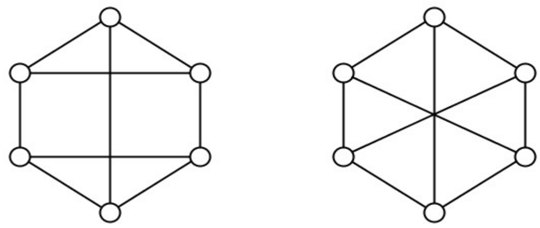
Так как G является точным вершинным 1-расширением, то граф G – однородный некоторого порядка d. Граф $G - u$ изоморфен $G - v$, и пусть f подходящий изоморфизм. Пусть $u_1,\dots,u_d$ – вершины степени $d-1$ графа $G - u$, а $v_1,\dots,v_d$ соответственно подобные им вершины в графе $G - v$. Вершина u смежна с вершинами $u_1,\dots,u_d$ в графе G и только с ними, а вершина v смежна с вершинами $v_1,\dots,v_d$ и только с ними. Обозначим множество вершин $u_1,\dots,u_d$ через $\alpha(u)$, а множество вершин $v_1,\dots,v_d$ через $\alpha(v)$.

Покажем, что вершины u и v подобны. В самом деле, рассмотрим отображение $f^*(x) = \begin{cases} v, & x = u \\ f(x), & x \neq u \end{cases}$. Нетрудно видеть, что f^* является взаимно однозначным отображением. Покажем, что f^* – автоморфизм графа G. Рассмотрим пару вершин w_1 и w_2 графа G. Рассмотрим три случая:

1) w_1 и w_2 отличны от u. Тогда $(w_1, w_2) \in \alpha \Leftrightarrow (f^*(w_1), f^*(w_2)) \in \alpha$;
2) одна из вершин – u (пусть для определенности $w_1 = u$), а другая (то есть w_2) смежная с ней в графе G вершина, то есть $w_2 \in \alpha(u)$. Тогда $(w_1, w_2) \in \alpha$, однако $f^*(u) = v$, а $f^*(u_i) = v_i$, а поскольку $(v, v_i) \in \alpha$, то и в этом случае выполняется $(w_1, w_2) \in \alpha \Leftrightarrow (f^*(w_1), f^*(w_2)) \in \alpha$;
3) одна из вершин – u (пусть опять для определенности $w_1 = u$), а другая (то есть w_2) не смежная с ней в графе G вершина, то есть $w_2 \notin \alpha(u)$. Тогда $(w_1, w_2) \notin \alpha$, однако $f^*(u) = v$, а $f^*(w_2) \notin \alpha(v)$, а поскольку в этом случае $(v, f^*(w_2)) \notin \alpha$, то опять выполняется $(w_1, w_2) \in \alpha \Leftrightarrow (f^*(w_1), f^*(w_2)) \in \alpha$.

Итак, f^* является изоморфизмом, следовательно, вершины u и v подобны.□

Таким образом, всякий вершинно-симметрический граф является точным вершинным 1-расширением, однако не всякий такой граф является точным реберным 1-расширением. На рис. 2.1.13, *а* приведен минимальный по числу вершин вершинно-симметрический граф, не являющийся точным реберным 1-расширением. Интересно, что этот граф также является минимальным вершинным 1-расширением цикла C_5 и минимальным реберным 1-расширением цикла C_6 (см. параграфы 2.4 и 3.4). На рис. 2.1.13, *б* изображено еще одно точное вершинное 1-расширение, которое является и точным реберным 1-расширением, – граф $K_{3,3}$. Заметим, что граф $K_{3,3}$ является минимальным реберным 1-расширением цикла C_6, однако не является минимальным вершинным 1-расширением цикла C_5.



а *б*

Рис. 2.1.13. Графы ТВ-1Р: не являющийся (*а*) и являющийся (*б*) ТР-1Р

2.2. Сложность задачи

В этом параграфе нас будет интересовать вычислительная сложность задачи описания минимальных вершинных *k*-расширений. Эта задача является поисковой: по заданному графу требуется построить его минимальное вершинное *k*-расширение (или еще более сложная задача – все расширения). Как мы уже обсуждали в параграфе 1.4, при анализе сложности рассматриваются задачи распознавания свойств, а задача поиска будет иметь не меньшую сложность.

Сформулируем задачу о вершинном *k*-расширении как задачу распознавания свойств, то есть задачу, ответом на которую может быть «да» или «нет».

ЗАДАЧА: ВЕРШИННОЕ *k*-РАСШИРЕНИЕ

УСЛОВИЕ. Даны графы $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$.

ВОПРОС. Верно ли, что граф *G* является вершинным *k*-расширением графа *H*?

ТЕОРЕМА 2.2.1. *Задача ВЕРШИННОЕ k-РАСШИРЕНИЕ является NP-полной.*

Доказательство. Доказательство для наглядности будем проводить при $k = 1$, однако идея доказательства остается справедливой при любом натуральном *k*.

Покажем, что задача ВЕРШИННОЕ 1-РАСШИРЕНИЕ $\in$ NP. Для этого нужно показать, что с помощью алгоритма полиномиальной сложности можно убедиться в правильности решения, которое было найдено с помощью некоторого недетерминированного алгоритма.

Пусть граф G содержит n, а граф H содержит m вершин, очевидно, что если G является вершинным 1-расширением, то $n \geq m + 1$. Обозначим вершины графа G через $v_1, \ldots, v_n$. Тогда недетерминированному алгоритму необходимо угадать n последовательностей V_i по m вершин из множеств $V - v_i$, для каждой из которых далее за полиномиальное время можно проверить, что определяемая этой последовательностью биекция является вложением. В общем случае, для произвольного k необходимо будет указать C_n^k последовательностей для всех возможных наборов из k удаляемых вершин графа G: для фиксированного k эта величина будет полиномом от n и может быть оценена как $O(n^k)$.

Покажем, что задача ИЗОМОРФИЗМ ПОДГРАФУ, которую мы привели в параграфе 1.4, сводится к задаче ВЕРШИННОЕ k-РАСШИРЕНИЕ. Для этого необходимо указать функцию f, которая сводит каждую задачу ИЗОМОРФИЗМ ПОДГРАФУ к задаче ВЕРШИННОЕ k-РАСШИРЕНИЕ и удовлетворяет двум условиям полиномиальной сводимости.

Пусть графы $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$ определяют условие задачи ИЗОМОРФИЗМ ПОДГРАФУ. Соответствующая задача ВЕРШИННОЕ 1-РАСШИРЕНИЕ строится следующим образом. Первым графом берется граф $G + K_1$, то есть к графу G добавляется одна вершина и соединяется с остальными вершинами, а вторым графом берется граф H. Очевидно, что эта сводимость осуществляется за полиномиальное время. В общем случае возьмем граф $G + K_k$ – необходимо добавить k вершин, соединить их друг с другом и с каждой вершиной графа G. Для проверки второго требования необходимо показать, что граф $G + K_1$ (или в общем случае $G + K_k$) тогда и только тогда является вершинным k-расширением графа H, когда граф H вкладывается в граф G.

Необходимость. Обозначим полную вершину графа $G + K_1$ через v. Если граф $G + K_1$ является вершинным 1-расширением графа H, то граф H вкладывается в граф, получающийся из $G + K_1$ удалением вершины v, то есть в G (в общем случае – удалением k полных вершин).

Достаточность. С другой стороны, если граф H вкладывается в граф G, то граф $G + K_1$ является вершинным 1-расширением графа H. Действительно, обозначим полную вершину графа $G + K_1$ через v и рассмотрим граф G^*, получающийся из $G + K_1$ удалением произвольной вершины u. Если $u = v$, то граф G^* изоморфен графу G, а если $u \neq v$, то вершина u в графе G может быть заменена вершиной v, так как вершина v смежна со всеми остальными вершинами. Таким образом, и в том, и в другом случае граф H может быть вложен в граф $G^* - u$.

Рассмотрим далее оптимизационный вариант задачи.

НЕПРИВОДИМОЕ k-РАСШИРЕНИЕ

УСЛОВИЕ. Даны графы $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$.

ВОПРОС. Верно ли, что граф G является неприводимым вершинным k-расширением графа H?

Задача НЕПРИВОДИМОЕ k-РАСШИРЕНИЕ является, очевидно, не менее трудной, чем задача ВЕРШИННОЕ k-РАСШИРЕНИЕ: для проверки того, что граф G является неприводимым вершинным k-расширением графа H, необходимо установить, что 1) G является вершинным k-расширением графа H (NP-полная задача) и 2) никакая часть G, получающаяся удалением одного ребра, не является вершинным k-расширением H (задача из *co*-NPC). В некоторых случаях можно избежать проверки пункта 2, используя аналитические оценки на минимальное количество дополнительных ребер в k-расширении графа. Так, например, леммы из параграфа 2.1 позволяют получить такую оценку в некоторых случаях.

Однако в общем случае, если количество ребер в предъявляемом графе окажется выше некоторой аналитической оценки на минимальное число дополнительных ребер, то необходимо будет проверить, что никакая часть графа G не является k-расширением графа H. В этом случае мы не сможем за полиномиальное время убедиться в истинности того, является ли предложенный граф G неприводимым вершинным (реберным) k-расширением графа H. Это означает, что задача НЕПРИВОДИМОЕ k-РАСШИРЕНИЕ Ï NP. Легко увидеть, что и обратная задача также не допускает полиномиальной проверки, поэтому задача НЕПРИВОДИМОЕ k-РАСШИРЕНИЕ Ï co-NP. Аналогичные рассуждения применимы и к задаче МИНИМАЛЬНОЕ k-РАСШИРЕНИЕ. Заметим, что для проверки, является ли заданный граф неприводимым или минимальным расширением, достаточно полиномиального объема памяти, то есть эти задачи принадлежат классу сложности PSPACE.

2.3. Неизоморфные расширения

Могут ли графы иметь неизоморфные минимальные вершинные k-расширения?

Как было показано в параграфе 2.1, все 2-, 3- и 4-вершинные графы имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение. Цепи, полные и вполне несвязные графы также имеют единственное минимальное вершинное 1-расширение. Однако для многих графов такая ситуация, как мы увидим в дальнейшем, не характерна. Так уже среди 5-вершинных графов 9 графов имеют более одного минимального вершинного 1-расширения. В следующем параграфе будут описаны различные схемы построения неизоморфных минимальных вершинных 1-расширений циклов.

В этом параграфе мы укажем простые примеры графов, которые имеют неизоморфные минимальные вершинные 1-расширения. Везде далее, говоря о числе различных минимальных вершинных k-расширений графа, будем иметь в виду различные с точностью до изоморфизма минимальные вершинные k-расширения графа и говорить, что граф имеет 1, 2 или более минимальных вершинных k-расширений.

ТЕОРЕМА 2.3.1. *Графы G^*_1 и G^*_2, изображенные на рис.* 2.3.1, *б, в, являются неизоморфными минимальными вершинными* 1-*расширениями* 5-*вершинного несвязного графа $G_{0,3}$ с двумя ребрами и двумя изолированными вершинами, изображенного на рис.* 2.3.1, *а*.

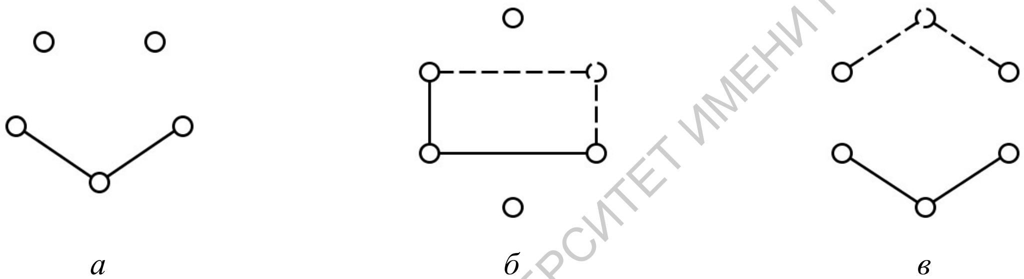


Рис. 2.3.1. Граф $G_{0,3}$ и все его МВ-1Р

Доказательство. Очевидно, что оба графа отвечают условиям 1 и 2 из определения минимального вершинного 1-расширения, и они неизоморфны. По лемме 2.1.3 число дополнительных ребер любого минимального вершинного 1-расширения графа $G_{0,3}$ не может быть меньше 2, следовательно, G^*_1 и G^*_2 являются неизоморфными минимальными вершинными 1-расширениями графа $G_{0,3}$. Нетрудно убедиться, что других минимальных вершинных 1-расширений у графа $G_{0,3}$ нет.□

ТЕОРЕМА 2.3.2. *Графы G^*_1 и G^*_2, изображенные на рис.* 2.3.2, *б,в, являются неизоморфными минимальными вершинными* 1-*расширениями* 5-*вершинного несвязного графа $G_{2,3}$ с тремя ребрами, изображенного на рис.* 2.3.2, *а*.

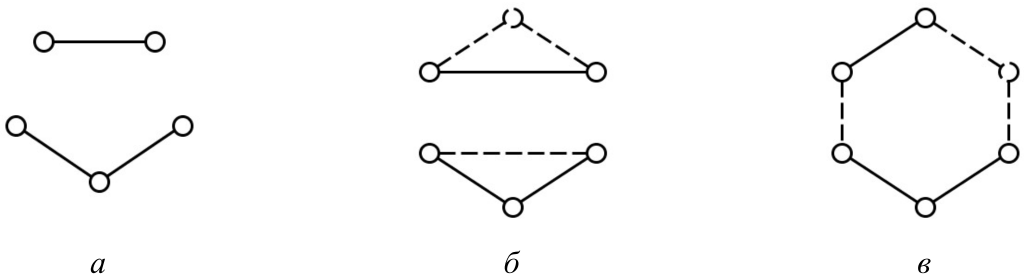
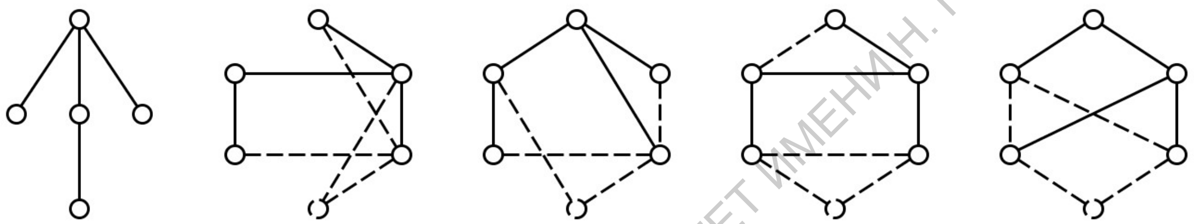


Рис. 2.3.2. Граф $G_{2,3}$ и все его МВ-1Р

Доказательство. Очевидно, что оба графа отвечают условиям 1 и 2 из определения минимального вершинного 1-расширения, и они неизоморфны. Покажем, что они отвечают условию 3.

Граф $G_{2,3}$ не имеет изолированных вершин, следовательно, по лемме 2.1.1 степень любой вершины в некотором его минимальном вершинном 1-расширении G^* не может быть меньше 2, и, значит, количество ребер G^* не меньше (2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2)/2 = 6. Исследуемые графы имеют в точности указанное количество ребер.□

ТЕОРЕМА 2.3.3. *Графы* G^*_{51}, G^*_{52}, G^*_{53} *и* G^*_{54}, *изображенные на рис.* 2.3.3, *б, в, г, д, являются неизоморфными минимальными вершинными* 1-*расширениями связного графа* G_5 *с четырьмя ребрами и вектором степеней* (3,2,1,1,1), *изображенного на рис.* 2.3.3, *а*.



а *б* *в* *г* *д*

Рис. 2.3.3. Дерево G_5 и все его МВ-1Р

Доказательство. Заметим, что граф G_5 является сверхстройным деревом с вектором цепей (2,1,1). Непосредственной проверкой можно убедиться, что все четыре графа G^*_{51}, G^*_{52}, G^*_{53} *и* G^*_{54} отвечают условиям 1 и 2 из определения минимального вершинного 1-расширения, кроме того, они неизоморфны. В самом деле, вектора степеней графов G^*_{51}, G^*_{52}, G^*_{53} и G^*_{54} имеют вид соответственно (4,4,2,2,2,2), (4,3,3,2,2,2), (3,3,3,3,2,2) и (3,3,3,3,2,2). У графа G^*_{53} обе вершины степени 3, смежные с одной вершиной степени 2, смежны между собой, а у графа G^*_{54} – нет. Покажем, что все эти графы отвечают и условию 3. Пусть G^* – минимальное вершинное 1-расширение G_5. Граф G_5 не имеет изолированных вершин, а одна его вершина – степени 3, следовательно, степень любой вершины графа G^* должна быть по лемме 2.1.1 не ниже 2, и по лемме 2.1.2 как минимум две вершины должны иметь степень не ниже 3. Граф G_5 не удовлетворяет условию теоремы 2.1.11, поэтому граф G^* не может отличаться от графа G на три дополнительных ребра. Дадим прямое доказательство этому утверждению без использования упомянутой теоремы.

Пусть G^* отличается от графа G_5 на 3 дополнительных ребра. Из вышесказанного получается, что единственно возможным вектором степеней графа G^* может быть вектор (3,3,2,2,2,2). Предположим, что вершины со степенью 3 смежны. Тогда максимальный подграф, получающийся при удалении из G^* одной из этих вершин, не будет содержать ни одной вершины степени выше 2, и поэтому вложение в него графа G_5 невозможно. Итак, вершины степени 3 в графе G^* несмежны. Каждая из них смежна с тремя вершинами степени 2. Всего таких вершин четыре и, значит, существуют две вершины степени 2, каждая из которых является смежной с обеими вершинами степени 3. Тогда максимальный подграф, получающийся из G^* удалением одной из этих вершин, не будет содержать вершин степени выше 2, и, следовательно, граф G_5 в него вкладываться не будет.

Таким образом, не существует графа G^* с 7 ребрами, который бы являлся минимальным вершинным 1-расширением графа G_5, и, следовательно, графы G^*_{51}, G^*_{52}, G^*_{53} и G^*_{54} являются минимальными вершинными 1-расширениями графа G_5.□

ТЕОРЕМА 2.3.4. *Граф* $G_{0,3}$ *из теоремы* 2.3.1 *является минимальным среди всех графов, содержащих одну или более изолированных вершин, имеющих неизоморфные минимальные вершинные* 1*-расширения, в том смысле, что не существует графа из указанного класса с меньшим числом вершин или меньшим числом ребер, обладающего рассматриваемым свойством.*

Доказательство. Как мы уже видели, любой граф с числом вершин меньшим 5 имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение.

Истинность второго утверждения теоремы о том, что не существует графа с одним ребром и обладающего указанным свойством, очевидна.□

ТЕОРЕМА 2.3.5. *Граф* $G_{2,3}$ *из теоремы* 2.3.2 *является минимальным среди всех несвязных графов без изолированных вершин, имеющих неизоморфные минимальные вершинные* 1*-расширения, в том смысле, что не существует графа из указанного класса с меньшим числом вершин или меньшим числом ребер, обладающего рассматриваемым свойством.*

Доказательство. Как мы уже видели, любой граф с числом вершин меньшим 5 имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение.

Поскольку вышеупомянутый граф является единственным с точностью до изоморфизма несвязным графом без изолированных вершин с числом ребер меньшим 3, то теорема доказана. □

ТЕОРЕМА 2.3.6. *Граф* G_5 *из теоремы* 2.3.3 *является минимальным среди всех связных графов, имеющих неизоморфные минимальные вершинные* 1*-расширения, в том смысле, что не существует связного графа с меньшим числом вершин или меньшим числом ребер, обладающего указанным свойством.*

Доказательство. Как мы уже видели, любой граф с числом вершин меньшим 5 имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение. Так как граф G_5 является деревом, то не существует связного 5-вершинного графа с меньшим числом ребер, чем у G_5, однако следует рассмотреть другие 5-вершинные деревья, которые имеют такое же число ребер, как и G_5. Это цепь $\boldsymbol{P}_5$ и звезда $\boldsymbol{K}_{1,4}$.

По теореме 2.1.4 цепь P_5 имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение, которым является цикл C_6.

Звезда $K_{1,4}$ также имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение, которым является ее тривиальное 1-расширение. В этом можно убедиться непосредственно, а общее доказательство для любых звезд можно посмотреть в параграфе 2.6.□

Следствие. *Граф* $G_{0,3}$ *из теоремы* 2.3.1 *является минимальным среди всех графов, имеющих неизоморфные минимальные вершинные* 1*-расширения, в том смысле, что не существует графа с меньшим числом вершин или меньшим числом ребер, обладающего неизоморфными минимальными вершинными* 1*-расширениями*.

Заметим, что вершинные 1-расширения дерева из теоремы 2.3.3, изображенные на рис. 2.3.3, *б* и 2.3.3, *г*, являются Т-неприводимыми. По каталогу Т-неприводимых 1-расширений С. Г. Курносовой (Курносова, 2003) можно убедиться, что это минимальный по числу вершин и ребер связный граф, имеющий неизоморфные Т-неприводимые 1-расширения. А на рис. 2.3.4, *а* показан минимальный по числу вершин и ребер граф $K_2 \cup O_1$, имеющий неизоморфные Т-неприводимые 1-расширения. Легко видеть, что 1-расширение, изображенное на рис. 2.3.4, *в*, также является минимальным вершинным 1-расширением с 1 дополнительным ребром.

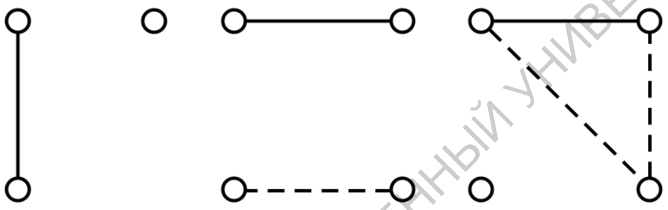


Рис. 2.3.4. Граф и все его Т-неприводимые 1-расширения

2.4. Циклы

В работе (Hayes, 1976) Хейз предложил процедуру для построения минимального вершинного k-расширения цикла. В работе (Harary, Hayes, 1996) Харари и Хейз поставили вопрос о существовании минимальных вершинных 1-расширений, неизоморфных минимальным вершинным 1-расширениям, предложенным ранее Хейзом. Расширениям циклов посвящено достаточно много работ: (Paoli et al., 1984, 1986 ; Mukhopadhyaya, Sinha, 1992 ; Sung et al., 1998, 2000, 2001 ; Wang et al., 1998, 2000 ; Hung et al., 1999, 2000, 2001 ; Абросимов, 2000, *а*, 2001, *а*; Tsai, Li, 2007 ; Hsu, Lin, 2009).

В этом параграфе мы рассмотрим основные схемы построения минимальных вершинных 1-расширений циклов, а затем обсудим негамильтоновы минимальные вершинные 1-расширения циклов.

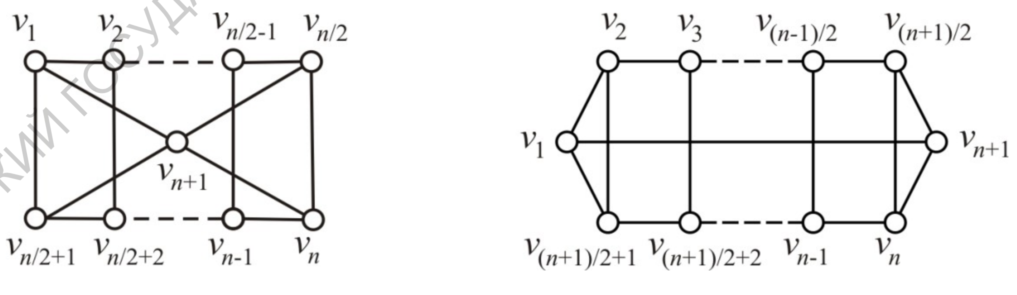
ТЕОРЕМА 2.4.1 (Hayes, 1976). *Минимальное вершинное 1-расширение n-вершинного цикла C_n содержит не менее $\left\lceil \frac{n+4}{2} \right\rceil$ дополнительных ребер.*

Доказательство. Пусть $G^* = (V^*, \alpha^*)$ является минимальным вершинным 1-расширением n-вершинного цикла C_n. Согласно лемме 2.1.4 степень каждой вершины в G^* не ниже 3, а при четном значении n степень одной из вершин в силу теоремы о необходимой четности суммы степеней вершин будет строго больше 3. Таким образом, можно записать

$$|\alpha^*| \geq \begin{cases} \frac{3(n+1)}{2} = \left\lceil \frac{3(n+1)+1}{2} \right\rceil, & \text{если } n - \text{ нечетно}, \\ \frac{3n+4}{2}, & \text{если } n - \text{ четно}. \end{cases}$$

Поскольку число ребер n-вершинного цикла равно n, то, объединяя оба случая, получаем требуемую оценку снизу для числа дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения цикла.□

ТЕОРЕМА 2.4.2 (Hayes, 1976). *Гамильтоновы графы, изображенные на рис.* 2.4.1, *представляют собой минимальные вершинные 1-расширения n-вершинного цикла при n четном* (*рис.* 2.4.1, *а*) *и n нечетном* (*рис.* 2.4.1, *б*).



а *б*

Рис. 2.4.1. МВ-1Р циклов

Доказательство. Обозначим n-вершинный граф, построенный по рассматриваемым схемам, через $H(n)$. В графе, построенном по схеме, представленной на рис. 2.4.1, *а*, одна вершина имеет степень 4, а все остальные – степень 3. В графе, построенном по схеме, представленной на рис. 2.4.1, *б*, все вершины имеют степень 3. Таким образом, число дополнительных ребер рассматриваемых графов в точности равно $\left\lceil \frac{n+4}{2} \right\rceil$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что изображенные на рисунке графы являются вершинными 1-расширениями соответствующих циклов.□

Следствие 1. *Минимальное вершинное* 1-*расширение* n-*вершинного цикла имеет вектор степеней* (4, 3, 3, …, 3) *при четном* n *и* (3, …, 3), *при нечетном* n.

Следствие 2. *Минимальное вершинное* 1-*расширение* n-*вершинного цикла* C_n *содержит в точности* $\left\lceil \frac{3n+4}{2} \right\rceil$ *ребер или* $\left\lceil \frac{n+4}{2} \right\rceil$ *дополнительных ребер*.

На рис. 2.4.2, *а*–*е* представлены минимальные вершинные 1-расширения циклов, построенные по схемам Хейза.

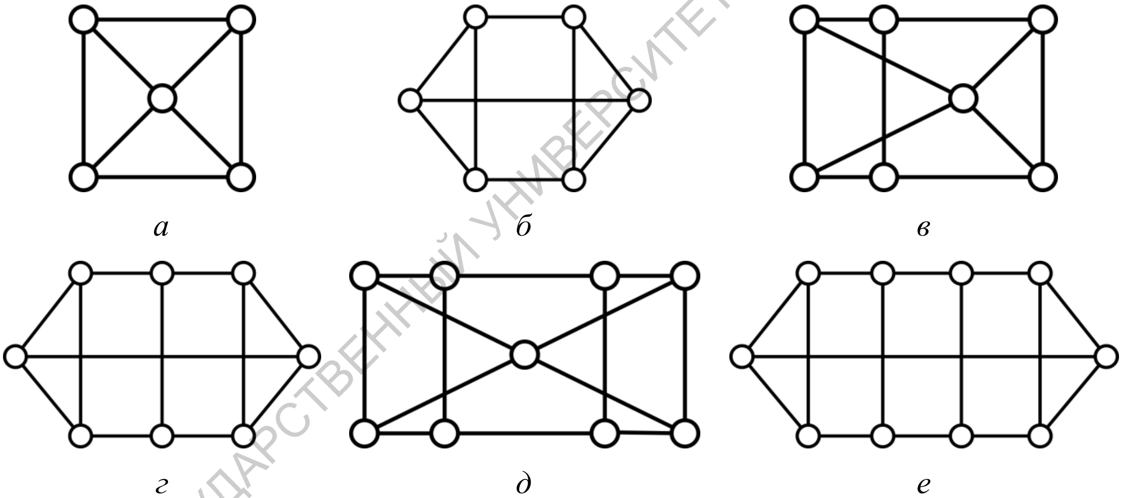


Рис. 2.4.2. МВ-1Р циклов C_4 (*а*), C_5 (*б*), C_6 (*в*), C_7 (*г*), C_8 (*д*) и C_9 (*е*)

Задача поиска минимальных вершинных k-расширений циклов вызвала большой интерес, обусловленный практической значимостью, и был предложен ряд альтернативных схем их построения. Граф называется k-*вершинно-гамильтоновым*[1], если он является гамильтоновым после удаления любых k вершин и инциндентных им ребер. Граф называется k-*реберно-гамильтоновым*[2], если он является гамильтоновым после удаления любых k ребер. Граф называется k-гамильтоновым[3], если он является

[1] k-vertex-hamiltonian.
[2] k-edge-hamiltonian.
[3] k-hamiltonian.

гамильтоновым после удаления любых k вершин и/или ребер. (Вершинно-, реберно-) k-гамильтонов граф называется *оптимальным*, если он имеет минимально возможное число ребер среди всех (вершинно-, реберно-) k-гамильтоновых графов с тем же числом вершин. Очевидно, что следующие пары понятий являются синонимами:

k-вершинно-гамильтонов – вершинное k-расширение цикла;

оптимальный k-вершинно-гамильтонов – минимальное вершинное k-расширение цикла;

k-реберно-гамильтонов – реберное k-расширение цикла;

оптимальный k-реберно-гамильтонов – минимальное реберное k-расширение цикла;

k-гамильтонов – комбинированное k-расширение цикла;

оптимальный k-гамильтонов – минимальное комбинированное k-расширение цикла.

В этом параграфе мы рассмотрим вершинные k-расширения циклов, а реберные будут рассмотрены в параграфе 3.4 следующей главы.

Махопадхья и Синха в работе (Mukhopadhyaya, Sinha, 1992) предложили собственную схему построения 1-гамильтоновых графов $M(k)$, то есть минимальных вершинных и реберных 1-расширений циклов. Пусть k и t натуральные числа, причем $k \geq 4$. Определим семейство графов $B(i, t)$ (рис. 2.4.3):

$$V(B(i,t)) = \{x^r_{i,j} : 1 \leq j \leq t\} \cup \{x^l_{i,j} : 1 \leq j \leq t\} \cup \{y_i, z_i\},$$

$$\alpha(B(i,t)) = \{(x^l_{i,j}, x^l_{i,j-1}) : 1 < j \leq t\} \cup \{(x^r_{i,j}, x^r_{i,j+1}) : 1 \leq j \leq t-1\} \cup$$

$$\cup \{(x^l_{i,j}, x^r_{i,j}) : 1 \leq j \leq t\} \cup \{(x^l_{i,1}, y_i), (y_i, z_i), (y_i, x^r_{i,1})\}.$$

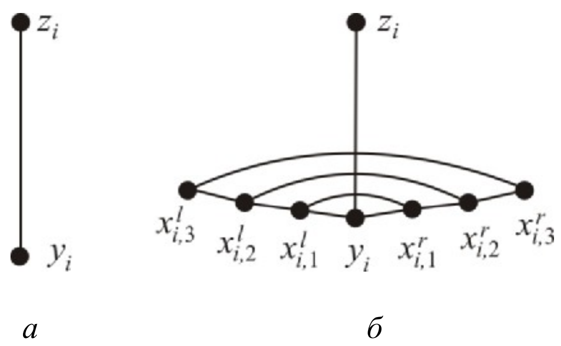


Рис. 2.4.3. Представители семейства графов $B(i, t)$: $B(i, 0)$ (*а*), $B(i, 3)$ (*б*)

Граф $M(k)$ имеет k вершин и для четного k строится следующим образом (при $t = 0$ для удобства будем писать $y_i = x^l_{i,0} = x^r_{i,0}$).

1. При $k = 6t + 4$ – граф $M(k)$ строится из трех $B(i, t)$ для $i = 0, 1, 2$ отождествлением вершин z_0, z_1, z_2 в вершину z и добавлением ребер $\{x^l_{0,t}, x^r_{1,t}\}$, $\{x^l_{1,t}, x^r_{2,t}\}$, $\{x^l_{2,t}, x^r_{0,t}\}$.
2. При $k = 6t + 6$ – граф $M(k)$ строится из $B(0, t + 1)$, $B(1, t)$ и $B(2, t)$ отождествлением вершин z_0, z_1, z_2 в вершину z и добавлением ребер $\{x^l_{0,t+1}, x^r_{1,t}\}, \{x^l_{1,t}, x^r_{2,t}\}, \{x^l_{2,t}, x^r_{0,t+1}\}$.

3. При $k = 6t + 8$ – граф $M(k)$ строится из $B(0, t + 1)$, $B(1, t + 1)$ и $B(2, t)$ отождествлением вершин z_0, z_1, z_2 в вершину z и добавлением ребер $\{x^l_{0,t+1}, x^r_{1,t+1}\}, \{x^l_{1,t+1}, x^r_{2,t}\}, \{x^l_{2,t}, x^r_{0,t+1}\}$.

Граф $M(k)$ для нечетного $k \geq 5$ строится следующим образом.

1. При $k = 8t + 5$ – граф $M(k)$ строится из четырех $B(i, t)$ для $i = 0, 1, 2, 3$ отождествлением вершин z_0, z_1, z_2 и z_3 в вершину z и добавлением ребер $\{x^l_{0,t}, x^r_{1,t}\}, \{x^l_{1,t}, x^r_{2,t}\}, \{x^l_{2,t}, x^r_{3,t}\}, \{x^l_{3,t}, x^r_{0,t}\}$.
2. При $k = 8t + 7$ – граф $M(k)$ строится из трех $B(i, t)$ для $i = 1, 2, 3$ и $B(0, t + 1)$ отождествлением вершин z_0, z_1, z_2 и z_3 в вершину z и добавлением ребер $\{x^l_{0,t+1}, x^r_{1,t}\}, \{x^l_{1,t}, x^r_{2,t}\}, \{x^l_{2,t}, x^r_{3,t}\}, \{x^l_{3,t}, x^r_{0,t+1}\}$.
3. При $k = 8t + 9$ – граф $M(k)$ строится из двух $B(i, t + 1)$ для $i = 0, 1$ и двух $B(j, t)$ для $j = 2, 3$ отождествлением вершин z_0, z_1, z_2 и z_3 в вершину z и добавлением ребер $\{x^l_{0,t+1}, x^r_{1,t+1}\}$, $\{x^l_{1,t+1}, x^r_{2,t}\}$, $\{x^l_{2,t}, x^r_{3,t}\}$, $\{x^l_{3,t}, x^r_{0,t+1}\}$.
4. При $k = 8t + 11$ – граф $M(k)$ строится из трех $B(i, t + 1)$ для $i = 0, 1, 2$ и $B(3, t)$ отождествлением вершин z_0, z_1, z_2 и z_3 в вершину z и добавлением ребер $\{x^l_{0,t+1}, x^r_{1,t+1}\}, \{x^l_{1,t+1}, x^r_{2,t+1}\}, \{x^l_{2,t+1}, x^r_{3,t}\}, \{x^l_{3,t}, x^r_{0,t+1}\}$.

ТЕОРЕМА 2.4.3 (Mukhopadhyaya, Sinha, 1992). *Графы $M(k)$ являются минимальными вершинными и реберными 1-расширениями соответствующего цикла при $k \geq 4$.*

На рис. 2.4.4 и 2.4.5 представлены минимальные вершинные 1-расширения циклов, построенные по схемам Махопадхья и Синха.

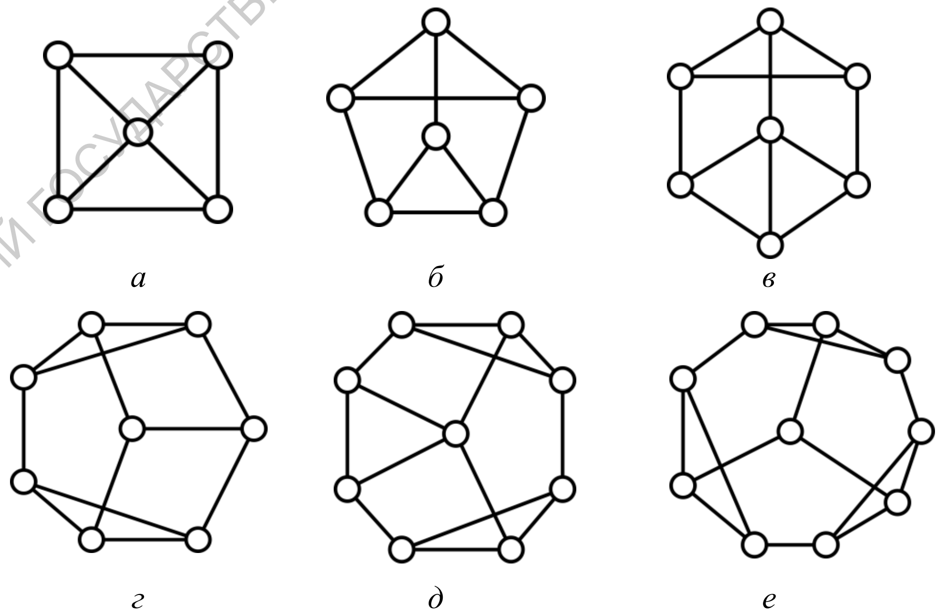


Рис. 2.4.4. МВ-1Р циклов C_4 (*а*), C_5 (*б*), C_6 (*в*), C_7 (*г*), C_8 (*д*) и C_9 (*е*)

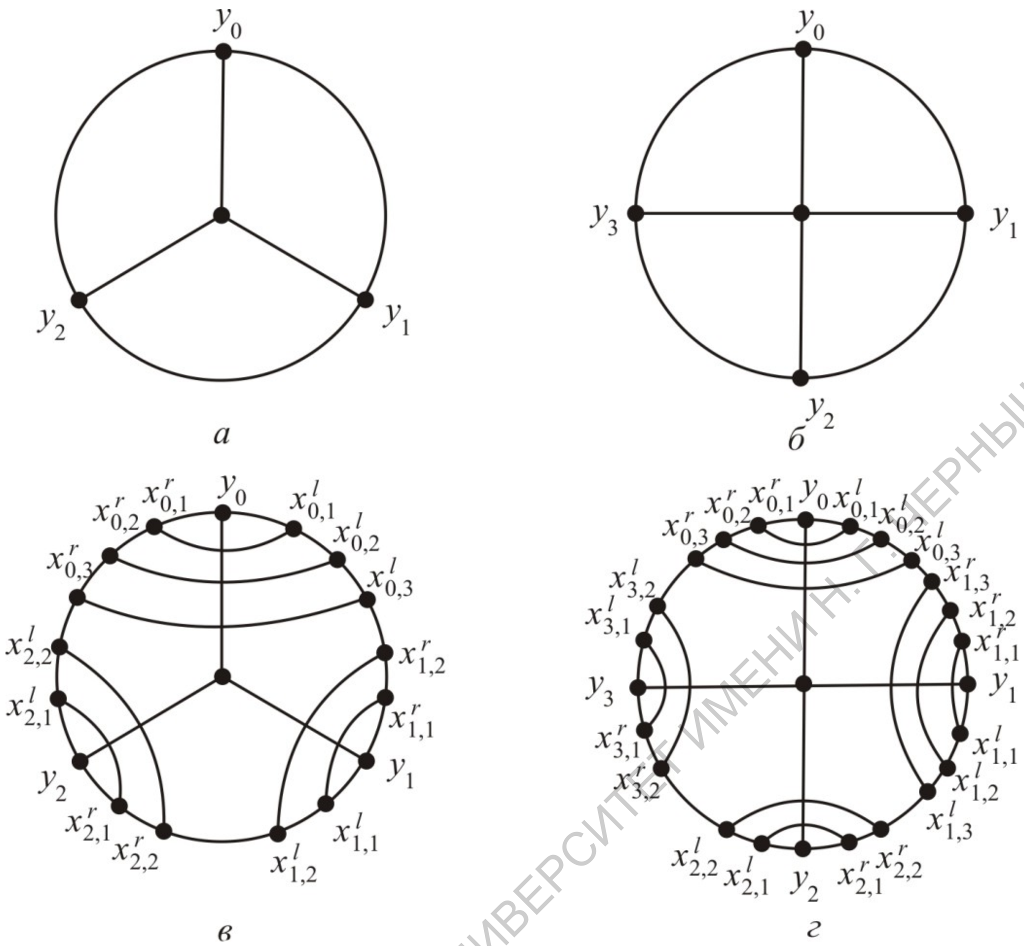


Рис. 2.4.5. Графы $M(4)$ (*а*), $M(5)$ (*б*), $M(18)$ (*в*), $M(25)$ (*г*)

Можно заметить, что графы $M(4)$, $M(5)$, $M(6)$ и $M(8)$ изоморфны минимальным вершинным 1-расширениям, построенным по схемам Хейза. А при больших значениях справедлива

ТЕОРЕМА 2.4.4. *Графы* $M(k)$ *и* $H(k)$ *при* $k = 7$ *и* $k > 8$ *неизоморфны.*

Доказательство. Для четного $n = 2k$ мы имеем графы $H(2k)$ и $M(2k)$. В графе $H(2k)$ при $k > 2$ содержится ровно два 3-вершинных цикла, а в графе $M(2k)$ при $k > 4$ – не менее трех.

Рассмотрим нечетное $n = 2k + 1$. Видно, что в графе $H(2k + 1)$ вершины, смежные с вершиной степени 4, разбиваются на пары смежных вершин, а в графе $M(2k + 1)$ такое возможно лишь при $k = 2$.□

Ванг, Хунг и Хсу (Wang et al., 1998) предложили еще одно семейство $W(k)$ минимальных вершинных и реберных 1-расширений циклов при натуральных значениях k. Семейство $W(k)$ строится из $2k + 1$ графов $B(i, k)$ для $0 \le i \le 2k$ соединением вершин z_i по циклу $<z_0, z_1, \ldots, z_{2k}, z_0>$ и добавлением ребер $\{x^l_{2k,k}, x^r_{0,k}\}$ и $\{x^l_{i,k}, x^r_{i+1,k}\}$ для всех $0 \le i \le 2k - 1$.

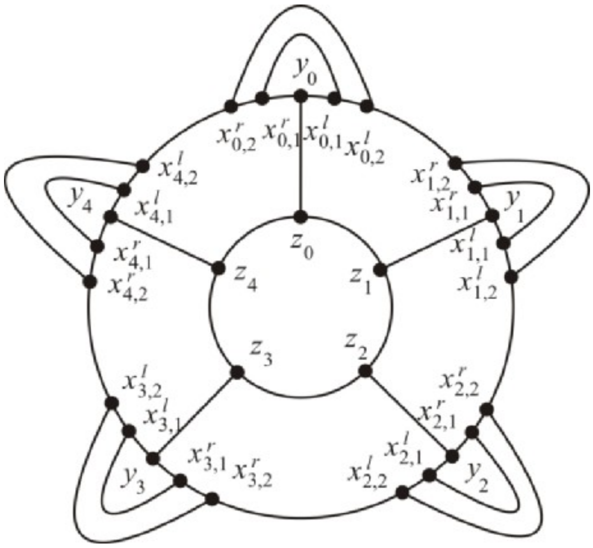


Рис. 2.4.6. Граф $W(2)$

На рис. 2.4.6 показана схема построения графов семейства $W(k)$ на примере $W(2)$. Легко видеть, что граф $W(k)$ кубический, планарный и имеет $4k^2 + 6k + 2$ вершины.

ТЕОРЕМА 2.4.5 (Ванг, Хунг и Хсу, 1998). *Графы $W(k)$ являются минимальными вершинными и реберными 1-расширениями соответствующего цикла при $k \geq 1$.*

Таким образом, семейство $W(k)$ дает минимальные вершинные 1-расширения цикла C_n при $n = 11, 29, 55, 89, \ldots$

Последнее семейство $CT(s)$, которое мы рассмотрим, называется «*рождественские елки*»[4]. Это семейство предложили Хунг, Хсу и Санг (Hung et al., 1999).

Определим сначала вспомогательное семейство $ST(s) = (V, \alpha, u, l, r)$, где V множество вершин, α – множество ребер, $u \in V$ – корневая вершина, $l \in V$ – левый узел, $r \in V$ – правый узел и $s \geq 2$:

1) $ST(2)$ – полный граф K_3 с вершинами u, l, r;
2) при $s \geq 2$ $ST(s)$ строится из корня u и двух копий $ST(s-1)$ в качестве левого и правого поддеревьев: $ST_l(s-1) = (V_1, \alpha_1, u_1, l_1, r_1)$ и $ST_r(s-1) = (V_2, \alpha_2, u_2, l_2, r_2)$. $ST(s) = (V, \alpha, u, l, r)$, где $V = V_1 \cup V_2 \cup \{u\}$, $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \{\{u,u_1\},\{u,u_2\},\{r_1,l_2\}\}$, $l = l_1$, $r = r_2$.

На рис. 2.4.7 изображены $ST(3)$ и $ST(4)$. Легко видеть, что семейство $ST(s)$ можно описать с помощью полных бинарных деревьев, у которых определенным образом соединены листья. Количество вершин в графе $ST(s)$ равно $2^s - 1$.

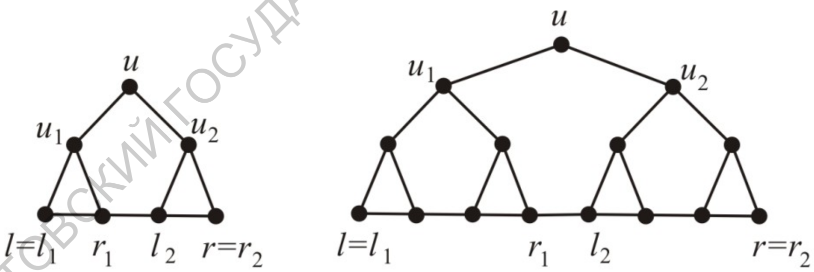


Рис. 2.4.7. Графы $ST(3)$ и $ST(4)$

Граф семейства $CT(s)$ строится из графа $ST_l(s) = (V_1, \alpha_1, u_1, l_1, r_1)$ и $ST_r(s+1) = (V_2, \alpha_2, u_2, l_2, r_2)$. $CT(s) = (V, \alpha)$, где $V = V_1 \cup V_2$, $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \{\{u_1,u_2\},\{l_1,r_2\},\{r_1,l_2\}\}$. Количество вершин в графе $CT(s)$ равно

[4] Christmas tree.

$2^s - 1 + 2^{s+1} - 1 = 3{\cdot}2^s - 2$. Граф $CT(2)$ имеет 10 вершин и изоморфен графу$M(10)$. На рис. 2.4.8 приведен граф $CT(3)$.

ТЕОРЕМА 2.4.6 (Хунг, Хсу и Санг, 1999). *Графы $CT(k)$ являются минимальными вершинными и реберными 1-расширениями соответствующего цикла при $k \geq 1$.*

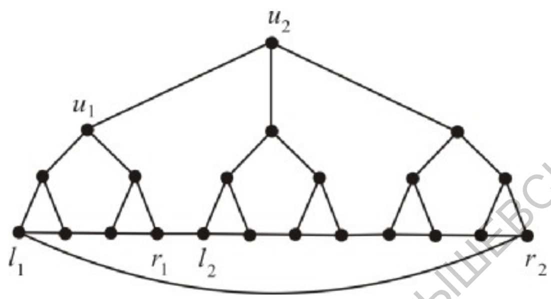
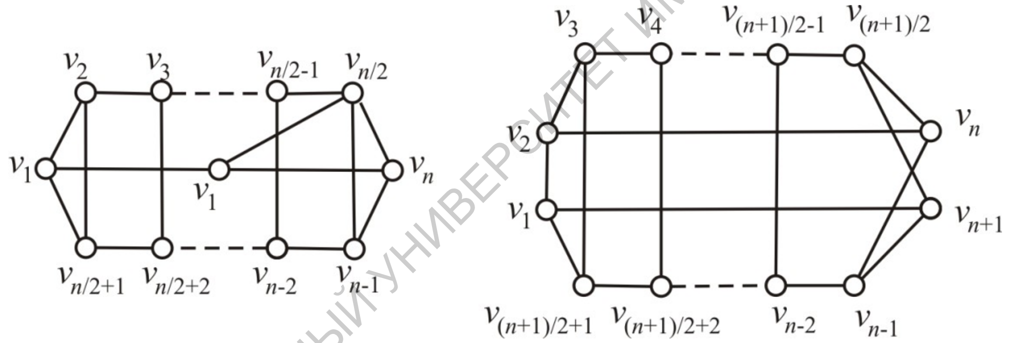


Рис. 2.4.8. Граф CT(3)

Таким образом, семейство $CT(k)$ дает минимальные вершинные 1-расширения цикла C_n при $n = 9, 21, 45, 93, \ldots$

ТЕОРЕМА 2.4.7 (Абросимов, 2000, *а*). *Гамильтоновы графы, изображенные на рис.* 2.4.9, *представляют собой минимальные вершинные* 1-*расширения n-вершинного* ($n > 3$) *цикла при n четном* (*рис.* 2.4.9, *а*) *и n нечетном* (*рис.* 2.4.9, *б*).



а *б*

Рис. 2.4.9. МВ-1Р циклов

Доказательство. Обозначим через $A(n)$ n-вершинный граф, построенный по рассматриваемым схемам. Покажем, что графы $A(n)$ являются расширениями соответствующих циклов. Достаточно проверить, что для любой вершины v_i существует цикл $v_{i_1}, v_{i_2},$ ¼$, v_{i_n}, v_{i_1}$ такой, что v_i в него не входит.

Рассмотрим случай, когда n – четно.

Изучим удаление вершин $v_1,\ldots,v_{n/2}$. При удалении v_1, v_n или v_{n+1} циклы очевидны. Для v_i, $1 < i < n/2 + 1$ цикл получается обходом графа «змейкой», начиная с v_1 и заканчивая v_{n+1}:

- $v_1v_2v_{n/2+1}v_{n/2+2}v_3\ldots v_{i-1}v_{n/2+i-1}v_{n/2+i}v_{n/2+i+1}v_{i+1}\ldots v_{n/2}v_{n-1}v_nv_{n+1}$, когда i и $n/2$ нечетные;
- $v_1v_2v_{n/2+1}v_{n/2+2}v_3\ldots v_{i-1}v_{n/2+i-1}v_{n/2+i}v_{n/2+i+1}v_{i+1}\ldots v_{n-1}v_{n/2}v_nv_{n+1}$, когда i нечетное, $n/2$ – четное;

- $v_1v_{n/2+1}\ v_2v_3v_{n/2+2}\ldots v_{i-1}v_{n/2+i-1}v_{n/2+i}v_{n/2+i+1}v_{i+1}\ldots v_{n/2}v_{n-1}v_nv_{n+1}$, когда i и $n/2$ четные;
- $v_1v_{n/2+1}\ v_2v_3v_{n/2+2}\ldots v_{i-1}v_{n/2+i-1}v_{n/2+i}v_{n/2+i+1}v_{i+1}\ldots v_{n-1}v_{n/2}v_nv_{n+1}$, когда i четное, $n/2$ – нечетное.

Аналогично строятся циклы для вершин v_i, $n/2 < i < n$.

Рассмотрим случай, когда n – нечетно. Пусть удалена вершина v_i. Начинаем строить цикл с вершины v_1 или v_2, дальше идем «змейкой» по всем вершинам графа, обходя v_i, до v_{n-1} или $v_{(n+1)/2}$.

Оканчивается цикл одной из следующих цепочек:

- $v_{n-1}v_nv_{(n+1)/2}v_{n+1}v_1$, если начинали из v_1 и дошли до v_{n-1},
- $v_{n-1}v_{n+1}v_{(n+1)/2}v_n\ v_2$, если начинали из v_2 и дошли до v_{n-1},
- $v_{(n+1)/2}v_n\ v_{n-1}v_{n+1}v_1$, если начинали из v_1 и дошли до $v_{(n+1)/2}$,
- $v_{(n+1)/2}v_{n+1}v_{n-1}v_nv_2$, если начинали из v_2 и дошли до $v_{(n+1)/2}$.

Рассматриваемые графы имеют такое же количество ребер, что и соответствующие графы из теоремы 2.4.2, следовательно, они также являются минимальными вершинными 1-расширениями.

Видно, что при четном n предлагаемое минимальное вершинное 1-расширение является гамильтоновым графом.

Для случая, когда n нечетно, минимальное вершинное 1-расширение также является гамильтоновым графом. В самом деле, начнем строить цикл с вершины v_1 и пойдем змейкой: $v_1, v_{(n+1)/2+1}, v_3, v_4, v_{(n+1)/2+2}, \ldots$, окончанием цикла будет либо $v_{(n+1)/2}, v_{n+1}, v_{n-1}, v_n, v_2, v_1$, либо $v_{n-1}, v_{n+1}, v_{(n+1)/2}, v_n, v_2, v_1$.□

Заметим, что при $n \leq 5$ предлагаемые построения изоморфны построениям Хейза. На рис. 2.4.10 изображены некоторые минимальные вершинные 1-расширения циклов, построенные по описанной схеме.

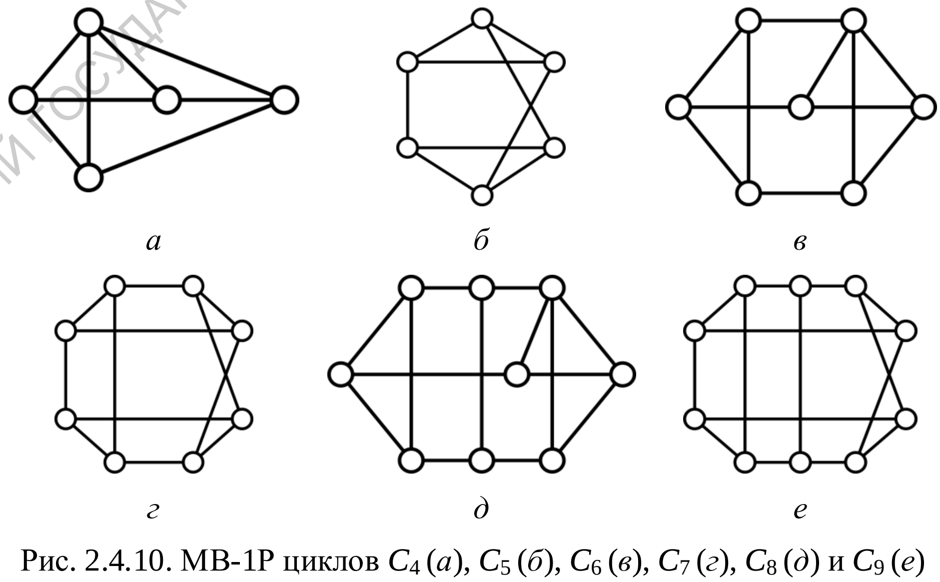


Рис. 2.4.10. МВ-1Р циклов C_4 (*а*), C_5 (*б*), C_6 (*в*), C_7 (*г*), C_8 (*д*) и C_9 (*е*)

ТЕОРЕМА 2.4.8. *Графы $A(n)$ и $H(n)$ при $n > 6$ неизоморфны.*

Доказательство. Для нечетного $n = 2k + 1$ имеем графы $A(2k + 1)$ и $H(2k + 1)$. Видно, что единственная вершина степени 4 в графе $A(2k + 1)$ является вершиной двух треугольников с общей стороной: $v_{n/2}v_{n+1}v_n$ и $v_{n/2}v_{n-1}v_n$, а в графе $H(2k + 1)$ такое возможно лишь при $n = 5$.

Для четного $n = 2k$ имеем графы $A(2k)$ и $H(2k)$. Видно, что граф $H(2k)$ содержит два цикла длины 3: $v_{n/2+1}v_1v_2$ и $v_nv_{n+1}v_{(n+1)/2}$, что возможно в графе $A(2k)$ лишь при $n = 4$ и $n = 6$.□

ТЕОРЕМА 2.4.9. *Графы $A(n)$ и $M(n)$ при $n > 7$ неизоморфны.*

Доказательство. Для нечетного $n = 2k + 1$ имеем графы $A(2k + 1)$ и $H(2k + 1)$. Видно, что единственная вершина степени 4 в графе $A(2k + 1)$ является вершиной двух треугольников с общей стороной: $v_{n/2}v_{n+1}v_n$ и $v_{n/2}v_{n-1}v_n$, а в графе $M(2k + 1)$ такое возможно лишь при $n = 5$ и $n = 7$.

Для четного $n = 2k$ имеем графы $A(2k)$ и $M(2k)$. Видно, что граф $M(2k)$ содержит циклы длины 3, а граф $A(2k)$ при $n >6$ циклов длины 3 не содержит.□

ТЕОРЕМА 2.4.10. *Любой цикл C_n при $n > 5$ имеет, по крайней мере, два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения.*

Доказательство. Как следует из теорем о неизоморфности графов семейств $A(n)$, $H(n)$ и $M(n)$, циклы C_6 и C_7 имеют, по крайней мере, по два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения – графы $H(7)$ и $A(7)$ или изоморфный $M(7)$ и графы $A(8)$ и $H(8)$ или изоморфный ему $M(8)$. А при $n > 8$ цикл C_n имеет, по крайней мере, три неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения – графы $A(n + 1)$, $H(n + 1)$ и $M(n + 1)$.□

Таким образом, получен принципиальный ответ на вопрос, касающийся единственности предложенных Хейзом минимальных вершинных 1-расширений для цикла. Следствие 1 из теоремы 2.4.2 позволяет использовать алгоритм 2.1.2 для построения всех минимальных вершинных 1-расширений n-вершинного цикла. Это особенно актуально для циклов с нечетным числом вершин, так как известны алгоритмы, которые позволяют относительно эффективно строить кубические графы (Brinkmann, 1996 ; Brinkmann, 2011). Следует отметить, что количество неизоморфных минимальных вершинных 1-расширений цикла возрастает при росте n. Так, например, если циклы C_6 и C_7 имеют лишь по два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения, то уже для 8-вершинного цикла их известно 10. Существенно возрастает и число графов, перебираемых в алгоритме 2.1.2 для поиска минимального вершинного 1-расширения. Так, при нечетном n минимальным вершинным 1-расширением n-вершинного цикла является кубический граф, то есть однородный граф порядка 3. Согласно Риду (Read, 1958) число M всех помеченных кубических графов с $2n$ вершинами выражается следующей асимптотической формулой:

$$M \sim \frac{(6n)!}{e^2(3n)!3^{2n}2^{5n}}.$$

Точное число кубических ($2n$)-вершинных графов для $n = 2,\ldots,15$ составляет: 1, 2, 6, 21, 94, 540, 4207, 42110, 516344, 7373924, 118573592, 2103205738, 40634185402, 847871397424[5]. Так как минимальное вершинное 1-расширение будет связным графом, то интерес представляют только связные кубические графы. Их число для $n = 2,\ldots,15$ составляет: 1, 2, 5, 19, 85, 509, 4060, 41301, 510489, 7319447, 117940535, 2094480864, 40497138011, 845480228069[6]. Заметим, что известны алгоритмы (Brinkmann, 1996; Brinkmann, 2011), которые позволяют на персональном компьютере построить все такие кубические графы. Для векторов степеней вида (4, 3, …, 3) подобные алгоритмы и данные не известны. На основе вычислительного эксперимента начало последовательности для числа неизоморфных реализаций вектора степеней (4, 3, …, 3) имеет вид: 1, 4, 27, 208, 1958, 21879 (Абросимов, Кузнецов, 2012).

Минимальные вершинные 1-расширения циклов, построенные в теоремах 2.4.2, 2.4.3, 2.4.5, 2.4.6 и 2.4.7, являются гамильтоновыми. Возникает вопрос о существовании у циклов негамильтоновых минимальных вершинных 1-расширений. Этот вопрос тесно связан с исследованиями гипогамильтоновых графов и кубических графов, то есть однородных графов порядка 3. Дадим два определения (см. (Aldred et al., 1997)).

Граф, каждый максимальный подграф которого является гамильтоновым, называется *гипоциклическим*. Негамильтонов граф, каждый максимальный подграф которого является гамильтоновым, называется *гипогамильтоновым*.

Очевидно, что любое минимальное вершинное 1-расширение цикла является гипоциклическим графом, а любое негамильтоново минимальное вершинное 1-расширение цикла будет гипогамильтоновым графом. Поскольку n-вершинный цикл содержится в любом n-вершинном гамильтоновом графе, то каждый гипогамильтонов и гипоциклический граф является вершинным 1-расширением цикла, не обязательно минимальным.

В работе (Абросимов, 2001, *а*) приводятся все минимальные вершинные 1-расширения для циклов с числом вершин до 11. В табл. 2.4.1 указано число неизоморфных минимальных вершинных 1-расширений для циклов с числом вершин до 17 (в 1999–2000 гг. автором были обработаны циклы с числом вершин до 13, последующие результаты получены в 2012 г. Н. А. Кузнецовым (Абросимов, Кузнецов, 2012)).

---

[5] См. последовательность A005638: http://oeis.org/A005638

[6] См. последовательность A002851: http://oeis.org/A002851

Таблица 2.4.1

МВ-1Р циклов с числом вершин до 17

n	Вектор степеней МВ-1Р C_n	Число реализаций вектора степеней МВ-1 C_n	Количество неизоморфных МВ-1 C_n
3	(3^4)	1	1
4	$(4,3^4)$	1	1
5	(3^6)	2	1
6	$(4,3^6)$	4	2
7	(3^8)	5	2
8	$(4,3^8)$	27	10
9	(3^{10})	19	7
10	$(4,3^{10})$	208	63
11	(3^{12})	85	27
12	$(4,3^{12})$	1958	603
13	(3^{14})	509	158
14	$(4,3^{14})$	21879	7203
15	(3^{16})	4060	1396
16	$(4,3^{16})$	–	104212
17	(3^{18})	41301	16069

Вопрос о существовании гипогамильтоновых графов был поставлен Сусельером в работе (Sousselier, 1963). Годин, Херц и Росси показали (Gaudin et al., 1964), что наименьшим гипогамильтоновым графом является граф Петерсена (см. рис. 2.4.11). Позднее исчерпывающий компьютерный поиск показал, что не существует гипогамильтоновых графов с числом вершин 11, 12 (Herz et al., 1967), 14 (Collier, Schmeichel, 1978) и 17 (Aldred et al., 1997). С другой стороны, были найдены гипогамильтоновы графы с числом вершин $n = 10$, 13, 15 и 16, а также для всех n ³ 18 (см. (Herz et al., 1967 ; Lindgren, 1967 ; Bondy, 1972 ; Chvatal, 1973 ; Thomassen, 1974, 1981; Doyen, van Diest, 1975 ; Holton, Sheehan, 1993). Более подробный обзор вопроса можно найти в книге Холтона и Шихана (Holton, Sheehan, 1993). Интересным представляется тот факт, что, несмотря на то что почти все кубические графы являются гамильтоновыми (см. (Robinson, Wormald, 1992)), для любого $n > 8$ существует $2n$-вершинный гипогамильтонов кубический граф. В книге (Басакер, Саати, 1973) можно найти доказательство утверждения, что граф Петерсена является гипогамильтоновым графом и не существует других гипогамильтоновых графов с числом вершин

$n \leq 10$. Оказалось, что граф Петерсена является минимальным вершинным 1-расширением 9-вершинного цикла. Следовательно, среди циклов с числом вершин меньшим 10 только 9-вершинный цикл имеет негамильтоново минимальное вершинное 1-расширение.

ТЕОРЕМА 2.4.11. *Граф Петерсена, изображенный на рис.* 2.4.11, *является негамильтоновым минимальным вершинным* 1-*расширением цикла* C_9.

Доказательство. Заметим, что граф Петерсена – кубический граф, следовательно, имеет такое же количество ребер, что и минимальное вершинное 1-расширение цикла C_9. Доказательство того, что граф Петерсена является гипогамильтоновым, то есть негамильтоновым расширением цикла, можно найти, например, в (Басакер, Саати, 1973).□

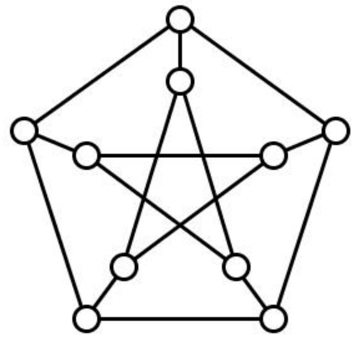


Рис. 2.4.11. Граф Петерсена

Замечание. На рис. 2.4.12 изображены все гипогамильтоновы графы с числом вершин до 18 по работе (Aldred et al., 1997). Заметим, что 13- и 15-вершинные гипогамильтоновы графы содержат по 3 вершины степени 4. Каждый из 16-вершинных гипогамильтоновых графов содержит не менее одной вершины степени 5. Таким образом, среди гипогамильтоновых графов с числом вершин до 18 только граф Петерсена является минимальным вершинным 1-расширением цикла. Для большего числа вершин доказано (Aldred et al., 1997) существование кубических гипогамильтоновых графов, а поскольку любой кубический гипогамильтонов граф является минимальным вершинным 1-расширением цикла, то это дает и ответ на вопрос о существовании негамильтоновых минимальных вершинных 1-расширений у циклов с числом вершин $n > 16$.

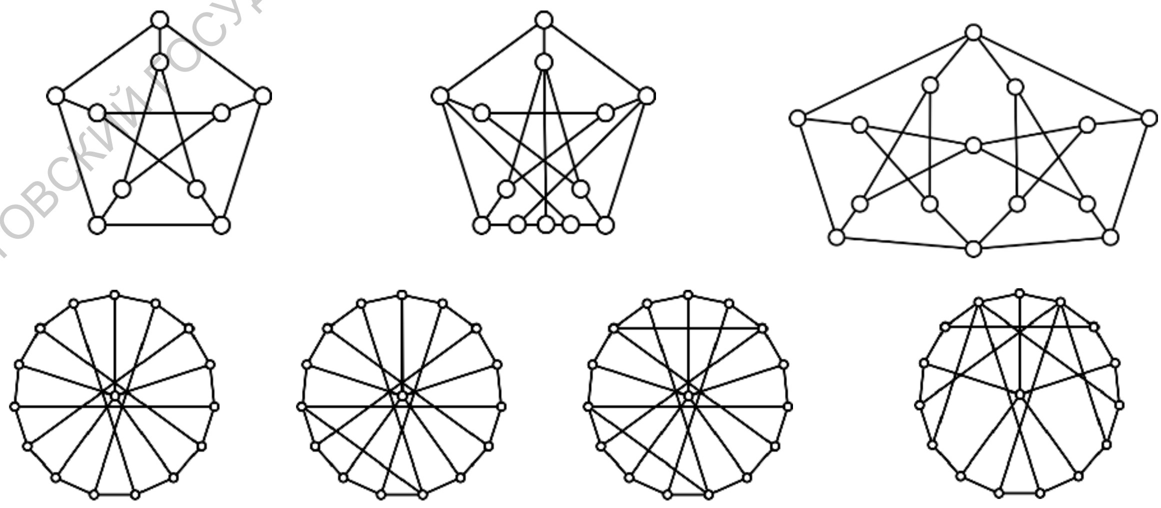


Рис. 2.4.12. Гипогамильтоновы графы

Алгоритм 2.1.2 можно использовать для поиска гипогамильтоновых минимальных вершинных 1-расширений. Однако при количестве вершин $n > 13$ перебор оказывается слишком большим (например, при нечетном n нужно перебрать все кубические графы, а их число очень велико (Read, 1958)). Следующее очевидное утверждение позволяет существенно увеличить эффективность поиска негамильтоновых минимальных вершинных 1-расширений с помощью соответствующей модификации алгоритма 2.1.2.

ТЕОРЕМА 2.4.12. *Минимальное вершинное* 1-*расширение цикла, содержащее* 3-*вершинный цикл, является гамильтоновым.*

Доказательство. Пусть граф G^* – минимальное вершинное 1-расширение цикла C_n, а вершины v_0, v_1, v_2 образуют в G^* 3-вершинный цикл. Не ограничивая общности, будем считать, что $d(v_1) = d(v_2) = 3$. Рассмотрим граф $G^* - v_0$. По условию этот граф содержит гамильтонов цикл. Поскольку степени смежных вершин v_1 и v_2 в графе $G^* - v_0$ равным двум, то они являются соседними вершинами гамильтонова цикла. Таким образом, гамильтонов цикл в графе $G^* - v_0$ может быть записан в виде $v_1, v_2, v_{i_3}, \ldots, v_{i_n}, v_1$. Тогда цикл $v_1, v_0, v_2, v_{i_4}, \ldots, v_{i_n}, v_1$ является гамильтоновым в графе G^*.□

Соответствующие изменения алгоритма 2.1.2 позволяют исследовать случай с числом вершин до 16. Однако для большего числа вершин модификация алгоритма 2.1.2 также перестает быть эффективной. В работах Вормальда (Wormald, 1978, 1981) даются асимптотические оценки числа кубических графов, содержащих цикл длины 3. На основании теоремы 2.4.12 число исключаемых из рассмотрения графов для цикла с четным числом вершин несколько выше, однако бóльшим является и объем пространства поиска.

2.5. Предполные графы

Назовем *предполным* граф вида $K_1 + G$, где G – произвольный граф. Поскольку O_1 изоморфен K_1, то можно записать предполный граф и как $O_1 + G$. В предполном графе есть хотя бы одна вершина, смежная со всеми остальными. Будем называть такие вершины *полными*. Предполным графом, очевидно, является и полный граф. В полном графе каждая вершина является полной. Заметим, что любой предполный граф является связным.

Пусть в предполном n-вершинном графе G есть p полных вершин. Тогда его можно представить в виде $K_p + G_{n-p}$, где G_{n-p} обозначает $(n - p)$-вершинный граф, причем такое представление единственно. Среди предполных графов имеются деревья – графы вида $O_1 + O_n$, причем только они. Графы такого вида называются *звездными*. В некоторых работах (например, (Кабанов, 1997)) эти графы называются *колесами*. Там же доказывается, что тривиальное 1-расширение звездного графа является его минимальным вершинным 1-расширением. Далее мы покажем, что при больших значениях k тривиальное k-расширение звездного графа не является его минимальным вершинным k-расширением (см. теорему 2.5.2). Следующее утверждение показывает, что количество предполных графов с заданным числом вершин достаточно велико.

Утверждение. *Число всех неизоморфных n-вершинных предполных графов равно числу всех неизоморфных $(n-1)$-вершинных графов.*

Доказательство. Предполный граф содержит хотя бы одну полную вершину. Рассмотрим все неизоморфные $(n-1)$-вершинные графы. Каждому $(n-1)$-вершинному графу G соответствует единственный с точностью до изоморфизма предполный граф, получающийся добавлением полной вершины: $K_1 + G$. И наоборот, каждому предполному n-вершинному графу $K_1 + G$ соответствует единственный с точностью до изоморфизма $(n-1)$-вершинный граф G, получающийся удалением любой полной вершины. В силу установленного взаимно однозначного соответствия между всеми $(n-1)$-вершинными графами и n-вершинными предполными графами получаем доказываемое утверждение. □

ЛЕММА 2.5.1. *Однородный n-вершинный граф порядка $n-2$, где n – чётное, является униграфом.*

Доказательство. Пусть G – однородный n-вершинный граф порядка $n-2$, а G' – дополнение графа G. Граф G' – однородный n-вершинный граф порядка 1, его вектор степеней имеет вид $(1,1,\ldots,1)$. Очевидно, что такой вектор степеней определяет униграф, следовательно, униграфом является и граф G.□

Обозначим однородный n-вершинный униграф порядка $n-2$ (n – четное) через $R_{n,n-2}$. Заметим, что граф $R_{n,n-2}$ можно представить как соединение $n/2$ вполне несвязных 2-вершинных графов: $O_2 + \ldots + O_2$. Граф $R_{4,2}$ представляет собой 4-вершинный цикл C_4, а граф $R_{6,4}$ и его дополнение представлены на рис. 2.5.1.

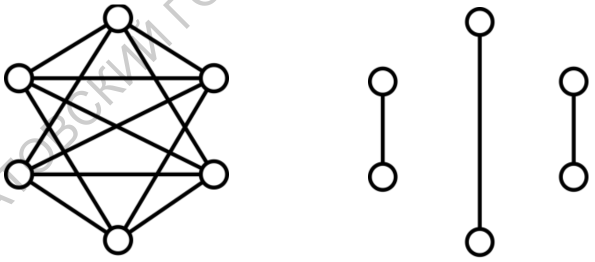


Рис. 2.5.1. Граф $R_{6,4}$ и его дополнение

Следствие 1. *Для* $n = 2k + 1$, $k \in N$, *вектор степеней* $(n-1, n-2,\ldots,n-2)$ *определяет n-вершинный униграф.*

Доказательство. Пусть G – некоторый граф с вектором степеней $(n-1, n-2,\ldots,n-2)$. Вершина v степени $n-1$ смежна со всеми остальными вершинами графа G. Граф $G - v$ является $(n-1)$-вершинным однородным графом $R_{n-1,n-3}$, причем униграфом по лемме 2.5.1, то есть $G = R_{n-1,n-3} + K_1$.

Поскольку единственным способом можно получить граф $R_{n-1,n-3}$ из G и единственным способом можно получить G из $R_{n-1,n-3}$, то G является униграфом.□

Следствие 2. *При $n \geq 2$ любой n-вершинный граф со степенным множеством $\{n-1, n-2\}$ является униграфом.*

Доказательство. Пусть G – граф со степенным множеством $\{n-1, n-2\}$. Рассуждаем аналогично предыдущему случаю. Пусть F – множество вершин из $V(G)$ степени $n-1$. Рассмотрим однородный граф $G-F$. По лемме 2.5.1 он является униграфом. Положим $p = n - |F|$. Поскольку единственным способом можно получить граф $R_{p,p-2}$ из G и единственным способом можно получить G из $R_{p,p-2}$, то G является униграфом.□

Два предыдущих следствия можно объединить в

Следствие 3. *Граф вида $G = R_{n-1,n-3} + K_p$ является униграфом.*

2.5.1. Минимальные вершинные 1-расширения

Результаты относительно минимальных вершинных 1- и k-расширений был впервые представлен автором в работе (Абросимов, 2000, *в*), а затем в работе (Абросимов, 2003). Независимо аналогичный результат был представлен в работе (Choudum, Sivagurunathan, 2000).

ТЕОРЕМА 2.5.1. *Относительно предполных графов справедливы следующие утверждения.*

1. *При четном n любой n-вершинный предполный граф $K_1 + G$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение – тривиальное, то есть*

$$(K_1 + G)^* = K_1 + (K_1 + G) = K_2 + G.$$

2. *При нечетном n:*

   а) *при $n \geq 3$ существует один и только один n-вершинный предполный граф G_{np1}, для которого тривиальное расширение не является минимальным. Граф G_{np1} может быть представлен в виде $O_1 + O_2 + \ldots + O_2$. При этом граф G_{np1} имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение и оно содержит $n-1$ дополнительных ребер:*

$$(O_1 + O_2 + \ldots + O_2)^* = O_2 + O_2 + \ldots + O_2;$$

   б) *при $n \geq 5$ существует один и только один n-вершинный предполный граф G_{np2}, имеющий два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения: вида $O_2 + O_2 + \ldots + O_2$ и тривиальное*

$O_1 + G_{np2}$. *Причем граф* G_{np2} *получается из графа* G_{np1} *удалением любого ребра, соединяющего две вершины степени* $n - 2$;

в) *любой* n*-вершинный предполный граф* G*, не изоморфный* G_{np1} *и* G_{np2}*, имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное* 1*-расширение – тривиальное:*

$$(K_1 + G)^* = K_1 + (K_1 + G) = K_2 + G.$$

Доказательство. Обозначим через G предполный n-вершинный граф, а через G^* – некоторое его минимальное вершинное 1-расширение.

I. Пусть граф G^* имеет хотя бы одну полную вершину, например v. Удаление такой вершины приводит к удалению n ребер, следовательно, граф G^* отличается от G на n ребер. Значит, граф $G^* - v$ изоморфен графу G. Следовательно, граф G^* есть тривиальное 1-расширение графа G. Таким образом, получаем, что если предполный граф G имеет минимальное вершинное 1-расширение G^* с полной вершиной, то G^* есть тривиальное 1-расширение, причем других неизоморфных G^* минимальных вершинных 1-расширений с полными вершинами граф G иметь не может.

II. Пусть G^* не имеет полных вершин, тогда максимальная степень его вершин есть $n - 1$. Пусть вершина v графа G^* имеет степень $n - 1$. Вершина v соединена со всеми вершинами G^*, кроме одной. Тогда в графе $G^* - v$ может быть единственная вершина степени $n - 1$, а именно вершина, не смежная с v. Обозначим ее через u. Итак, удаление одной из вершин минимального вершинного 1-расширения G^* предполного графа G дает предполный граф с единственной полной вершиной. Вывод: если G и имеет минимальное вершинное 1-расширение без полных вершин, то в G есть только одна полная вершина.

В графе G^* несмежные вершины u и v смежны со всеми остальными вершинами, степени которых не выше $n - 1$. Тогда удаление любой вершины G^*, кроме u или v, например вершины u_1, приведет к уменьшению степени вершин u и v в графе $G^* - u_1$ на единицу. Следовательно, в графе G^* существует еще одна вершина степени $n - 1$ – вершина, не смежная с u_1. Повторяя предыдущее рассуждение относительно этой вершины, получим, что степень u_1 тоже должна быть $n - 1$. Однако мы произвольно выбрали вершину u_1. Значит, степень любой вершины графа G^* есть $n - 1$. Итак, некоторый граф G, про который известно, что он имеет только одну полную вершину, может иметь минимальное вершинное 1-расширение без полных вершин, и если он имеет такое минимальное вершинное 1-расширение, то им является однородный граф порядка $n - 1$. Но при четном n число $(n - 1)(n + 1)$ – нечетно и в силу теоремы о необходимой четности суммы степеней вершин графа получаем, что при четном n ни для какого предполного n-вершинного графа G нельзя построить минимальное вершинное 1-расширение без полных вершин, следовательно, единственное минимальное вершинное 1-расширение графа G – тривиальное. Это доказывает первое утверждение теоремы.

Итак, n нечетное, вектор степеней $(n+1)$-вершинного графа G^* есть $(n-1, \ldots, n-1)$, и, в силу леммы 2.5.1, граф G^* является униграфом. Удаление любой его вершины дает граф с вектором степеней $(n-1, n-2, \ldots, n-2)$ и числом ребер на $n-1$ меньшим, чем в графе G^*. С другой стороны, граф G^* отличается от графа G по лемме 2.1.3 не менее чем на $n-1$ и не более чем на n ребер. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1. Пусть граф G отличается от графа G^* на $n-1$ ребро. Тогда вектор степеней графа G должен иметь вид $(n-1, n-2, \ldots, n-2)$. По следствию 1 из леммы 2.5.1 граф G является униграфом. Итак, если и существует предполный граф, имеющий минимальное вершинное 1-расширение с числом дополнительных ребер меньшим, чем у тривиального 1-расширения, то этот граф имеет вектор степеней $(n-1, n-2, \ldots, n-2)$, а его минимальное вершинное 1-расширение имеет $n-1$ дополнительное ребро и вектор степеней $(n-1, \ldots, n-1)$. Последний вектор степеней по лемме 2.5.1 определяет униграф, и удаление любой его вершины приводит к униграфу с вектором степеней $(n-1, n-2, \ldots, n-2)$. Следовательно, этот вектор степеней определяет граф G_{np1}, что доказывает утверждение 2а теоремы.

2. Пусть граф G отличается от графа G^* на n ребер. Тогда вектор степеней графа G при $n > 3$ должен иметь вид $(n-1, n-2, \ldots, n-2, n-3, n-3)$, а при $n > 4$ – вид $(n-1, n-2, \ldots, n-2, n-4)$.

Удаление любой вершины графа G^* дает граф G_{np1}. Следовательно, такой и только такой граф среди всех графов с рассматриваемыми векторами степеней, который вкладывается в граф G_{np1}, будет иметь G^* своим минимальным вершинным 1-расширением. Определим, сколько таких графов существует. Все вершины графа G^* имеют степень $n-1$ и могут быть разбиты на пары несмежных вершин, смежных со всеми остальными. Удаление одной из вершин пары дает граф G_{np1}, в котором оставшаяся вершина пары является полной. Удаляем и эту вершину, получаем однородный $(n-1)$-вершинный граф G_1 порядка $n-3$. Полную вершину можно добавить единственным способом, поэтому число неизоморфных графов с указанным вектором степеней, для которых G^* является минимальным вершинным 1-расширением, есть число неизоморфных графов, которые можно получить удалением одного ребра графа G_1. Следовательно, мы должны определить, сколько неизоморфных графов можно получить удалением одного ребра графа G_1. Рассмотрим пары несмежных вершин. Удалим ребро, инцидентное одной из вершин некоторой пары. Очевидно, что таким образом мы получим единственный с точностью до изоморфизма граф G_{np2} с вектором степеней $(n-1, n-2, \ldots, n-2, n-3, n-3)$ (отсюда получается ограничение $n > 3$ в формулировке пункта 2б теоремы), для которого G^* и будет являться расширением.

Это доказывает с учетом пункта I утверждения 2б и 2в теоремы.□

Замечание. Из теоремы непосредственно следует алгоритм построения всех минимальных вершинных 1-расширений для любого предполного графа.

Алгоритм 2.5.1.

На входе: n-вершинный граф G.

На выходе: все минимальные вершинные 1-расширения, если граф G – предполный.

1. Определить по вектору степеней, является ли граф G предполным. Если нет, ВЫХОД.
2. Если n четное, то минимальное вершинное 1-расширение имеет вид $K_1 + G$. ВЫХОД.
3. Если граф G имеет вектор степеней $(n-1, n-2, \ldots, n-2)$, то G является графом типа G_{np1} – минимальное вершинное 1-расширение имеет вид $O_2 + O_2 + \ldots + O_2$. ВЫХОД.
4. Если граф G имеет вектор степеней $(n-1, n-2, \ldots, n-2, n-3, n-3)$ и вершины степени $n-3$ не смежны, то G является графом типа G_{np2} и два его минимальных вершинных 1-расширения имеют вид $O_2 + O_2 + \ldots + O_2$ и $K_1 + G$. ВЫХОД.
5. Минимальное вершинное 1-расширение имеет вид $K_1 + G$.

Обоснование. Корректность алгоритма обусловлена теоремой 2.5.1. Определим сложность алгоритма. Пусть граф G имеет n вершин и m ребер. Для представления графа удобно использовать список ребер. Тогда определение вектора степеней на шаге 1 потребует $O(m)$ действий. Построение графа на шагах 2 и 5 состоит в добавлении одной вершины и n ребер – сложность $O(n)$. Определение типа графа по вектору степеней на шаге 3: $O(n)$. Определение типа графа на шаге 4 по вектору степеней и проверка смежности вершин степени $n-3$: $O(n + m)$. Построение графа на шагах 4 и 5: $O(n)$ действий. Таким образом, общая сложность алгоритма составляет $O(n + m)$.□

Следствие 1. *Единственным с точностью до изоморфизма минимальным вершинным* 1-*расширением звездного графа с числом вершин большим трех является его тривиальное* 1-*расширение.*

Следствие 2. *Наименьший граф* G_{np1} *из пункта* 2а *теоремы есть цепь* P_3, *а ее минимальное вершинное* 1-*расширение – цикл* C_4.

Следствие 3. *Доказательство теоремы позволяет построить наименьший граф* G_{np2} *пункта* 2б *теоремы. Это* 5-*вершинный униграф с вектором степеней* (4,3,3,2,2), *изображенный на рис.* 2.5.2.

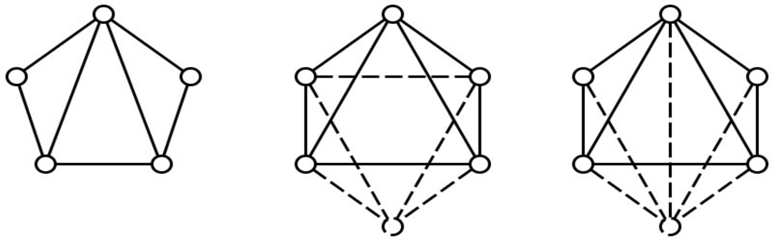


Рис. 2.5.2. Граф вида G_{np2} и два его МВ-1Р

Следствие 4. *Граф G_{np1} (при нечетном n) и полный K_n – единственные предполные n-вершинные графы, имеющие точное вершинное 1-расширение.*

Доказательство. Пусть G – предполный граф, G^* – его минимальное вершинное 1-расширение, G' – дополнение G, а G'^* – минимальное вершинное 1-расширение G'. Пусть число ребер графа G равно m, тогда его дополнение содержит $\frac{n(n-1)}{2} - m$ ребер. Минимальное вершинное 1-расширение графа G отличается от G либо на $n-1$, либо на n ребер. Тогда число ребер графа $G^{*}{'}$ есть либо $\frac{n(n+1)}{2} - m - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - m + 1$, либо $\frac{n(n-1)}{2} - m$. В первом случае минимальное вершинное 1-расширение дополнения должно отличаться только на одно ребро, что возможно лишь для графа G_{np1}, так как любая его часть, отличная от него самого, содержит хотя бы одну вершину степени большей единицы. Во втором случае минимальное вершинное 1-расширение дополнения содержит столько же ребер, сколько и дополнение, что возможно только для вполне несвязного графа, который является дополнением полного графа. Непосредственно видно, что минимальные вершинные 1-расширения графов G_{np1} и K_n являются точными.□

Следствие 5. *Для любого n-вершинного графа G_n и $r > 1$ справедливо утверждение:*

$$(K_r + G_n)^* = K_{r+1} + G_n = K_r^* + G_n.$$

Доказательство. Пусть $G = K_r + G_n$. При $r > 1$ граф G имеет не менее r полных вершин, следовательно, по теореме 2.5.1 граф G имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение G^* вида $G + K_1$. Откуда получаем

$$G^* = (K_r + G_n)^* = G + K_1 = (K_r + G_n) + K_1 = K_{r+1} + G_n = K_r^* + G_n. □$$

2.5.2. Минимальные вершинные k-расширения

ЛЕММА 2.5.2. *Минимальное вершинное k-расширение любого предполного n-вершинного графа либо содержит хотя бы одну вершину степени $n + k - 1$, либо не содержит вершин со степенью ниже $n + k - 2$.*

Доказательство. Очевидно, что минимальное вершинное k-расширение предполного графа может содержать полную вершину (например для полного графа). Пусть $(n + k)$-вершинный граф G^* является минимальным вершинным k-расширением некоторого предполного n-вершинного графа G, причем наибольшая из степеней вершин G^* есть $n + k - 2$. Покажем, что в G^* не может быть вершин со степенью ниже $n + k - 2$.

Пусть это не так и, например, $d(v) < n + k - 2$, где $v \in V(G^*)$.

Докажем более сильное утверждение: $(n + k)$-вершинный граф G^* без полных вершин, но с вершиной, степень которой отличается от степени полной вершины более чем на единицу, не может являться вершинным k-расширением никакого предполного графа.

Рассмотрим дополнение $G^{*\prime}$ графа G^*. В G^* нет полных вершин, значит, в $G^{*\prime}$ нет изолированных вершин. Покажем, что каким бы ни был граф G^*, всегда можно выбрать набор $F \subset V(G)$ из k вершин так, чтобы подграф $G - F$ не содержал ни одной полной вершины, а следовательно, его дополнение $G' - F$ не содержало изолированных вершин.

Пусть $G^{*\prime}$ содержит m компонент связности $S_1, \dots, S_m$ с числом вершин $n_1, \dots, n_m$. Число вершин в той компоненте, в которой находится вершина v, больше 2. Не ограничивая общности, будем считать, что это компонента S_1. Будем выбирать вершины по следующим правилам:

1. Если существует $i = 2, \dots, m$: $n_i \le k$, тогда удаляем все вершины компоненты S_i, $k := k - n_i$.
2. Если существует $i = 2, \dots, m$: $n_i \ge 3$, тогда удаляем $\min\{n_i - 2, k\}$ вершин компоненты S_i так, чтобы не нарушить ее связности, $k := \max\{k - (n_i - 2), 0\}$.
3. Если $k = 0$, то ВЫХОД.
4. Если была проведена редукция по одному из правил 1 или 2, то переход на шаг 1, иначе ВЫХОД.

Нетрудно видеть, что действия алгоритма не приводят к появлению изолированных вершин. Из алгоритма можно выйти в одном из двух случаев:

1) если выход произведен по условию $k = 0$, то удаленные на шаге 1 и 2 алгоритма k вершин приводят к подграфу графа G^*, который не является предполным, а этого быть не может, поскольку граф G^* является минимальным вершинным k-расширением предполного графа G;

2) пусть оказалось, что нет компонент, для которых выполнялось бы одно из условий 1-2. Тогда либо $k = 1$, либо все компоненты, кроме S_1, уда-

лены. Удаляем k вершин компоненты S_1 так, чтобы не нарушить ее связности. В результате получаем подграф графа G^{*}' без изолированных вершин, следовательно, соответствующий подграф графа G^{*} не содержит полных вершин, то есть не является предполным графом, что противоречит предположению о том, что граф G^{*} является минимальным вершинным k-расширением предполного графа.

В каждом из двух возможных случаев получается противоречие с тем, что граф G^{*} является минимальным вершинным k-расширением графа G, что доказывает утверждение леммы. □

Следствие 1. $(n + k)$-*вершинный граф* G^{*} *без полных вершин, но с вершиной, степень которой отличается от степени полной вершины более чем на единицу, не может являться вершинным* k-*расширением никакого предполного графа.*

Следствие 2. *Минимальное вершинное* k-*расширение любого предполного* n-*вершинного графа является либо предполным графом, либо однородным графом порядка* $n + k – 2$.

ЛЕММА 2.5.3. *Если минимальное вершинное* k-*расширение некоторого (не обязательно предполного) графа* G *содержит полную вершину, то оно является тривиальным 1-расширением некоторого минимального вершинного* $(k – 1)$-*расширения графа* G.

Доказательство. Пусть G^{*} – минимальное вершинное k-расширение из условия теоремы с полной вершиной $v \in V(G^{*})$. Граф $G^{*} - v$ является вершинным $(k – 1)$-расширением графа G. Предположим, что $G^{*} - v$ не является минимальным вершинным $(k – 1)$-расширением графа G. Обозначим через G_1 минимальное вершинное $(k – 1)$-расширение G. Тогда граф $G_1 + K_1$ является вершинным k-расширением графа G, причем с меньшим числом ребер, чем у минимального вершинного k-расширения G^{*} графа G. Полученное противоречие доказывает утверждение. □

ЛЕММА 2.5.4. *Граф* G_{np2} *не является минимальным вершинным* k-*расширением никакого предполного графа ни при каком натуральном значении* k.

Доказательство. Пусть граф G_{np2} является минимальным вершинным k-расширением некоторого предполного графа G. Как было показано в лемме 2.5.2, минимальное вершинное k-расширение любого предполного графа либо содержит полную вершину и в силу леммы 2.5.3 является тривиальным 1-расширением минимального вершинного $(k – 1)$-расширения графа G, либо является однородным графом $R_{m,m-2}$.

Граф G_{np2} содержит единственную полную вершину, но подграф, получающийся после ее удаления, не является ни предполным, ни однородным. □

ЛЕММА 2.5.5. *Для четного n однородный n-вершинный граф порядка n – 2 – граф $R_{n,n-2}$ – имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение – тривиальное, причем это минимальное вершинное 1-расширение есть граф $G_{(n+1)p1}$.*

Доказательство. Пусть G^* – минимальное вершинное 1-расширение графа $R_{n,n-2}$. Если в G^* есть полная вершина, то G^* является по лемме 2.5.3 тривиальным 1-расширением.

Пусть G^* – некоторое минимальное вершинное 1-расширение графа $R_{n,n-2}$ без полных вершин. Тогда степень любой вершины G^* либо $n – 2$, либо $n – 1$, причем так как n четное, то есть хотя бы одна вершина степени $n – 2$. Однако удаление любой смежной с ней вершины приведет к графу с вершиной степени $n – 3$, что противоречит предположению о том, что граф G^* является минимальным вершинным 1-расширением графа $R_{n,n-2}$.□

Так как при четном n имеем $(R_{n,n-2})^* = G_{(n+1)p1}$, и $(G_{(n-1)p1})^* = R_{n,n-2}$, то имеет место

Следствие. $$G^{*k}_{np1} = \begin{cases} G_{(n+k)\,p1}, & \text{при } k \text{ - четном,} \\ R_{(n+k),(n+k-2)}, & \text{при } k \text{ - нечетном;} \end{cases}$$

$$R^{*k}_{n,(n-2)} = \begin{cases} G_{(n+k)\,p1}, & \text{при } k \text{ - нечетном,} \\ R_{(n+k),(n+k-2)}, & \text{при } k \text{ - четном.} \end{cases}$$

ЛЕММА 2.5.6. *Каждое минимальное вершинное k-расширение G^{*k} любого предполного графа G при четном k есть минимальное вершинное 1-расширение некоторого минимального вершинного $(k – 1)$-расширения G^{*k-1} графа G, причем это минимальное вершинное 1-расширение единственно с точностью до изоморфизма и является тривиальным 1-расширением графа G^{*k-1}.*

Доказательство. Пусть G^{*k} – минимальное вершинное k-расширение n-вершинного предполного графа G. Если в G^{*k} есть полная вершина, то доказательство того, что минимальное вершинное k-расширение есть тривиальное 1-расширение минимального $(k – 1)$-расширение, следует из леммы 2.5.3.

Пусть в G^{*k} нет полной вершины, тогда G^{*k} есть в силу леммы 2.5.2 однородный $(n + k)$-вершинный граф порядка $n + k – 2$. В силу теоремы о необходимой четности суммы степеней вершин любого графа и четности k получаем, что n тоже четно.

Все вершины графа G^{*k} образуют пары, так что вершины одной пары несмежны друг с другом, но смежны со всеми остальными вершинами. Удалим $k/2$ таких пар вершин. Удаление одной пары вершин приводит к уменьшению степеней всех остальных вершин на два, следовательно, в результате получим однородный n-вершинный граф порядка $n - 2$. Итак, один из подграфов графа G^{*k}, полученный удалением его k вершин, не является предполным графом, а следовательно, и никакой предполный граф G не имеет при четном k минимальных вершинных k-расширений без полных вершин, поэтому любое минимальное вершинное k-расширение графа G является тривиальным 1-расширением некоторого его минимального вершинного $(k - 1)$-расширения.□

Следствие. *Любой предполный граф при четном k имеет столько же неизоморфных минимальных вершинных k-расширений, сколько и неизоморфных минимальных вершинных $(k - 1)$-расширений.*

ЛЕММА 2.5.7. *Каждое минимальное вершинное k-расширение G^{*k} любого предполного графа G с четным числом вершин есть минимальное вершинное 1-расширение некоторого минимального вершинного $(k - 1)$-расширения $G^{*k\text{-}1}$ графа G, причем это минимальное вершинное 1-расширение единственно с точностью до изоморфизма и является тривиальным расширением графа $G^{*k\text{-}1}$.*

Доказательство. При четном k утверждение теоремы следует из леммы 2.5.6.

Пусть k – нечетно. Тогда число вершин в минимальном вершинном k-расширении нечетно, следовательно, не существует однородного $(n + k)$-вершинного графа порядка $n + k - 2$, поэтому любое минимальное вершинное k-расширение графа из условия теоремы является тривиальным 1-расширением его минимального вершинного $(k - 1)$-расширения.□

Следствие. *Любой предполный граф с четным числом вершин при любом k имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение, которое является его тривиальным k-расширением.*

Доказательство. При $k = 1$ минимальное вершинное 1-расширение любого предполного графа G с четным числом вершин в силу теоремы 2.5.1 есть тривиальное 1-расширение. Рассуждая по индукции, докажем утверждение.□

ЛЕММА 2.5.8. *При нечетном n для любого предполного n-вершинного графа G, являющегося частью графа G_{np1}, существует нечетное число k_1, такое, что справедливы следующие утверждения:*

а) для любого $k < k_1$ граф G имеет единственное минимальное вершинное k-расширение, являющееся тривиальным k-расширением;

б) граф G имеет два неизоморфных минимальных вершинных k_1-расширения: тривиальное k_1-расширение и граф $R_{n+k_1,n+k_1-2}$;

в) граф G имеет два неизоморфных минимальных вершинных $(k_1 + 1)$-расширения, каждое из которых является тривиальным 1-расширением одного из двух неизоморфных минимальных вершинных k_1-расширений;

г) для любого нечетного $k > k_1$ граф G имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение – однородный граф $R_{n+k,n+k-2}$;

д) для любого четного k > k1 + 1 граф G имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение – тривиальное 1-расширение графа $R_{n+k-1,n+k-3}$.

Доказательство. Пусть при нечетном n предполный n-вершинный граф G с m ребрами является частью графа G_{np1} и отличается от него на m' ребер. Очевидно, что минимальное вершинное k-расширение графа G_{np1} является вершинным k-расширением графа G, и, если оно не является минимальным вершинным k-расширение графа G, то тогда таковым является тривиальное k-расширение графа G. Определим число ребер в минимальном вершинном k-расширении графа G_{np1} и в тривиальном k-расширении графа G.

Поскольку при четном k минимальные вершинные k-расширения предполного графа в силу леммы 2.5.6 всегда есть минимальные вершинные 1-расширения всех его неизоморфных минимальных вершинных $(k – 1)$-расширений, то достаточно рассмотреть нечетные значения k, доказав утверждения а), б) и г), а пункты в) и д) следуют из б) и г).

Минимальное вершинное k-расширение графа G_{np1} при нечетном k по следствию из леммы 2.5.5 есть граф $R_{n+k,n+k-2}$. Тогда число ребер минимального вершинного k-расширения графа G_{np1} есть $(n+k)(n+k-2)/2$, а число ребер тривиального k-расширения графа G есть $nk+(k-1)k/2+m$, где

$$m = \{(n – 1)(n – 2) + n – 1\}/2 – n – m' = (n^2 – 2n + 1)/2 – m'.$$

Определим разность между числом ребер этих графов: $m' - \dfrac{k+1}{2}$. Приравнивая к нулю, находим k_1: $k_1 = 2m' – 1$. Таким образом, при $k < k_1$ меньшее число ребер у тривиального k-расширения графа G, при $k > k_1 + 1$ меньшее число ребер имеет минимальное вершинное k-расширение графа G_{np1}, а при $k = k_1$ и при $k = k_1 + 1$ число ребер в этих графах одинаково. Что и требовалось показать.□

Следствие 1. *Для любого предполного n-вершинного графа G, являющегося частью графа G_{np1}, существует нечетное число k, такое что* *граф G имеет два неизоморфных минимальных вершинных k- и $(k + 1)$-расширения, причем при всех остальных значениях k граф G имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение.*

Следствие 2. *Для любого k существуют предполные графы, имеющие ровно два неизоморфных минимальных вершинных k-расширения.*

Следствие 3. *Для любого k и нечетного n, таких что $n^2 - 4n + 2 \le k$, всегда можно указать предполный граф, имеющий два неизоморфных минимальных вершинных k-расширения.*

Доказательство. Из леммы 2.5.8 следует, что среди всех n-вершинных предполных графов только граф, являющийся частью графа G_{np1}, может иметь два неизоморфных минимальных вершинных k-расширения, причем только при $k = 2m' - 1$ и $k = 2m' + 1$, где m' – разница в числе ребер графов G и G_{np1}. Число ребер графа G_{np1} есть

$$n - 1 + (n - 1)(n - 3)/2.$$

Максимальное значение m' будет достигнуто, если G – звездный граф, число ребер которого есть $n - 1$. Тогда

$$0 \le m' \le (n - 1)(n - 3)/2,$$

откуда получаем неравенство, которому должны удовлетворять числа n и k, чтобы можно было построить граф с требуемым свойством:

$$k \le (n - 1)(n - 3) - 1 \quad \text{или} \quad n^2 - 4n + 2 \le k. \ \square$$

ТЕОРЕМА 2.5.2. *Относительно предполных графов справедливы следующие утверждения.*

1. *При четном n и любом натуральном k каждый n-вершинный предполный граф G имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение – тривиальное k-расширение.*
2. *При нечетном n:*
   а) *при четном k число минимальных вершинных k-расширений предполного графа G в точности равно числу неизоморфных минимальных вершинных $(k - 1)$-расширений G, причем каждое из минимальных вершинных k-расширений графа G есть тривиальное 1-расширение соответствующего минимального вершинного $(k - 1)$-расширения G;*
   б) *при нечетном k:*
      i) *если предполный граф G является частью графа G_{np1} и отличается от него на m ребер, то*
         – *при $k < 2m - 1$ граф G имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное k-расширение – тривиальное k-расширение;*

– *при* $k = 2m - 1$ *граф* G *имеет два с точностью до изоморфизма минимальных вершинных* k*-расширения: тривиальное* k*-расширение и граф* $R_{n+k,n+k-2}$*;*
– *при* $k > 2m - 1$ *граф* G *имеет единственное минимальное вершинное* k*-расширение – граф* $R_{n+k,n+k-2}$*;*

ii) *любой другой предполный граф* G *имеет единственное минимальное вершинное* k*-расширение, являющееся тривиальным* k*-расширением.*

Доказательство. Лемма 2.5.7 и следствие из нее дают доказательство утверждения 1.

Лемма 2.5.6 и следствие из нее дают доказательство утверждения 2а.

Лемма 2.5.8 доказывает утверждения *i* пункта 2б.

Истинность утверждения *ii* пункта 2б следует из того, что если предполный граф G не является частью графа G_{np1}, то граф $R_{(n+k),(n+k-2)}$ ни при каких k не является его минимальным вершинным k-расширением, следовательно, любое его минимальное вершинное k-расширение содержит полную вершину, то есть является тривиальным 1-расширением его минимального вершинного $(k - 1)$-расширения, а значит, оно является и тривиальным k-расширением, причем это минимальное вершинное k-расширение единственно с точностью до изоморфизма.□

Из теоремы следует алгоритм построения всех минимальных вершинных k-расширений любого предполного графа.

Алгоритм 2.5.2.

На входе: число $k > 0$ и n-вершинный граф G с n вершинами и m ребрами.

На выходе: все минимальные вершинные k-расширения, если граф G – предполный.

1. Определить по вектору степеней является ли граф G предполным. Если нет, ВЫХОД.
2. Если n четное, то минимальное вершинное k-расширение имеет вид $K_k + G$. ВЫХОД.
3. Если k четное: построить все (одно или два) минимальные вершинные $(k - 1)$-расширения G: G_i. Минимальные k-расширения будут иметь вид $K_1 + G_i$. ВЫХОД.
4. Если G допускает вложение в граф G_{np1}, то шаг 5, иначе минимальное вершинное k-расширение имеет вид $K_k + G$. ВЫХОД.
5. Определяем разницу по числу ребер между графом G и G_{np1}: $s := \frac{n(n-2)}{2} - m$.
6. Если $k < 2s - 1$, то минимальное вершинное k-расширение имеет вид $K_k + G$. ВЫХОД.

7. Если $k = 2s - 1$, то минимальные вершинные k-расширения имеют вид $K_k + G$ и граф $R_{n+k,n+k-2}$. ВЫХОД.
8. Если $k > 2s - 1$, то минимальное вершинное k-расширение имеет вид $R_{n+k,n+k-2}$.

Обоснование. Корректность алгоритма следует из теоремы 2.5.2.

Оценим сложность алгоритма: $T(n, k)$.

Пусть G – n-вершинный граф. Удобно представлять заданный граф в виде списка ребер.

При четном k согласно с пунктом 3 имеем: $T(n, k) = T(n, k - 1)$. Далее рассматриваем нечетные значения k.

Определение на шаге 1, является ли граф G предполным, потребует $O(n + m)$ действий.

Построение графа вида $K_k + G$ на шагах 2, 4 и 6 потребует добавления k вершин и $\frac{k(k-1)}{2} + nk$ ребер, то есть $O(k^2 + nk)$ действий.

Самым сложным с вычислительной точки зрения является определение вложения на шаге 4. В общем случае не известен алгоритм полиномиальной сложности для определения вложения одного графа в другой. Однако особенности графа G_{np1} позволяют существенно упростить эту задачу.

Итак, пусть n нечетно. Требуется определить, является ли граф G частью графа G_{np1}. Дадим два определения.

Паросочетанием называется произвольное подмножество попарно несмежных ребер графа. Паросочетание называется *максимальным*, если оно не содержится в паросочетании с бóльшим числом ребер, и *наибольшим*, если число ребер в нем наибольшее среди всех паросочетаний графа. *Паросочетание* называется *совершенным*, если любая вершина графа принадлежит некоторому ребру этого паросочетания. Наиболее эффективными алгоритмами построения паросочетаний являются (см. (Ловас, Пламмер, 1998)) алгоритмы Бартника, Карива, Ивена и Карива со сложностью $O(n^{5/2})$ и алгоритм Майкели и Вазирани со сложностью $O(mn^{1/2})$.

Граф G_{np1} имеет в точности одну полную вершину, удаление которой приводит к однородному подграфу $R_{n-1,n-3}$. Следовательно, вложение возможно, только если граф G также имеет в точности одну полную вершину, причем граф G будет частью граф G_{np1} тогда и только тогда, когда его подграф G_1, получающийся из G удалением полной вершины, является частью однородного графа $R_{n-1,n-3}$. Рассмотрим дополнения графов G_1 и $R_{n-1,n-3}$: G_1' и $R_{n-1,1}$ соответственно. Граф G_1 допускает вложение в $R_{n-1,n-3}$ тогда и только тогда, когда дополнение графа $R_{n-1,n-3}$ – однородный граф $R_{n-1,1}$ допускает вложение в дополнение графа G_1 – граф G_1'. Однако граф $R_{n-1,1}$ вложим в G_1' тогда и только тогда, когда в графе G_1' есть совершенное паросочетание. С помощью одного из указанных выше алгоритмов это можно проверить за $O(n^{5/2})$ или $O(mn^{1/2})$ действий.

Построение графа $R_{n+k,n+k-2} = O_2 + \ldots + O_2$ на шагах 7 и 8 потребует порядка $O(n^2 + k^2)$ действий.

Таким образом, теоретическая сложность алгоритма построения минимальных вершинных k-расширений для n-вершинного предполного графа с m ребрами определяется в основном сложностью алгоритма проверки наличия совершенного паросочетания в графе и составляет $O(n^{5/2} + nk + k^2)$ или $O(mn^{1/2} + nk + k^2)$. □

Следствие 1. *Число дополнительных ребер минимального вершинного k-расширения предполного графа G есть*

$nk + \dfrac{k(k-1)}{2}$, *если граф G не является частью графа G_{np1},*

$nk + \dfrac{k(k-1)}{2} - \max\left(0, \left\lfloor \dfrac{k-2m}{2} \right\rfloor\right)$, *если граф G является частью графа G_{np1} и отличается от него на m ребер.*

Доказательство. По теореме 2.5.2, если предполный n-вершинный граф G не является частью графа G_{np1}, тогда G имеет единственное минимальное вершинное k-расширение – тривиальное k-расширение. Очевидно, что тривиальное k-расширение является тривиальным 1-расширением тривиального $(k-1)$-расширения. Поскольку каждое последующее тривиальное 1-расширение получается добавлением одной полной вершины, то число дополнительных ребер в тривиальном k-расширении есть

$$\sum_{i=1}^{k} (n + i - 1) = nk + \frac{k(k-1)}{2}.$$

Пусть предполный n-вершинный граф G является частью графа G_{np1} и отличается от него на m ребер. Тогда по теореме 2.5.2 любое его минимальное вершинное k-расширение при $k < 2m - 1$ является тривиальным k-расширением и число ребер определяется по предыдущему случаю, то есть $nk + \dfrac{k(k-1)}{2}$. Очевидно, формула остается справедливой и при $k = 2m - 1$, хотя граф G имеет уже два неизоморфных минимальных вершинных k-расширения. Рассмотрим $k \geq 2m$. В зависимости от четности или нечетности k граф G имеет минимальным вершинным k-расширением либо граф $G_{(n+k)p1}$, либо граф $R_{(n+k),(n+k-2)}$. Можно заметить, что если тривиальное k-расширение отличается от тривиального $(k-1)$-расширения на $n + k - 1$ ребро, то есть при увеличении k на единицу разница между ними увеличивается также на единицу, то при $k \geq 2m$ при увеличении на единицу k число дополнительных ребер минимального вершинного k-расширения возрастает на единицу только при четном k (см. пункт 2а теоремы 2.5.2). То есть с каждым четным k после $k = 2m$ разница в числе ребер между минимальным вершинным k-расширением и тривиальным k-расширением графа G увеличивается на единицу. Запишем эту идею:

$$nk + \frac{k(k-1)}{2} - \left\lfloor \frac{k-2m}{2} \right\rfloor.$$

Объединяя случаи для $k < 2m$ и $k \geq 2m$, получаем искомую формулу.□

Следствие 2. *Для любого n-вершинного графа G_n и $r > 1$ справедливо утверждение:*

$$(K_r + G_n)^{*k} = K_{r+k} + G_n = K_r^{*k} + G_n.$$

Доказательство. Пусть $G = K_r + G_n$. При $r > 1$ граф G имеет не менее r полных вершин, следовательно, по теореме 2.5.2 граф G имеет единственное минимальное вершинное k-расширение G^{*k} вида $G^{*k} = G + K_k$. Откуда получаем

$$G^{*k} = (K_r + G_n)^{*k} = G + K_k = (K_r + G_n) + K_k = K_{r+k} + G_n = K_r^{*k} + G_n.\square$$

В терминах «почти все» результаты относительно предполных графов могут быть сформулированы следующим образом:

Почти все предполные графы имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное (Т-неприводимое) k-расширение, которым является тривиальное k-расширение.

2.5.3. Гипотеза о соединении

В работах (Абросимов, 2000, *в, г*) исследовалась связь конструкции вершинного расширения и алгебраических операций над графами. В частности, имеет место такое интересное утверждение, связывающее операции дополнения, соединения и конструкцию вершинного 1-расширения:

ТЕОРЕМА 2.5.3. *Пусть G – граф, обладающий свойством дополнительности 1-расширения, а G^* – его точное вершинное 1-расширение. Тогда граф $G_+ = G + G^* + \ldots + G^* = G + (G^*)^m$ также обладает свойством дополнительности 1-расширения, причем его точное вершинное 1-расширение имеет вид $G_+^* = G^* + G^* + \ldots + G^* = (G^*)^{m+1}$:*

$$(G + G^* + \ldots + G^*)^* = G^* + G^* + \ldots + G^*.$$

Доказательство. Пусть n-вершинный граф G обладает свойством дополнительности 1-расширения, граф G^* – его точное вершинное 1-расширение, а граф G_+ получается соединением графа G и m графов G^*.

Заметим, что максимальный подграф графа $G_+^* = G^* + G^* + \ldots + G^*$ есть граф $G_+ = G + G^* + \ldots + G^*$, поэтому граф G_+^* является точным вершинным

1-расширением графа G_+, а по теореме 2.1.18 и единственным его минимальным вершинным 1-расширением, что доказывает корректность формулы в условии теоремы.□

Следующий результат, являющийся усилением предыдущей теоремы, связывает операции соединения и дополнения с конструкцией минимального вершинного 1-расширения.

ТЕОРЕМА 2.5.4. *Граф* $G_+ = G + G^* + \ldots + G^* = G + (G^*)^m$, *где* G *– произвольный граф, а* G^* *– минимальное вершинное* 1*-расширение графа* G, *тогда и только тогда обладает свойством дополнительности* 1*-расширения, когда* G^* *является точным вершинным* 1*-расширением графа* G. *При этом граф* $G_+^* = G^* + G^* + \ldots + G^* = (G^*)^{m+1}$ *является точным вершинным* 1*-расширением графа* G_+.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G – n-вершинный граф, G^* – его минимальное вершинное 1-расширение, а граф $G_+ = G + G^* + \ldots + G^* = G + (G^*)^m$ обладает свойством дополнительности 1-расширения.

Введем обозначения: $a = \max\limits_{v \in V(G)} d(v)$, $b = \min\limits_{v \in V(G)} d(v)$, $a^* = \max\limits_{v \in V(G^*)} d(v)$, $b^* = \min\limits_{v \in V(G^*)} d(v)$ для графов G и G^* соответственно.

Очевидно, что $a \le a^*$ и $b \le b^*$.

Определим наибольшие и наименьшие степени вершин в графе G_+.

Вершины, имеющие в графе G степени a и b, в графе G_+ будут иметь степени $a + m(n+1) = a + mn + m$ и $b + m(n+1) = b + mn + m$ соответственно.

Вершины, имеющие в графе G^* степени a^* и b^*, в графе G_+ будут иметь степени

$$a^* + (m-1)(n+1) + n = a^* + mn + m - 1$$

и

$$b^* + (m-1)(n+1) + n = b^* + mn + m - 1.$$

По условию граф G_+ обладает свойством дополнительности 1-расширения, тогда по теореме 2.1.12 либо граф G_+ является однородным и в этом случае он является вполне несвязным или полным и

$$\min\{a + mn + m, a^* + mn + m - 1\} = \max\{b + mn + m, b^* + mn + m - 1\},$$

то есть

$$\min\{a, a^* - 1\} = \max\{b, b^* - 1\},$$

либо $\min\{a+mn+m, a^*+mn+m-1\} = \max\{b+mn+m, b^*+mn+m-1\}-1$ или

$$\min\{a, a^*-1\} = \max\{b, b^*-1\}-1. \qquad (1)$$

Рассмотрим четыре случая.

1. $a=a^*$, $b=b^*$. Тогда из соотношения (1) получаем $a=a^*=b=b^*$, что возможно лишь тогда, когда G и G^* являются вполне несвязными графами, то есть G^* является точным вершинным 1-расширением графа G.

2. $a=a^*, b<b^*$. Из соотношения (1) получаем $a-1=b^*-2>b-2$, откуда $a>b-1$, что возможно лишь при $a=b$. Поскольку $a=a^*$, то согласно лемме 2.1.4 граф G содержит изолированные вершины, значит, $a=b=0$ и граф G является вполне несвязным. Однако минимальное вершинное 1-расширение вполне несвязного графа является по теореме 2.1.2 также вполне несвязным графом, то есть $a^*=b^*=0$, что противоречит условию: $a=a^*, b<b^*$. Следовательно, случая 2 быть не может.

3. $a<a^*, b=b^*$. Из соотношения (1) получаем, что $a=b-1$. Далее $a^*>a=b-1=b^*-1$, но поскольку $a^* \le b^*$, то $a^*=b^*$. Таким образом, $a+1=b=a^*=b^*$.

Обозначим через n_1, n_2 число вершин степени a, b графа G и степени a^*, b^* графа G^*. Очевидно, что граф G_+ имеет степенное множество $\{a+mn+m, b+mn+m\}$, причем число вершин степени $a+mn+m$ равно $n_1+(n+1)m$, а число вершин степени $b+mn+m$ равно n_2. По предположению граф G_+ обладает свойством дополнительности 1-расширения, причем его степенное множество имеет вид $\{a+mn+m, b+mn+m\}$, где $a+mn+m=b+mn+m-1$. По теореме 2.1.15 число вершин степени $a+mn+m$ должно быть в точности равно $b+mn+m$, то есть $n_1+(n+1)m=b+mn+m$, откуда $n_1=b$.

Таким образом, граф G имеет степенное множество вида $\{b-1, b\}$, число вершин степени $b-1$ в точности равно b и его минимальное вершинное 1-расширение – граф G^* – является однородным графом порядка b. По теореме 2.1.15 граф G обладает свойством дополнительности 1-расширения, а граф G^* является его точным вершинным 1-расширением.

4. $a<a^*, b<b^*$. Этот случай возможен лишь тогда, когда G и G^* являются полными графами.

Таким образом, в каждом из возможных случаев 1, 3 и 4 граф G^* является точным вершинным 1-расширением графа G, что доказывает необходимость.

Достаточность следует из теоремы 2.5.3.□

На основании предыдущих рассуждений представляется разумным высказать предположение:

Пусть G – произвольный граф, а G^* – некоторое его минимальное вершинное 1-расширение. Тогда граф вида $G+G^*+\ldots+G^*=G+(G^*)^m$ *всегда имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение, и оно может быть представлено в виде* $G^*+G^*+\ldots+G^*=(G^*)^{m+1}$, *то есть справедлива запись:*

$$(G+G^*+\ldots+G^*)^*=G^*+G^*+\ldots+G^*.$$

Однако оказалось, что ситуация является более сложной и удалось найти два контрпримера к этому предположению.

ТЕОРЕМА 2.5.5. *Пусть G – граф вида $R_{n,\,n-2}$, а G^* – его минимальное вершинное 1-расширение. Тогда минимальное вершинное 1-расширение графа $G+G^*$ единственно с точностью до изоморфизма и имеет вид* $R_{2n+2,\,2n}$.

Доказательство. Ранее мы показали, что граф $R_{n,\,n-2}$ имеет вид $O_2+\ldots+O_2$. По лемме 2.5.5 граф $R_{n,\,n-2}$ имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение G^*, которым является его тривиальное 1-расширение:

$$G^*=K_1+O_2+\ldots+O_2.$$

Таким образом, граф $G+G^*$ будет иметь вид

$$G+G^*=(O_2+\ldots+O_2)+(K_1+O_2+\ldots+O_2)=K_1+O_2+\ldots+O_2$$

и будет являться графом вида G_{np1}. По теореме 2.5.1 получаем требуемое утверждение.

ТЕОРЕМА 2.5.6. *Пусть G – предполный граф вида G_{np2}, а G^* – его минимальное вершинное 1-расширение вида $O_2+\ldots+O_2$. Тогда граф $G+G^*$ имеет два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения, одно из которых имеет вид G^*+G^*, а второе имеет вид $O_2+\ldots+O_2$.*

Доказательство. По теореме 2.5.1 граф G_{np2} имеет два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения: тривиальное 1-расширение и расширение вида $O_2+\ldots+O_2$. Если рассматривать первое минимальное вершинное 1-расширение, то утверждение предположения, как несложно заметить, будет справедливым. Мы рассматриваем соединение графа G_{np2} со вторым минимальным вершинным 1-расширением: $O_2+\ldots+O_2$.

Легко увидеть, что это соединение снова будет являться предполным графом вида $G_{(2n+2)p2}$ и, следовательно, по теореме 2.5.1 будет иметь два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения. Теорема доказана.□

Таким образом, в общем виде предположение является ошибочным. Однако для большого числа графов его утверждение является справедливым, что в дополнении к предыдущим теоремам показывает и следующая

ТЕОРЕМА 2.5.7. *Пусть G – граф, неизоморфный графу вида $R_{n,\,n-2}$, а его тривиальное 1-расширение G^* является и его минимальным вершинным 1-расширением. Тогда минимальное вершинное 1-расширение графа $G+G^*$ единственно с точностью до изоморфизма и имеет вид G^*+G^*, то есть справедливо соотношение:*

$$(G+G^*)^* = G^* + G^*.$$

Доказательство. Так как G^* является тривиальным 1-расширением графа G, то

$$G^* = K_1 + G$$

и в G^* есть хотя бы одна полная вершина. Граф

$$G + G^* = G + (K_1 + G) = K_1 + (G + G)$$

также является предполным. По теореме 2.5.1, если граф $G+G^*$ не будет являться *графом* вида G_{np1} или G_{np2}, то он будет иметь единственное минимальное вершинное 1-расширение, которым будет являться его тривиальное 1-расширение, то есть мы получим утверждение теоремы. В самом деле, тривиальное 1-расширение графа $G + G^*$ можно будет записать так:

$$K_1 + (G + G^*) = (K_1 + G) + G^* = G^* + G^*.$$

Вспомним, что граф вида G_{np1} – это граф вида $K_1 + O_2 + ... + O_2$, и поэтому мы должны исключить графы G изоморфные $R_{n,\,n-2}$.

Граф вида G_{np2} – это граф вида $K_1 + (O_2 + ... + O_2 - e)$, где e – некоторое ребро. В нашем *случае* граф $G+G^*$ не может быть изоморфен графу G_{np2}, так как, исключив из рассмотрения полную вершину, мы должны подобрать граф G таким образом, чтобы $G + G = O_2 + ... + O_2 - e$, что невозможно. Теорема доказана.□

Много ли графов попадает под действие доказанной теоремы? Как мы докажем следующим утверждением, это почти все предполные графы, но и кроме них многие графы имеют минимальное вершинное 1-расширение, которое является их тривиальным 1-расширением. Так, например, по материалам работы (Абросимов, 2000, *в*), для 7-вершинных графов: из 1044 графов 405 графов (из них 156 предполных) имеют минимальным вершинным 1-расширением тривиальное 1-расширение. Для 6-вершинных: 65 (34 предполных) из 156, для 5-вершинных: 10 (все предполные) из 34.

Следствие. *Пусть G – произвольный предполный граф не вида G_{mp2}, а G^* – его минимальное вершинное 1-расширение. Тогда граф вида $G+G^*$ имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение и оно может быть представлено в виде G^*+G^*, то есть справедливо соотношение:*

$$(G+G^*)^* = G^* + G^*.$$

Доказательство. По теореме 2.5.1 все предполные графы, кроме графов вида G_{mp1} и G_{mp2}, имеют минимальным вершинным 1-расширением тривиальное 1-расширение и, таким образом, попадают под условие теоремы 2.5.7. Остается рассмотреть предполные графы вида G_{mp1}. По следствию 4 из теоремы 2.5.1 минимальное вершинное 1-расширение графов вида G_{mp1} является точным вершинным 1-расширением, и по теореме 2.5.4 получаем требуемое утверждение.□

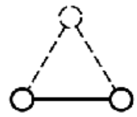
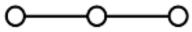
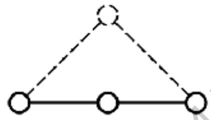
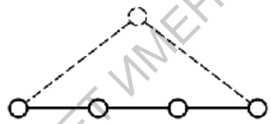
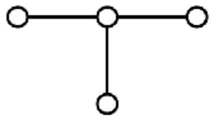
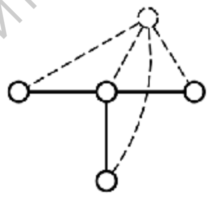
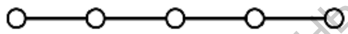
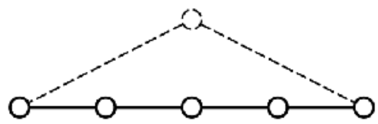
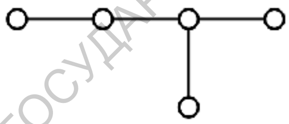
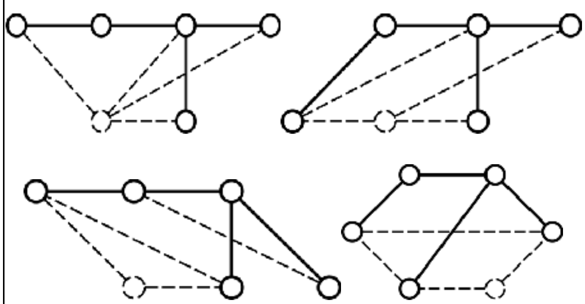
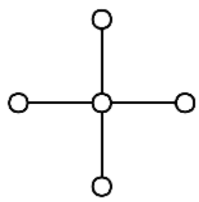
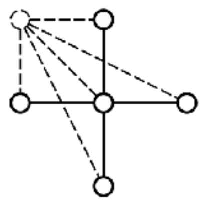
2.6. Деревья

Древесные структуры являются чрезвычайно распространенными в различных практических областях. В работе (Hayes, 1976) отмечается важность задачи определения минимального вершинного 1-расширения для деревьев. В той же работе была предложена процедура построения минимального вершинного 1-расширения для одного частного случая – дерева с метками. Кван и Тойда (Kwan, Toida, 1982) предложили конструкцию минимального 2-расширения для симметричного неоднородного дерева (вершины равноудаленные от корня имеют одинаковые метки). Для звезд полное описание минимальных вершинных 1-расширений было найдено в (Farrag, Dawson, 1989). Харари и Хуррум (Harary, Khurum, 1995) предложили схему построения минимальных вершинных 1-расширений для двух частных случаев деревьев: «гусениц» и звездоподобных деревьев. М. А. Кабанов в (Кабанов, 1997) предложил процедуру построения для одного частного случая дерева без меток – «цепи колес» – объединение n-вершинных звездных графов («колес») с отождествлением вершин таким образом, что центры колес образуют цепь. В той же работе указывается, что цепи колес могут иметь неизоморфные минимальные вершинные расширения, а также приводится соответствующий пример. В общем виде задача построения минимального вершинного k-расширения дерева (с метками или без) остается нерешенной. В работе (Dutt, Hayes, 1990) Дат и Хейз вводят понятие «почти оптимального минимального вершинного 1-расширения» и предлагают процедуру его построения для дерева с метками или без. С. Г. Курносовой удалось описать Т-неприводимые расширения полных бинарных деревьев (Курносова, 2006). Последующие далее результаты позволяют построить минимальное вершинное 1-расширение еще для одного частного случая дерева – сверхстройного дерева.

В табл. 2.6.1 представлены минимальные вершинные 1-расширения для малых деревьев с числом вершин до 5.

Таблица 2.6.1

МВ-1Р деревьев с числом вершин до 5

Дерево	МВ-1Р
	
	
	
	
	
	
	

2.6.1. Звезды

Звезда является частным случаем предполного графа и может быть записана в виде $K_m + O_n$, где O_n – вполне несвязный граф. В работе (Farrag, Dawson, 1989) рассматривалась отказоустойчивость систем с выделенным сервером, который связан с клиентами. Клиенты между собой не связываются. Очевидно, что графом такой системы будет являться звезда.

На основании результатов предыдущего параграфа легко получить полное описание минимальных вершинных k-расширений звезд.

ТЕОРЕМА 2.6.1. *Единственным минимальным вершинным* 1*-расширением звездного графа* $K_{1,n}$ *является тривиальное* 1*-расширение:* $K_1 + K_{1,n} = K_2 + O_n$.

Заметим, что звездный граф $K_{1,n}$ с нечетным числом вершин является частью графа $G_{пр1}$ и отличается от него на $[n + n(n - 1)]/2 - n = (n^2 - 2n)/2$ ребер. С учетом этого из теоремы 2.5.2 следует

ТЕОРЕМА 2.6.2. *Относительно звездного графа* $K_{1,n}$ *справедливы следующие утверждения.*

1. *При нечетном* n *и любом натуральном* k *звезда* $K_{1,n}$ *имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное* k*-расширение – тривиальное* k*-расширение.*

2. *При четном* n*:*
   - *а) при четном* k *число минимальных вершинных* k*-расширений звезды* $K_{1,n}$ *в точности равно числу ее неизоморфных минимальных вершинных* $(k - 1)$*-расширений, причем каждое из минимальных вершинных* k*-расширений есть тривиальное 1-расширение соответствующего минимального вершинного* $(k - 1)$*-расширения;*
   - *б) при нечетном* k *выделяются три случая:*
     - *– при* $k < n^2 - 2n$ *звезда* $K_{1,n}$ *имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное* k*-расширение – тривиальное* k*-расширение;*
     - *– при* $k = n^2 - 2n$ *звезда* $K_{1,n}$ *имеет два с точностью до изоморфизма минимальных вершинных* k*-расширения: тривиальное* k*-расширение и граф* $R_{n+k+1,n+k-1}$*;*
     - *– при* $k > n^2 - 2n$ *звезда* $K_{1,n}$ *имеет единственное минимальное вершинное* k*-расширение – граф* $R_{n+k+1,n+k-1}$.

2.6.2. Сверхстройные деревья

Далее мы рассмотрим минимальные вершинные 1-расширения некоторых сверхстройных деревьев и получим оценки для числа дополнительных ребер. Напомним, что через $ec(G, k)$ мы обозначали количество дополнительных ребер минимального вершинного k-расширения графа G. При $k = 1$ будем записывать просто $ec(G)$:

$$ec(G) = ec(G, 1).$$

Нижняя оценка

Покажем, что минимальное вершинное 1-расширение сверхстройного дерева $(m_1,\ldots,m_k)$ не может иметь меньше $k+1$ дополнительных ребер.

ТЕОРЕМА 2.6.3. *Минимальное вершинное* 1-*расширение любого сверхстройного дерева T вида $(m_1,\ldots,m_k)$ отличается от него более чем на k дополнительных ребер:*

$$ec(T) > k.$$

Доказательство. Пусть T – сверхстройное дерево с вектором цепей $(m_1,\ldots,m_k)$ и $k > 2$. Обозначим через T^* некоторое минимальное вершинное 1-расширение дерева T. По определению после удаления любой вершины из графа T^* дерево T должно вкладываться в получившийся граф. Следовательно, граф T^* должен содержать вершину степени k или выше и будет отличаться от дерева T не менее чем на k дополнительных ребер. Таким образом, для доказательства леммы достаточно показать, что T^* не может отличаться на k дополнительных ребер.

Предположим, что это не так, и T^* отличается от T на k дополнительных ребер. Так как в T есть одна вершина степени k, то в T^* должно быть не менее двух вершин степени k или выше. Действительно, если бы это было не так, и в T^* была бы только одна вершина v степени k или выше, то вложение дерева T в граф $T^* - v$ было бы невозможно. Рассуждая далее, убеждаемся, что в T^* не может быть вершин степени меньше 2. В самом деле, если бы степень некоторой вершины v в графе T^* была бы равна 1, то, удалив смежную с v вершину, мы бы получили граф с изолированной вершиной, в который дерево T вкладываться не будет. Наконец, в T^* не может быть вершины степени выше k, так как удаление такой вершины привело бы к удалению более k ребер. По предположению в получившийся граф должно вкладываться дерево T, однако оно отличается от T^* на k ребер.

Итак, делаем вывод, что если T^* – некоторое минимальное вершинное 1-расширение дерева T, которое отличается от T на k дополнительных ребер, то T^* имеет вектор степеней $(k,k,2,\ldots,2)$. Обозначим через v_1 и v_2 вершины степени k графа T^*. Удаление одной из этих вершин приводит к удалению k ребер, следовательно, графы $T^* - v_1$, $T^* - v_2$ и T изоморфны. С учетом того, что степени остальных вершин графа T^* равны 2, это означает, что вершины v_1 и v_2 соединены k цепями, длины которых есть $m_1 + 1$, $m_2 + 1,\ldots, m_k + 1$.

Предположим, что минимальная из длин этих цепей равна 1, то есть $m_k = 1$. Это означает, что в T^* есть вершина v, смежная и с v_1, и с v_2. Но тогда в графе $T^* - v$ старшая степень вершины будет $k - 1$ и вложение дерева T будет невозможно. Следовательно, длины всех цепей $m_1, \ldots, m_k$ должны быть больше 1, в частности, и минимальная из длин цепей $m_k > 1$.

Пусть u – вершина цепи минимальной длины m_k, смежная с вершиной v_1. Рассмотрим удаление вершины u. В графе $T^* - u$ вершина v_1 будет иметь степень $k - 1$, а $d(v_2) = k$. Следовательно, только вершина v_2 может быть образом корневой вершины дерева T при вложении. Из вершины v_2 выходит k цепей, однако минимальная из них будет иметь длину $m_k - 1$. Таким образом, дерево T не может вкладываться в граф $T^* - u$. Полученное противоречие показывает, что дерево T не может иметь минимального вершинного 1-расширения с k дополнительными ребрами.□

Итак, любое минимальное вершинное 1-расширение сверхстройного дерева T вида $(m_1,\ldots,m_k)$ при $k > 2$ должно отличаться от T не менее чем на $k + 1$ дополнительное ребро, должно иметь две вершины степени не ниже k, а степени остальных вершин не могут быть меньше 2. Звезды имеют минимальные вершинные 1-расширения как раз с таким числом дополнительных ребер. Существуют ли минимальные вершинные 1-расширения сверхстройных деревьев, кроме звезд, с числом дополнительных ребер $k + 1$, какими они могут быть и для каких сверхстройных деревьев это возможно?

Утверждение. *Пусть T – сверхстройное n-вершинное дерево с вектором цепей $(m_1,\ldots,m_k)$ и $k > 2$, такое, что $m_1 = 2$, а $m_k = 1$. Тогда граф T^*, полученный из этого дерева добавлением вершины и соединением ее со всеми листьями и корнем, является минимальным вершинным 1-расширением дерева T.*

Доказательство. Заметим, что граф T^*, построенный по схеме из доказываемого утверждения, будет иметь вектор степеней $((k + 1)^2, 2^{n-1})$ и отличается от дерева T на $k + 1$ дополнительных ребер. Покажем, что граф T^* является вершинным 1-расширением дерева T, тогда минимальность будет следовать из теоремы 2.6.3.

В графе T^* все вершины делятся на три группы подобных вершин: вершины v_1 и v_2 степени $k + 1$, вершины смежные и с v_1, и с v_2 (вершины из цепей длины 1) и вершины смежные либо с v_1, либо с v_2 (вершины из цепей длины 2).

При удалении вершины v_1 или v_2 получаем граф, изоморфный T, и вложение очевидно.

При удалении вершины u, смежной и с v_1, и с v_2, вложение строится следующим образом: вершина v_1 – корень, вершина v_2 – заменяет удаленную вершину u и образовывает цепь длины 1, а остальные вершины остаются без изменений.

При удалении вершины v, смежной либо с v_1, либо с v_2, вложение строится следующим образом. Пусть для определенности вершина v смежна с вершиной v_2, а w – другая смежная с v вершина: вершина v_1 – корень, вершина v_2 заменяет удаленную вершину v и образовывает цепь v_1, v, w длины 2, а остальные вершины остаются без изменений.□

Таким образом, существуют сверхстройные деревья с вектором степеней вида $(k,2^m,1^k)$, которые имеют минимальные вершинные 1-расширения с $k+1$ дополнительным ребром и вектором степеней $((k+1)^2,2^{m+k})$. На основании проведенного вычислительного эксперимента (Абросимов, Комаров, 2010, *б*) были проанализированы все 67 сверхстройных деревьев с количеством вершин от 4 до 10. Большинство из них (57) имеют минимальные вершинные 1-расширения с числом дополнительных ребер $k+1$. Только у 9 минимальные вершинные 1-расширения имеют $k+2$ дополнительных ребра (это деревья (5,1,1), (6,1,1), (3,3,2), (5,1,1,1), (6,1,1,1), (7,1,1), (5,3,1), (3,2,2,2), (5,2,2)), и у одного дерева – $k+3$ (это дерево имеет вид (3,3,3)). Дерево (5,3,1) примечательно тем, что у него 117 неизоморфных минимальных вершинных 1-расширений.

Определим, какие еще вектора степеней могут быть у минимальных вершинных 1-расширений сверхстройных деревьев с $k+1$ дополнительным ребром. Любой такой вектор с учетом рассмотренных выше ограничений на степени вершин минимального вершинного 1-расширения должен мажорировать вектор $(k,k,2^{m+k})$, который описывает граф, отличающийся от заданного дерева на k дополнительных ребер. Это означает, что мы можем добавить две единицы к компонентам такого вектора. Таким образом, кроме вектора степеней $((k+1)^2,2^{m+k})$ возможны еще три: $(k+1,k,3,2^{m+k-1})$, $(k^2,3^2,2^{m+k-2})$ и $(k^2,4,2^{m+k-1})$. При $k=3$ первый и последний вектора совпадают. На рис. 2.6.1 представлены все минимальные вершинные 1-расширения сверхстройного дерева (2,1,1) с векторами степеней трех оставшихся видов: (4,4,2,2,2), (4,3,3,2,2) и (3,3,3,3,2).

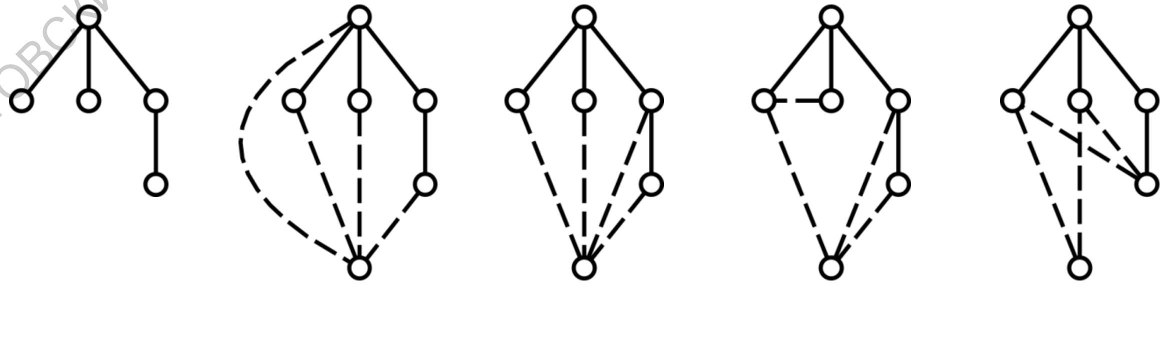


Рис. 2.6.1. МВ-1Р сверхстройного дерева (2,1,1)

Покажем, что никакое сверхстройное дерево при $k > 3$ не может иметь минимальное вершинное 1-расширение с векторами степеней $(k^2,4,2^{m+k-1})$ и $(k^2,3^2,2^{m+k-2})$.

Вектор $(k^2,4,2^{m+k-1})$

ТЕОРЕМА 2.6.4. *Не существует сверхстройных деревьев вида* $(m_1,\ldots,m_k)$ *и* $k > 3$*, минимальное вершинное* 1*-расширение которых имеет вектор степеней вида* $(k^2,4,2^{m+k-1})$.

Доказательство. В самом деле, предположим, что T – сверхстройное дерево вида $(m_1,\ldots,m_k)$ и $k > 3$, а T^* – его минимальное вершинное 1-расширение с вектором степеней $(k^2,4,2^{m+k-1})$. Обозначим для определенности через v_1 и v_2 вершины степени k, а через v – вершину степени 4 в графе T^*. Рассмотрим граф $T^* - v_1$. Вместе с вершиной v_1 удаляется k ее ребер, поэтому граф $T^* - v_1$ допускает вложение дерева T и отличается от него на одно ребро. Добавление одного ребра к дереву T с вектором степеней $(k,2^m,1^k)$ не может привести к появлению отличной от корневой вершины степени 4. При вложении дерева T в граф $T^* - v_1$ образом корневой вершины дерева T может быть или вершина v_2, или при $k = 4$ вершина v.

Рассмотрим сначала случай $k > 4$. Образом корневой вершины дерева T может быть только вершина v_2, а вершина v должна иметь степень меньше 4. Это означает, что вершины v и v_1 в графе T^* должны быть смежны. Аналогично рассмотрев граф $T^* - v_2$, приходим к выводу, что вершины v и v_2 в графе T^* также должны быть смежны. Но тогда в графе $T^* - v$ все вершины будут иметь степень меньше k, и вложение дерева T будет невозможно.

Остается рассмотреть случай $k = 4$. Граф T^* будет иметь вектор степеней $(4^3,2^{m+k-1})$. Обозначим через v_1, v_2 и v_3 вершины степени 4. Рассмотрим удаление одной из этих вершин, например v_1. Так как T^* является минимальным вершинным 1-расширением дерева T, то в графе $T^* - v_1$ должна остаться хотя бы одна вершина степени 4, следовательно, вершина v_1 не может быть смежна одновременно с v_2 и v_3. С другой стороны, в графе $T^* - v_1$, как было установлено ранее, не может остаться две вершины степени 4. Это означает, что вершина v_1 должна быть смежна либо с v_2, либо с v_3. Пусть для определенности вершина v_1 смежна с v_2 и несмежна с v_3. Повторяя рассуждения для графа $T^* - v_3$, мы приходим к выводу, что вершины v_2 и v_3 должны быть смежны, то есть вершина v_2 будет смежна и с v_1, и с v_3. Но тогда в графе $T^* - v_2$ не будет вершин степени выше 3, и вложение исходного дерева T будет невозможно. □

При $k = 3$ вектор $(k^2,4,2^{m+k-1})$ совпадает с вектором $(k + 1,k,3,2^{m+k-1})$, поэтому с учетом теоремы 2.6.4 вектор $(k^2,4,2^{m+k-1})$ не представляет интереса для поиска минимальных вершинных 1-расширений сверхстройных деревьев.

Вектор (k^2,3^2,2^{m+k-2})

ТЕОРЕМА 2.6.5. *Не существует сверхстройных деревьев вида* (m_1,…,m_k) *и* $k > 3$, *минимальное вершинное* 1-*расширение которых имеет вектор степеней вида* (k^2,3^2,2^{m+k-2}).

Доказательство. В самом деле, предположим, что T – сверхстройное дерево вида (m_1,…,m_k) и $k > 3$, а T^* – его минимальное вершинное 1-расширение с вектором степеней (k^2,3^2,2^{m+k-2}). Обозначим для определенности через v_1 и v_2 вершины степени k в графе T^*.

Очевидно, что вершины v_1 и v_2 не могут быть смежными. Если бы это было так, то в графе $T^* - v_2$ не было бы вершин степени k. Аналогично в графе T^* не может быть вершины, смежной одновременно с v_1 и v_2. Если бы была такая вершина w, то в графе $T^* - w$ вершины v_1 и v_2 имели бы степень $k - 1$ и вложение дерева T было бы невозможно.

Рассмотрим граф $T^* - v_2$. Вместе с вершиной v_2 удаляется k ее ребер, поэтому граф $T^* - v_2$ допускает вложение дерева T и отличается от него на одно ребро. Рассмотрим, какой вид может иметь граф $T^* - v_2$ (рис. 2.6.2, *а*). Возможны три случая, схематично представленные на рис. 2.6.2, *б–г*. В графе $T^* - v_2$ может быть k, $k - 1$ или $k - 2$ вершин степени 1 и, соответственно, 2, 1 или 0 вершин степени 3.

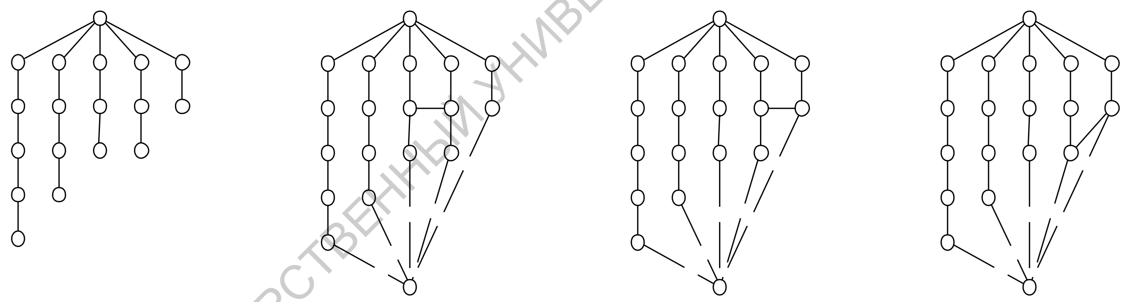


Рис. 2.6.2. Граф $T^* - v_2$ (*а*) и три случая для вектора (k^2,3^2,2^{m+k-2}) (*б–г*)

Исследуем каждый случай.

Случай 1 (см. рис. 2.6.2, *б*). Обозначим через l_1, …, l_k длины цепей, выходящих из вершины степени k (это вершина v_1) и заканчивающихся вершиной степени 1. Так как дерево T^* вкладывается в граф $T^* - v_2$, то, не ограничивая общности, получаем, что $m_1 = l_1 - 1$, …, $m_k = l_k - 1$. Как было установлено ранее $l_k > 2$, а следовательно, $m_k > 1$, то есть в сверхстройном дереве T не может быть цепи длины 1.

Обозначим через v вершину, смежную с вершиной v_2 в цепи длины l_k (то есть в кратчайшей цепи, соединяющей вершины v_1 и v_2). Рассмотрим граф $T^* - v$. По предположению дерево T должно вкладываться в граф $T^* - v$. Однако в графе $T^* - v$ вершина v_2 имеет степень $k - 1$ и, следовательно, образом корневой вершины дерева T при вложении может быть только вершина v_1. Однако из нее выходит цепь длины $m_k - 1$, которая меньше любой цепи в дереве T. Таким образом, этот случай исключается.

Случай 2 (см. рис. 2.6.2, *в*). Обозначим через $l_1, \dots, l_{k-1}$ длины цепей, выходящих из вершины степени k (это по-прежнему вершина v_1) и заканчивающихся вершиной степени 1. Через l_k обозначим длину последней цепи, выходящей из вершины v_1 и заканчивающейся вершиной, смежной с единственной вершиной степени 3. Далее, повторяя рассуждения первого случая, приходим к выводу, что и этот случай не возможен.

Случай 3 (см. рис. 2.6.2, *г*). Заметим, что в этом случае вершина v_2 в графе T^* смежна с двумя вершинами степени 3. В силу отмеченного свойства графа T^* вершина v_1 тогда не может быть смежна ни с одной из вершин степени 3, то есть граф $T^* - v_1$ будет попадать под случай 1, и случай 3 также должен быть исключен.

Таким образом, были рассмотрены все три возможных случая, и оказалось, что ни в одном из них граф T^* не является вершинным 1-расширением дерева T. □

Полученный результат означает, что если сверхстройное дерево вида $(m_1,\dots,m_k)$ и имеет минимальное вершинное 1-расширение с вектором степеней вида $(k^2,3^2,2^{m+k-2})$, то это возможно только при $k = 3$. Такие сверхстройные деревья существуют, и далее одно из них будет использовано в качестве контрпримера.

Вектор $((k + 1)^2,2^{m+k})$

Как мы уже убедились, существуют сверхстройные деревья, у которых минимальные вершинные 1-расширения имеют вектор степеней вида $((k + 1)^2,2^{m+k})$. Следующая теорема дает полное описание сверхстройных деревьев, у которых минимальные вершинные 1-расширения имеют такой вид.

ТЕОРЕМА 2.6.6. *Пусть T – сверхстройное дерево вида $(m_1,\dots,m_k)$ и $k > 2$. Дерево T тогда и только тогда имеет минимальное вершинное 1-расширение с $k + 1$ дополнительным ребром и вектором степеней $((k + 1)^2,2^{m+k})$, когда выполняется условие*

$$(\forall\ i = 1,\dots,k : m_i > 1)\ (\forall\ j = 2,\dots,m_i)\ (\exists 1 \le l \le k)\ (m_l = j - 1 \vee m_l = m_i - j) \quad (*)$$

Доказательство. Заметим, что если в сверхстройном дереве длины всех цепей равны 1, то есть дерево является звездой, то условие (*) выполняется. Обозначим через T сверхстройное дерево вида $(m_1,\dots,m_k)$ и $k > 2$ с корневой вершиной v, а через T^* – граф, получающийся добавлением к дереву T вершины и соединением ее с вершиной v и всеми листьями T. Граф

T^* будет иметь вектор степеней $((k+1)^2, 2^{m+k})$. Обозначим две смежные вершины степени $k+1$ через v_1 и v_2.

Необходимость. Пусть граф T^* является минимальным вершинным 1-расширением дерева T. Покажем, что высказывание (*) истинно. Рассмотрим одну из ветвей дерева T – цепь P_{m_i}. Перенумеруем ее вершины: $v_1, v_{i1}, \ldots, v_{ir}$. В графе T^* вершина v_{ir} соединена ребром с вершиной v_2 по построению. Рассмотрим удаление некоторой вершины v_{ij}. Граф $T^* - v_{ij}$ имеет в точности две вершины степени не ниже k: v_1 и v_2. Следовательно, только одна из них может быть корнем дерева. Из вершины v_1 выходит начальный фрагмент цепи P_{m_i} – цепь длины $j-1$. Из вершины v_2 выходит концевой фрагмент цепи P_{m_i} – цепь длины $m_i - j$. Если v_1 будет корнем дерева, изоморфного T, тогда из нее выходит цепь длины $j-1$, а если v_2 – то $m_i - j$. Следовательно, цепь одной из этих длин должна существовать в дереве T. Так как цепь P_{m_i} и ее вершина v_{ij} выбраны произвольно, то и получается формула (*).

Достаточность. Пусть высказывание (*) верно. Покажем, что T^* является минимальным вершинным 1-расширением дерева T. Убедимся в том, что T^* является вершинным 1-расширением. Очевидно, что T вкладывается в $T^* - v_1$ и $T^* - v_2$. Рассмотрим удаление вершины v_{ij} некоторой цепи P_{m_i}. Не ограничивая общности, будем считать, что $i = 1$. Покажем, что дерево T вкладывается в $T^* - v_{1j}$. Граф $T^* - v_{1j}$ имеет в точности две вершины степени не ниже k: v_1 и v_2. Следовательно, только одна из них может быть корнем дерева. Из вершины v_1 выходит начальный фрагмент цепи P_{m_1} – цепь длины $j-1$. Из вершины v_2 выходит концевой фрагмент цепи P_{m_1} – цепь длины $m_1 - j$. Кроме того, вершины v_1 и v_2 соединены $k-1$ цепями, длины которых $m_2 + 1, \ldots, m_k + 1$.

Если $j = 1$, тогда вложение получается следующим образом: v_1 – корень, цепь $v_1, v_2, v_{1m_1}, \ldots, v_{12}$ – цепь длины m_1. Остальные цепи составляются из вершин цепей $P_{m_2}, \ldots, P_{m_k}$.

Если $j = m_1$, то аналогично предыдущему случаю вложение получается так: v_2 – корень, цепь $v_2, v_1, v_{12}, \ldots, v_{1m_1}$ – цепь длины m_1. Остальные цепи составляются из вершин цепей $P_{m_2}, \ldots, P_{m_k}$, начиная от v_2, в обратном порядке.

Пусть $j \neq 1$ и $j \neq m_1$. По условию существует цепь, например P_{m_2}, такая что ее длина равна или $j-1$ или $m_1 - j$. В первом случае v_1 – корень, начало цепи P_{m_1} – цепь длины $j-1$, а цепь $v_1, v_{21}, v_{2(j-1)}, v_2, v_{1m_1}, \ldots, v_{1(j+1)}$

имеет длину m_1. Остальные цепи составляются из вершин цепей $P_{m_2},\ldots,P_{m_k}$. Во втором случае v_2 – корень, конец цепи P_{m_1}, начиная с вершины v_2 – цепь длины $m_1 - j$, а цепь $v_2, v_{2m_1},\ldots,v_{21}, v_1, v_{11},\ldots,v_{1(j-1)}$ имеет длину m_1. Остальные цепи составляются из вершин цепей $P_{m_2},\ldots,P_{m_k}$, начиная от v_2, в обратном порядке.

Таким образом, граф T^* является вершинным 1-расширением дерева T, причем отличается от дерева T на $k+1$ дополнительное ребро. По теореме 2.6.3 дерево T не может иметь расширения с k дополнительными ребрами и, следовательно, граф T^* является минимальным вершинным 1-расширением дерева T. □

Замечание. Условие в формулировке теоремы означает, что если мы занумеруем, начиная от корня, все вершины цепи с длиной m_i сверхстройного дерева, то для каждой вершины с номером j в этой цепи должна найтись или цепь длины $j-1$, или цепь длины $m_i - j$. При этом считаем, что цепь длины 0 в дереве есть, поэтому достаточно рассмотреть все вершины цепи, кроме первой и последней. Например, рассмотрим сверхстройное дерево с вектором цепей (4,1,1). Проверим, что условие выполняется для большей цепи:

$j = 2$: цепь длины 1 в дереве есть;

$j = 3$: цепи длины 2 в дереве нет, но цепь длины $4-3=1$ в дереве есть.

Таким образом, деревья (2,1,1), (3,1,1) или (4,1,1) подходят под условие теоремы. А вот сверхстройное дерево (5,1,1) – не подходит, так как для вершины v_{13} с номером $j = 3$ цепи длины 5 в дереве нет подходящей цепи длины 2 (рис. 2.6.3, *а*). Из 67 сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 включительно 57 имеют минимальное вершинное 1-расширение, отличающееся на $k+1$ дополнительное ребро. Из них только 3 дерева не попадают под действие теоремы 2.6.6. Это сверхстройные деревья с векторами цепей (5,1,1), (3,2,2) и (4,3,2).

По построению минимального вершинного 1-расширения с вектором степеней $((k+1)^2, 2^{m+k})$ очевидно

Следствие. *Пусть T – сверхстройное дерево вида $(m_1,\ldots,m_k)$ и $k > 2$. Если дерево T имеет минимальное вершинное 1-расширение с $k+1$ дополнительным ребром и вектором степеней $((k+1)^2, 2^{m+k})$, то оно имеет только одно минимальное вершинное 1-расширение с таким вектором степеней.*

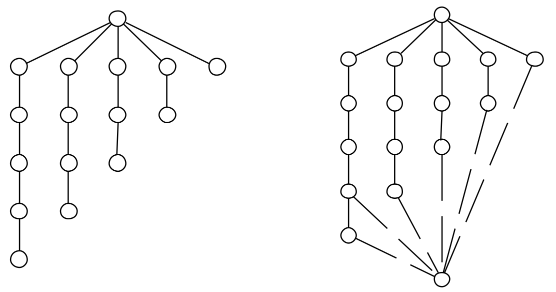
Вектор (k + 1,k,3,2^{m+k-1})

Полного описания данного семейства пока не известно. Рассмотрим некоторые общие идеи построения минимального вершинного 1-расширения по данной схеме. Пусть T – сверхстройное дерево вида ($m_1,\ldots,m_k$), а T^* – минимальное вершинное 1-расширение дерева T с вектором степеней ($k + 1,k,3,2^{m+k-1}$). Граф T^* отличается от дерева T на $k + 1$ дополнительных ребер. Обозначим через u вершину степени $k + 1$, а через v – вершину степени k.

Рассмотрим граф $T^* - u$. Удаление вершины u приводит к удалению $k + 1$ ребер, то есть в получившемся графе будет столько же ребер, сколько и в дереве T. По предположению, дерево T должно вкладываться в граф $T^* - u$, а раз количество ребер одинаково, то граф $T^* - u$ изоморфен дереву T. Это значит, что построение графа T^* можно себе представить следующим образом. Добавляется вершина u, которая соединяется с k листьями дерева T и еще одним ребром с вершиной степени 2. Таким образом, кандидатов на минимальное вершинное 1-расширение n-вершинного сверхстройного дерева T с вектором степеней ($k + 1,k,3,2^{m+k-1}$) будет менее чем $n - k - 1$ штук (очевидно, что достаточно рассматривать по одному представителю от цепей одинаковой длины). Предположим, что последнее ребро соединяет вершину u с некоторой вершиной w степени 2 в цепи длины m_1. Если назначить номера вершинам этой цепи, начиная с вершины, смежной с вершиной v, то пусть номер вершины w будет j. Тогда вершины u и v соединены $k - 1$ цепью длины $m_i + 1$, $i = 2,\ldots,n$. Помимо этих цепей из вершины v выходит цепь длины j, конец которой смежен с вершиной u, и кроме ребра $\{u,w\}$, вершины u и w соединены цепью длины $m_1 - j$. Рассмотрим удаление вершины v_{i1}, смежной с вершиной v в некоторой цепи m_i. По предположению дерево T вкладывается в получившийся граф. Образом корневой вершины может быть только вершина u, которая имеет в графе $T^* - v_{i1}$ степень $k + 1$. Из вершины u в графе $T^* - v_{i1}$ выходит цепь длины $m_i - 1$, следовательно, в дереве T также должна быть цепь такой длины. Проведенные рассуждения позволяют предложить одно семейство сверхстройных деревьев, представители которого имеют минимальные вершинные 1-расширения с вектором степеней ($k + 1,k,3,2^{m+k-1}$).

ТЕОРЕМА 2.6.7. *Пусть T – сверхстройное дерево вида ($m_1,\ldots,m_k$) и $k > 2$ такое, что $m_i - m_{i+1} \le 1, i = 1,\ldots,k-1$. Тогда граф, получающийся из дерева T добавлением одной вершины, соединением ее с листьями дерева T и одной вершиной, смежной с листом, будет являться минимальным вершинным 1-расширением дерева T.*

Доказательство. Покажем, что граф T^*, описанный в формулировке теоремы, будет являться вершинным 1-расширением дерева T, а минимальность будет следовать из теоремы 2.6.3. Обозначим, как и ранее, в графе T^* через u вершину степени $i + 1$, а через v – вершину степени k. Не ограничивая общности, будем считать, что при построении графа T^* добавленная вершина была соединена с предпоследней вершиной цепи $m_l > 1$: $v_{l(m_l-1)}$ (см. рис. 2.6.3, *б*).



а *б*

Рис. 2.6.3. Дерево (5,4,3,2,1) (*а*) и схема построения для вектора $(k+1,k,3,2^{m+k-1})$ (*б*)

Убедимся, что при удалении любой вершины графа T^* дерево T можно будет вложить в получившийся граф. Для графов $T^* - u$ и $T^* - v$ вложение дерева T очевидно. Далее исследуем удаление произвольной вершины v_{ij} цепи длины m_i. Как и ранее, j – это номер вершины в цепи, начиная от вершины, смежной с вершиной v.

Рассмотрим удаление вершины v_{im_i} цепи $m_i = 1$, то есть вершины цепи длины 1. Вложение строится следующим образом. Ребро $\{v_{lm_l}, u\}$ соответствует цепи m_k длины 1. Цепи m_l будет соответствовать цепь $u, v_{lm_{l-1}}, \ldots, v_{l1}, v$. Все остальные цепи, выходящие из вершины u, будут соответствовать цепям исходного дерева T. Вложение построено.

Рассмотрим удаление вершины v_{i1} цепи $m_i > 1, i \neq l$, смежной с вершиной v. Вложение строится следующим образом. Вершина u соответствует корню дерева T. Остаток цепи m_i будет иметь длину $m_i - 1$ и соответствовать цепи подходящей длины дерева T. Цепи длины m_i дерева T будет соответствовать цепь длины $m_i - 1$ с вершиной v. Все остальные цепи, выходящие из вершины u, будут соответствовать цепям исходного дерева T. Вложение построено.

Рассмотрим удаление вершины v_{im_i} цепи $m_i > 1, i \neq l$, смежной с вершиной u. Вложение строится следующим образом. Вершина u соответствует корню дерева T. Ребро $\{v_{lm_l}, u\}$ соответствует цепи m_k длины 1. Цепь m_k вместе с ребром $\{v_{k1}, u\}$ и остатком цепи m_i от вершины v длины $m_i - 2$ образуют цепь длины m_i. Цепи m_l будет соответствовать цепь $u, v_{lm_{l-1}}, \ldots, v_{l1}$. Все остальные цепи, выходящие из вершины u, будут соответствовать цепям исходного дерева T. Вложение построено.

Рассмотрим удаление вершины v_{lm_l} цепи m_l, смежной с вершиной u. Вложение очевидно и строится следующим образом. Вершина u соответстствует корню дерева T. Цепи m_l будет соответствовать цепь $u, v_{lm_{l-1}}, \ldots, v_{l1}, v$. Все остальные цепи, выходящие из вершины u, будут соответствовать цепям исходного дерева T. Вложение построено.

Рассмотрим удаление вершины $v_{l(m_l-1)}$ цепи m_l, смежной с вершиной u. Вложение очевидно и строится следующим образом. Вершина u соответствует корню дерева T. Ребро $\{v_{lm_l}, u\}$ соответствует цепи m_k длины 1. Цепи m_l будет соответствовать цепь, оставшаяся часть цепи m_l до вершины v длины $m_l - 2$, цепь m_k длины 1 с ребром, соединяющим конец цепи с вершиной u. Все остальные цепи, выходящие из вершины u, будут соответствовать цепям исходного дерева T. Вложение построено.

Рассмотрим удаление произвольной вершины v_{ij} цепи m_i, не относящейся ни к одному из рассмотренных ранее случаев. Вложение строится следующим образом. Вершина v соответствует корню дерева T. Остаток цепи m_i от вершины v будет иметь длину $j - 1$ и соответствовать цепи подходящей длины дерева T. Цепь длины $j - 1$ вместе с вершиной u и остатком цепи m_i от вершины u будет соответствовать цепи m_i. Все остальные цепи, выходящие из вершины u, будут соответствовать цепям исходного дерева T. Вложение построено.

Таким образом, граф T^*, построенный по описанной схеме, действительно является вершинным 1-расширением сверхстройного дерева T из условия теоремы, а в силу теоремы 2.6.3 и его минимальным вершинным 1-расширением. □

Следствие 1. *Пусть T – сверхстройное дерево вида* $(m_1,\ldots,m_k)$ *и* $k > 2$ *такое, что* $m_i - m_{i+1} \le 1, i = 1,\ldots,k-1$. *Тогда дерево T имеет, по крайней мере,* m_1 *различных минимальных вершинных* 1*-расширений, отличающихся от T на* $k + 1$ *дополнительное ребро.*

Доказательство. Из теоремы 2.6.7 следует, что различных минимальных вершинных 1-расширений с вектором степеней $(k+1, k, 3, 2^{m+k-1})$ будет, по крайней мере, столько, сколько есть различных цепей длины отличной от 1, то есть $m_1 - 1$. Заметим, что дерево из условия также попадает и под действие теоремы 2.6.6, что дает еще одно минимальное вершинное 1-расширение с вектором степеней $((k+1)^2, 2^{m+k})$. Итого получается, что количество минимальных вершинных 1-расширений не менее чем m_1. □

Рассмотрим сверхстройное дерево T, являющееся объединением цепей длины 1 и 2, среди которых есть хотя бы одна цепь длины 1 и хотя бы одна цепь длины 2. Такое дерево попадает под условие и теоремы 2.6.6, и теоремы 2.6.7. А с учетом теоремы 2.6.5 получается

Следствие 2. *Пусть сверхстройное дерево T является объединением* k $(k > 3)$ *цепей длинами не более* 2, *среди которых есть хотя бы одна цепь* *длины* 1 *и хотя бы одна цепь длины* 2*. Тогда дерево* T *имеет в точности два неизоморфных минимальных вершинных* 1*-расширения, которые строятся по схемам из теорем* 2.6.6 *и* 2.6.7.

Верхняя оценка

Вспомним, что любой граф имеет тривиальное k-расширение: добавим к данному графу k вершин и соединим их ребрами между собой и со всеми вершинами графа. Число дополнительных ребер тривиального k-расширения любого графа G составит $k(k-1)/2 + nk$, где n – число вершин графа G. Тривиальное вершинное k-расширение позволяет получить простейшую верхнюю оценку для числа дополнительных ребер минимального вершинного k-расширения произвольного графа. При $k = 1$ получаем, что число дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения произвольного n-вершинного графа не более n.

В работе (Harary, Khurum, 1995) было высказано более сильное утверждение по сравнению с теоремой 2.6.6. Прежде чем перейти к его формулировке, дадим одно определение. Вершина v_{ij} сверхстройного дерева T называется *сложной*, если среди длин цепей дерева T нет цепи длины $j-1$ или $m_i - j$. В теореме 2.6.6 рассматриваются сверхстройные деревья без сложных вершин. Сверхстройное дерево (5,1,1) из предыдущего примера имеет одну сложную вершину – вершину v_{13}.

Утверждение (Harary, Khurum, 1995**).** *Минимальное вершинное* 1*-расширение сверхстройного дерева с* k *цепями и* p *сложными вершинами содержит в точности* $k + p + 1$ *дополнительных ребер*.

При $p = 0$ приведенное утверждение совпадает с теоремой 2.6.6. Однако при $p > 0$ схема доказательства в работе (Harary, Khurum, 1995) исследует вариацию вершинного 1-расширения с вектором $((k+1)^2, 2^{m+k})$. Пусть v_{ij} – сложная вершина, тогда предлагается добавить ребро из вершины старшей степени в вершину $v_{i(j-1)}$. Далее авторы статьи утверждают, что построенный граф будет являться минимальным вершинным 1-расширением заданного сверхстройного дерева. Однако ниже будет показано, что в общем случае построенный граф будет являться вершинным 1-расширением, но не обязательно минимальным.

Как было указано ранее, из 67 сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 есть деревья, которые не попадают под действие теоремы 2.6.6, но имеют $k + 1$ дополнительное ребро. Оказывается, что все они являются контрпримерами к утверждению (Harary, Khurum, 1995).

Сверхстройное дерево (5,1,1) имеет одну сложную вершину, но имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$, отличающееся на 4 дополнительных ребра.

Сверхстройное дерево (3,2,2) также имеет одну сложную вершину, но имеет 2 минимальных вершинных 1-расширения вида $(k^2,3^2,2^{m+k-2})$ и одно вида $((k+1),k,3,2^{m+k-1})$, отличающиеся на 4 дополнительных ребра.

Наконец, сверхстройное дерево (4,3,2) имеет одну сложную вершину, но имеет 4 минимальных вершинных 1-расширения вида $(k^2,3^2,2^{m+k-2})$, отличающиеся на 4 дополнительных ребра.

Еще один интересный пример представляет собой сверхстройное дерево (5,2,2). Можно заметить, что оно имеет 2 сложные вершины, но его 37 минимальных вершинных 1-расширений отличаются на 5, а не на 6 дополнительных ребер. Аналогичная ситуация с деревьями (6,1,1) или (3,3,2), у которых также по две сложные вершины, но минимальные вершинные 1-расширения отличаются на 5 дополнительных ребер.

Самое большое отклонение среди всех сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 наблюдается на сверхстройном дереве (7,1,1). Непосредственной проверкой можно убедиться, что оно имеет 3 сложные вершины, но его 8 минимальных вершинных 1-расширений отличаются на 5, а не на 7 дополнительных ребер. Можно предположить, что на сверхстройных деревьях вида (t,1,1) (количество сложных вершин в таких деревьях составляет $t-3$, при $t>3$) при увеличении t отклонение будет возрастать.

Каждый из этих контрпримеров показывает ошибочность утверждения в общем случае. Исследуем первый контрпример более подробно.

Пример. Рассмотрим сверхстройное дерево T с вектором цепей (5,1,1). На рис. 2.6.4, *а* изображено это дерево. Непосредственной проверкой убеждаемся, что единственной сложной вершиной является вершина v_{13} – вершина цепи длины 5. Действительно, в дереве T нет цепи длины 2 ($j-1=3-1=2$, $m_1-j=5-3=2$). На рис. 2.6.4, *б* изображено вершинное 1-расширение, построенное по предлагаемой в работе (Harary, Khurum, 1995) схеме. Это расширение отличается на 5 дополнительных ребер. На самом деле это вершинное 1-расширение не является минимальным, и на рис. 2.6.4, *в* изображено единственное минимальное вершинное 1-расширение дерева T с вектором степеней $(3^4,2^5)$, которое отличается на 4 дополнительных ребра. Пунктирными линиями обозначаются добавленные вершина и ребра.

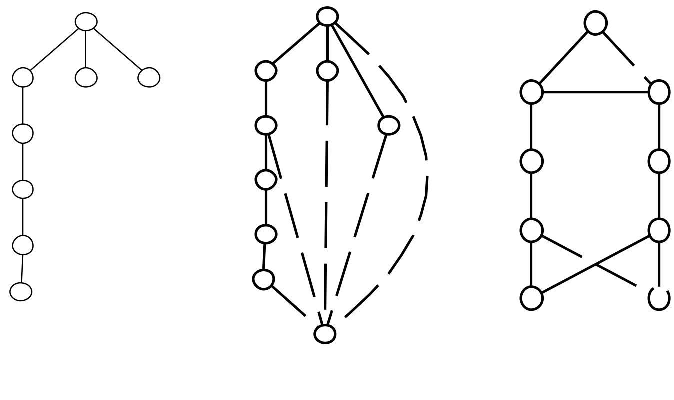


Рис. 2.6.4. Сверхстройное дерево (5,1,1) (*а*) и два его вершинных 1-расширения (*б*, *в*)

Убедимся, что граф на рис. 2.6.4, *в* действительно является вершинным 1-расширением сверхстройного дерева (5,1,1). В силу очевидной симметрии достаточно рассмотреть графы, получающиеся при удалении верхней вершины и вершин, расположенных слева от нее. На рис. 2.6.5 показано вложение рассматриваемого дерева при удалении соответствующих вершин. Толстой линией выделена вершина, являющая образом корневой вершины, а лишние ребра обозначаются пунктирными линиями. Доказательство минимальности следует из теоремы 2.6.3.

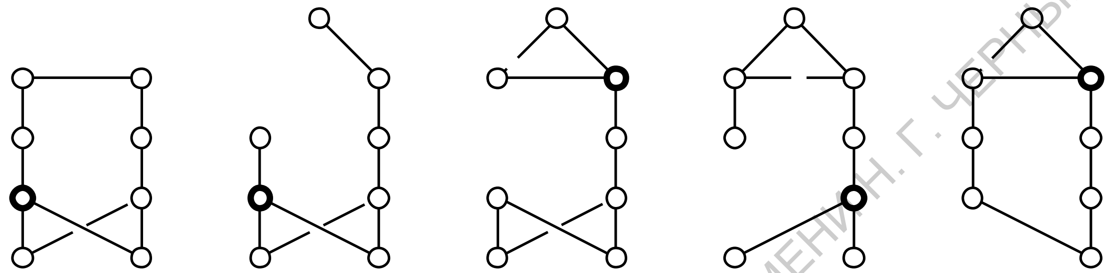


Рис. 2.6.5. Вложение дерева (5,1,1)

Ошибка в работе (Harary, Khurum, 1995) состояла в том, что исследовалась лишь схема $((k+1)^2, 2^{m+k})$, а другие возможности не рассматривались. То есть исследовалась схема, в которой добавляется одна вершина и соединяется ребрами с остальными. Напомним, что вершинное k-расширение графа G называется T-неприводимым, если оно является частью тривиального k-расширения графа G, но никакая его собственная часть не является вершинным k-расширением графа G. По сути, авторы работы (Harary, Khurum, 1995) описали T-неприводимые 1-расширения сверхстройных деревьев, однако с точки зрения минимальных вершинных 1-расширений этот результат может использоваться лишь как верхняя оценка. Следует отметить, что существуют сверхстройные деревья с $p > 0$, на которых эта верхняя оценка достигается. Например, сверхстройное дерево (5,1,1,1) имеет одну сложную вершину и 6 минимальных вершинных 1-расширений, отличающихся на 6 дополнительных ребер. Одно из этих расширений имеет указанный в работе (Harary, Khurum, 1995) вид. Аналогичная ситуация для сверхстройного дерева (6,1,1). Таким образом, нижняя и верхняя оценки для числа дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения произвольного сверхстройного дерева с k цепями и p сложными вершинами являются достижимыми, и можно сформулировать полученный результат:

$$k+1 \le ec(T) \le k+p+1.$$

2.7. Орграфы

Основные определения, связанные с расширениями графов, которые были сформулированы в первом параграфе этой главы для неориентированных графов, без изменений могут быть перенесены и на ориентированные графы. Леммы 2.1.1–2.1.5 можно применять и к орграфам, кроме этого докажем леммы, специфические для орграфов.

ЛЕММА 2.7.1. *Если минимальная из полустепеней исхода* (*захода*) *вершин графа* G *есть* $d > 0$, *то его минимальное* k-*расширение не содержит вершин с полустепенью исхода* (*захода*) *ниже* $d + k$.

ЛЕММА 2.7.2. *Если орграф имеет* s *петель, то его вершинное* k-*расширение имеет не менее* $k + s$ *петель.*

Доказательство. Пусть дан орграф G из условия соответствующей леммы, а G^* – некоторое его минимальное вершинное k-расширение.

1. Пусть G^* имеет вершину v со степенью исхода (захода) ниже $d + k$. Рассмотрим подграф, получающийся из G^* удалением k смежных с v вершин (если $d(v) < k$, то в этом случае можно удалить все смежные с ней вершины и подходящее количество любых других вершин, кроме v). Он будет содержать вершину со степенью исхода (захода) ниже d и в него нельзя будет вложить граф G.
2. Если бы число вершин с петлями в G^* было бы меньше $k + s$, то, удалив k из них, был бы получен граф, содержащий менее s вершин с петлями, и в него нельзя было бы вложить орграф G.□

Следующая лемма устанавливает интересную связь между минимальными вершинными k-расширениями неориентированных и ориентированных графов. Напомним, что *симметризацией* ориентированного графа $\vec{G} = (V, \alpha)$ называется неориентированный граф $G = (V, \alpha^*)$, получающийся заменой дуг ребрами и удалением петель:

ЛЕММА 2.7.3. *Пусть* $\overrightarrow{G^*}$ – *минимальное вершинное* k-*расширение орграфа* $\vec{G}$. *Тогда симметризация орграфа* $\overrightarrow{G^*}$ *является вершинным* k-*расширением симметризации орграфа* $\vec{G}$.

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{G^*} = (V^*, \alpha^*)$ – минимальное вершинное k-расширение орграфа $\vec{G} = (V, \alpha)$. Обозначим через $H^* = (V^*, \beta^*)$ симметризацию орграфа $\overrightarrow{G^*}$, а через $H = (V, \beta)$ – симметризацию орграфа $\vec{G}$. Выберем произвольный набор F, состоящий из k вершин орграфа $\overrightarrow{G^*}$. По определению орграф $\overrightarrow{G^*}-F$, который получается удалением из $\overrightarrow{G^*}$ всех вершин, входящих в F вместе с дугами, допускает вложение орграфа $\overrightarrow{G}$. Это означает, что существует биекция $f: V \to V^* - F$, такая что:

$$(\forall\, u,v \in V)((u,v) \in \alpha) \Rightarrow ((f(u), f(v)) \in \alpha^*).$$

По определению симметризации наличие дуг (u,v) и $(f(u),f(v))$ в орграфах $\overrightarrow{G}$ и $\overrightarrow{G^*}$ означает наличие ребер $\{u,v\}$ и $\{f(u),f(v)\}$ в соответствующих симметризациях H и H^*, но тогда

$$(\forall\, u,v \in V)(\{u,v\} \in \beta) \Rightarrow (\{f(u), f(v)\} \in \beta^*),$$

то есть граф H вкладывается в граф $H^* - F$.□

Следствие 1. *Число дополнительных дуг минимального вершинного k-расширения орграфа G не менее числа дополнительных ребер минимального вершинного k-расширения симметризации орграфа G.*

Следствие 2. *Пусть граф G^* является минимальным вершинным k-расширением графа G, диграф H есть некоторая ориентация графа G, а диграф H^* есть некоторая ориентация графа G^*. Тогда если H^* является вершинным k-расширением диграфа H, то H^* является и минимальным вершинным k-расширением диграфа H.*

ТЕОРЕМА 2.7.1. *Пусть* $\overrightarrow{G^*}=(V^*,\alpha^*)$ *– точное вершинное k-расширение орграфа* $\overrightarrow{G}=(V,\alpha)$. *Тогда отношения смежности* α *и* α^* *являются одновременно либо рефлексивными, либо антирефлексивными.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{G^*}=(V^*,\alpha^*)$ – точное вершинное k-расширение орграфа $\overrightarrow{G}=(V,\alpha)$. Предположим, что отношение смежности α^* орграфа $\overrightarrow{G^*}$ не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным. Это означает, что в $\overrightarrow{G^*}$ существуют две вершины u и v такие, что в вершине u есть петля, а в вершине v – нет. Но тогда орграфы $\overrightarrow{G^*}-u$ и $\overrightarrow{G^*}-v$ содержат различное количество вершин с петлями, а значит, не могут быть изоморфны одному и тому же орграфу $\overrightarrow{G}$.□

З а м е ч а н и е . Из теоремы следует, что точное вершинное k-расширение любого графа либо не содержит петель, либо содержит петлю в каждой вершине. Пусть $\overrightarrow{G^*}$ – точное k-расширение орграфа $\overrightarrow{G}$ без петель. Построим новые орграфы $\overrightarrow{H^*}$ и $\overrightarrow{H}$, добавив петли в каждой вершине орграфов $\overrightarrow{G^*}$ и $\overrightarrow{G}$. Очевидно, что получившийся орграф $\overrightarrow{H^*}$ будет являться точным вершинным k-расширением орграфа $\overrightarrow{H}$. С учетом этого замечания далее, если не оговорено противное, будем рассматривать орграфы без петель.

ТЕОРЕМА 2.7.2. *Пусть* $\vec{G^*}$ *– точное вершинное k-расширение орграфа* $\vec{G}$. *Тогда симметризация* $\vec{G^*}$ *является точным вершинным k-расширением симметризации* $\vec{G}$.

Доказательство. Пусть $\vec{G^*} = (V^*, \alpha^*)$ – точное вершинное *k*-расширение орграфа $\vec{G} = (V, \alpha)$. Обозначим через $H^* = (V^*, \beta^*)$ симметризацию орграфа $\vec{G^*}$, а через $H = (V, \beta)$ – симметризацию $\vec{G}$. Выберем произвольный набор *F*, состоящий из *k* вершин орграфа $\vec{G^*}$. По определению орграф $\vec{G^*} - F$ изоморфен орграфу $\vec{G}$: $\vec{G^*} - F \cong \vec{G}$. Это означает, что существует изоморфизм $f: V^* - F \to V$, сохраняющий отношение смежности:

$$(\forall u,v \in V^*)((u,v) \in \alpha^*) \Leftrightarrow ((f(u), f(v)) \in \alpha).$$

По определению симметризации наличие дуг (*u*,*v*) и (*f*(*u*),*f*(*v*)) в орграфах $\vec{G^*}$ и $\vec{G}$ означает наличие ребер {*u*,*v*} и {*f*(*u*),*f*(*v*)} в соответствующих симметризациях H^* и *H*, но тогда

$$(\forall u,v \in V^*)(\{u,v\} \in \beta^*) \Leftrightarrow (\{f(u), f(v)\} \in \beta),$$

то есть $H^* - F \cong H$.□

Теорема 2.7.2 означает, что точные вершинные *k*-расширения при *k* > 1 могут иметь только такие орграфы, симметризацией которых является полный граф (или вполне несвязный граф, однако этот случай не представляет интереса).

Для неориентированных графов было показано, что дополнение графа, имеющего точное вершинное *k*-расширение, также имеет точное вершинное *k*-расширение. Аналогичное утверждение справедливо и для орграфов.

ТЕОРЕМА 2.7.3. *Пусть* $\vec{G^*}$ *– точное вершинное k-расширение орграфа* $\vec{G}$. *Тогда дополнение* $\vec{G^*}$ *является точным вершинным k-расширением дополнения* $\vec{G}$.

Доказательство. Пусть $\vec{G^*} = (V^*, \alpha^*)$ – точное вершинное *k*-расширение орграфа $\vec{G} = (V, \alpha)$. Обозначим через $\vec{H^*} = (V^*, \beta^*)$ дополнение орграфа $\vec{G^*}$, а через $\vec{H} = (V, \beta)$ дополнение $\vec{G}$. Выберем *F* – *k* произвольных вершин орграфа $\vec{G^*}$. Орграф $\vec{G^*} - F$ изоморфен $\vec{G}$: $\vec{G^*} - F \cong \vec{G}$. Это означает, что существует изоморфизм $f: V^* - F \to V$, сохраняющий отношение смежности:

$$(\forall u,v \in V^*)((u,v) \in \alpha^*) \Leftrightarrow ((f(u), f(v)) \in \alpha),$$
$$(\forall u,v \in V^*)((u,v) \notin \alpha^*) \Leftrightarrow ((f(u), f(v)) \notin \alpha),$$

откуда

$$(\forall u,v \in V^*)((u,v) \in \beta^*) \Leftrightarrow ((f(u), f(v)) \in \beta).\square$$

Обратным орграфом или *обращением орграфа* $\vec{G} = (V, \alpha)$ называется орграф $\vec{H} = (V, \beta)$, получающийся заменой ориентации всех дуг $\vec{G}$: $\beta = \alpha^{-1} = \{(u,v) \in V \times V : (v,u) \in \alpha\}$. Граф называется *самообратным*, если он изоморфен своему обращению.

ТЕОРЕМА 2.7.4. *Пусть $\vec{G^*}$ – точное вершинное k-расширение орграфа $\vec{G}$. Тогда обращение $\vec{G^*}$ является точным вершинным k-расширением обращения $\vec{G}$.*

Доказательство. Пусть $\vec{G^*} = (V^*, \alpha^*)$ – точное вершинное k-расширение орграфа $\vec{G} = (V, \alpha)$. Обозначим через $\vec{H^*} = (V^*, \beta^*)$ дополнение орграфа $\vec{G^*}$, а через $\vec{H} = (V, \beta)$ дополнение $\vec{G}$. Выберем $F - k$ произвольных вершин орграфа $\vec{G^*}$. Орграф $\vec{G^*} - F$ изоморфен $\vec{G}$: $\vec{G^*} - F \cong \vec{G}$. Это означает, что существует изоморфизм $f: V^* - F \to V$ сохраняющий отношение смежности:

$$(\forall u,v \in V^*)((u,v) \in \alpha^*) \Leftrightarrow ((f(u), f(v)) \in \alpha),$$

откуда

$$(\forall u,v \in V^*)((v,u) \in \beta^*) \Leftrightarrow ((f(v), f(u)) \in \beta).\square$$

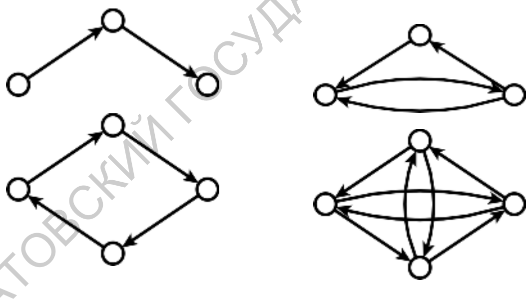


Рис. 2.7.1. Орцепь P_3, ее точное вершинное 1-расширение C_4 и их дополнения

Теорема 2.7.2 дает способ получения точных вершинных расширений орграфов заданием ориентации ребер соответствующих точных неориентированных расширений. На рис. 2.7.1 показаны ориентированная цепь P_3, ее точное вершинное 1-расширение – ориентированный цикл C_4 и их дополнения (с учетом замечания о петлях в точных расширениях, обращение совпадает с дополнением).

ТЕОРЕМА 2.7.5. *Пусть G – диграф с числом вершин большим 1, тогда его точное вершинное k-расширение, если оно есть, также будет диграфом.*

Доказательство. Пусть n-вершинный диграф G, $n > 1$, имеет точное вершинное k-расширение G^*. Предположим, что G^* не является диграфом. Тогда в G^* существует пара встречных дуг (u,v) и (v,u). Число вершин в G^* есть $n + k \geq k + 2$. Выберем набор F, состоящий из k произвольных вершин G^*, отличных от u и v. Орграф $G^* - F$ по-прежнему содержит пару встречных дуг (u,v) и (v,u) и таким образом не является диграфом, однако по предположению он должен быть изоморфен диграфу G.□

Следствие. *Из теоремы следует, что точное вершинное k-расширение турнира, если оно существует, также является турниром.*

Очевидно, что точное вершинное k-расширение графа с числом вершин большим 1 является и его минимальным вершинным k-расширением. Для неориентированных графов точное вершинное k-расширение в этом случае и единственно. Для ориентированных графов в общем случае это не так. Одновершинные орграфы O_1 и K_1 имеют по одному единственному минимальному вершинному 1-расширению и по три точных вершинных 1-расширения – O_2, T_2 и K_2 для графа O_1 (рис. 2.7.2) и те же орграфы с петлями для K_1.

Рис. 2.7.2. Граф O_1 и три его точных вершинных 1-расширения

Турнир T_2 с петлями и без имеет два минимальных вершинных 1-расширения, каждое из которых является точным (рис. 2.7.3): циклическую и транзитивную тройки. Заметим, что турниры T_2 с петлей лишь в одной вершине (любой) имеют по одному минимальному вершинному 1-расширению, но не имеют точного.

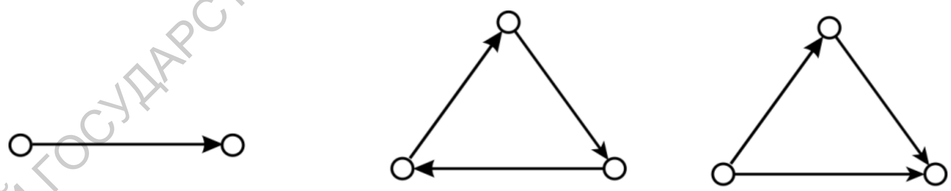


Рис. 2.7.3. Турнир T_2 и два его точных вершинных 1-расширения

2.7.1. Турниры

ТЕОРЕМА 2.7.6. *Единственным минимальным вершинным k-расширением транзитивного турнира T_n при $n > 2$ является транзитивный турнир T_{n+k}. Причем это расширение является и его точным вершинным k-расширением.*

Доказательство. Рассмотрим правильную нумерацию вершин в графах T_{n+k} и T_n. Напомним, что нумерация вершин орграфа называется *правильной*, если для любой дуги орграфа (v_i, v_j) имеет место $i \leq j$. При правильной нумерации вершин матрица смежности будет состоять из всех единиц выше главной диагонали. Удаление любых k вершин приведет к удалению соответствующих k строк и столбцов из матрицы смежности. В результате получится матрица смежности n-вершинного транзитивного турнира T_n при правильной нумерации его вершин. Таким образом, транзитивный турнир T_{n+k} является вершинным k-расширением транзитивного турнира T_n, причем точным.

Покажем, что турнир T_{n+k} является и единственным минимальным вершинным k-расширением турнира T_n.

Пусть граф G^* – минимальное вершинное k-расширение транзитивного турнира T_n. Степень каждой вершины T_n есть в точности $n - 1$. По лемме 2.1.4 степень любой вершины в орграфе G^* должна быть не ниже $n - 1 + k$. Заметим, что в графе T_{n+k} степень каждой вершины в точности равна $n - 1 + k$, следовательно, T_{n+k} является минимальным вершинным k-расширением турнира T_n, причем любое другое его минимальное вершинное k-расширение также должно иметь все вершины степени $n - 1 + k$. Заметим, что поскольку степень каждой вершины на единицу меньше числа вершин, то при удалении любой вершины удаляется именно такое число дуг.

Покажем, что граф G^* является направленным. Пусть это не так, и в нем есть встречные дуги (u,v) и (v,u). Рассмотрим подграф, получающийся из G^* удалением любых k вершин, отличных от u и v. Он содержит столько же дуг, сколько и T_n, однако не изоморфен ему из-за встречных дуг (u,v) и (v,u), следовательно, T_n и не вкладывается в него.

Аналогично показывается, что G^* является и полным направленным графом. Если бы это было не так, то можно было бы найти две вершины u и v в G^*, между которыми нет дуги. Тогда подграф, получающийся из G^* удалением любых k вершин, отличных от u и v, очевидно, не допускал бы вложения T_n.

Таким образом, любое минимальное вершинное k-расширение турнира T_n является $(n + k)$-вершинным турниром, причем оно является и его точным вершинным k-расширением. Покажем, что оно должно быть бесконтурным графом.

Пусть это не так, и в графе G^* существует контур. Пусть s – минимальная из длин всех контуров в графе G^*, и $v_{i_1},...,v_{i_s},v_{i_1}$ – один из таких контуров. Рассмотрим два случая.

1) $s \le n$, в этом случае любой n-вершинный подграф G^*, состоящий из всех вершин этого контура, будет не изоморфен T_n.
2) $s > n$. Рассмотрим подграф, образованный вершинами $v_{i_1},...,v_{i_n}$. Поскольку G^* является точным k-расширением, то этот подграф изоморфен T_n, а значит, в силу транзитивности в T_n и в G^* есть дуга (v_{i_1},v_{i_n}). Тогда при $n > 2$ можно построить контур длины,

меньшей чем s: $v_{i_1}, v_{i_n}, ..., v_{i_s}, v_{i_1}$, что противоречит предположению о минимальности.

Таким образом, транзитивный турнир T_{n+k} является единственным минимальным вершинным k-расширением транзитивного турнира T_{n+k} при $n > 2$, причем точным. □

Доказанная теорема означает, что кроме полных и вполне несвязных графов существует еще одно бесконечно семейство графов, имеющих точные вершинные k-расширения при любом натуральном k. А. А. Долгову удалось доказать, что других семейств не существует (Долгов, 2010, *а*). Однако оказалось, что существуют орграфы, которые имеют точное вершинное k-расширение только при $k = 1$ и при $k = 2$.

Рассмотрим p-вершинный граф $G = (V, \alpha)$, где p – простое и $p > 2$. Пусть $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}\}$ – множество вершин G. Из вершины v_i в вершину v_j есть дуга только в том случае, когда $(j - i)$ – квадратичный вычет по модулю p, то есть по теореме Эйлера $(j - i)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$. Известно, что при $p = 4n + 3$ полученный граф будет являться турниром, он называется *турниром квадратичных вычетов* $QT(p)$ (Morris, 2006).

Например, при $p = 7$ квадратичными вычетами по модулю 7 будут являться числа 1, 2 и 4. Значит, матрица смежности графа $QT(7)$ будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Турнир $QT(7)$ изображен на рис. 2.7.4.

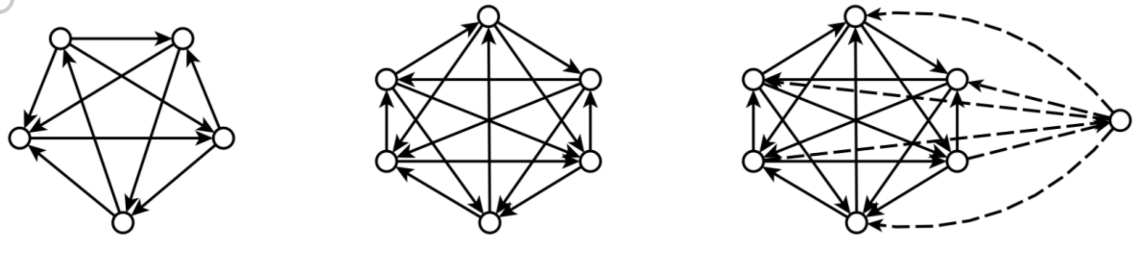


Рис. 2.7.4. Турнир QT(7) и его точные вершинные 1- и 2-расширения

Оказывается (Долгов, 2010, *б*), что граф $QT(p)$ является точным вершинным 1-расширением, а если p – простое число вида $4n + 3$, то $QT(p)$ является точным вершинным 1- и 2-расширением для подходящих турниров.

Таким образом, турниры, которые являются точными 2-расширениями, существуют при числе вершин 7, 11, 19, 23, 31, … Соответственно, существуют турниры с числом вершин 5, 9, 17, 21, 29, …, которые имеют точные вершинные k-расширения только при $k = 1$ и $k = 2$, а при $k > 2$ не имеют точных вершинных k-расширений.

Замечание. Минимальные и точные вершинные 1-расщирения турниров T_n при $n = 1$ и $n = 2$ показаны на рис. 2.7.2 и 2.7.3 соответственно.

ТЕОРЕМА 2.7.7. *Пусть G – турнир и G^* – его точное вершинное 1-расширение. Тогда если G^* имеет сток или источник, то и G, и G^* являются транзитивными турнирами.*

Доказательство. Пусть G – n-вершинный турнир и G^* – его точное вершинное 1-расширение. Не теряя общности, предположим, что вершина v является источником в G^*. Пусть v' – произвольная вершина G^*, отличная от v. Рассмотрим орграф $G^* - v'$. В этом графе вершина v является источником. Рассмотрим орграф $G^* - v$. По условию эти графы изоморфны, следовательно, граф орграф $G^* - v$ имеет источник, обозначим его через u. Выберем вершину u', отличную от v и u. В орграфе $G^* - u$ две вершины имеют полустепени исхода $n - 1$ и $n - 2$. Но такие вершины должны быть и в орграфе $G^* - v$. Следовательно, в G^* должна быть вершина w с полустепенью исхода $n - 3$. Продолжая рассуждения, получаем, что G^* оказывается транзитивным турниром, следовательно, и G является транзитивным турниром.□

2.7.2. Ориентации звезд

Ориентированной звездой будем называть орграф, симметризацией которого является звезда. Ориентированную звезду будем обозначать $Z_{m,\,n,\,p}$, где m и n – число вершин с единственной соответственно исходящей и входящей дугой, а p – число вершин с одной входящей и одной исходящей дугой. *Направленной звездой* будем называть ориентированную звезду, являющуюся диграфом, и обозначать $Z_{m,\,n}$ (у направленной звезды $p = 0$). Вершину, являющуюся концом или началом каждой дуги звезды, будем называть *центральной*.

Утверждение 1. *Граф $ZT_{m,n,p}$, получающийся из направленной звезды $Z_{m,n}$ добавлением $k = p - 1$ копий центральной вершины и соединением их друг с другом по схеме транзитивного турнира, является вершинным k-расширением орграфа $Z_{m,n}$.*

Доказательство. Рассмотрим граф $ZT_{m,n,p}$. Его вершины можно разделить на три группы:

1-я группа состоит из p центральных вершин, соединенных по схеме транзитивного турнира;

2-я группа состоит из m вершин источников, от каждой из которых исходят дуги ко всем вершинам 1-й группы. Очевидно, что все вершины этой группы подобны и имеют полустепени исхода и захода $(p,0)$;

3-я группа состоит из m вершин стоков, в каждую из которых заходят дуги от каждой вершины 1-й группы. Очевидно, что все вершины этой группы подобны и имеют полустепени исхода и захода $(0,p)$.

Рассмотрим орграф G, получающийся из $ZT_{m,n,p}$ удалением k произвольных вершин. Обозначим через p_1, m_1 и n_1 количество удаленных вершин 1, 2 и 3-й групп соответственно:

$$0 \le p_1 \le p = k + 1,$$

$$0 \le m_1 \le m,$$

$$0 \le n_1 \le n,$$

$$p_1 + m_1 + n_1 = k.$$

Покажем, что направленная звезда $Z_{m,n}$ вкладывается в орграф G.

При $p_1 = k$ (все удаленные вершины – вершины 1-й группы) орграф G изоморфен звезде $Z_{m,n}$ и, таким образом, допускает вложение.

Пусть $p_1 < k$. По теореме 2.7.6 транзитивный турнир T_{n+k} является точным вершинным k-расширением транзитивного турнира T_n ($n > 1$). В нашем случае после удаления p_1 центральных вершин 1-й группы оставшиеся $p - p_1 > 1$ вершины будут по-прежнему образовывать транзитивный турнир T_{p-p1}. При этом

$$p - p_1 = k + 1 - p_1 = m_1 + n_1 + 1.$$

Вершины транзитивного турнира, как известно, могут быть упорядочены по отношению достижимости. Обозначим оставшиеся центральные вершины в соответствующем порядке через $u_1, \ldots, u_{m1+n1+1}$. Таким образом, из любой вершины с меньшим индексом идет дуга в любую вершину с большим индексом.

Укажем соответствие вершин звезды $Z_{m,n}$ вершинам орграфа G которое определяет вложение:

а) m вершинам-источникам соответствуют $m - m_1$ оставшихся вершин 2-й группы и m_1 вершин $u_1,\ldots,u_{m1}$;

б) n вершинам-стокам соответствуют $n - n_1$ оставшихся вершин 3-й группы и n_1 вершин $u_{m1+2},\ldots,u_{m1+n1+1}$;

в) вершина u_{m1+1} соответствует центральной вершине звезды $Z_{m,n}$.

Видно, что из каждой вершины типа *а*) идет дуга в вершину u_{m1+1}, а из вершины u_{m1+1} идет дуга в каждую вершину типа *б*); таким образом, звезда $Z_{m,n}$ действительно вкладывается в орграф G.□

С учетом леммы 2.7.3, утверждения 1 и теоремы 2.6.1 получается

ТЕОРЕМА 2.7.8. *Пусть $Z_{m,n}$ направленная звезда, причем $m + n > 1$ и $mn \neq 1$. Диграф $ZT_{m,n,2}$, получающийся из направленной звезды $Z_{m,n}$ добавлением копии центральной вершины и соединением их друг с другом дугой, является единственным с точностью до изоморфизма минимальным вершинным 1-расширением орграфа $Z_{m,n}$.*

Замечание 1. *Направленная звезда $Z_{1,1}$ является направленной цепью P_3, и ее единственное минимальное вершинное 1-расширение, являющееся также и ее точным вершинным 1-расширением, – направленный цикл C_4.*

Замечание 2. *Направленная звезда $Z_{1,0}$ изоморфна звезде $Z_{0,1}$ и имеет два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения, каждое из которых является и точным вершинным 1-расширением – транзитивную и циклическую тройки (см. рис. 2.7.3).*

С учетом леммы 2.7.3, утверждения 1 и теоремы 2.6.2 получается

ТЕОРЕМА 2.7.9. *Диграф $ZT_{m,n,p}$, получающийся из направленной звезды $Z_{m,n}$ добавлением $k = p - 1$ копий центральной вершины и соединением их друг с другом по схеме транзитивного турнира, является единственным с точностью до изоморфизма минимальным вершинным k-расширением орграфа $Z_{m,n}$, если выполняется любое из двух условий:*

1) *$m + n$ нечетно;*
2) $k < n^2 - 4n + 1$.

Далее необходимо рассмотреть случай, когда $m + n$ четно, так как в этом случае, согласно теореме 2.6.2, могут появиться минимальные вершинные k-расширения с меньшим числом дополнительных дуг.

Рассмотрим схему ориентации однородного ($2n$)-вершинного графа $R_{2n,2n-2}$. Напомним, что граф $R_{2n,2n-2}$ может быть представлен в виде $O_2 + \ldots + O_2$. Будем ориентировать ребра от каждой пары вершин из O_2 до каждой другой такой пары. От первой вершины пары направим одну исходящую дугу в первую вершину второй пары и входящую дугу от второй вершины второй пары, а из второй вершины первой пары направим дуги в обратном порядке, так что получится ориентированный цикл (рис. 2.7.5).

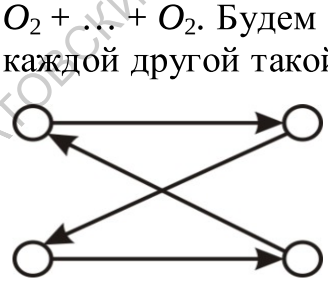


Рис. 2.7.5. Схема ориентации ребер в графе $O_2 + O_2$

Если u_1, v_1 вершины первой пары, а u_2 и v_2 – вершины второй пары, то ориентируем дуги следующим образом: (u_1,u_2), (v_1,v_2), (v_2,u_1), (u_2,v_1). Продолжаем ориентацию описанным способом по всем парам вершин. Обозначим построенный диграф через $D_{2n,2n-2}$.

Отметим некоторые достаточно очевидные свойства диграфа $D_{2n,2n-2}$.

1. Отображение $u_i \to v_i$, $v_i \to u_i$, $i = 1, \ldots, n$, является автоморфизмом.
2. Отображение $u_i \to u_{i+1}$, $v_i \to v_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $u_n \to v_1$, $v_n \to u_1$ является автоморфизмом.
3. Все вершины диграфа $D_{2n,2n-2}$ подобны и имеют полустепени исхода и захода, равные $n-1$ (следует из 1 и 2).
4. $D_{2n,2n-2}$ является вершинно-симметрическим графом (следует из 3).
5. При удалении любой пары несмежных вершин u_i и v_i диграфа $D_{2n,2n-2}$ получается диграф $D_{2n-2,2n-4}$.
6. Все максимальные подграфы диграфа $D_{2n,\,2n-2}$ изоморфны. Обозначим граф, получающийся удалением любой вершины диграфа $D_{2n,2n-2}$, через $TD_{2n-2,2n-4}$.

Утверждение 2.7.2. *Диграф $D_{2n+k+1,\,2n+k-1}$ при нечетном k является вершинным k-расширением направленной звезды $Z_{n,\,n}$.*

Доказательство. Обозначим число вершин диграфа $D_{2n+k+1,\,2n+k-1}$ через $2p$: $2p = 2n+k+1$. Как и ранее, вершины диграфа $D_{2n+k+1,\,2n+k-1}$ обозначим через u_i и v_i, $i = 1, \ldots, p$.

Рассмотрим граф, получающийся из $D_{2n+k+1,\,2n+k-1}$ удалением произвольных k вершин: $u_{i_1},\ldots,u_{i_{k_1}}$ и $v_{i_1},\ldots,v_{i_{k_2}}$: $k_1 + k_2 = k$. Обозначим этот граф через G. Так как k нечетное, то $k_1 \neq k_2$. Пусть для определенности $0 \le k_1 < k_2 \le k$. На рис. 2.7.6 для наглядности оставлена только часть дуг: дугами соединяются вершины одной горизонтали от вершины с меньшим индексом к вершине с большим и вершины разных горизонталей от вершины с большим индексом к вершине с меньшим. Удаленные вершины на рисунке помечены черным (при $p = 4$ этот рисунок соответствовал бы случаю поиска вершинного 3-расширения для 5-вершинной звезды $Z_{2,2}$). Для краткости будем называть удаленные вершины *черными*, а оставшиеся *белыми*. Количество белых и черных вершин очевидно: $2n + 1$ и k штук соответственно.

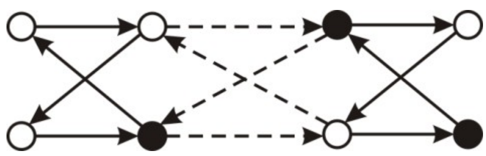


Рис. 2.7.6. Граф G: иллюстрация к доказательству

Чтобы доказать, что диграф $D_{2n+k+1,\,2n+k-1}$ является вершинным k-расширением звезды $Z_{n,n}$, достаточно показать, что в G есть вершина с n входящими и n исходящими дугами. Кандидатами для такой вершины могут быть только такие вершины, у которых парная была удалена, так как только они соединены дугами со всеми остальными вершинами. Искомых вершин может быть и несколько. Для каждой вершины w введем в рассмотрение индекс, состоящий из пары чисел $d^{+}(w)$ и $d^{-}(w)$:

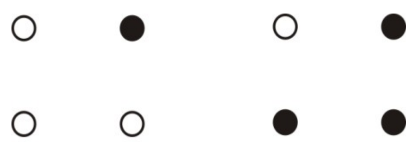
$d^{-}(w)$ равно числу белых вершин слева от w в ее ряду плюс число белых вершин справа от w в другом ряду;

$d^{+}(w)$ равно числу белых вершин справа от нее в ее ряду плюс число белых вершин слева от нее в другом ряду.

По построению видно, что для вершин одной пары выполняются соотношения: $d^{+}(u_i) = d^{-}(v_i)$ и $d^{-}(u_i) = d^{+}(v_i)$. Значения индексов $d^{+}(w)$ и $d^{-}(w)$ для белой вершины соответственно равны полустепеням исхода и захода. Искомая вершина, очевидно, должна удовлетворять условию: $d^{+}(w) = d^{-}(w) = n$.

Покажем, что такая вершина найдется. На рис. 2.7.7 представлены возможные конфигурации парных вершин.

Посчитаем суммы индексов для вершин из разных пар:



а *б* *в* *г*

Рис. 2.7.7. Конфигурации парных вершин

– для пары типа (а) (рис. 2.7.7, *а*): $d^{+}(w) + d^{-}(w) = 2n - 1$ (обе белые вершины пары не участвуют в подсчете индексов);

– для пар типа (б) и (в) (рис. 2.7.7, *б, в*): $d^{+}(w) + \quad + d^{-}(w) = 2n$ (единственная белая вершина пары не участвует в подсчете индексов);

– для пары типа (г) (рис. 2.7.7, *г*): $d^{+}(w) + d^{-}(w) = 2n + 1$ (все белые вершины участвуют в подсчете индексов).

Для удобства будем считать, что пары типа (г), если они есть, располагаются справа, а пары типа (а), если они есть, по свойству 5 диграфа можно расположить слева. Таким образом, представляющие для нас интерес пары типа (б) и (в) располагаются между парами типа (а) и (г). Обозначим для определенности номер первой пары интересующего интервала через l, а номер последней пары – через r.

Для каждой вершины пар (б) и (в) рассчитаем индекс. Вершина u_l первой пары получит индекс $(n - k_2, n - k_1 - 1)$, если пара имеет тип (в) или $(n - k_2 - 1, n - k_1)$, если пара имеет тип (б). Вершина u_r последней пары получит индекс $(n - k_1, n - k_2 - 1)$, если пара имеет тип (б), или $(n - k_1 - 1, n - k_2)$, если пара имеет тип (в). Так как $k_1 < k_2$, то у вершины первой пары $d^{+}(u_l) \le d^{-}(u_l)$, а у последней пары $d^{+}(u_r) \ge d^{-}(u_r)$.

Рассмотрим, как изменяется индекс при переходе от одной пары к другой при просмотре слева направо:

Левая пара	**Правая пара**	d^{+}	d^{-}
б	б	–1	+1
б	в	0	0
в	б	+1	–1
в	в	+1	–1

Таким образом, при переходе от одной пары к другой компоненты индекса либо не изменяются, либо изменяются на 1. У первой пары: $d^{+}(u_l)$ £ $d^{-}(u_l)$, а у последней пары наоборот: $d^{+}(u_r)$ ³ $d^{-}(u_r)$. Следовательно, существует пара, у которой компоненты окажутся равными. Белая вершина из такой пары и будет искомой вершиной. □

Пример. На рис. 2.7.8 представлена схема, иллюстрирующая доказательство – поиск вложения звезды $Z_{2,2}$ в её 3-расширение. Рассчитаем индексы для верхнего ряда вершин: u_1: (2,1), u_2: (2,2), u_3: (2,2), u_4: (2,2).

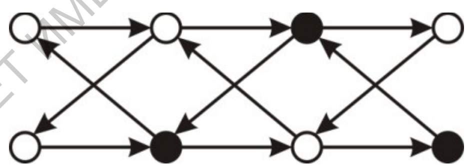


Рис. 2.7.8. Поиск вложения звезды $Z_{2,2}$ в ее вершинное 3-расширение

Таким образом, любая из вершин u_2, v_3 или u_4 является искомым образом для центральной вершины звезды.

Утверждение 2.7.3. *Диграф $TD_{2n+k,\ 2n+k-2}$ при четном k является вершинным k-расширением направленной звезды $Z_{n,n}$.*

Доказательство. Следует из предыдущего утверждения, свойства 6 и очевидного замечания, что максимальный подграф вершинного k-расширения некоторого графа является для него вершинным $(k – 1)$-расширением.□

Утверждение 2.7.4. *Пусть натуральные m, n, k таковы, что $m \neq n$, $m + n$ четно, а k нечетно. Никакой диграф, получающийся ориентацией однородного $(m + n + k + 1)$-вершинного графа $R_{m+n+k+1,\ m+n+k-1}$, не является вершинным k-расширением ни для какой направленной звезды $Z_{m,n}$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что утверждение не выполняется уже при $k = 1$. Предположим противное: пусть G – некоторая ориентация графа $R_{m+n+2,\ m+n}$ является вершинным k-расширением для направленной звезды $Z_{m,n}$, причем $m \neq n$ и $m + n$ четно.

Не ограничивая общности, будем считать, что $m > n$ (так как $m + n$ четно, то справедливо даже $m > n + 1$). При удалении любой вершины v графа $R_{m+n+2,\ m+n+k}$ получается граф вида $O_1 + O_2 + \ldots + O_2$, в котором есть только одна полная вершина u – та, которая была несмежна с удаленной вершиной v. Следовательно, при удалении любой вершины v графа G соответствующая вершина u должна иметь полустепени захода и исхода не меньше чем m и n соответственно. В силу произвольности выбора v получаем, что любая вершина графа G должна иметь полустепени захода и исхода не меньше чем m и n соответственно. Но тогда в каждую вершину орграфа G должно заходить не менее m дуг, откуда получаем, что общее число дуг будет не менее $m(m + n + 2)$. Однако количество ребер графа $R_{m+n+2,\, m+n}$ есть $(m + n + 2)(m + n)/2 < (m + n + 2)(m + m)/2 = m(m + n + 2)$. Полученное противоречие доказывает утверждение.□

С учетом утверждений 2.7.2, 2.7.3 и 2.7.4 можно уточнить теорему 2.7.9:

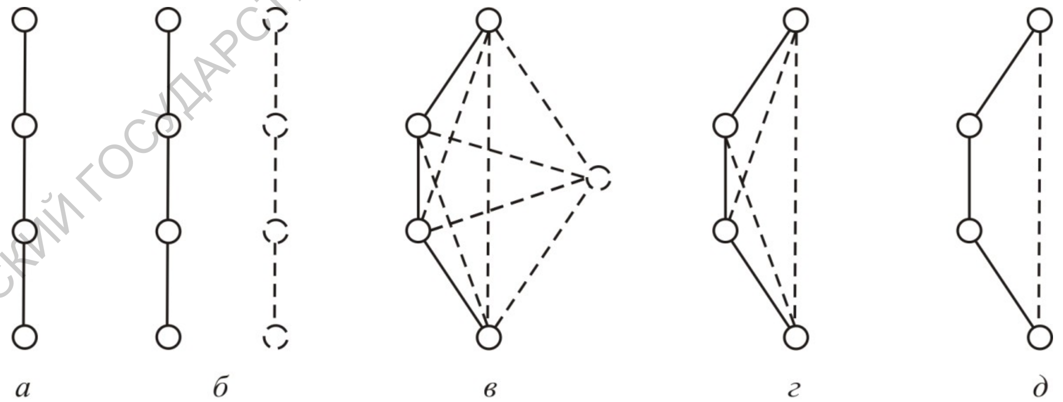
ТЕОРЕМА 2.7.10. *Диграф $ZT_{m,n,p}$, получающийся из направленной звезды $Z_{m,n}$ добавлением $k = p - 1$ копий центральной вершины и соединением их друг с другом по схеме транзитивного турнира, является при $m \neq n$ единственным с точностью до изоморфизма минимальным вершинным k-расширением орграфа $Z_{m,n}$.*

ТЕОРЕМА 2.7.11. *Диграф $TD_{2n+k,\, 2n+k-2}$ при четном k или максимальный подграф диграфа $TD_{2n+k+2,\, 2n+k}$ при нечетном k являются единственными минимальными вершинными k-расширениями направленной звезды $Z_{n,n}$.*

ГЛАВА 3. РЕБЕРНЫЕ РАСШИРЕНИЯ

3.1. Основные определения и свойства

Назовем граф $G_R = (V_R, \alpha_R)$ *реберным k-расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если граф G можно вложить в каждый граф, получающийся из G_R удалением любых его k ребер. Заметим, что определение не теряет смысла и при $k = 0$. Как и в предшествующей главе, мы будем рассматривать преимущественно графы без меток, однако если вершины имеют метки, то подразумевается вложение с учетом меток. Если F – некоторый набор ребер графа G, то есть $F \subseteq \alpha$, то будем обозначать через $G - F$ граф, получающийся из G удалением всех ребер из F. Очевидно, что число вершин любого реберного k-расширения графа не меньше, чем у самого графа. На рис. 3.1.1, *а* изображена цепь P_4. Графы на рис. 3.1.1, *б* и *д* являются ее реберными 1-расширениями. Граф на рис. 3.1.1, *в* – реберным 3-расширением, а граф на рисунке 3.1.1, *г* – реберным 2-расширением.



а *б* *в* *г* *д*

Рис. 3.1.1. Цепь P_4 (*а*) и ее реберные расширения (*б*–*д*)

Реберное k-расширение (k – натуральное) графа $G = (V, \alpha)$ называется *неприводимым*, если никакая его собственная часть не является реберным k-расширением графа G. Например, расширения на рис. 3.1.1, *б*, *д* являются неприводимыми реберными 1-расширениями цепи P_4, а на рис. 3.1.1, *в*, *г* – неприводимыми реберными 3- и 2-расширениями соответственно.

Граф G_t^* называется *точным реберным k-расширением* графа G, если любой граф, получающийся удалением произвольных k ребер графа G_t^*, изоморфен графу G.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным реберным k-расширением* (иногда будем использовать сокращение МР-*k*Р) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является реберным k-расширением графа G, то есть граф G допускает вложение с учетом меток вершин в каждый граф, получающийся из графа G^* удалением любых его k ребер;
2) граф G^* содержит такое же количество вершин, как и в графе G;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Как и в предыдущей главе, будем считать, что граф является минимальным реберным 0-расширением для самого себя. Не всякий граф имеет минимальное реберное k-расширение. Например, полный граф не имеет минимального реберного k-расширения ни при каком натуральном k.

Заметим, что число ребер минимального реберного k-расширения графа заранее оценить очень сложно, так как граф может вообще не иметь реберного k-расширения с тем же числом вершин, что у него. Если граф имеет минимальное реберное k-расширение с $|\alpha^*|$ ребрами, то будем говорить, что это расширение содержит $|\alpha^*| - |\alpha|$ *дополнительных* ребер. Для любого графа, кроме вполне несвязного, количество дополнительных ребер больше 0. Из определения следует очевидный переборный (по сравнению с алгоритмом 2.1.1 для минимальных вершинных k-расширений, в этом алгоритме предусматривается случай, когда минимальных реберных k-расширений у графа нет)

Алгоритм 3.1.1. *Построение всех минимальных реберных k-расширений для заданного графа G, отличного от вполне несвязного.*

1. $m := 0$.
2. $m := m + 1$.
3. Строим все графы, получающиеся из графа G добавлением m дополнительных ребер.
4. Выбираем среди построенных на шаге 3 графов реберные k-расширения графа G.
5. Если на шаге 4 были найдены графы, то переходим на шаг 8.
6. Если на шаге 4 был построен полный граф, то граф G не имеет минимальных реберных k-расширений, и алгоритм завершает работу.
7. Переход на шаг 2.

8. Среди графов, выбранных на шаге 4, оставляем по одному представителю от изоморфных графов. Полученные графы будут являться минимальными реберными k-расширениями графа G.

Обоснование. В худшем случае, когда граф не имеет минимальных реберных k-расширений, алгоритм завершит свою работу, когда будет построен полный граф. В силу конечности числа ребер графа алгоритм закончит свою работу за конечное число шагов. Алгоритм имеет экспоненциальную сложность, что ограничивает его применение малыми значениями k и числа вершин графа G. В следующем параграфе вычислительная сложность задачи будет обсуждаться более подробно, и станет ясно, что эффективного универсального алгоритма для поиска минимальных реберных k-расширений, по-видимому, не существует. □

Докажем несколько вспомогательных утверждений о свойствах минимальных реберных k-расширений.

ЛЕММА 3.1.1. *Минимальное реберное k-расширение графа без изолированных вершин не содержит вершин со степенью ниже $k + 1$.*

ЛЕММА 3.1.2. *Если минимальная степень вершины графа G есть $d > 0$, то его минимальное реберное k-расширение не содержит вершин степени ниже $d + k$.*

Доказательство. Пусть дан граф G из условия соответствующей леммы, и G^* – некоторое его минимальное реберное k-расширение.

Лемма 3.1.1 является частным случаем леммы 3.1.2.

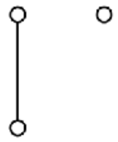
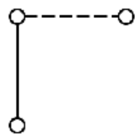
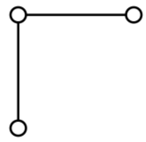
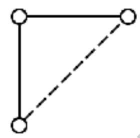
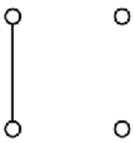
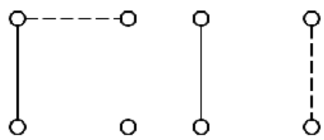
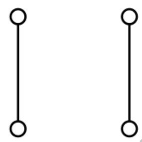
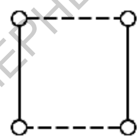
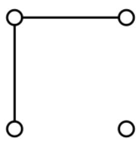
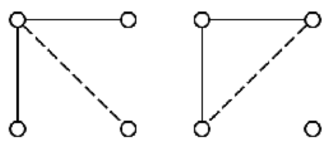
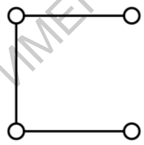
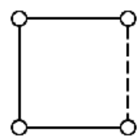
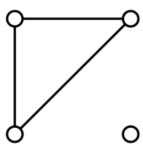
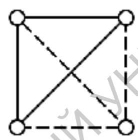
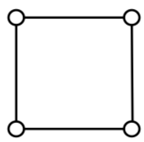
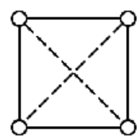
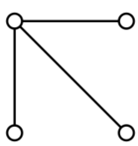
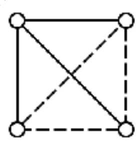
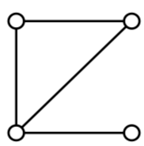
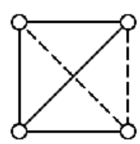
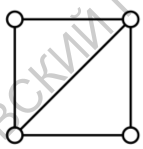
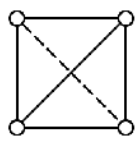
Пусть граф G^* имеет вершину v степени ниже $d + k$. Рассмотрим граф, получающийся из G^* удалением k инцидентных вершине v ребер (если $d(v) < k$, то в этом случае можно удалить все инцидентные вершине v ребра и подходящее количество любых других ребер). Он будет содержать вершину степени ниже d, и в него нельзя будет вложить граф G. □

Заметим, что минимальное реберное k-расширение отличается от исходного графа на некоторое количество дополнительных ребер, и только вполне несвязный граф изоморфен любому своему минимальному реберному k-расширению. Далее мы исключаем из рассмотрения вполне несвязные и полные графы.

В табл. 3.1.1 приведены все 2-, 3- и 4-вершинные графы, отличные от вполне несвязных и полных, и их минимальные реберные 1-расширения. Для каждого графа указывается его вектор степеней, а для расширений в скобках приводится число дополнительных ребер.

Таблица 3.1.1

Минимальные реберные 1-расширения 2-, 3- и 4-вершинных графов

Граф	**МР-1Р**	**Граф**	**МР-1Р**
 (1,1,0)	 (2,1,1) (+1)	 (2,1,1)	 (2,2,2) (+1)
 (1,1,0,0)	 (2,1,1,0) (1,1,1,1) (+1)	 (1,1,1,1)	 (2,2,2,2) (+2)
 (2,1,1,0)	 (3,1,1,1) (2,2,2,0) (+1)	 (2,2,1,1)	 (2,2,2,2) (+1)
 (2,2,2,0)	 (3,3,3,3) (+3)	 (2,2,2,2)	 (3,3,3,3) (+2)
 (3,1,1,1)	 (3,3,3,3) (+3)	 (3,2,2,1)	 (3,3,3,3) (+2)
 (3,3,2,2)	 (3,3,3,3) (+1)		

В работе (Harary, Hayes, 1993) авторы нашли минимальные реберные k-расширения для некоторых видов графов, в том числе для цепей и циклов.

ТЕОРЕМА 3.1.1 (Harary, Hayes, 1993). *Минимальное реберное* 1-*расширение n-вершинной цепи P_n есть n-вершинный цикл C_n.*

Доказательство. В самом деле, нетрудно видеть, что цикл C_n является реберным 1-расширением цепи P_n. Минимальность следует из леммы 3.1.1.□

ТЕОРЕМА 3.1.2. *Минимальное реберное 1-расширение n-вершинной цепи P_n единственно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Пусть граф G^* является минимальным реберным 1-расширением цепи P_n. Очевидно, что G^* является связным графом, причем по лемме 3.1.1 степень любой его вершины не меньше двух. По теореме 3.1.1 цикл C_n, содержащий n ребер, является минимальным реберным 1-расширением цепи P_n, следовательно, граф G^* также содержит n ребер, и, значит, степень любой его вершины в точности равна двум. Заметим, что G^* – не дерево и, следовательно, содержит цикл длины k. Если $k < n$, то нарушается условие связности графа G^*, следовательно, $k = n$, то есть G^* изоморфен C_n. □

Для реберных расширений задача описания графов, которые имеют минимальные реберные 1-расширения с малым числом ребер, является более сложной, чем для вершинных 1-расширений. Очевидно, что если граф G имеет минимальное реберное 1-расширение G^* с одним дополнительным ребром, то граф G^* будет точным реберным 1-расширением графа G.

В отличие от вершинных точные реберные 1-расширения не обязательно являются однородными графами. Так, например, полный двудольный граф $K_{n,m}$ является точным реберным 1-расширением при любых значениях $n > 1$, $m > 0$.

Оказывается, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3.1.3. *Всякий однородный граф G является точным реберным 1-расширением тогда и только тогда, когда он является реберно-симметрическим.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть граф G является реберно-симметрическим. Любые два его ребра e_1 и e_2 подобны, откуда очевидным образом следует, что граф $G - e_1$ изоморфен графу $G - e_2$.

Достаточность. Пусть однородный граф G является точным реберным 1-расширением. Обозначим через k степень вершин графа G. Тогда для любых двух ребер $e_1 = \{u_1, v_1\}$ и $e_2 = \{u_2, v_2\}$ графы $G - e_1$ и $G - e_2$ изоморфны. В графе $G - e_1$ вершины u_1 и v_1 имеют степень $k - 1$, а все остальные вершины имеют степень k. Аналогично в графе $G - e_2$ вершины u_2 и v_2 имеют степень $k - 1$, а все остальные вершины имеют степень k. Следовательно, при изоморфизме образом вершин u_1, v_1 могут быть только вершины u_2, v_2, а это и означает, что ребра e_1 и e_2 подобны.□

Следующая известная теорема (Харари, 2003) устанавливает связь между реберно-симметрическими и вершинно-симметрическими графами:

ТЕОРЕМА 3.1.4. *Реберно-симметрический граф без изолированных вершин является или вершинно-симметрическим, или двудольным.*

Из этой теоремы с учетом доказанного ранее очевидным образом получается следующая

ТЕОРЕМА 3.1.5. *Пусть однородный граф G является точным реберным 1-расширением, тогда он является или точным вершинным 1-расширением, или двудольным графом.*

Реберно-симметрический граф, не являющийся вершинно-симметрическим, называется *полусимметрическим*. В книге (S. Skiena, 1990) доказывается, что минимальным по числу вершин полусимметрическим графом (а следовательно, и минимальным по числу вершин точным реберным 1-расширением, которое не является точным вершинным 1-расширением) является 20-вершинный граф Фолкмана, изображенный на рис. 3.1.2.

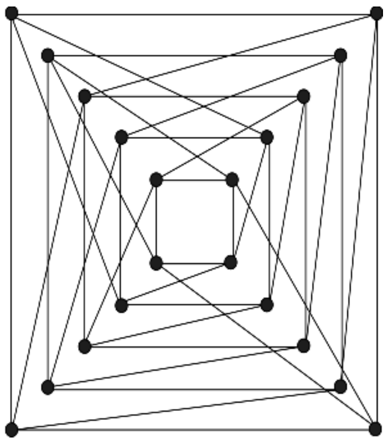


Рис. 3.1.2. Граф Фолкмана

В книге (Харари, 2003) приводится ряд утверждений о свойствах симметрических графов, которые с учетом установленных соответствий могут быть сформулированы следующим образом:

ТЕОРЕМА 3.1.6 (ср. Следствие 14.12 (Харари, 2003)). *а*) *Если G – однородное n-вершинное точное реберное 1-расширение и степень d каждой вершины нечетна, то граф G является точным вершинным 1-расширением.*

б) *Если граф G – однородное n-вершинное точное реберное 1-расширение и степень каждой вершины четна, причем $d \geq p/2$, то граф G является точным вершинным 1-расширением.*

И, наконец, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3.1.7 (ср. Теорема 14.13 (Харари, 2003)). *Для каждого $n \geq 20$, кратного 4, существует однородное n-вершинное точное реберное 1-расширение, не являющееся точным вершинным 1-расширением.*

3.2. Сложность задачи

В этом параграфе нас будет интересовать вычислительная сложность задачи описания минимальных реберных k-расширений. Эта задача является поисковой: по заданному графу требуется построить его минимальное реберное k-расширение (или еще более сложная задача – все расширения).

Как мы уже обсуждали в параграфе 1.4, при анализе сложности рассматриваются задачи распознавания свойств, а задача поиска будет иметь не меньшую сложность.

Сформулируем задачу о реберном k-расширении, как задачу распознавания свойств, то есть задачу, ответом на которую может быть «да» или «нет»:

ЗАДАЧА: РЕБЕРНОЕ k-РАСШИРЕНИЕ

УСЛОВИЕ. Даны графы $G = (V,\alpha)$ и $H = (U,\beta)$.

ВОПРОС. Верно ли, что граф G является реберным k-расширением графа H?

Прежде чем перейти к основному утверждению, докажем вспомогательное.

ЛЕММА 3.2.1. *Граф H вкладывается в граф G тогда и только тогда, когда граф $H + K_1$ вкладывается в граф $G + K_1$.*

Доказательство. Пусть даны графы $G = (V,\alpha)$ и $H = (U,\beta)$. Графы $H + K_1$ и $G + K_1$ получаются из G и H добавлением одной вершины и соединением со всеми остальными. Обозначим через v и u соответствующие вершины графов G и H.

Необходимость. Пусть граф H вкладывается в граф G и $\varphi : U \to V$ – соответствующая инъекция. Доопределим φ, положив $\varphi(u) = v$. Очевидно, что построенная инъекция $U \cup \{u\} \to V \cup \{v\}$ определяет вложение графа $H + K_1$ в граф $G + K_1$.

Достаточность. Пусть граф $H + K_1$ вкладывается в граф $G + K_1$ и $\varphi : U \cup \{u\} \to V \cup \{v\}$ – соответствующая инъекция. Покажем, что граф H вкладывается в граф G. Рассмотрим три случая.

1. Пусть v не является образом никакой вершины графа H при отображении φ. Это означает, что граф $H + K_1$ вкладывается в граф G, но тогда и любая часть $H + K_1$ вкладывается в G, в том числе и граф H.
2. Пусть $\varphi(u) = v$. Тогда очевидно, что отображение $\varphi : U \to V$ будет определять вложение графа H в G.
3. Пусть $\varphi(u') = v$, $u' \neq u$. Для определенности обозначим $\varphi(u) = v'$. Так как φ является вложением, то $v' \neq v$. Построим новое отображение φ^*, определив его следующим образом:

$$\varphi^*(w) = \begin{cases} v, & \text{если } w = u, \\ v', & \text{если } w = u', \\ \varphi(w) & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

То есть φ^* отличается от φ только перестановкой образов вершин u и u', а на множестве $U \setminus \{u'\}$ их значения совпадают. Покажем, что φ^* также определяет вложение графа H в граф G. Очевидно, что φ^* является инъекцией. Покажем, что если $x, y \in U \cup \{u\}$, то выполняется условие: $(x, y) \in \alpha \Rightarrow (\varphi^*(x), \varphi^*(y)) \in \beta$. Так как φ определяет вложение графа H в граф G, то для любых $x, y \in U \cup \{u\}$ выполняется условие: $(x, y) \in \alpha \Rightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in \beta$.

Рассмотрим в графе $H + K_1$ две произвольные смежные вершины $x, y \in U \cup \{u\}$. Тогда вершины $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ тоже смежны в графе $G + K_1$. Требуется показать, что в графе $G + K_1$ смежны также вершины $\varphi^*(x)$ и $\varphi^*(y)$. Рассмотрим 4 возможных случая:

а) $x, y \in U \setminus \{u'\}$. Так как на множестве $U \setminus \{u'\}$ значения функций φ^* и φ совпадают, то вершины $\varphi^*(x)$ и $\varphi^*(y)$ смежны;

б) $\{x,y\} = \{u,u'\}$. Так как вершина u полная, то она смежна со всеми остальными вершинами в графе $H + K_1$. По определению отображения φ^* образом вершин u и u' являются вершины v и v' графа $G + K_1$. Вершина v по условию является полной, и, значит, вершины v и v' смежны;

в) одна из вершин x, y есть u, а вторая отлична от u'. Пусть для определенности $y = u$, а $x \in U \setminus \{u'\}$. Аналогично случаю б) образом полной вершины u графа $H + K_1$ является полная вершина v графа $G + K_1$, следовательно, вершины $\varphi^*(x)$ и v смежны;

г) одна из вершин x, y есть u', а вторая отлична от u. Пусть для определенности $y = u'$, а $x \in U$. Так как φ вложение, то $\varphi(x)$ и $\varphi(y) = v$ смежны. С другой стороны, в графе $H + K_1$ вершины x и u смежны в силу того, что вершина u полная. Значит, $\varphi(x)$ и $\varphi(u) = v'$ смежны. Однако по определению $\varphi^*(u') = v'$.

Во всех рассмотренных случаях граф H вкладывается в граф G.□

Теперь мы готовы приступить к доказательству основного результата.

ТЕОРЕМА 3.2.1. *Задача РЕБЕРНОЕ k-РАСШИРЕНИЕ является NP-полной.*

Доказательство. По-прежнему доказательство для наглядности будем проводить при $k = 1$, однако идея доказательства остается справедливой при любом натуральном k. Для доказательства утверждения нужно показать:

1. Задача РЕБЕРНОЕ k-РАСШИРЕНИЕ $\in$ NP.
2. Некоторая известная NP-полная задача может быть полиномиально сведена к задаче РЕБЕРНОЕ k-РАСШИРЕНИЕ (сводимость по Карпу).

Покажем, что задача РЕБЕРНОЕ 1-РАСШИРЕНИЕ $\in$ NP. Пусть в графе G n вершин и m ребер, а в графе H p вершин, очевидно, что положительный ответ в задаче возможен лишь при $n \geq p$. Обозначим ребра графа G через $e_1, \ldots, e_m$. Тогда недетерминированному алгоритму необходимо угадать m последовательностей V_i по p вершин из множества V, для каждой из которых далее за полиномиальное время можно проверить, что определяемая этой последовательностью инъекция является вложением графа H в граф $G - e_i$. В общем случае, для произвольного k необходимо будет указать C_m^k последовательностей для всех возможных наборов из k удаляемых ребер графа G: для фиксированного k эта величина будет полиномом от n и может быть оценена как $O(m^k) = O(n^{2k})$.

Покажем, что задача ИЗОМОРФИЗМ ПОДГРАФУ сводится к задаче РЕБЕРНОЕ k-РАСШИРЕНИЕ. Для этого необходимо указать функцию f, которая сводит каждую задачу ИЗОМОРФИЗМ ПОДГРАФУ к задаче РЕБЕРНОЕ k-РАСШИРЕНИЕ и удовлетворяет двум условиям полиномиальной сводимости.

Пусть графы $G = (V,\alpha)$ и $H = (U,\beta)$ определяют условие задачи ИЗОМОРФИЗМ ПОДГРАФУ. Соответствующая задача РЕБЕРНОЕ k-РАСШИРЕНИЕ строится следующим образом. Первым графом берется граф $G + K_1$ È $H + K_1$, а вторым графом берется граф $H + K_1$. Очевидно, что сводимость осуществляется за полиномиальное время. Для проверки второго требования необходимо показать, что $G + K_1$ È $H + K_1$ тогда и только тогда является реберным k-расширением графа $H + K_1$, когда граф H вкладывается в граф G. С учетом леммы достаточно доказать, что $G + K_1$ È È $H + K_1$ тогда и только тогда является реберным k-расширением графа $H + K_1$, когда граф $H + K_1$ вкладывается в граф $G + K_1$.

Необходимость. Если граф $G + K_1$ È $H + K_1$ является реберным 1-расширением графа $H + K_1$, то граф $H + K_1$ будет вкладываться в любой граф, получающийся из $G + K_1$ È $H + K_1$ удалением произвольного ребра. Если в качестве ребра взять некоторое ребро из компоненты $H + K_1$ графа $G + K_1$ È $H + K_1$, то, очевидно, граф $H + K_1$ должен вкладываться в оставшуюся компоненту, то есть в $G + K_1$.

Достаточность. С другой стороны, если граф $H + K_1$ вкладывается в граф $G + K_1$, то граф $G + K_1$ È $H + K_1$ является реберным 1-расширением графа $H + K_1$. Действительно, рассмотрим граф G^*, получающийся из $G + K_1$ È $H + K_1$ удалением произвольного ребра e. Если ребро e входит в компоненту $G + K_1$, то граф G^* имеет вид ($G + K_1 - e$) È $H + K_1$, а если ребро e входит в компоненту $H + K_1$, то граф G^* имеет вид $G + K_1$ È ($H + K_1 - e$). И в том, и в другом случае граф $H + K_1$ может быть вложен в граф $G^* - e$. □

З а м е ч а н и е . Схему сужения задачи реберного k-расширения из доказательства теоремы 3.2.1 также можно использовать и в доказательстве теоремы 2.2.1.

3.3. Неизоморфные расширения

Рассмотрим задачу описания минимальных по числу вершин и ребер графов, имеющих неизоморфные минимальные реберные 1-расширения. Рассмотрим три группы графов: 1) все графы, 2) графы без изолированных вершин и 3) связные графы.

В табл. 3.1.1 приведены все 2-, 3- и 4-вершинные графы и их минимальные реберные 1-расширения, построеные с помощью вычислительного эксперимента. В этом параграфе мы приведем аналитическое доказательство минимальности реберных 1-расширений для некоторых из этих графов.

Среди графов с тремя вершинами интерес представляют только два униграфа с векторами степеней (1,1,0) и (2,1,1). Очевидно, что их минимальными реберными 1-расширениями являются униграфы (2,1,1) и (2,2,2).

Рассмотрим 4-вершинные графы в порядке возрастания числа ребер. Известно, что все 11 4-вершинных графов являются униграфами. 4-вершинный униграф с вектором степеней (1,1,0,0) имеет два неизоморфных минимальных реберных 1-расширения с векторами степеней (2,1,1,0) и (1,1,1,1), таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 3.3.1. 4-*вершинный униграф с вектором степеней* (1,1,0,0) *является минимальным графом по числу вершин и ребер среди графов, имеющих неизоморфные минимальные реберные* 1-*расширения. Минимальность понимается в том смысле, что не существует графа, обладающего указананным свойством, с меньшим количеством вершин и ребер.*

4-вершинные графы с двумя ребрами имеют вектора степеней (1,1,1,1) и (2,1,1,0). Непосредственной проверкой убеждаемся, что минимальное реберное 1-расширение первого есть граф с вектором степеней (2,2,2,2), а второй граф имеет два минимальных реберных 1-расширения с векторами степеней (2,2,2,0) и (3,1,1,1), однако этот граф попадает в группу 1, для которой минимальный граф уже найден.

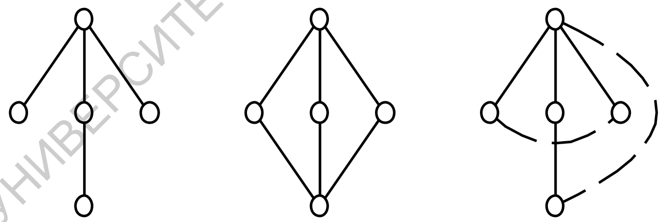
Все остальные 4-вершинные графы имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное реберное 1-расширение (граф с вектором степеней (2,2,1,1) имеет минимальное реберное 1-расширение с вектором степеней (2,2,2,2), а оставшиеся пять графов имеют своим минимальным реберным 1-расширением полный граф K_4).

Продолжим поиски минимальных графов с неизоморфными минимальными реберными 1-расширениями для групп 2) и 3).

5-вершиные графы без изолированных вершин имеют не менее 3 ребер. Лишь один 5-вершинный граф без изолированных вершин имеет три ребра: униграф $G_{5,3}$ с вектором степеней (2,1,1,1,1) можно представить в виде объединения двух цепей: $P_3 \cup P_2$. С одной стороны, по лемме 3.1.1 его минимальное реберное 1-расширение не может содержать вершин степени ниже 2, а с другой стороны, нетрудно видеть, что цикл C_5 является реберным 1-расширением графа $G_{5,3}$. Учитывая, что цикл C_5 является униграфом, делаем вывод, что C_5 является и единственным с точностью до изоморфизма минимальным реберным 1-расширением графа $G_{5,3}$.

В точности три 5-вершинных графа без изолированных вершин имеют 4 ребра.

1. Граф вида $C_3 \cup P_2$ имеет вектор степеней (2,2,2,1,1).
2. Граф P_5 также имеет вектор степеней (2,2,2,1,1). По теоремам 3.1.1 и 3.1.2 цикл C_5 есть единственное с точностью до изоморфизма минимальное реберное 1-расширение цепи P_5.
3. Униграф G_5 с вектором степеней (3,2,1,1,1), изображенный на рис. 3.3.1, *а*, является *сверхстройным деревом* с вектором цепей (2,1,1). По лемме 3.1.1, минимальная степень вершины в любом его минимальном реберном 1-расширении не может быть ниже двух, следовательно, минимальное реберное 1-расширение графа G_5 отличается от него не менее чем на два дополнительных ребра. Непосредственной проверкой убеждаемся, что графы G_{51} и G_{52}, изображенные на рис. 3.3.1, *б*, *в*, являются реберными 1-расширениями графа G_5, причем отличаются от него в точности на два дополнительных ребра, а следовательно, являются и его минимальными реберными 1-расширениями.



а *б* *в*

Рис. 3.3.1. Граф G_5 (*а*) и два его МР-1Р (*в*, *г*)

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3.3.2. 5-*вершинный униграф* G_5 *с вектором степеней* (3,2,1,1,1) *является минимальным графом по числу вершин и ребер как среди графов без изолированным вершин, так и среди связных графов, имеющих неизоморфные минимальные реберные* 1-*расширения. Минимальность понимается в том* смысле, *что не существует графа, обладающего указананным свойством, с меньшим количеством вершин и ребер*.

Заметим, что граф G_5 является минимальным графом по числу вершин и ребер среди связных графов, имеющих неизоморфные минимальные вершинные 1-расширения (см. теорему 2.3.6).

3.4. Циклы

В работе (Harary, Hayes, 1993) авторы предложили процедуру для построения минимального реберного *k*-расширения цикла. Большинство схем построения минимальных вершинных 1-расширений, которые были рассмотрены в главе 2, позволяют строить и минимальные реберные 1-расширения для циклов с числом вершин на 1 больше.

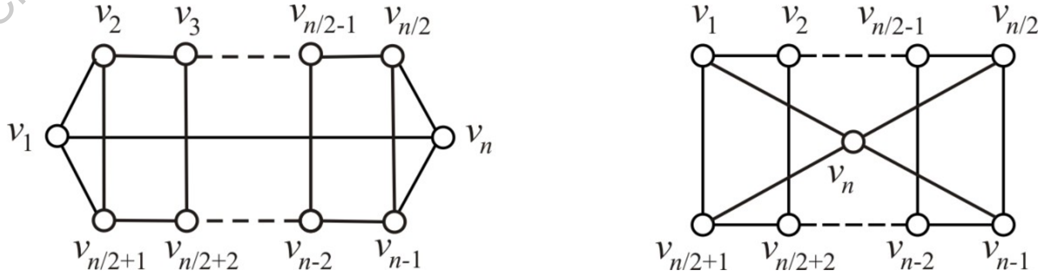
ТЕОРЕМА 3.4.1 (Harary, Hayes, 1993). *Минимальное реберное 1-расширение n-вершинного цикла C_n содержит не менее* $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ *дополнительных ребер*.

Доказательство. Пусть граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ является минимальным реберным 1-расширением *n*-вершинного цикла C_n. Согласно лемме 3.1.2 степень каждой вершины в графе G^* не ниже 3, а при нечетном значении *n* степень одной из вершин в силу теоремы о необходимой четности суммы степеней вершин будет строго больше 3. Таким образом, можно записать

$$\left|\alpha^*\right| \geq \begin{cases} \dfrac{3n+1}{2}, & \text{если } n \text{ - нечетно,} \\ \dfrac{3n}{2}, & \text{если } n \text{ - четно.} \end{cases}$$

Поскольку число ребер *n*-вершинного цикла равно *n*, то, объединяя оба случая, получаем требуемую оценку снизу для числа дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения цикла.□

ТЕОРЕМА 3.4.2 (Harary, Hayes, 1993). *Гамильтоновы графы, изображенные на рис.* 3.4.1*, представляют собой минимальные реберные* 1-*расширения n-вершинного цикла при n четном* (*рис.* 3.4.1, *а*) *и n нечетном* (*рис.* 3.4.1, *б*).



а *б*

Рис. 3.4.1 МР-1Р циклов

Данные схемы совпадают со схемами построения минимальных вершинных 1-расширений из теоремы 2.4.2. На рис. 3.4.2 представлены минимальные реберные 1-расширения малых целых, построенных по схеме из теоремы 3.4.2.

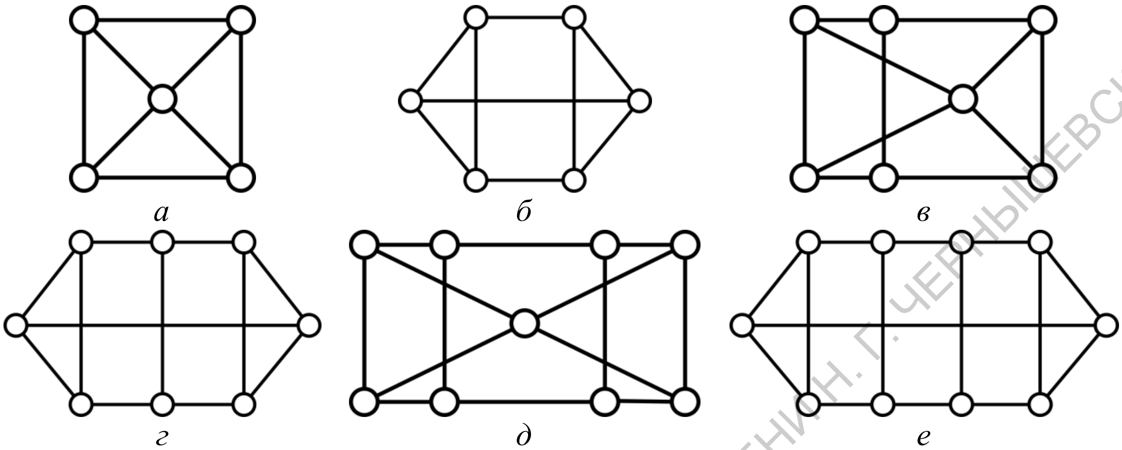


Рис. 3.4.2. МР-1Р циклов C_5 (*а*), C_6 (*б*), C_7 (*в*), C_8(*г*), C_9(*д*) и C_{10}(*е*)

Следствие 1. *Минимальное реберное* 1-*расширение* n-*вершинного цикла имеет вектор степеней* (3,3,…,3) *при четном* n *и* (4,3,…,3), *при нечетном* n.

Следствие 2. *Минимальное реберное* 1-*расширение* n-*вершинного цикла* C_n *содержит в точности* $\left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor$ *ребер или* $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ *дополнительных ребер*.

Схемы Махопадхья и Синха, которые были рассмотрены в теореме 2.4.3 главы 2, позволяют строить как вершинные, так и реберные минимальные 1-расширения:

ТЕОРЕМА 3.4.3 (Mukhopadhyaya, Sinha, 1992). *Графы* $M(k)$ *являются минимальными вершинными и реберными* 1-*расширениями соответствующего цикла при* $k \geq 4$.

На рис. 2.4.4 и 2.4.5 можно посмотреть минимальные реберные 1-расширения циклов, построенные по схемам Махопадхья и Синха. Нужно учитывать, что граф $M(k)$ является минимальным вершинным 1-расширением для цикла с числом вершин $n - 1$ и минимальным реберным 1-расширением для цикла с числом вершин n. Аналогично теореме 2.4.4 справедлива

ТЕОРЕМА 3.4.4. *Графы* $M(k)$ *и* $H(k)$ *при* $k = 7$ *и* $k > 8$ *неизоморфны*.

Далее в главе 2 было рассмотрено семейство $W(k)$ (см. теорему 2.4.5).

ТЕОРЕМА 3.4.5 (Ванг, Хунг и Хсу, 1998). *Графы $W(k)$ являются минимальными вершинными и реберными 1-расширениями соответствующего цикла при $k \geq 1$.*

Напомним, что семейство $W(k)$ дает минимальные вершинные 1-расширения цикла C_n при $n = 11, 29, 55, 89, \ldots$, а минимальные реберные 1-расширения при $n = 12, 30, 56, 90, \ldots$

Семейство $CT(s)$ (см. теорему 2.4.6) также позволяет строить минимальные реберные 1-расширения некоторых циклов.

ТЕОРЕМА 3.4.6 (Хунг, Хсу и Санг, 1999). *Графы $CT(k)$ являются минимальными вершинными и реберными 1-расширениями соответствующего цикла при $k \geq 1$.*

Семейство $CT(k)$ дает минимальные вершинные 1-расширения цикла C_n при $n = 10, 22, 46, 94, \ldots$

Заметим, что схемы построения минимальных вершинных 1-расширений из теоремы 2.4.7 в общем случае не дают минимальные реберные 1-расширения. В работе (Абросимов, 2004) было предложено новое семейство минимальных реберных 1-расширений для циклов с любым числом вершин.

ТЕОРЕМА 3.4.7. *Гамильтоновы графы, изображенные на рис.* 3.4.3, *представляют собой минимальные реберные* 1-*расширения n-вершинного* ($n > 3$) *цикла при n четном* (*рис.* 3.4.3, *а*) *и n нечетном* (*рис.* 3.4.3, *б*).

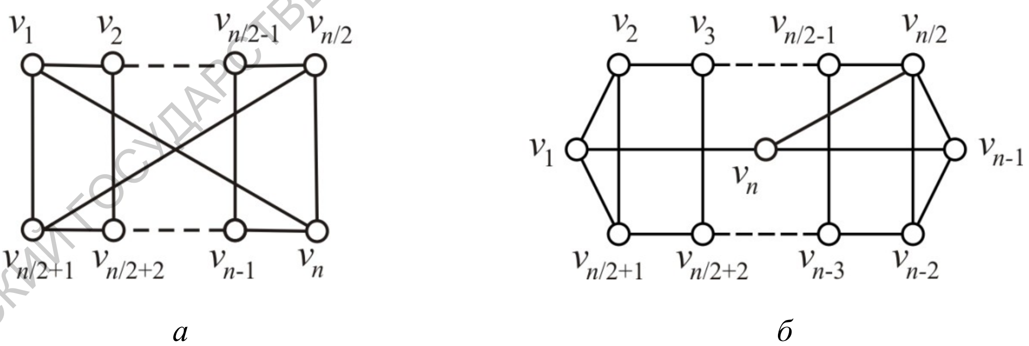


Рис. 3.4.3. МР-1Р циклов

Доказательство. Обозначим через $A(n)$ n-вершинный граф, построенный по рассматриваемым схемам. Покажем, что графы $A(n)$ являются минимальными реберными 1-расширениями соответствующих циклов. Непосредственной проверкой убеждаемся, что графы являются реберными 1-расширениями циклов.

Рассматриваемые графы имеют такое же количество ребер, что и соответствующие графы из теоремы 3.4.2, следовательно, они являются и минимальными реберными 1-расширениями.□

На рис. 3.4.4 представлены минимальные реберные 1-расширения некоторых циклов, построенные по схемам из теоремы 3.4.7.

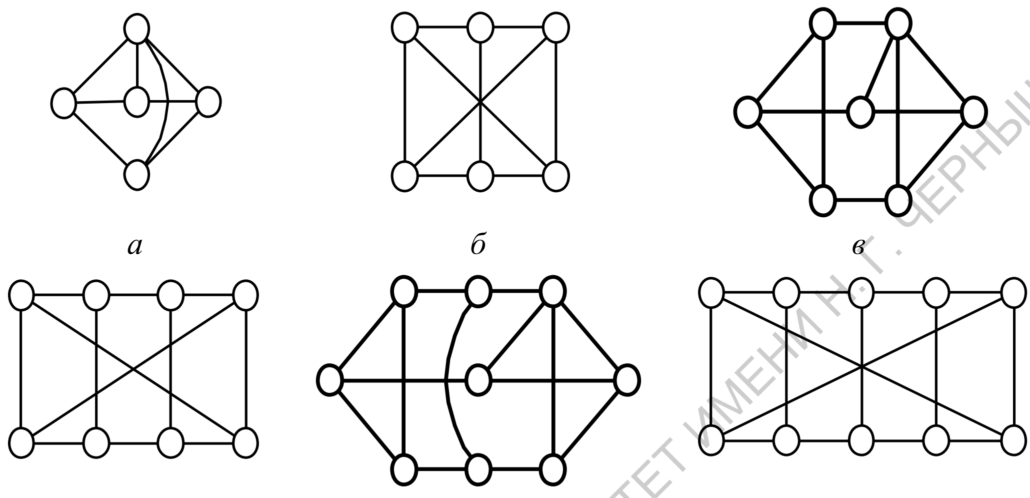


Рис. 3.4.4. МР-1Р циклов C_5 (*а*), C_6 (*б*), C_7 (*в*), C_8 (*г*), C_9 (*д*) и C_{10} (*е*)

Заметим, что при n £ 5 построенные графы изоморфны построениям Харари и Хейза. Покажем, что при $n > 5$ рассмотренные графы неизоморфны соответствующим графам из теоремы 3.4.2.

ТЕОРЕМА 3.4.8. *Графы $A(n)$ и $H(n)$ при $n > 6$ неизоморфны.*

Доказательство. Для четного $n = 2k$ имеем графы $A(2k)$ и $H(2k)$, представленные на рис. 3.4.1, *а* и 3.4.3, *а*. Видно, что граф $H(2k)$ содержит два цикла длины 3: $v_{n/2+1}v_1v_2$ и $v_nv_{n-1}v_{n/2}$, что возможно в графе $A(2k)$ лишь при $n = 4$.

Для нечетного $n = 2k + 1$ имеем графы $A(2k + 1)$ и $H(2k + 1)$, представленные на рис. 3.4.1, *б* и 3.4.3, *б*. Видно, что единственная вершина степени 4 в графе $A(2k + 1)$ является вершиной двух треугольников с общей стороной: $v_{n/2}v_{n-1}v_n$ и $v_{n/2}v_{n-1}v_{n-2}$, а в графе $H(2k + 1)$ такое возможно лишь при $n = 5$.□

ТЕОРЕМА 3.4.9. *Графы $A(n)$ и $M(n)$ при $n > 7$ неизоморфны.*

Доказательство. Для нечетного $n = 2k + 1$ имеем графы $A(2k + 1)$ и $M(2k + 1)$. Видно, что единственная вершина степени 4 в графе $A(2k + 1)$ является вершиной двух треугольников с общей стороной: $v_{n/2}v_{n+1}v_n$ и $v_{n/2}v_{n-1}v_n$, а в графе $M(2k + 1)$ такое возможно лишь при $n = 5$ и $n = 7$.

Для четного $n = 2k$ имеем графы $A(2k)$ и $M(2k)$. Видно, что граф $M(2k)$ содержит циклы длины 3, а граф $A(2k)$ при $n > 4$ циклов длины 3 не содержит.□

Таким образом, имеет место следующая

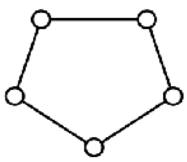
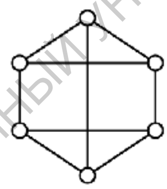
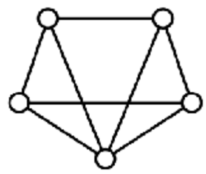
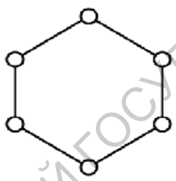
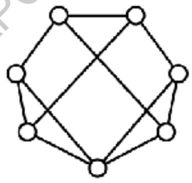
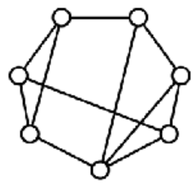
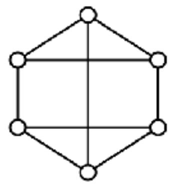
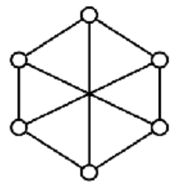
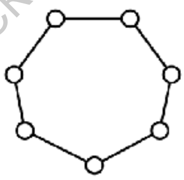
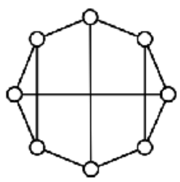
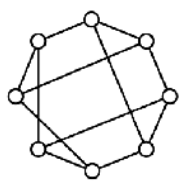
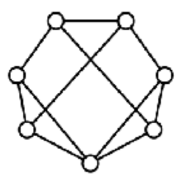
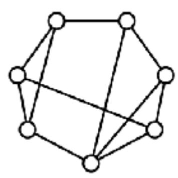
ТЕОРЕМА 3.4.10. *Любой цикл* C_n *при* $n > 5$ *имеет, по крайней мере, два неизоморфных минимальных реберных* 1-*расширения.*

Аналогичный результат имеет место и для минимальных вершинных 1-расширений циклов (см. теорему 2.4.10).

Схемы, описанные в теоремах 3.4.2-3.4.6, позволяют строить графы, являющиеся как минимальными реберными 1-расширениями цикла, так и минимальными вершинными 1-расширениями цикла с числом вершин на одну меньше. Графы, построенные по схеме, представленной на рис. 3.4.3, *б*, обладают этим же свойством. Схема, представленная на рис. 3.4.1, *а*, позволяет строить лишь минимальные реберные 1-расширения цикла. В табл. 3.4.1 показаны минимальные вершинные и реберные 1-расширения циклов с числом вершин 5, 6 и 7.

Таблица 3.4.1

МВ-1Р и МР-1Р циклов с числом вершин 5, 6 и 7

Граф	МВ-1Р	МР-1Р
 C_5		
 C_6	 	 
 C_7	 	 

Видно, что одно из двух минимальных реберных 1-расширений 6-вершинного цикла (см. рис. 3.4.1, *а*) является также и минимальным вершинным 1-расширением 5-вершинного цикла, а оба минимальных реберных 1-расширения 7-вершинного цикла (см. рис. 3.4.1, *б* и 3.4.3, *б*) являются также и минимальными вершинными 1-расширениями 6-вершинного цикла. С помощью произведенных на компьютере вычислений по сопоставлению графов, являющихся минимальными реберными 1-расширениями и минимальными вершинными 1-расширениями циклов, были получены данные, представленные в табл. 3.4.2 (в 1999-2000 г. автором были обработаны циклы с числом вершин до 13, последующие результаты получены в 2012 г. Н. А. Кузнецовым):

Таблица 3.4.2

МВ-1Р и МР-1Р циклов с числом вершин до 17

G	VEC(G^*)	МВ-1Р	VEC(G^*)	МР-1Р	Общие
C_3	(3^4)	1	–	–	–
C_4	$(4,3^4)$	1	(3^4)	1	1
C_5	(3^6)	1	$(4,3^4)$	1	1
C_6	$(4,3^6)$	2	(3^6)	2	1
C_7	(3^8)	2	$(4,3^6)$	2	2
C_8	$(4,3^8)$	10	(3^8)	4	2
C_9	(3^{10})	7	$(4,3^8)$	13	10
C_{10}	$(4,3^{10})$	63	(3^{10})	13	6
C_{11}	(3^{12})	27	$(4,3^{10})$	87	63
C_{12}	$(4,3^{12})$	602	(3^{12})	53	26
C_{13}	(3^{14})	158	$(4,3^{12})$	885	598
C_{14}	$(4,3^{14})$	7203	(3^{14})	320	154
C_{15}	(3^{16})	1396	$(4,3^{14})$	10933	7129
C_{16}	$(4,3^{16})$	104212	(3^{16})	2641	1370
C_{17}	(3^{18})	16069	$(4,3^{16})$	160145	102576

В первом столбце указывается цикл, во втором – вектор степеней его минимального вершинного 1-расширения, в третьем – количество неизоморфных минимальных вершинных 1-расширений, в четвертом и пятом столбцах приводится аналогичная информация относительно минимальных реберных 1-расширений. В последнем столбце указывается количество минимальных реберных 1-расширений, являющихся также и минимальными вершинными 1-расширениями цикла с числом вершин на единицу меньшим. Из таблицы видно, что существуют минимальные 1-расширения, как вершинные, так и реберные, которые не являются минимальными

1-расширениями, соответственно реберными или вершинными, цикла, отличающегося по числу вершин на единицу.

Наименьшим по числу вершин циклом, таким, что среди его минимальных реберных 1-расширений не присутствует минимальное вершинное 1-расширение цикла с числом вершин на единицу меньшим, является 10-вершинный цикл, а соответстующим минимальным вершинным 1-расширением цикла C_9 является граф Петерсена, изображенный на рис. 2.4.11 (заметим, что этот граф является негамильтоновым, то есть даже не содержит цикла C_{10}). Для вершинных 1-расширений аналогичным циклом является цикл C_8, сразу 2 минимальных реберных 1-расширения которого не являются минимальными вершинными 1-расширениями цикла C_7. Эти графы представлены на рис. 3.4.5.

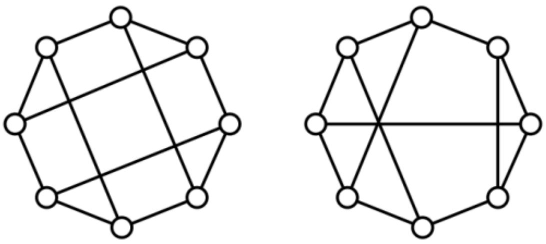


Рис. 3.4.5. МР-1Р цикла C_8

3.5. Предполные графы

К сожалению, полного описания минимальных реберных k-расширений предполных графов, в отличие от вершинных, пока получить не удалось. В этом параграфе рассмотрим некоторые общие свойства таких расширений, а далее применим их для описания решения в некоторых частных случаях. Для реберных k-расширений предполных графов имеет место полезная

ЛЕММА 3.5.1. *Пусть n-вершинный предполный граф G имеет в точности p полных вершин. Если граф G имеет минимальное реберное k-расширение, то оно содержит не менее $p + 2k$ полных вершин.*

Доказательство. Пусть G^* – минимальное реберное k-расширение графа G с p полными вершинами. Рассмотрим граф G', получающийся из G^* удалением следующих k ребер: в качестве очередного ребра удаляем а) ребро, соединяющее две полные вершины. Если таких ребер нет, то б) ребро, инцидентное полной вершине (это возможно, только если останется единственная полная вершина). Если нет ребер из пунктов а) и б), то в) любое ребро.

Очевидно, что если среди выбранных ребер окажется хотя бы одно ребро из пунктов б) или в), то получившийся граф не будет полным и не будет допускать вложения исходного графа G. Таким образом, граф G' должен содержать не менее p полных вершин и получаться из графа G^* удалением k ребер, соединяющих полные вершины графа G^*. После удаления каждого такого ребра количество полных вершин уменьшается на две, что и доказывает утверждение.□

Следствие 1. *Пусть n-вершинный предполный граф G имеет в точности p полных вершин, тогда граф G не имеет минимальных реберных k-расширений при* $k > \frac{n-p}{2}$.

Следствие 2. *Пусть n-вершинный предполный граф имеет вид $K_p + G_n$. Если он имеет минимальное реберное k-расширение, то оно имеет вид $K_{p+2k} + G_{n-2k}$, где G_{n-2k} – подходящий $(n-2k)$-вершинный граф.*

Соединение полного графа и цепи: $K_m + P_n$

Напомним, что n-вершинное дерево, все вершины которого имеют степень не более двух, называется *цепью* и обозначается P_n. Одновершинная цепь P_1 называется *тривиальной*. Будем говорить, что n-вершинный граф G может быть покрыт (не более чем) p цепями, если существует n-вершинный граф, являющийся объединением (не более чем) p цепей и вкладывающийся в граф G. Например, полный граф K_n может быть покрыт одной цепью, а вполне несвязный граф O_n может быть покрыт n цепями (тривиальными).

При $n \le 2$ граф $K_m + P_n$ изоморфен графу K_{m+n} и не имеет минимальных реберных расширений. Пусть далее $n > 2$, и рассмотрим граф $K_{m+2} + G$, где G – $(n-2)$-вершинный граф, такой, что любой граф, получающийся из G удалением одного ребра, можно покрыть не более чем тремя цепями. Обозначим для определенности вершины подграфа K_{m+2} графа $K_{m+2} + G$ через $v_1, \ldots, v_{m+2}$. Покажем, что $K_{m+2} + G$ является реберным 1-расширением для $K_m + P_n$. Заметим, что ребра графа $K_{m+2}+G$ можно разделить на три типа:

1) ребра, соединяющие полные вершины $v_1, \ldots, v_{m+2}$;
2) ребра, соединяющие полную вершину $v_1, \ldots, v_{m+2}$ и вершину подграфа G;
3) ребра, соединяющие вершины подграфа G.

Рассмотрим удаление из $K_{m+2} + G$ ребра типа 1. Пусть для определенности удалено ребро $\{v_1,v_2\}$. Поскольку часть графа G допускает покрытие не более чем тремя цепями, то, очевидно, и сам граф G может быть покрыт тремя цепями. Рассмотрим худший случай, когда для покрытия необходимы три цепи. Пусть цепи P_{n_1}, P_{n_2} и P_{n_3} образуют покрытие графа G. Вложение графа $K_m + P_n$ в $K_{m+2} + G - \{v_1,v_2\}$ возможно следующим образом. Полные вершины – $v_3, \ldots, v_{m+2}$, а оставшиеся вершины образуют цепь: $P_{n_1} v_1 P_{n_2} v_2 \; P_{n_3}$.

Рассмотрим удаление из $K_{m+2} + G$ ребра типа 2. Пусть снова цепи P_{n_1}, P_{n_2} и P_{n_3} образуют покрытие графа G. Пусть для определенности удалено ребро, соединяющее вершину v_1 с некоторой вершиной w цепи P_{n_1}. Вложение графа $K_m + P_n$ в $K_{m+2} + G - \{v_1,w\}$ возможно следующим образом. Полные вершины – $v_3, \dots, v_{m+2}$, а оставшиеся вершины образуют цепь: $P_{n_1} v_2 P_{n_2} v_1 P_{n_3}$.

Рассмотрим удаление из $K_{m+2} + G$ ребра типа 3. Пусть для определенности удалено ребро, соединяющее вершины v и w. По условию граф $G - \{v,w\}$ допускает покрытие не более чем тремя цепями, и пусть это снова будут P_{n_1}, P_{n_2} и P_{n_3}. Вложение графа $K_m + P_n$ в $K_{m+2} + G - \{v,w\}$ возможно следующим образом. Полные вершины – $v_3, \dots, v_{m+2}$, а оставшиеся вершины образуют цепь: $P_{n_1} v_1 P_{n_2} v_2 P_{n_3}$.

Заметим, что условие покрытия графа G с удаленным ребром тремя цепями является существенным, так как более трех цепей нельзя объединить в одну с помощью двух дополнительных вершин. Таким образом, граф $K_{m+2} + G$ является реберным 1-расширением графа $K_m + P_n$.

Исследуем свойства графа G:

1) состоит из $n - 2$ вершин;
2) любой граф, получающийся из G удалением одного ребра, можно покрыть не более чем тремя цепями;
3) граф, получающийся из G удалением одного ребра, имеет не более трех компонент связности, а следовательно, сам граф G имеет не более двух компонент связности.

Рассмотрим граф, являющийся объединением двух цепей: $P_{n_1} \cup P_{n_2}$. При удалении любого ребра такой граф распадется на три цепи. Таким образом, объединение двух цепей может быть использовано в качестве графа G, причем число ребер в таком графе есть $n - 4$. Заметим, что $P_{n_1} \cup P_{n_2}$ отличается в точности на одно ребро от объединения трех цепей. С учетом леммы получаем, что минимальное реберное 1-расширение графа $K_m + P_n$ имеет вид $K_{m+2} + G$, где G – $(n - 2)$-вершинный граф, каждая часть которого, получающаяся удалением одного ребра, может быть покрыта не более чем тремя цепями. Рассмотрим, какие графы удовлетворяют условиям 1–3 для n-вершинного графа G:

1) объединение двух цепей: $P_{n_1} \cup P_{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $1 \le n_1 \le n_2 \le n-1$. Таких графов будет $n/2$;
2) при $n \ge 5$: цикл и две изолированные вершины: $O_2 \cup C_{n-2}$;
3) при $n = 5$: $O_1 \cup K_{1,3}$.

Из всего сказанного получается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.5.1. *Относительно минимальных реберных* 1-*расширений предполных графов вида* $K_m + P_n$ *справедливо следующее:*

– *при* $n = 1, 2$ *минимальных реберных* 1-*расширений нет*;

– *при* $n = 3$ *минимальное реберное* 1-*расширение единственно*: K_{m+3};

– *при* $n \geq 4$ *существует* $(n/2 - 1)$ *минимальных реберных* 1-*расширений вида*

$$K_{m+2} + (P_{n_1} \cup P_{n_2}), \quad n_1 + n_2 = n - 2, \quad 1 \leq n_1 \leq n_2 \leq n - 3;$$

– *при* $n = 7$ *имеется минимальное реберное* 1-*расширение вида*

$$K_{m+2} + (O_1 \cup K_{1,3});$$

– *при* $n \geq 7$ *имеется минимальное реберное* 1-*расширение вида*

$$K_{m+2} + (O_2 \cup C_{n-4}).$$

Следствие. *Число дополнительных ребер в минимальном реберном* 1-*расширении графа* $K_m + P_n$ *при* $n > 3$ *составляет* $2n - 6$.

Доказательство. При $n > 3$ одно из минимальных реберных 1-расширений графа $K_m + P_n$ имеет вид $K_{m+2} + (P_{n_1} \cup P_{n_2})$, $n_1 + n_2 = n - 2$, $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq n - 3$. Определим число его ребер.

K_{m+2} содержит $(m + 2)(m + 1)/2$ ребер.

$P_{n_1} \cup P_{n_2}$ содержит $n_1 - 1 + n_2 - 1 = (n_1 + n_2) - 2 = n - 4$ ребер.

Каждая вершина из K_{m+2} соединена с каждой из $n - 2$ вершин объединения $P_{n_1} \cup P_{n_2}$, что дает $(m + 2)(n - 2)$ ребер.

Складывая, получаем $(m + 2)(m + 1)/2 + n - 4 + (m + 2)(n - 2)$.

Граф $K_m + P_n$ содержит $m(m - 1)/2 + n - 1 + mn$ ребер. Таким образом, число дополнительных ребер составляет $2n - 6$.□

На рис. 3.5.1 представлены граф $K_1 + P_7$ и его минимальные реберные 1-расширения. Полные вершины обозначены черными точками. Для наглядности некоторые ребра, соединяющие полные вершины с остальными, опущены.

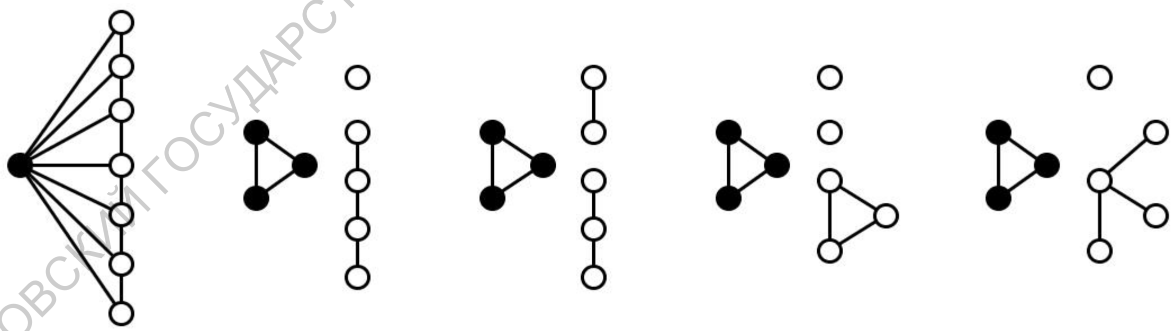


Рис. 3.5.1. Граф $K_1 + P_7$ и все его минимальные реберные 1-расширения

Теорему 3.5.1 можно обобщить:

ТЕОРЕМА 3.5.2. *Относительно минимальных реберных* k-*расширений предполных графов вида* $K_m + P_n$ *справедливы утверждения:*

– *при* $n \leq 2k$ *минимальных реберных* 1-*расширений нет*;

– *при* $2k < n \leq 4k + 1$ *минимальное реберное* 1-*расширение единственно*: $K_{2k+m} + O_{n-2k}$;

– при $n > 4k + 1$ минимальные реберные расширения имеют вид

$$K_{2k+m} + G_{n-2k},$$

где G_{n-2k} – $(n - 2k)$-вершинный граф с $n - 3k - 1$ ребрами, такой, что после удаления любых его k-ребер оставшаяся часть может быть покрыта не более чем $2k + 1$ цепями.

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из следствия 1 леммы 3.5.1.

Из леммы 3.5.1 следует, что если граф $K_1 + P_n$ имеет минимальное реберное k-расширение, то оно имеет вид $K_{2k+m} + G$, где G есть $(n - 2k)$-вершинный граф. Обозначим для определенности через $v_1,\ldots, v_{2k+m}$ полные вершины $K_{2k+m} + G$ из части K_{2k+m}. Рассмотрим граф, получающийся после удаления k ребер из графа $K_{2k+m} + G$. В нем останется, по крайней мере, m полных вершин, пусть для определенности это будут вершины $v_{2k+1},\ldots,v_{2k+m}$. Оставшиеся вершины должны образовывать цепь. Обозначим через K^* подграф, образованный из вершин $v_1,\ldots, v_{2k}$, а через G^* – подграф, образованный из вершин графа G. Для построения цепи имеется $2k$ вершин $v_1,\ldots, v_{2k}$ и вершины подграфа G^*. Граф K_{2k} является $(2k - 1)$-связным, поэтому удаление из него любых k ребер его связности не нарушит. Предположим, что подграф G^* можно покрыть не более чем $2k + 1$ цепями: $P_{n_1}, ¼, P_{n_l}$. Тогда легко построить n-вершинную цепь, соединяя концы цепей $P_{n_1}, ¼, P_{n_l}$ вершинами $v_1,\ldots, v_{2k}$. Если же подграф G^* нельзя покрыть не более чем $2k + 1$ цепями, то n-вершинную цепь построить невозможно.

Заметим, что минимальным по числу ребер p-вершинным графом, который удовлетворяет приведенному условию, при $p \le 2k + 1$ является вполне несвязный граф O_p, а при $p > 2k + 1$ – объединение $k + 1$ цепей: $P_{n_1}, ¼, P_{n_{k+1}}$. В самом деле, удаление одного ребра разбивает цепь на две цепи, следовательно, удаление k ребер приведет к образованию $2k + 1$ цепей. Легко подсчитать и число ребер в p-вершинном графе, являющемся объединением $k + 1$ цепей: $p - k - 1$.□

На рис. 3.5.2 представлены минимальные реберные 2-расширения для графов $K_1 + P_{11}$. По-прежнему полные вершины обозначаются черными точками и для наглядности некоторые ребра, соединяющие полные вершины с остальными, опущены.

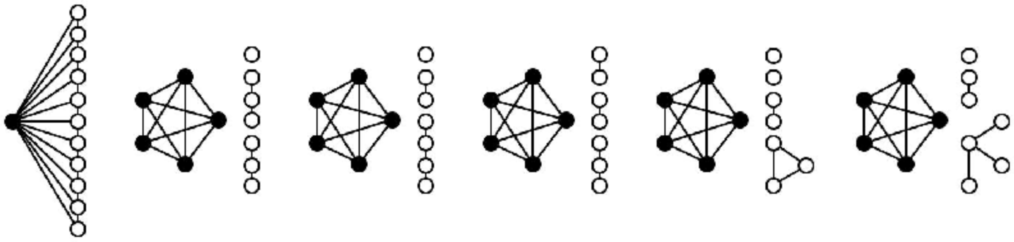


Рис. 3.5.2. Граф $K_1 + P_{11}$ и все его МР-2Р

Соединение полного графа и цикла: $K_m + C_n$

Связный n-вершинный граф, все вершины которого имеют степень 2, называется циклом и обозначается C_n. Очевидно, что цикл не может иметь менее 3 вершин.

ТЕОРЕМА 3.5.3. *Относительно минимальных реберных 1-расширений графа $K_m + C_n$ справедливы следующие утверждения:*

– *при $n = 3$ минимальных реберных 1-расширений нет;*

– *при $n = 4$ имеется единственное минимальное реберное 1-расширение: $K_{m+2} + O_2$;*

– *при $n \geq 5$ одно из минимальных реберных 1-расширений имеет вид*

$$K_{m+2} + P_{n-2};$$

– *при $n = 6$ одно из минимальных реберных 1-расширений имеет вид*

$$K_{m+3} + O_3;$$

– *при $n \geq 6$ одно из минимальных реберных 1-расширений имеет вид*

$$K_{m+2} + (O_1 \cup C_{n-2});$$

– *других минимальных реберных 1-расширений с точностью до изоморфизма у графа $K_m + C_n$ нет.*

Доказательство. При $n = 3$ граф $K_m + C_n$ является полным графом K_{m+n} и поэтому минимальных реберных 1-расширений не имеет. Далее рассмотрим случай $n > 3$.

По лемме, если граф $K_m + C_n$ имеет минимальное реберное 1-расширение, то его можно представить в виде $K_{m+2} + G_{n-2}$. Обозначим для определенности через $v_1,\ldots, v_{m+2}$ полные вершины в части K_{m+2}, а через $u_1, \ldots, u_{n-2}$ вершины части G_{n-2}.

Убедимся, что при $n > 3$ граф $K_{m+2} + P_{n-2}$ является реберным 1-расширением графа $K_m + C_n$. Аналогично доказательству теоремы 3.5.1 все ребра разделим на три типа: ребра внутри K_{m+2}, ребра внутри P_{n-2} и ребра, соединяющие вершины из K_{m+2} и из P_{n-2}. Заметим, что при удалении ребра любого типа остается, по крайней мере, m полных вершин, поэтому достаточно убедиться, что остальные вершины образую n-вершинный цикл. Рассмотрим удаление ребра каждого типа.

При удалении ребра, например $\{v_1,v_2\}$, в части K_{m+2} остаются полные вершины $v_3,\ldots,v_{m+2}$, а остальные вершины образуют цикл: v_1, u_1, v_2, u_2, $\ldots$, u_{n-2}, v_1.

При удалении ребра в части P_{n-2} эта цепь распадается на две цепи: P_{n_1} и P_{n_2}. Полные вершины – $v_3,\ldots,v_{m+2}$, а остальные вершины образуют цикл: v_1, P_1, v_2, P_2, v_1.

При удалении ребра, соединяющего вершину из K_{m+2} и из P_{n-2}, например $\{v_1,u_p\}$, где $1 \le p \le n-2$, остаются полные вершины $v_3,\ldots,v_{m+2}$, а остальные вершины образуют цикл: или v_1, u_1, u_2, …, u_{n-2}, v_2, v_1 (если $p \ne 1$), или v_2, u_1, …, u_{n-2}, v_1, v_2 (если $p = 1$).

Таким образом, при $n > 3$ граф $K_{m+2} + P_{n-2}$ действительно является реберным 1-расширением графа $K_m + C_n$.

Пусть $K_{m+2} + G_{n-2}$ является минимальным реберным 1-расширением графа $K_m + C_n$. Тогда граф G_{n-2} содержит не более $n-3$ ребер. Рассмотрим удаление произвольного ребра e в G_{n-2}. По предположению вершины графа G_{n-2} вместе с двумя полными вершинами образуют цикл, следовательно, граф $G_{n-2} - e$ содержит не более двух компонент связности и может быть покрыт двумя цепями. Первое условие означает, что число ребер в G_{n-2} не менее $n-3$. Поскольку цепь P_{n-2} содержит в точности $n-3$ ребра, то граф $K_{m+2} + P_{n-2}$ является минимальным реберным 1-расширением графа $K_m + C_n$, а любое другое минимальное реберное 1-расширение, если оно есть, имеет вид $K_{m+2} + G_{n-2}$, где граф G_{n-2} имеет $n-2$ вершин и $n-3$ ребер. Так как граф $G_{n-2} - e$ содержит не более двух компонент связности, то граф G_{n-2} либо состоит из одной компоненты связности и тогда является деревом, либо из одной $(n-3)$-вершинной двусвязной компоненты с $n-3$ ребрами, то есть цикла, и одной изолированной вершины.

Исследуем, каким может быть дерево в нашем случае. Покажем, что оно не может иметь более трех листьев. Предположим, что это не так, и граф G_{n-2} является деревом с более чем тремя листьями. Рассмотрим граф, получающийся удалением из G_{n-2} ребра при некотором листе v. Получим дерево с числом вершин на одну меньше и не менее чем с тремя листьями и изолированную вершину: $T_{n-3} \cup O_1$. По условию граф $K_2 + (T_{n-3} \cup O_1)$ должен содержать n-вершинный цикл. Вершина v в этом цикле должна соседствовать с обеими полными вершинами v_1 и v_2. Другим соседом полной вершины v_1 будет один из листьев дерева. Далее последует цепь (единственная) до другого листа, затем вершина v_2. Оставшиеся листья не могут быть присоединены к циклу. Таким образом, дерево не может иметь более трех листьев. Один лист может иметь только тривиальное дерево (состоящее из одной вершины). Если листа два, то получаем рассмотренный ранее случай цепи.

Исследуем случай трех листьев. В этом случае дерево, очевидно, имеет одну вершину степени 3, три вершины степени 1 и может иметь несколько вершин степени 2. Однако если хотя бы один лист не смежен с вершиной степени 3, то, удалив ребро при таком листе, мы опять получим граф вида $T_{n-3} \cup O_1$. Повторяя предыдущие рассуждения, получим противоречие. Следовательно, деревом с тремя листьями может быть лишь 4-вершинная звезда $K_1 + O_3$.

Итак, граф G_{n-2} может иметь вид $O_1 \cup C_{n-3}$, или P_{n-2}, или $K_1 + O_3$.□

Таким образом, графы $K_1 + C_4$ и $K_1 + C_5$ имеют единственное минимальное реберное 1-расширение, граф $K_1 + C_6$ имеет три минимальных реберных 1-расширения, а при $n > 6$ граф $K_1 + C_n$ имеет два минимальных реберных 1-расширения. На рис. 3.5.3 представлены все минимальные реберные 1-расширения для графа $K_1 + C_6$. Как и ранее, полные вершины обозначаются черными точками, и для наглядности некоторые ребра, соединяющие полные вершины с остальными, опущены.

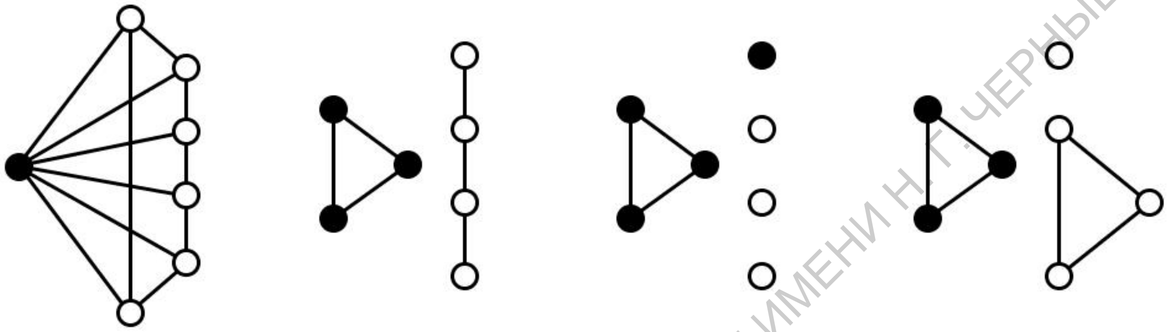


Рис. 3.5.3. Граф $K_1 + C_6$ и все его МР-1Р

Очевидным образом теорема обобщается:

ТЕОРЕМА 3.5.4. *Относительно минимальных реберных k-расширений предполных графов вида $K_m + C_n$ справедливо следующее:*

– *при $n \le 2k$ минимальных реберных 1-расширений нет;*

– *при $2k < n \le 4k$ минимальное реберное 1-расширение единственно:*

$$K_{2k+m} + O_{n-2k};$$

– *при $n > 4k$ минимальные реберные расширения имеют вид*

$$K_{2k+m} + G_{n-2k},$$

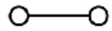
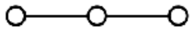
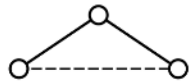
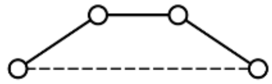
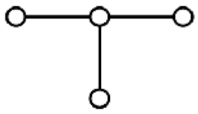
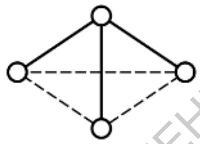
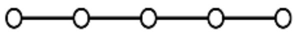
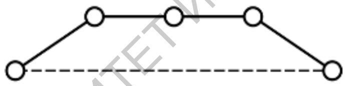
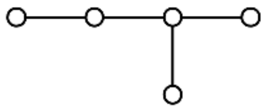
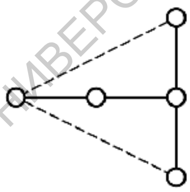
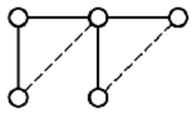
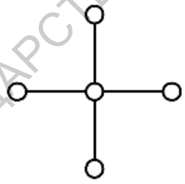
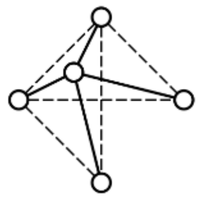
где G_{n-2k} – $(n-2k)$-вершинный граф с $n-3k-1$ ребрами, такой, что после удаления любых его k ребер оставшаяся часть может быть покрыта не более чем $2k$ цепями.

3.6. Деревья

В табл. 3.6.1 представлены минимальные реберные 1-расширения для малых деревьев с числом вершин до 5. Последующие далее в этом параграфе результаты позволяют построить минимальное реберное 1-расширение для двух частных случаев деревьев – звезд и сверхстройных деревьев особого вида.

Таблица 3.6.1

МР-1Р деревьев с числом вершин до 5

Дерево	МВ-1Р
	
	
	
	
	
	 
	

3.6.1. Звёзды

Звезда является частным случаем предполного графа и может быть записана в виде $K_m + O_n$, где O_n – вполне несвязный граф. По лемме 3.5.1 число полных вершин минимального реберного k-расширения графа $K_m + O_n$ должно быть не менее $m + 2k$, следовательно, при $n < 2k$ граф $K_m + O_n$ не имеет минимального реберного k-расширения. Заметим, что при $n \geq 2k$ граф вида $K_{m+2k} + O_{n-2k}$ является расширением графа $K_m + O_n$, а с учетом леммы 3.5.1 и следствий из нее получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.6.1. *При $k \le n/2$ граф $K_{m+2k} + O_{n-2k}$ является единственным минимальным реберным k-расширением графа $K_m + O_n$. При $k > n/2$ граф $K_m + O_n$ не имеет минимальных реберных k-расширений.*

На рис. 3.6.1 показаны минимальные реберные 1-расширения звезд $K_1 + O_2$ и $K_1 + O_3$. Для наглядности полные вершины помечены черным.

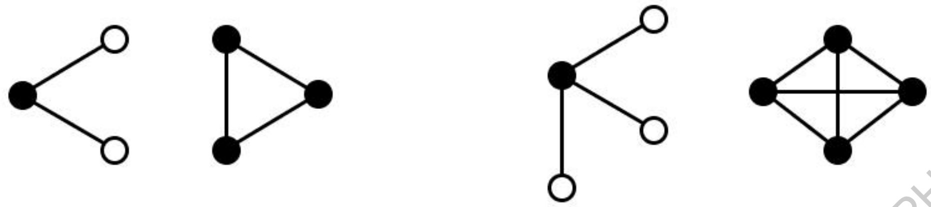


Рис. 3.6.1. Звезды $K_1 + O_2$ и $K_1 + O_3$ и их МР-1Р

3.6.2. Сверхстройные деревья

Далее мы получим нижнюю оценку на количество дополнительных ребер минимального реберного 1-расширения произвольного сверхстройного дерева и покажем, что эта оценка является достижимой, указав специальное семейство сверхстройных деревьев, минимальные реберные 1-расширения которых имеют соответствующее число дополнительных ребер.

Пусть T – сверхстройное дерево с вектором цепей $(m_1,\ldots,m_k)$, $k > 2$, и с вектором степеней вида $(k,2^m,1^k)$. Определим ограничения, которым должно удовлетворять любое минимальное реберное 1-расширение T^* сверхстройного дерева T. Заметим, что

1) граф T^* не может иметь вершин со степенью меньше двух, так как удаление любого инцидентного такой вершине ребра привело бы к появлению изолированной вершины;

2) граф T^* не может иметь единственную вершину степени k, так как удаление любого инцидентного такой вершине ребра привело бы к графу, у которого все вершины имеет степень меньше k.

Из пункта 2 следует две альтернативы: либо в T^* есть вершина степени более k, либо как минимум две вершины степени не менее k. Оценим количество дополнительных ребер в каждом из случаев.

1. Если в графе T^* есть вершина степени более k, то вектор степеней графа T^* будет мажорировать вектор $(k + 1,2^{m+k})$. Чтобы определить минимально возможное в этом случае число дополнительных ребер, вычтем из суммы компонент этого вектора сумму степеней вершин дерева T и разделим пополам: $(k + 1)/2$.

2. Если в графе T^* есть как минимум две вершины степени не менее k, то вектор степеней графа T^* будет мажорировать вектор $(k,k,2^{m+k-1})$. Чтобы определить минимально возможное в этом случае число

дополнительных ребер, вычтем из суммы компонент этого вектора сумму степеней вершин дерева T и разделим пополам: $k - 1$.

Так как $k > 2$, то лишь при $k = 3$ схема 2 может иметь такое же количество дополнительных ребер, как и схема 1, а во всех остальных случаях больше. Таким образом, получаем

ТЕОРЕМА 3.6.2. *Минимальное реберное* 1-*расширение сверхстройного дерева T с вектором степеней* $(k,2,\ldots,2)$ *содержит не менее чем* $(k+1)/2$ *при нечетном k и* $(k+2)/2$ *при четном k дополнительных ребер.*

Далее мы покажем, что оценки из этой теоремы не могут быть улучшены. Исследуем схему 1.

ТЕОРЕМА 3.6.3. *Сверхстройное дерево T с вектором цепей* $(m_1,\ldots,m_k)$ *тогда и только тогда имеет минимальное реберное* 1-*расширение с вектором степеней* $(k+1,2,\ldots,2)$, *отличающееся от T на* $(k+1)/2$ *дополнительных ребер, когда*

1) *среди его цепей есть цепи всех длин от* 1 *до* m_1 (*максимальной длины цепи*);

2) *цепь максимальной длины* m_1 *единственна*;

3) *все остальные цепи можно разбить на пары так, чтобы их длины в сумме давали* m_1.

Доказательство. Пусть k – нечетно и T – сверхстройное дерево с вектором цепей $(m_1,\ldots m_k)$, а G^* – его минимальное реберное 1-расширение с вектором степеней $(k+1,2,\ldots,2)$, отличающееся от T на $(k+1)/2$ дополнительных ребер. Заметим, что последнее условие теоремы эквивалентно тому, что концы всех цепей, кроме максимальной, могут быть соединены таким образом, чтобы все получившиеся циклы имели длину $m_1 + 1$.

Нетрудно видеть, что граф G^*, построенный по первой схеме, представляет собой объединение циклов с общей вершиной, которую для определенности обозначим v. Построение графа G^* из дерева T можно представить себе следующим образом: одна висячая вершина соединяется с корневой вершиной, а остальные висячие вершины попарно соединяются между собой.

Количество циклов в G^* обозначим через $t = d(v)/2 = (k+1)/2$. Длины циклов в G^* обозначим через $p_1,\ldots,p_t$. Для определенности будем считать, что $m_1 \geq \ldots \geq m_k$ и $p_1 \geq \ldots \geq p_t$. Очевидно, что $p_1 \geq m_1 + 1$.

Необходимость. Рассмотрим удаление произвольного ребра в графе G^*. Это ребро принадлежит некоторому циклу длины p_i. Если ребро инцидентно вершине v, то после удаления ребра вместо цикла появится цепь длины $p_i - 1$. Если ребро не инцидентно вершине v, то цикл распадается на две цепи. Так как по предположению дерево T вкладывается в получившийся граф, то для каждой из этих цепей должна найтись цепь такой же длины и в дереве T. В силу произвольности выбора ребра можно сделать вывод, что в дереве T должны быть цепи длины 1, 2,..., p_1-1. С учетом полученной ранее оценки $p_1 \geq m_1 + 1$ получаем, что $p_1 = m_1 + 1$. Таким образом, утверждение 1 доказано.

Предположим, что в дереве T есть несколько цепей максимальной длины m_1. Так как конец только одной из этих цепей может быть соединен с корневой вершиной и образовать цикл максимальной длины $p_1 = m_1 + 1$, то концы остальных цепей длины m_1 должны быть соединены с концами некоторых других цепей. Но это приведет к тому, что длины получившихся циклов будут больше, чем $p_1 = m_1 + 1$, а это противоречит предположению о том, что p_1 является максимальной длиной цикла. Таким образом, утверждение 2 доказано. □

Предположим, что $p_1 > p_t$, то есть не все циклы имеют одинаковую длину p_1. Рассмотрим граф, получающийся из G^* удалением ребра e инцидентного вершине v из цикла минимальной длины p_t, и попробуем построить вложение дерева T в получившийся граф. Вершина v в графе $G^* - e$ имеет степень k и единственным образом соответствует корневой вершине дерева. Из вершины v выходит одна цепь длины $p_t - 1$, и $(k-1)/2$ циклов, из которых нужно выделить $k-1$ цепей. По предположению $p_t - 1 < m_1$, то есть единственная цепь, получившаяся после удаления ребра e, не может быть цепью максимальной длины. Таким образом, один из циклов максимальной длины p_1 будет содержать в себе цепь максимальной длины m_1. Однако тогда остается еще $(k-3)/2$ циклов, и этого недостаточно, чтобы построить вложение для оставшихся $k-2$ цепей. Полученное противоречие доказывает утверждение 3, а вместе с ним и необходимость.

Достаточность. Предположим, что дерево T удовлетворяет условиям 1-3 теоремы. Построим граф G^* из дерева T следующим образом: концевую вершину цепи максимальной длины m_1 соединяем с корневой вершиной, а остальные концевые вершины цепей попарно соединяются между собой таким образом, чтобы длина цикла была $m_1 + 1$: конец цепи длины 1 соединяется с концом цепи длины $m_1 - 1$, конец цепи длины 2 соединяется с концом цепи длины $m_1 - 2$ и так далее. Докажем, что граф G^* будет минимальным реберным 1-расширением дерева T.

Исследуем удаление произвольного ребра e из графа G^*. Рассмотрим два случая.

1. Ребро e инцидентно корневой вершине v. Удаление ребра e приведет к тому, что из корневой вершины v будет выходить одна цепь длины m_1 и $(k-1)/2$ циклов, каждый из которых имеет длину $m_1 + 1$. Получившаяся цепь будет соответствовать единственной цепи дерева T

максимальной длины m_1, а в каждом из $(k-1)/2$ циклов выделим по две цепи подходящей длины, так чтобы получить оставшиеся $k-1$ цепей дерева T. Вложение построено.

2. Ребро e не инцидентно корневой вершине v. Удаление ребра e приведет к тому, что из корневой вершины v будет выходить две цепи, сумма длин которых будет равна m_1, и $(k-1)/2$ циклов, каждый из которых имеет длину m_1+1. Получившиеся цепи будут соответствовать подходящим цепям дерева T. Один из оставшихся циклов используем для вложения цепи максимальной длины m_1, а в каждом из $(k-1)/2$ оставшихся циклов выделим по две цепи подходящей длины, так чтобы получить оставшиеся $k-1$ цепей дерева T. Вложение построено. □

На рис. 3.6.2 представлены 7-вершинное сверхстройное дерево с вектором цепей (3,2,1) и все его минимальные реберные 1-расширения, первое из которых построено по теореме 3.6.3. Это дерево является минимальным по числу вершин среди представителей рассматриваемого в теореме 3.6.3 семейства.

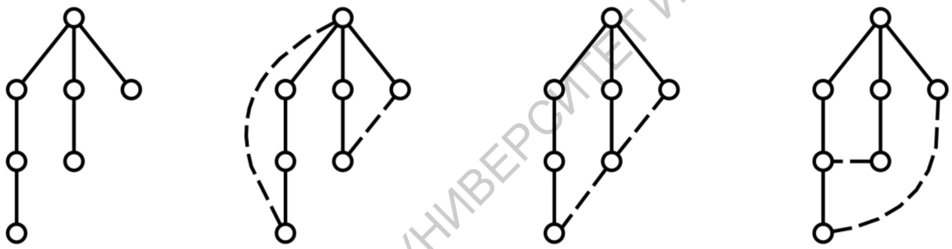


Рис. 3.6.2. Сверхстройное дерево (3,2,1) и все его МР-1Р

Следствие. *Сверхстройные деревья, удовлетворяющие условию теоремы* 3.6.3, *при* $k > 3$ *имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное реберное* 1-*расширение.*

Дополнительные семейства

Идея доказательства теоремы 3.6.3 легко переносится и на более общий случай сверхстройных деревьев.

ТЕОРЕМА 3.6.4. *Сверхстройное дерево* T *с вектором цепей* $(m_1,\ldots m_k)$ *имеет реберное* 1-*расширение с вектором степеней* $(k+d,2,\ldots,2)$, $d > 0$, *отличающееся от* T *на* $(k+d)/2$ *дополнительных ребер когда*

1) *среди его цепей есть цепи всех длин от* 1 *до его высоты* m_1 (*максимальной длины цепи*);

2) *цепей максимальной длины* m_1 *в точности* d;

3) *все остальные цепи можно разбить на пары так, чтобы их длины в сумме давали* m_1.

Доказательство. Пусть k – четно и T – сверхстройное дерево с вектором цепей $(m_1,\ldots m_k)$, а G^* – его реберное 1-расширение с вектором степеней $(k+d,2,\ldots,2)$, отличающееся от T на $(k+2)/2$ дополнительных ребер. Доказательство следует схеме предыдущей теоремы.

Нетрудно видеть, что граф G^* представляет собой объединение циклов с общей вершиной, которую для определенности обозначим v. Построение G^* из дерева T можно представить себе следующим образом: d висячих вершин соединяются с корневой вершиной, а остальные висячие вершины попарно соединяются между собой.

Количество циклов в G^* обозначим через $t = d(v)/2 = (k + d)/2$. Длины циклов в G^* обозначим через $p_1,\ldots,p_t$. Для определенности будем считать, что $m_1 \geq \ldots \geq m_k$ и $p_1 \geq \ldots \geq p_t$. Очевидно, что $p_1 \geq m_1 + 1$.

Необходимость. Рассмотрим удаление произвольного ребра в графе G^*. Это ребро принадлежит некоторому циклу длины p_i. Если ребро инцидентно вершине v, то после удаления ребра вместо цикла появится цепь длины p_i-1. Если ребро не инцидентно вершине v, то цикл распадается на две цепи. Так как по предположению дерево T вкладывается в получившийся граф, то для каждой из этих цепей должна найтись цепь такой же длины и в дереве T. В силу произвольности выбора ребра можно сделать вывод, что в дереве T должны быть цепи длины $1, 2,\ldots, p_1-1$. С учетом полученной ранее оценки $p_1 \geq m_1 + 1$ имеем $p_1 = m_1 + 1$. Таким образом, утверждение 1 доказано.

Предположим, что в дереве T есть более d цепей максимальной длины m_1. Так как концы только d из этих цепей могут быть соединены с корневой вершиной и образовать цикл максимальной длины $p_1 = m_1 + 1$, то концы остальных цепей длины m_1 должны быть соединены с концами некоторых других цепей. Но это приведет к тому, что длины получившихся циклов будут больше, чем $p_1 = m_1 + 1$, а это противоречит предположению о том, что p_1 является максимальной длиной цикла. Таким образом, утверждение 2 доказано.

Предположим, что $p_1 > p_t$, то есть не все циклы имеют одинаковую длину p_1. Рассмотрим граф, получающийся из G^* удалением ребра e инцидентного вершине v из цикла минимальной длины p_t, и попробуем построить вложение дерева T в получившийся граф. Вершина v в графе G^*-e имеет степень $k+1$ и единственным образом соответствует корневой вершине дерева. Из вершины v выходит одна цепь длины $p_t - 1$ и $k/2$ циклов, из которых нужно выделить $k - 1$ цепь. По предположению $p_t - 1 < m_1$, то есть единственная цепь, получившаяся после удаления ребра e, не может быть цепью максимальной длины. Таким образом, два цикла максимальной длины p_1 будут содержать в себе две цепи максимальной длины m_1. Однако тогда остается еще $(k-4)/2$ циклов, и этого недостаточно, чтобы построить вложение для оставшихся $k-2$ цепей.

Полученное противоречие доказывает утверждение 3, а вмести с ним и необходимость.

Достаточность. Предположим, что дерево T удовлетворяет условиям 1-3 теоремы. Построим граф G^* из дерева T следующим образом: концевые вершины цепей максимальной длины m_1 соединяем с корневой вершиной, а остальные концевые вершины цепей попарно соединяются между собой таким образом, чтобы длина цикла была $m_1 + 1$: конец цепи длины 1 соединяется с концом цепи длины $m_1 - 1$, конец цепи длины 2 соединяется с концом цепи длины $m_1 - 2$ и так далее. Докажем, что граф G^* будет реберным 1-расширением дерева T.

Исследуем удалением произвольного ребра e из графа G^*. Рассмотрим два случая.

1. Ребро e инцидентно корневой вершине v. Удаление ребра e приведет к тому, что из корневой вершины v будет выходить одна цепь длины m_1 и $(k + d - 2)/2$ циклов, каждый из которых имеет длину $m_1 + 1$. Получившаяся цепь будет соответствовать цепи дерева T максимальной длины m_1, $d - 1$ циклов будут содержать остальные цепи максимальной длины, а в каждом из $(k - d)/2$ циклов выделим по две цепи подходящей длины, так чтобы получить оставшиеся $k - d$ цепей дерева T. Вложение построено.

2. Ребро e не инцидентно корневой вершине v. Удаление ребра e приведет к тому, что из корневой вершины v будет выходить две цепи, сумма длин которых будет равна m_1 и $(k + d - 2)/2$ циклов, каждый из которых имеет длину $m_1 + 1$. Получившиеся цепи будут соответствовать подходящим цепям дерева T. Из оставшихся циклов d штук используем для вложения d цепей максимальной длины m_1, а в каждом из $(k - d)/2$ оставшихся циклов выделим по две цепи подходящей длины, так чтобы получить оставшиеся $k - d$ цепей дерева T. Вложение построено. Теорема доказана. □

На рис. 3.6.3 представлены 10-вершинное сверхстройное дерево с вектором цепей (3,3,2,1) и все его минимальные реберные 1-расширения, первое из которых построено по теореме 3.6.4.

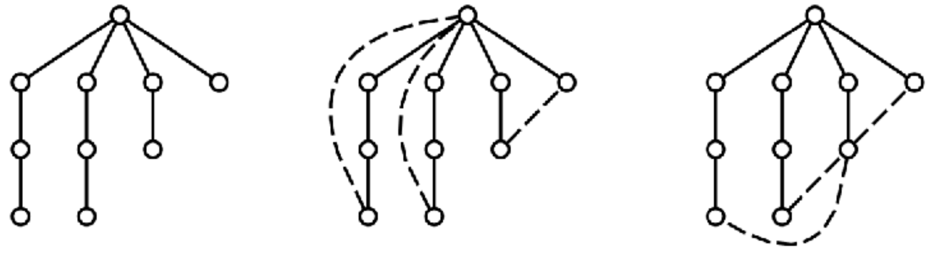


Рис. 3.6.3. Сверхстройное дерево (3,3,2,1) и все его МР-1Р

В работе (Абросимов, Комаров, 2010, *а*) можно посмотреть каталог минимальных реберных 1-расширений всех сверхстройных деревьев с числом вершин до 10.

Следствие. *Для сверхстройных деревьев, удовлетворяющих условию теоремы* 3.6.4, *при* $d = 2$ *соответствующее реберное* 1*-расширение будет и минимальным.*

3.7. Орграфы

Основные определения, связанные с расширениями графов, которые были сформулированы в первом параграфе этой главы для неориентированных графов, без изменений могут быть перенесены и на ориентированные графы. Леммы 3.1.1-3.1.2 можно применять и к орграфам.

3.7.1. Турниры

В отличие от вершинных для минимальных реберных k-расширений турниров полное решение задачи получается достаточно легко.

ТЕОРЕМА 3.7.1. *Единственным с точностью до изоморфизма минимальным реберным* 1*-расширением* n*-вершинного турнира является полный* n*-вершинный граф без петель. При* $k > 1$ n*-вершинный турнир не имеет минимальных реберных* k*-расширений.*

Доказательство. Пусть T есть n-вершинный турнир, а T^* – его минимальное реберное 1-расширение. Каждая пара вершин графа T является концами некоторой дуги. Пусть граф T^* отличен от полного графа без петель. Тогда в нем есть пара вершин u, v таких, что между ними нет дуги (u, v). Рассмотрим подграф, получающийся удалением дуги (v, u) (эта дуга обязательно есть, поскольку T^* является минимальным реберным 1-расширением турнира T, то есть граф T^* допускает вложение турнира T). В этот подграф нельзя будет вложить турнир T, так как между вершинами u, v нет ни одной дуги. Следовательно, полный n-вершинный граф без петель является единственным минимальным реберным 1-расширением турнира T.

При $k > 1$ любая пара вершин u, v орграфа T^* может быть соединена не более чем двумя дугами (u, v) и (v, u), поэтому удалим из T^* обе эти дуги и $k - 2$ любых других дуг. Получим орграф, в который нельзя вложить турнир T. Таким образом, при $k > 1$ турниры не имеют минимальных реберных k-расширений. □

3.7.2. Ориентации звезд

Обозначим через $ZK_{m,n,p}$ семейство графов, получающихся из звезды $Z_{m,n}$ добавлением $p-1$ «центральной» вершины, соединением их между собой и центральной вершиной звезды $Z_{m,n}$ парами встречных дуг. Каждая из добавленных центральных вершин соединяется m входящими и n исходящими дугами с произвольными источниками и стоками звезды $Z_{m,n}$. По описанной схеме для заданной звезды в общем случае может быть построено много графов (рис. 3.7.1).

Рис. 3.7.1. Звезда $Z_{2,2}$ и графы вида $ZK_{2,2,2}$

ТЕОРЕМА 3.7.2. *Относительно минимальных реберных* 1-*расширений направленных звезд* $Z_{m,n}$ *справедливо следующее*:

1) *при* $m = n = 1$ *звезда* $Z_{1,1}$ *имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное реберное* 1-*расширение, которым является циклическая тройка*;
2) *при* $mn > 1$ *звезда* $Z_{m,n}$ *имеет минимальные реберные* 1-*расширения вида* $K_{1,m+n}$ *и графы, построенные по схемам* $ZK_{m-1,n,2}$ *и* $ZK_{m,n-1,2}$;
3) *при* $m > 0$, $n = 0$ *звезда* $Z_{m,0}$ *имеет минимальные реберные* 1-*расширения вида* $ZK_{m-1,0,2}$;
4) *при* $m = 0$, $n > 0$ *звезда* $Z_{0,n}$ *имеет минимальные реберные* 1-*расширения вида* $ZK_{0,n-1,2}$;
5) *при* $m = 2$, $n = 1$ *звезда* $Z_{2,1}$ *имеет еще одно минимальное реберное* 1-*расширение – турнир, получающийся из циклической тройки добавлением одной вершины и дуг от нее во все остальные вершины*;
6) *при* $m = 2$, $n = 1$ *звезда* $Z_{2,1}$ *имеет еще одно минимальное реберное* 1-*расширение – турнир, получающийся из циклической тройки добавлением одной вершины и дуг в нее из всех остальных вершин.*

Доказательство. Убедимся, что орграфы $K_{1,m+n}$, $ZK_{m-1,n,2}$ и $ZK_{m,n-1,2}$ действительно являются реберными 1-расширениями звезды $Z_{m,n}$.

Для неориентированной звезды $K_{1,m+n}$ проверка вполне тривиальна. Пусть в звезде $Z_{m,n}$ есть и источники, и стоки, то есть $m > 0$ и $n > 0$. Рассмотрим удаление в графе $K_{1,m+n}$ любой дуги вида (v, u), где v – центральная вершина, а u – любая другая. Вложение звезды $Z_{m,n}$ строится следующим образом: центральная вершина звезды $Z_{m,n}$ соответствует вершине v. Вершина u и $m-1$ из оставшихся вершин графа $K_{1,m+n}$ будут соответствовать источникам, а остальные n вершин – стокам. Аналогично – для случая удаления дуги вида (u, v). Заметим, что количество дуг в графе $K_{1,m+n}$ в два раза больше, чем в звезде $Z_{m,n}$, то есть $2(m + n)$.

Пусть $m > 0$; рассмотрим орграф $ZK_{m-1,n,2}$. В этом графе две вершины имеют полустепени исхода и захода $n + 1$ и m соответственно, а у остальных вершин суммы полустепеней исхода и захода равны 2. Общее количество дуг равно $2(m + n)$. Обозначим две полные вершины через v_1 и v_2.

Все дуги рассматриваемого орграфа можно разделить на три группы подобных дуг:

1) дуги от вершин v_1 и v_2 в остальные вершины (если $n = 0$, то дуг этого типа может не быть);
2) дуги в вершины v_1 и v_2 из остальных вершин (если $m = 1$, то дуг этого типа может не быть);
3) дуги между вершинами v_1 и v_2.

Рассмотрим удаление из орграфа $ZK_{m-1,n,2}$ дуги каждого вида и укажем, каким образом в получившийся орграф может быть вложена звезда $Z_{m,n}$. Обозначим:

1) G_1 – граф, получающийся из орграфа $ZK_{m-1,n,2}$ удалением дуги первого типа; пусть для определенности это будет дуга (v_1, u), где u – произвольная вершина, которая в звезде $Z_{m,n}$ была стоком;
2) G_2 – граф, получающийся из орграфа $ZK_{m-1,n,2}$ удалением дуги второго типа; пусть для определенности это будет дуга (w, v_1), где w – произвольная вершина, которая в звезде $Z_{m,n}$ была истоком;
3) G_3 – граф, получающийся из орграфа $ZK_{m-1,n,2}$ удалением дуги третьего типа; пусть для определенности это будет дуга (v_2, v_1).

Во всех трех случаях $m - 1$ вершин орграфов G_1, G_2, G_3, из которых идет дуга в вершину v_2, и вершина v_1 будут соответствовать источникам звезды $Z_{m,n}$, вершина v_2 – центральной вершине, а оставшиеся n вершин орграфов G_1, G_2, G_3 – стокам звезды $Z_{m,n}$.

Аналогично рассмотрим орграф $ZK_{m,n-1,2}$ при $n > 0$. В этом графе две вершины имеют полустепени исхода и захода n и $m + 1$ соответственно, а у остальных вершин суммы полустепеней исхода и захода равны 2. Общее количество дуг снова равно $2(m + n)$. Как и раньше, обозначим две полные вершины через v_1 и v_2. Все дуги рассматриваемого орграфа делятся на три группы подобных дуг:

1) дуги от вершин v_1 и v_2 в остальные вершины (если $n = 1$, то дуг этого типа может не быть);
2) дуги в вершины v_1 и v_2 из остальных вершин (если $m = 0$, то дуг этого типа может не быть);
3) дуги между вершинами v_1 и v_2.

Рассмотрим удаление из орграфа $ZK_{m,n-1,2}$ дуги каждого вида и укажем, каким образом в получившийся орграф может быть вложена звезда $Z_{m,n}$. Пусть

1) граф G_1 получается из орграфа $ZK_{m,n-1,2}$ удалением дуги первого типа; пусть для определенности это будет дуга (v_1, u), где u – произвольная вершина, которая в звезде $Z_{m,n}$ была стоком;
2) граф G_2 получается из орграфа $ZK_{m,n-1,2}$ удалением дуги второго типа; пусть для определенности это будет дуга (w, v_1), где w – произвольная вершина, которая в звезде $Z_{m,n}$ была истоком;
3) граф G_3 получается из орграфа $ZK_{m,n-1,2}$ удалением дуги третьего типа; пусть для определенности это будет дуга (v_1, v_2).

Во всех трех случаях $m - 1$ вершин орграфов G_1, G_2, G_3, из которых идет дуга в вершину v_2, и вершина v_1 будут соответствовать источникам звезды $Z_{m,n}$, вершина v_2 – центральной вершине, а оставшиеся n вершин орграфов G_1, G_2, G_3 – стокам звезды $Z_{m,n}$.

Исследуем, какие у звезды $Z_{m,n}$ могут быть минимальные реберные 1-расширения. Пусть G^* – некоторое минимальное реберное 1-расширение звезды $Z_{m,n}$. Так как звезда $Z_{m,n}$ вкладывается в орграф G^*, то в G^* есть как минимум одна полная вершина. Рассмотрим случаи, когда таких вершин одна, две, три и более.

Случай I. Предположим, что полная вершина одна, и обозначим ее через v. В этом случае вершина v должна быть соединена со всеми остальными вершинами парой встречных дуг. Если бы это было не так и вершина v была бы соединена с некоторой вершиной u только одной дугой, например (v, u), то вложение звезды $Z_{m,n}$ в граф $G^* - (v, u)$ было бы невозможно, так как ни одна вершина не будет соответствовать центральной вершине звезды $Z_{m,n}$. Граф $K_{1,m+n}$ имеет минимальное число дуг среди всех рассматриваемых графов, то есть графов с одной вершиной, соединенной парой встречной дуг со всеми остальными вершинами.

Случай II. Пусть есть две полные вершины. Обозначим их через v_1 и v_2. Какие дуги должны быть между этими вершинами? Если между ними будет только одна дуга, например (v_1, v_2), то граф, получающийся из G^* после удаления дуги (v_1, v_2), не будет содержать ни одной вершины, которая могла бы соответствовать центральной вершине звезды $Z_{m,n}$. Следовательно, вершины v_1 и v_2 соединены парой встречных дуг.

Каковы могут быть полустепени исхода и захода вершин v_1 и v_2? Очевидно, что они не могут быть меньше, чем у центральной вершины звезды $Z_{m,n}$, то есть n и m соответственно. Общее количество дуг, входящих и исходящих из этих вершин, равно $m + n + 1$ (две дуги между вершинами v_1 и v_2 и по одной дуге в или из оставшихся $m + n - 1$ вершин). Таким образом, вершины v_1 и v_2 могут иметь либо полустепень исхода m, а полустепень захода $n + 1$, либо наоборот. Можно заметить, что вершины v_1 и v_2 должны иметь одинаковые полустепени исхода и захода. В самом деле, если бы это было не так и вершины v_1 и v_2 имели бы разные полустепени, например, вершина v_1 – $(m, n + 1)$, а вершина v_2 – $(m + 1, n)$, то удаление дуги (v_1, v_2) привело бы к орграфу, в котором вершины v_1 и v_2 имеют полустепени исхода и захода $(m - 1, n + 1)$ и $(m + 1, n - 1)$ соответственно. Ясно, что вложение в получившийся граф звезды $Z_{m,n}$ невозможно. Итак, среди всех графов, имеющих две вершины с одинаковыми полустепенями исхода и захода, соединенные между собой парой встречных дуг, а с остальными вершинами хотя бы одной дугой, подходящими являются только графы семейств $ZK_{m-1,n,2}$ и $ZK_{m,n-1,2}$.

Случай III. Рассмотрим случай, когда есть три вершины, соединенные со всеми остальными $m + n - 2$ вершинами хотя бы одной дугой. Обозначим эти полные вершины через v_1, v_2 и v_3. Подобное соединение возможно при $m + n \geq 2$. Между этими вершинами, очевидно, должна быть, по крайней мере, одна дуга. Общее количество дуг в таком графе будет не менее чем $3 + 3(m + n - 2) = 3(m + n - 1)$.

Если $m + n = 2$, то число дуг будет меньше, чем в рассмотренных ранее случаях I и II, где количество дуг есть $2(m + n)$. Непосредственной проверкой убедимся, что звезда $Z_{1,1}$, которая является ориентированной цепью (рис. 3.7.2, *а*) , имеет подходящее реберное 1-расширение, которое в данном случае будет циклической тройкой (рис. 3.7.2, *б*).

а *б*

Рис. 3.7.2. Звезда $Z_{1,1}$ (*а*) и ее единственное МР-1Р (*б*)

Звезды $Z_{2,0}$ и $Z_{0,2}$ не имеют реберных 1-расширений, построенных по рассматриваемой схеме. Если же добавить еще одну дугу, то мы получим графы, изоморфные графам семейств $ZK_{1,0,2}$ и $ZK_{0,1,2}$. При $m + n = 3$ имеем $3(m + n - 1) = 2(m + n)$. То есть число дуг будет таким же, как и в рассмотренных ранее случаях. Подходящими звездами будут $Z_{3,0}$, $Z_{2,1}$, $Z_{1,2}$ и $Z_{0,3}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что звезды $Z_{3,0}$ и $Z_{0,3}$ не имеют реберных 1-расширений, построенных по рассматриваемой схеме, а звезды $Z_{2,1}$ и $Z_{1,2}$ (рис. 3.7.3, *а, в*) имеют. Все их минимальные реберные 1-расширения изображены на рис. 3.7.3, *б, г*.

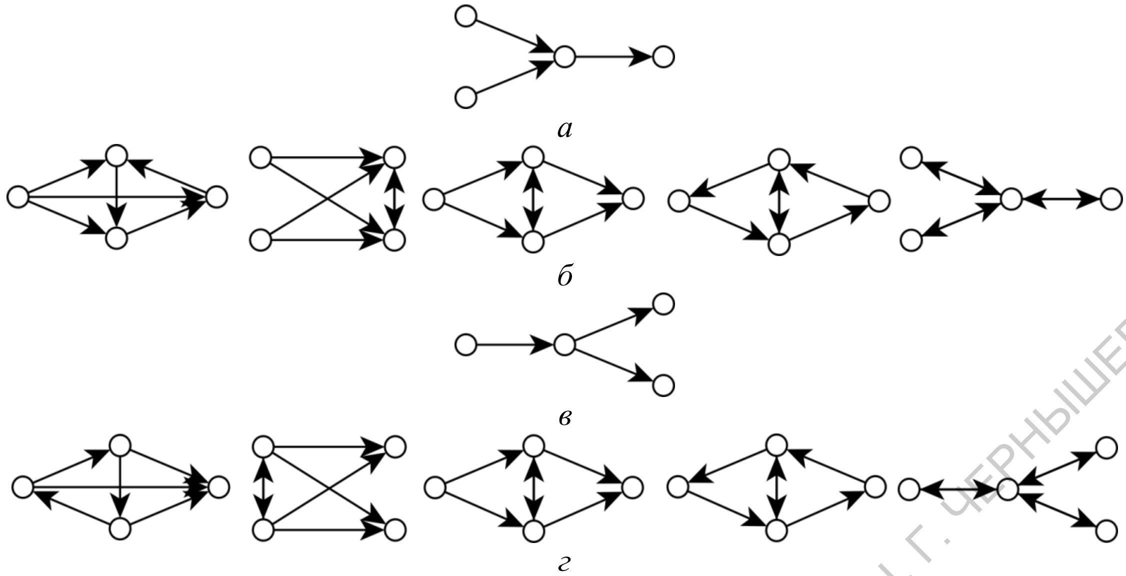


Рис. 3.7.3. Звезды $Z_{2,1}$ (*а*) и $Z_{1,2}$ (*в*) и все их МР-1Р (*б, г*)

На рис. 3.7.3, *б, г* первыми указаны расширения, укладывающиеся в рассматриваемую схему. Вершины v_1, v_2 и v_3 образуют в них контур. Последующие три расширения принадлежат семействам $ZK_{2,0,2}$ и $ZK_{1,1,2}$ для звезды $Z_{2,1}$; $ZK_{0,2,2}$ и $ZK_{1,1,2}$ для звезды $Z_{1,2}$. Последние расширения – это звезды $K_{1,3}$. Видно, что звезды $Z_{2,1}$ и $Z_{1,2}$ имеют три изоморфных минимальных реберных 1-расширения и по два различных.

Случай IV. Рассмотрим случай, когда есть $p > 3$ вершин, соединенных со всеми остальными $m + n - p + 1$ вершинами хотя бы одной дугой. Подобное соединение возможно при $m + n \geq p - 1$. Между этими вершинами, очевидно, должна быть, по крайней мере, одна дуга, то есть индуцированный ими подграф является турниром. Общее количество дуг в таком графе будет не менее чем

$$p(m + n - p + 1) + p(p - 1)/2 = p(m + n) - p(p - 1)/2.$$

Исследуем, в каких случаях эта величина может быть меньше, чем $2(m + n)$ – количество дополнительных ребер в случаях I и II. Получаем

$$p(m + n) - p(p - 1)/2 \leq 2(m + n),$$

$$(m + n)(p - 2) - p(p - 1)/2 \leq 0.$$

Так как $m + n \geq p - 1$, то $(p - 1)(p - 2) - p(p - 1)/2 \leq 0$, откуда $(p - 1)(p - 2 - p/2) \leq 0$, а так как $p > 3$, то остается $p/2 - 2 \leq 0$, то есть $p \leq 4$.

Случаи, когда $p = 1$, 2 и 3, были рассмотрены ранее, и, так образом, еще только при $p = 4$ возможно реберное 1-расширение, которое будет иметь не больше дуг, чем расширения из случаев I и II. Итак, при $p = 4$ количество дуг есть $4(m + n) - 6$, а у расширений в случаях I и II – $2(m + n)$, причем $m + n \geq 3$. Сравнивая, получаем, что лишь при $m + n = 3$ достигается равенство, а при остальных значениях количество дуг в расширении с $p = 4$ будет больше, чем в случаях I и II. При $m + n = 3$ имеем четыре звезды, которые мы уже рассматривали ранее: $Z_{3,0}$, $Z_{2,1}$, $Z_{1,2}$ и $Z_{0,3}$. Можно заметить, что эта ситуация идентична рассмотренной ранее и не дает новых реберных 1-расширений.□

Следствие 1. *Исходящая звезда, то есть направленная звезда вида* $Z_{m,0}$, $m > 1$, *имеет два неизоморфных минимальных реберных* 1-*расширения – граф* $K_{1,m}$, *и орграф* $ZK_{m-1,0,2}$.

Следствие 2. *Входящая звезда, то есть направленная звезда вида* $Z_{0,n}$, $n > 1$, *имеет два неизоморфных минимальных реберных* 1-*расширения – граф* $K_{1,m}$, *и орграф* $ZK_{0,n-1,2}$.

Теорему 3.7.2 легко обобщить для ориентированных звезд. Обозначим через $ZK_{m,n,p,t}$ граф, получающийся из звезды $Z_{m,n}$ добавлением $t - 1$ «центральной» вершины, соединением их между собой и центральной вершиной звезды $Z_{m,n}$ парами встречных дуг. Каждая из добавленных центральных вершин соединяется m входящими, n исходящими дугами и p ребрами с произвольными источниками и стоками звезды $Z_{m,n}$.

ТЕОРЕМА 3.7.3. *Ориентированные звезды* $Z_{m,n,p}$ *при* $m > 0$, $n > 0$ *и* $p > 0$ *имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное реберное* 1-*расширение – звезду* $K_{1,m+n+p}$.

Доказательство. Пусть G^* – некоторое минимальное реберное 1-расширение звезды $Z_{m,n,p}$. Так как звезда $Z_{m,n,p}$ вкладывается в орграф G^*, то в G^* есть как минимум одна полная вершина. Рассмотрим случаи, когда полная вершина одна и более.

Случай I. Предположим, что полная вершина одна, и обозначим ее через v. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3.7.2, получим, что вершина v должна быть соединена со всеми остальными вершинами парой встречных дуг. Если бы это было не так и вершина v была бы соединена с некоторой вершиной u только одной дугой, например (v, u), то вложение звезды $Z_{m,n,p}$ в граф $G^* - (v, u)$ было бы невозможно, так как ни одна вершина не будет соответствовать центральной вершине звезды $Z_{m,n,p}$. Граф $K_{1,m+n+p}$ имеет минимальное число дуг среди всех подходящих под этот случай графов, то есть графов с одной вершиной, соединенной парой встречной дуг со всеми остальными вершинами. Легко видеть, что звезда $K_{1,m+n+p}$ является реберным 1-расширением орзвезды $Z_{m,n,p}$. Рассмотрим удаление в графе $K_{1,m+n+p}$ любой дуги вида (v, u), где v – центральная вершина, а u – любая другая. Вложение звезды $Z_{m,n,p}$ строится следующим образом: центральная вершина звезды $Z_{m,n,p}$ соответствует вершине v. Вершина u и $m - 1$ из оставшихся вершин графа $K_{1,m+n}$ будут соответствовать источникам, а остальные $n + p$ вершин – стокам и вершинам, которые соединены с центральной вершиной парой встречных дуг. Заметим, что количество дуг в графе $K_{1,m+n+p}$ есть $2(m + n + p)$.

Случай II. Предположим, что вершин, соединенных дугой с остальными вершинами, всего t штук и $t > 1$. Повторяя рассуждения из теоремы 3.7.2, мы получим, что центральные вершины должны быть соединены между собой, что дает не менее $t(t - 1)/2$ дуг, каждая из них – с p вершинами парой встречных дуг и с остальными $m + n - t + 1$ вершинами, по крайней мере, одной дугой. Всего получаем дуг

$$t(t - 1)/2 + 2pt + t(m + n - t + 1) = t(m + n + 2p - (t - 1)/2).$$

Эта величина принимает минимальное значение (по $t > 1$) при $t = 2$, и это будет $2(m + n + p) + p - 1$. Однако при $t = 2$, как мы установили при исследовании случая II в доказательстве теоремы 3.7.2, центральные вершины должны быть соединены парой встречных дуг. Поэтому минимально возможное количество дуг по данной схеме может быть $2(m + n + p) + p$, и при $p > 0$ это больше числа дуг в графе $K_{1,m+n+p}$. □

Обобщим результаты двух предыдущих теорем.

ТЕОРЕМА 3.7.4. *Относительно минимальных реберных k-расширений направленных звезд $Z_{m,n}$ справедливы следующие утверждения:*

1) *при $m = n = k$ звезда $Z_{m,n}$ имеет минимальным реберным k-расширением любой регулярный $(2k + 1)$-вершинный турнир и только их;*
2) *при $m = n + 1 = k$ звезда $Z_{m+1,m}$ имеет минимальным реберным k-расширением любой $(2k + 2)$-вершинный турнир, который получается из регулярного $(2k + 1)$-вершинного турнира добавлением дополнительной вершины-источника;*
3) *при $m + 1 = n = k$ звезда $Z_{m,m+1}$ имеет минимальным реберным k-расширением любой $(2k + 2)$-вершинный турнир, который получается из регулярного $(2k + 1)$-вершинного турнира добавлением дополнительной вершины-стока;*
4) *кроме случая $m = n = k$ звезда $Z_{m,n}$ при $k \le m + n$ имеет минимальным реберным k-расширением графы вида $ZK_{m_1,n_1,k+1}$, где $m_1 + n_1 = m + n - k$, $\max\{0, m - k\} \le m_1 \le m$, $\max\{0, n - k\} \le n_1 \le m$. При $k > m + n$ звезда $Z_{m,n}$ не имеет минимальных реберных k-расширений.*

Доказательство. Пусть $k > 1$ и G^* – некоторое минимальное реберное k-расширение звезды $Z_{m,n}$. Так как звезда $Z_{m,n}$ вкладывается в орграф G^*, то в G^* есть как минимум одна вершина, соединенная дугой со всеми остальными. Обозначим через p количество полных вершин; положим $N = m + n$. Очевидно, что $p \le m + n + 1$. Удаление k любых дуг из графа G^* должно оставить, по крайней мере, одну полную вершину.

Случай I. Если все полные вершины в графе G^* соединены между собой одной дугой, то удаление такой дуги исключает две полные вершины. Поэтому количество полных вершин должно быть не менее $2k + 1$. Тогда количество дуг в таком орграфе будет не менее чем $(2k + 1)k + (2k + 1)(N - 2k) = (2k + 1)N - 2k^2 - k$, причем $2k \le N$.

Случай II. Если все полные вершины в графе G^* соединены между собой парой встречных дуг, то удаление такой пары дуг исключает две полные вершины. Поэтому если k четно, то количество полных вершин должно быть не менее $k + 1$. При нечетном $k = 2k_1 + 1$ с удалением k_1 пары встречных дуг будут исключены $k - 1$ полных вершин. Предположим, что останется еще лишь одна полная вершина. Если она будет соединена с некоторой вершиной только одной дугой, то, удалив ее, мы исключим последнюю полную вершину. Следовательно, эта вершина должна быть соединена с остальными вершинами также парой встречных дуг. Более того, удалив одну такую дугу, мы получим, что из единственной полной вершины либо исходит, либо входит в некоторую вершину единственная дуга. Следовательно, в звезде $Z_{m,n}$ должен быть хотя бы один источник и сток. В силу произвольности выбора исключаемых вершин можно сделать вывод, что при нечетном k, при $n > 0$, $m > 0$ и $k - 1 \le N$ орграф G^* может иметь k полных вершин, соединенных между собой и со всеми остальными вершинами парой встречных дуг. Определим количество дуг в этом случае: $k(k - 1) + 2(N - k + 1)k = 2Nk - k^2 + k$, причем $k - 1 \le N$.

Случай III. Если количество полных вершин в орграфе G^* есть $k + 1$, то между собой они должны быть соединены парой встречных дуг, но с остальными вершинами они могут быть соединены одной дугой. Мы уже встречались с такими орграфами, например это семейства $ZK_{m_1,n_1,k+1}$. Минимальное количество дуг в этом случае равно $(k + 1)k + (k + 1)(N - k) = N(k + 1)$, причем $k \le N$.

Видно, что при больших значениях N количество дуг в последнем случае будет меньше, чем в случаях I и II. Определим более точные соотношения по количеству дуг между этими случаями. Случаи II и III:

$$2Nk - k^2 + k \le N(k + 1),$$
$$N(k - 1) - k(k - 1) \le 0,$$
$$(N - k)(k - 1) \le 0.$$

При $k = 1$ мы имеем равенство количества дуг. Случай II при $k = 1$ – это звезда $K_{1,N}$ из теоремы 3.7.2. При $k > 1$ интерес представляет случай $N \le k$. Но так как в случае II $k \le N$, то остается единственная возможность – $k = N$. Легко видеть, что при $k = N$ графы в случаях II и III изоморфны и представляют собой полный граф K_n. Таким образом, при $k > 1$ случай II не представляет интереса.

Случаи I и III:

$$(2k + 1)N - 2k^2 - k \le N(k + 1),$$
$$Nk - 2k^2 - k \le 0.$$

Так как в случае I имеем ограничение $2k \le N$, то интерес представляет всего два значения N. При $N = 2k$ получаем, что граф, построенный по схеме I, будет иметь меньше дуг, чем граф из случая III, а при $N = 2k + 1$ – количество дуг в случаях I и III будет одинаково. Видно, что при этих значениях графы из случая I будут турнирами. Исследуем эти возможности подробнее.

$N = 2k$. В этом случае мы имеем $(2k + 1)$-вершинный турнир. Удаляя k произвольных дуг, соединяющих различные вершины турнира, мы получим граф с единственной полной вершиной, которая соединена с каждой их остальных вершин одной дугой. Значит, чтобы звезда $Z_{m,n}$ вкладывалась в получившийся граф, в эту вершину должны входить m дуг и выходить n. В силу произвольности выбора это должно быть справедливо для всех вершин турнира, то есть все вершины должны иметь одинаковые степени исхода и захода. Это возможно лишь при $m = n = k$. Таким образом, только звезда вида $Z_{m,m}$ может иметь регулярный турнир минимальным реберным k-расширением при $k = m$. При $k = 1$ имеем звезду $Z_{1,1}$ и ее минимальным реберным 1-расширением является циклическая тройка. На рис. 3.7.4 показаны звезда $Z_{2,2}$ и ее единственное минимальное реберное 2-расширение, построенное по описанной схеме.

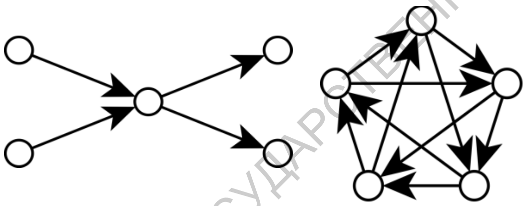


Рис. 3.7.4. Звезда $Z_{2,2}$ и ее единственное МР-2Р

$N = 2k + 1$. В этом случае мы имеем $(2k + 2)$-вершинный турнир. Удаляя k произвольных дуг, соединяю-щих различные вершины турнира, получим граф с двумя полными вершинами, которые соединены с каждой из остальных вершин одной дугой. Значит, чтобы звезда $Z_{m,n}$ вкладывалась в получившийся граф, в одну из этих вершин должны входить m дуг и выходить n. Так как число вершин в турнире четно, то он не может быть регулярным, и все вершины не могут иметь одинаковые полустепени исхода и захода. Следовательно, хотя бы одна вершина будет иметь полустепени исхода и захода, отличные от m и n. Однако такая вершина может быть только одна, потому что в противном случае, подбирая соответствующим образом k удаляемых дуг, мы могли бы получить орграф с двумя полными вершинами, ни одна из которых не имела бы m входящих и n исходящих дуг. Итак, в $(2k + 2)$-вершинном турнире $2k + 1$ вершин должны иметь одинаковые полустепени исхода и захода – m и n соответственно. Таким образом, имеем $(2k + 1)m$ исходящих дуг, $(2k + 1)n$ входящих и одну неучтенную вершину, обозначим ее w. Так как число входящих и исходящих дуг должно быть равно, а $m \neq n$, то можно сделать вывод, что либо $m = n + 1$ и w является стоком, либо $n = m + 1$ и w является источником. Таким образом, только звезды вида $Z_{m+1,m}$ и $Z_{m,m+1}$ могут иметь минимальным реберным k-расширением при $k = m$ турнир, получающийся из регулярного $(2m + 1)$-вершинного турнира добавлением вершины и дуг из нее во все вершины турнира для звезды $Z_{m+1,m}$ и из всех вершин турнира в добавленную для звезды $Z_{m,m+1}$. При $k = 1$ мы имеем звезды $Z_{2,1}$ и $Z_{1,2}$ и их минимальные реберные 1-расширения, упомянутые в пунктах 5 и 6 теоремы 3.7.2. Этим завершается исследование случая I. Рассмотрим далее наиболее общий случай III.

Кроме случая $N = 2k$ графы, построенные по схеме случая III, являются кандидатами на роль минимальных реберных k-расширений. Убедимся, что эти графы действительно будут являться реберными k-расширениями. Пусть G^* – произвольный граф вида $ZK_{m_1,n_1,k+1}$, где $m_1 + n_1 + k = m + n$. Рассмотрим удаление дуг между различными полными вершинами и остальными вершинами орграфа G^*. Удаление одной такой дуги исключает одну полную вершину. Удаление k дуг оставит единственную полную вершину. Эта полная вершина будет соединена с k вершинами парой встречных дуг, с m_1 вершинами исходящей дугой, а с n_1 вершинами входящей дугой. По предположению звезда $Z_{m,n}$ должна вкладываться в получившийся орграф. Если $m_1 > m$ или $n_1 > n$, то такое вложение будет невозможно. Аналогично, если $m_1 < m - k$ или $n_1 < n - k$. Если же все указанные неравенства выполняются, то недостающими вершинами для соответствия источникам и стокам звезды будут являться бывшие полные вершины орграфа G^*. Похожим образом можно рассмотреть удаления дуг между полными вершинами и убедиться, что графы вида $ZK_{m_1,n_1,k+1}$ действительно являются реберными 1-расширениями звезды $Z_{m,n}$ при выполнении указанных ранее ограничений.□

На рис. 3.7.5 показаны все минимальные реберные 2-расширения звезд $Z_{2,3}$ и $Z_{3,2}$.

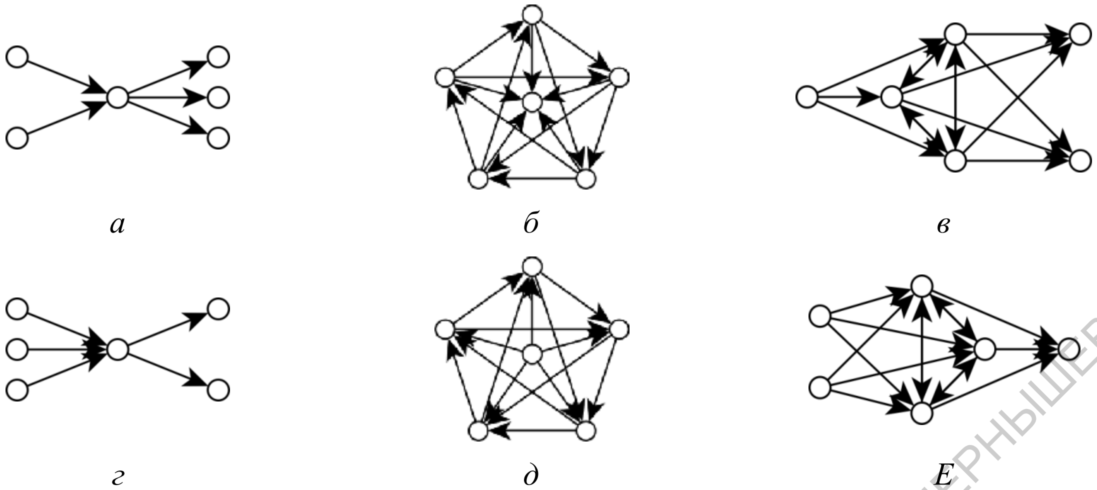


Рис. 3.7.6. Звезды $Z_{2,3}$ (*а*) и $Z_{3,2}$ (*г*) и их МР-2Р: единственное в форме турнира (*б, д*) и по одному представителю семейств $ZK_{1,2,3}$ (*в*) и $ZK_{2,1,3}$ (*е*)

ТЕОРЕМА 3.7.5. *Относительно минимальных реберных k-расширений ориентированных звезд $Z_{m,n,p}$ справедливо следующее*:

1) *при четном k звезда $Z_{m,n,p}$ имеет минимальные реберные k-расширения вида $ZK_{m_1,n_1,p,k+1}$ и только их*;
2) *при нечетном k, $m > 0$, $n > 0$ и $(m + n - k)(k - 1) - 2p \leq 0$ звезда $Z_{m,n,p}$ имеет минимальное реберное k-расширение вида $K_k + O_{m+n+p-k+1}$*;
3) *при $k \leq m + n$ и $(m + n - k)(k - 1) - 2p \geq 0$ звезда $Z_{m,n,p}$ имеет минимальные реберные k-расширения вида $ZK_{m_1,n_1,p,k+1}$*;
4) *при $k > m + n$ звезда $Z_{m,n,p}$ не имеет минимальных реберных k-расширений.*

Доказательство. Пусть $k > 1$ и G^* – некоторое минимальное реберное k-расширение звезды $Z_{m,n,p}$. Так как звезда $Z_{m,n,p}$ вкладывается в орграф G^*, то в G^* есть как минимум одна полная вершина. Обозначим через t количество полных вершин; положим $N = m + n$. Очевидно, что $t \leq m + n + 1$. Удаление k любых дуг из графа G^* должно оставить, по крайней мере, одну полную вершину.

Случай I. Если все полные вершины в графе G^* соединены между собой одной дугой, то удаление одной такой дуги исключает две полные вершины. Поэтому количество полных вершин должно быть не менее $2k + 1$. Каждая полная вершина должна быть соединена с p вершинами парой встречных дуг, а с остальными, по крайней мере, одной дугой. Тогда количество дуг в таком орграфе будет не менее чем

$$(2k + 1)k + (2k + 1)(N - 2k) + 2(2k + 1)p = (2k + 1)N - 2k^2 - k + 2(2k + 1)p,$$

причем $2k \leq N$.

Случай II. Если все полные вершины в графе G^* соединены между собой парой встречных дуг, то удаление такой пары дуг исключает две полные вершины. Поэтому, если k четно, то количество полных вершин должно быть не менее $k + 1$. При нечетном $k = 2k_1 + 1$ удаление k_1 пары встречных дуг исключает $k - 1$ полную вершину. Предположим, что останется еще лишь одна полная вершина. Если она будет соединена с некоторой вершиной только одной дугой, то, удалив ее, мы исключим последнюю полную вершину. Следовательно, эта вершина должна быть соединена с остальными вершинами также парой встречных дуг. Более того, удалив одну такую дугу, мы получим, что из единственной полной вершины либо исходит, либо входит в некоторую вершину единственная дуга. Следовательно, в звезде $Z_{m,n}$ должен быть хотя бы один источник и сток. В силу произвольности выбора исключаемых вершин можно сделать вывод, что при нечетном k, при $n > 0$, $m > 0$ и $k - 1 \le N$ орграф G^* может иметь k полных вершин, соединенных между собой и со всеми остальными вершинами парой встречных дуг. Такой граф можно представить как $K_k + O_{m+n+p-k+1}$. Определим количество дуг в этом случае:

$$k(k - 1) + 2(N - k + 1 + p)k = 2Nk - k^2 + k + 2pk,$$

причем $k - 1 \le N$.

Случай III. Если количество полных вершин в ографе G^* есть $k + 1$, то между собой они должны быть соединены парой встречных дуг, с p вершинами также парой встречных дуг, а с остальными вершинами они могут быть соединены одной дугой. Мы уже встречались с такими орграфами, например это семейства $ZK_{m_1,n_1,p,k+1}$ Определим минимальное количество дуг в этом случае:

$$(k + 1)k + (k + 1)(N - k) + 2(k + 1)p = N(k + 1) + 2(k + 1)p,$$

причем $k \le N$.

Видно, что при больших значениях N количество дуг в последнем случае будет минимальным. Определим более точные соотношения по количеству дуг между этими случаями. Случаи II и III:

$$2Nk - k^2 + k + 2pk \le N(k + 1) + 2(k + 1)p,$$

$$N(k - 1) - k(k - 1) - 2p \le 0,$$

$$(N - k)(k - 1) - 2p \le 0.$$

При $k = 1$ в теореме 3.7.3 мы получили, что графы из случая II всегда имеют меньшее число дуг, чем графы из случая III. При $k > 1$ ситуация представляется более сложной: при значениях N много больших, чем k и p, меньше дуг будет в схеме III, а при нечетных значениях k, близких к значению N или больших, чем p, меньше дуг будет в схеме II.

Случаи I и III:

$$(2k + 1)N - 2k^2 - k + 2(2k + 1)p \le N(k + 1) + 2(k + 1)p,$$

$$Nk - 2k^2 - k + 2kp \le 0.$$

Так как в случае I имеем ограничение $2k \le N$, то при $p > 0$ у графов из случая I будет всегда больше дуг, чем у графов из случая III.□

Рассмотрим для примера поиск минимальных реберных 3-расширений звезды $Z_{2,2,1}$. Посчитаем величину $(m + n - k)(k - 1) - 2p$ и получим:

$$(2 + 2 - 3)(3 - 1) - 2*1 = 0.$$

Таким образом, по теореме 3.7.5 получаем, что звезда $Z_{2,2,1}$ будет иметь минимальные реберные 3-расширения двух видов: граф $K_3 + O_3$ и графы вида $ZK_{1,0,1,4}$ и $ZK_{0,1,1,4}$. Все эти графы содержат по 24 дуги. На рис. 3.7.6 показаны все минимальные реберные 3-расширения звезды $Z_{2,2,1}$. Для облегчения визуализации расширений пара встречных дуг заменена неориентированным ребром.

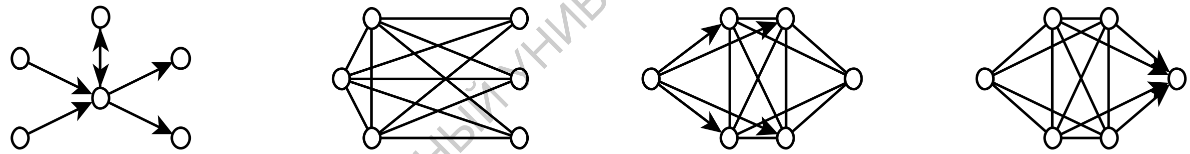


Рис. 3.7.6. Звезда $Z_{2,2,1}$ и все ее МР-3Р

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении хочется рассмотреть два вопроса относительно минимальных вершинных и реберных k-расширений, которые часто кажутся очевидными.

Рассмотрим задачу нахождения минимального вершинного (реберного) k-расширения графа. Можем ли мы использовать для решения этой задачи знание минимальных вершинных (реберных) расширений графа при значениях меньших k? Представляется интуитивно очевидным, что минимальное вершинное (реберное) 1-расширение минимального вершинного (реберного) $(k-1)$-расширения будет являться минимальным вершинным (реберным) k-расширением.

Очевидно, что минимальное вершинное 1-расширение любого минимального вершинного $(k - 1)$-расширения графа будет и его вершинным k-расширением. Более того, для некоторых классов графов было доказано, что оно является и минимальным вершинным k-расширением. Например для цепей, циклов, предполных графов и некоторых других связных и несвязных графов утверждение имеет место при всех значениях k.

Оказывается, что в общем случае это не так.

Рассмотрим граф G вида $P_n \cup P_n \cup O_m$, где $m \geq 2n-2$. Покажем, что минимальным вершинным 1-расширением графа G при $n > 3$ будет граф G^* вида $C_{2n+1} \cup O_m$, причем при $n > 4$ единственным с точностью до изоморфизма (при $n = 2, 3$ минимальным вершинным 1-расширением графа G будет граф вида $P_n \cup P_n \cup P_n \cup O_{m-n+1}$). В самом деле, граф $C_{2n+1} \cup O_m$ отличается от графа G на три дополнительных ребра. Минимальное вершинное 1-расширение не может иметь менее двух дополнительных ребер (заметим, что при $n = 2$ минимальным вершинным 1-расширением графа G будет граф $P_2 \cup P_2 \cup P_2 \cup O_{m-1}$, отличающийся на одно дополнительное ребро), поскольку степень хотя бы одной вершины будет не ниже двух. Таким образом, нужно показать, что не существует минимального вершинного 1-расширения, отличающегося на два ребра. Предположим, что такой граф существует. Тогда степень любой его вершины не более двух. Рассмотрим, какие графы получаются из графа G добавлением одной вершины и двух ребер (и степень вершин ни в каком из этих графов не больше двух):

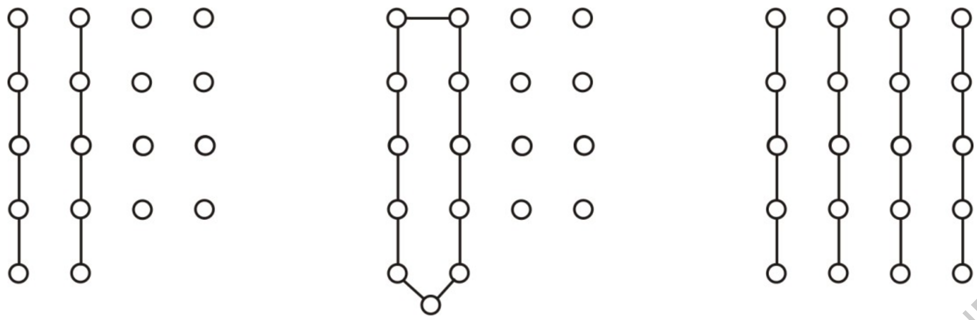
$$P_n \cup P_n \cup P_2 \cup P_2 \cup O_{m-3},$$
$$P_n \cup P_n \cup P_3 \cup O_{m-2},$$
$$P_{n+1} \cup P_{n+1} \cup O_{m-1},$$
$$P_n \cup P_{n+2} \cup O_{m-1},$$
$$P_n \cup C_{n+1} \cup O_m,$$
$$C_{2n} \cup O_m.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что ни один из перечисленных графов при $n > 3$ не является вершинным 1-расширением графа G (заметим, что при $n = 3$ граф $P_3 \cup P_3 \cup P_3 \cup O_{m-2}$ является минимальным вершинным 1-расширением графа G).

Минимальное вершинное 1-расширение графа G^* имеет вид $C^*_{2n+1} \cup O_m$, где C^*_{2n+1} некоторое минимальное вершинное 1-расширение цикла C_{2n+1} – однородный граф порядка 3. Покажем, что при некоторых значениях n никакой такой граф не является минимальным вершинным 1-расширением графа G.

В самом деле, граф $C^*_{2n+1} \cup O_m$ имеет $\frac{1}{2}(3*(2n+2)) = 3n+3$ ребра. Рассмотрим граф вида $P_n \cup P_n \cup P_n \cup P_n \cup O_{m-2n+2}$. Нетрудно видеть, что такой граф является вершинным 2-расширением графа G и имеет $4n - 4$ ребра. Найдем значения n, при которых он будет являться и минимальным вершинным 2-расширение графа G: $4n - 4 < 3n + 3$, откуда $n < 7$. Таким образом, при $n = 5$ или $n = 6$ граф $P_n \cup P_n \cup O_m$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение – граф вида $C_{2n+1} \cup O_m$, – и единственное минимальное вершинное 2-расширение – граф вида $P_n \cup P_n \cup P_n \cup P_n \cup O_{m-2n+2}$, который не является минимальным вершинным 1-расширением графа $C_{2n+1} \cup O_m$. На рис. 3.1 приводится иллюстрация данного примера при $n = 5$ и $m = 8$. При $n = 7$ граф $P_n \cup P_n \cup O_m$ имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение и два неизоморфных минимальных вершинных 2-расширения, одно из которых является минимальным вершинным 1-расширением его минимального вершинного 1-расширения, а другое нет. □

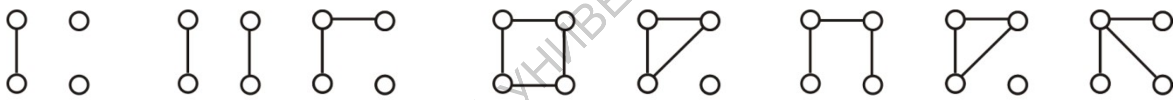
Рассматривая большие значения n, можно указать графы, которые имеют минимальное вершинное k-расширение, не являющееся минимальным вершинным 1-расширением их минимального вершинного $(k - 1)$-расширения при больших значениях k (например, при $7 < n < 11$ это будет справедливо для $k = 3$ и т. д.).



а *б* *в*

Рис. 3.1. Граф (*а*), его МВ-1Р (*б*) и МВ-2Р (*в*)

Рассмотрим граф $P_2 \cup O_2$ (рис. 3.2, *а*). Этот граф имеет одно ребро; очевидно, что любым минимальным реберным *k*-расширением этого графа будет 4-вершинный граф с *k* + 1 ребром. На рис. 3.2, *б* изображены два его минимальных реберных 1-расширения, а на рис. 3.2, *г* – минимальные реберные 2-расширение. На рис. 3.2, *в* изображены минимальные реберные 1-расширения для графов на рис. 3.2, *б*. Видно, что один из этих графов является минимальным реберным 2-расширением графа $P_2 \cup O_2$, а другой нет.



а *б* *в* *г*

Рис. 3.2. Граф (*а*), его МР-1Р и МР-2Р (*б–г*)

Предложенные примеры показывают, что ответ на поставленный вопрос является в общем случае отрицательным как для вершинных, так и для реберных расширений. Интерес представляет описание классов графов, для которых исследуемое утверждение является истинным. В частности, на данный момент не известно связных графов и несвязных графов без изолированных вершин, для которых утверждение было бы ложным. Однако круг нерешенных вопросов, связанных с минимальными вершинными и реберным *k*-расширениями графов, этим не исчерпывается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Aldred R. A., McKay B. D., Wormald N. C. Small hypohamiltonian graphs // J. Comb. Math. Comb. Comput. – 1997. – Vol. 23. – P. 143–152.

Avižienis A. Design of fault-tolerant computers // AFIPS'67 Conf. Proc. – New York : ACM, 1967. – P. 733–743.

Avižienis A. Fault-Tolerant Computing : An Overview // IEEE Computer. – 1971. – Vol. 4, № 1. – P. 5–8.

Avižienis A. Fault-tolerance and fault-intolerance : Complementary approaches to reliable computing // Proc. Intern. Conf. on Reliable Software. – New York : ACM, 1975. – P. 458–464.

Avižienis A., Chen L. On the implementation of N-version programming for software fault tolerance during execution // Proc. IEEE COMPSAC77. – New York : IEEE, 1977. – P. 149–155.

Avižienis A. The methodology of N-version programming // Software Fault Tolerance / ed. M. Lyu. – New York : John Wiley & Sons Ltd, 1995. – P. 23–46.

Avižienis A., Laprie J.-C., Randell B., Landwehr C. Basic Concepts and Taxonomy of Dependable and Secure Computing // IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing. – 2004. – № 1. – P. 11–33.

Bender E. A., Canfield E. R. The asymptotic number of labeled graphs with given degree sequences // J. Comb. Th. A. – 1978. – Vol. 24. – P. 296–307.

Bondy J. A. Variations on the hamiltonian theme // Can. Math. Bull. – 1972. – Vol. 15, № 1. – P. 57–72.

Brinkmann G. Fast generation of cubic graphs // J. Graph Theory. – 1996. – Vol. 23, № 2. – P. 139–149.

Brinkmann G., Goedgebeur J., McKay B. D. Generation of cubic graphs // Discrete Math. Theor. Comput. Sci. – 2011. – Vol. 13, № 2. – P. 69–80.

Bruck J., Cypher R., Ho C. Fault-tolerant meshes with small degree // SIAM J. Comput. – 1997. – Vol. 26, № 6. – P. 1764–1784.

Carter W.C., Bouricius W.G. A Survey of Fault Tolerant Computer Architecture and its Evaluation // IEEE Computer. – 1971. – Vol. 4, № 1. – P. 9–16.

Cin M. D., Hohl W., Sieh V. Hardware-Supported Fault Tolerance for Multiprocessors // Architecture of Computing Systems (ARCS'97). – New York : ACM Press, 1997. – P. 13–22.

Cho H. J., Hsu L. H. Ring embedding in faulty honeycomb rectangular torus // Inform. Process. Lett. – 2002. – Vol. 84. – P. 277–284.

Chou R. S., Hsu L. H. 1-edge fault-tolerant designs for meshes // Parallel Process. Lett. – 1994. – Vol. 4, № 4. – P. 385–389.

Choudum S. A., Sivagurunathan S. Optimal fault-tolerant networks with a server // Networks. – 2000. – Vol. 35, № 2. – P. 157–160.

Chvatal V. Flip-flops in hypohamiltonian graphs // Can. Math. Bull. – 1973. – Vol. 16, № 1. – P. 33–41.

Chuang Y. C., Chang C. H., Hsu L. H. Optimal 1-edge fault-tolerant designs for ladders // Inform. Process. Lett. – 2000. – Vol. 84, № 2. – P. 87–92.

Collier J. B., Schmeichel E. F. Systematic searches for hypohamiltonian graphs // Networks. – 1978. – Vol. 8. – P. 193–200.

Dependability : Basic Concepts and Terminology / ed. *Laprie J.-C.* – New York : Springer-Verlag, 1992.

Despain A., Patterson D. X-tree : a tree structured multiprocessor computer architecture // Proc. of the Fifth Annual Symposium on Computer Architecture. – New York : ACM, 1978. – P. 144–151.

Doyen J., van Diest V. New families of hypohamiltonian graphs // Discrete Math. – 1975. – Vol. 13. – P. 225–236.

Dutt S., Hayes J. P. On designing and reconfiguring *k*-fault-tolerant tree architectures // IEEE Trans. Comput. – 1990. – Vol. 39. – P. 490–503.

Dutt S., Hayes J. P. Subcube allocation in hypercube computers // IEEE Trans. Comput. – 1991. – Vol. 40. – P. 341–352.

Dutt S., Hayes J. P. Designing fault-tolerant systems using automorphisms // J. Parallel Distrib. Comp. – 1991. – Vol. 12, № 3. – P. 249–268.

Encyclopedia of Parallel Computing / ed. D. A. Padua. – New York : Springer. – 2011.

Farrag A. A., Dawson R. J. Designing optimal fault-tolerant star networks // Networks. – 1989. – Vol. 19. – P. 707–716.

Gaudin T., Herz J. C., Rossi P. Solution du probleme no. 29 // Rev. Franc. Rech. Operat. – 1964. – Vol. 8. – P. 214–218.

Graham N., Harary F., Livingstoun M. L., Stout Q.F. Subcube fault tolerance in hypercubes // Inform. Comput. – 1993. – Vol. 102. – P. 280–314.

Grey O. A., Avižienis A., Renels D. A. A fault-tolerant architecture for network storage systems // Proc. of the 14th Intern. Symp. on Fault-Tolerant Computer Systems. – Silver Spring : IEEE, 1984. – P. 232–239.

Gropp H. Enumeration of regular graphs 100 years ago // Discrete Math. – 1992. – Vol. 101. – P. 73–85.

Harary F., Palmer E. M. On similar points of a graph // J. Math. Mech. – 1966. – Vol. 15. – P. 623–630.

Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. – 1993. – Vol. 23. – P. 135–142.

Harary F., Khurum M. One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Internet J. Comput. Math. – 1995. – Vol. 56. – P. 135–143.

Harary F., Hayes J. P. Node fault tolerance in graphs // Networks. – 1996. – Vol. 27. – P. 19–23.

Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. – 1976. – Vol.C.-25, № 9. – P. 875–884.

Hayes J. P. Fault tolerance in computers and graphs // Proc. 1st Est. Conf. Graphs and Appl. – Tartu, 1993. – P. 77–89.

Hayes J. P. Computer architecture and organization. – New York : McGraw-Hill, 1998.

Herz J. C., Duby J. J., Vigue F. Recherche systematique des graphes hypohamiltoniens // Theory of Graphs: Intern. Symp. / ed. P. Rosenstiehl. – Paris : Gordon and Breach, 1967. – P. 153–160.

Holton D., Sheehan J. The Petersen graph. – Cambridge : Cambridge University Press, 1993.

Horowitz E., Alessandro Z. The binary trees as an interconnection network : applications multiprocessor systems and VLSI // IEEE Trans. Comput. – 1981. – Vol. 30, № 4. – P. 247–253.

Hsu L. H., Lin C. K. Graph Theory and Interconnection Networks. – New York : CRC Press, 2009.

Huang W. T., Chuang Y. C., Tan J. J., Hsu L. H. Fault-Free Hamiltonian Cycle in Faulty Möbius Cubes // Computation and Systems. – 2000. – Vol. 4, № 2. – P. 106–114.

Hung C. N., Hsu L. H., Sung T. Y. Christmas tree : a versatile 1-fault-tolerant design for token rings // Inform. Process. Lett. – 1999. – Vol. 72. – P. 55–63.

Hung C. N., Hsu L. H., Sung T. Y. On the construction of combined ***k***-fault-tolerant hamiltonian graphs // Networks. – 2001. – Vol. 37, № 3. – P. 165–170.

Knight J. C., Leveson N. G. An experimental evaluation of the assumption of independence in multiversion programming // IEEE Trans. Softw. Eng. – 1986. – Vol. 12. – P. 96–109.

Ku H. K., Hayes J. P. Optimally edge fault-tolerant trees // Networks. – 1996. – Vol. 27. – P. 203–214.

Kwan C. L., Toida S. An optimal 2-FT realization of symmetric hierarchical tree systems // Networks. – 1982. – Vol. 12. – P. 231–239.

Laprie J.-C. Dependable Computing and Fault Tolerance : Concepts and Terminology // Proc. 15th IEEE Intern. Symp. Fault-Tolerant Computing (FTCS-15). – New York : ACM, 1985. – P. 2–11.

Lindgren W. F. An infinite class of hypohamiltonian graphs // American Math. Monthly. – 1967. – Vol. 74. – P. 1087–1089.

Livingston M., Stout Q. Distributing resources in hypercube computers // Proc. 3rd Cong. on Hypercube Concurrent Computers and Appl. – New York : ACM, 1988. – P. 222–231.

Morris J. Automorphism Groups of Circulant Graphs – a Survey // Graph Theory in Paris. – Paris : Birkhäuser Basel, 2006. – P. 311–325.

Mukhopadhyaya K., Sinha B. P. Hamiltonian graphs with minimum number of edges for fault-tolerant topologies // Inform. Process. Lett. – 1992. – Vol. 44. – P. 95–99.

Paoli M., Wong W. W., Wong C. K. Minimum *k*-hamiltonian graphs // J. Graph Theory. – 1984. – Vol. 8, № 1. – P. 155–165.

Paoli M., Wong W. W., Wong C. K. Minimum *k*-hamiltonian graphs II // J. Graph Theory. – 1986. – Vol. 10, № 1. – P. 79–95.

Patterson D. A., Gibson G., Katz R. H. A case for redundant arrays of inexpensive disks (RAID) // Proc. of the 1988 ACM SIGMOD Intern. Conf. on Management of Data. – New York : ACM, 1988. – Vol. 17, № 3. – P. 109–116.

Radjavi H., Rosenthal P. Graphs with isomorphic subgraphs // London Math. Soc. (2). – 1972. – Vol. 6. – P. 70–72.

Read R. C. Some enumeration problems in graph theory. Doctoral thesis. London, 1958.

Robinson R. W., Wormald N. C. Almost all cubic graphs are Hamiltonian // Random Structures Algorithms. – 1992. – № 3. – P. 117–125.

Skiena S. Implementing Discrete Mathematics : Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. – Reading, MA : Addison-Wesley, 1990.

Sloane N. J. A., Plouffe S. The Encyclopedia of Integer Sequences. – San Diego : Academic Press, 1995.

Sousselier R. Probleme no. 29: Le cercle des irascibles // Rev. Franc. Rech. Operat. – 1963. – Vol. 7. – P. 405–406.

Srinivasan K. Y., Sood A. K. Analysis and design of a fault-tolerant tree architecture // Intern. J. Electronics. – 1990. – Vol. 68, № 6. – P. 901–913.

Stockmeyer P. A census of non-reconstructable digraphs : six related families // J. Comb. Th. B. – 1981. – Vol. 31. – P. 232–239.

Svoboda A. From Mechanical Linkages to Electronic Computers : Recollections from Czechoslovakia // A History of Computing in the Twentieth Century / Metropolis N., Howlett J., Rota G.C. New York : Academic Press, 1989. – P. 579–586.

Sung T. Y., Ho T. Y., Chang C. P., Hsu L. H. Optimal *k*-fault-tolerance network for token rings // J. Inform. Science and Engineering. – 2000. – № 16. – P. 381–390.

Sung T. Y., Lin C. Y., Chuang Y. C., Hsu L. H. Fault tolerant token ring embedding in double loop networks // Inform. Process. Lett. – 1998. – Vol. 66. – P. 201–207.

Sung T. Y., Wang J. J., Hsu L. H. A family of trivalent 1-Hamiltonian graphs with diameter O(log n) // J. Of Information Science and Engineering. – 2001. –Vol. 17. – P. 535–548.

Thomassen C. Hypohamiltonian and hypotraceable graphs // Disc. Math. – 1974. – Vol. 9. – P. 91–96.

Thomassen C. On hypohamiltonian graphs // Disc. Math. – 1974. – Vol. 10. – P. 383–390.

Thomassen C. Hypohamiltonian graphs and digraphs // Theory and Application of Graphs, Lect. Notes in Math. № 642. – Berlin : Springer, 1978. – P. 557–571.

Thomassen C. Planar cubic hypohamiltonian and hypotraceable graphs // J. Comb. Th. B. – 1981. – Vol. 30. – P. 36–44.

Tsai C.-H., Li T.-K. Two construction schemes for cubic Hamiltonian 1-node-hamiltonian graphs // Mathematical and Computer Modelling. – 2007. – Vol. 48. – P. 656–661.

von Neumann J. Probabilistic Logics and the Synthesis of Reliable Organisms from Unreliable Components // Automata Studies, ser. Annals of Mathematics Studies. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1956. – Vol. 34. – P. 43–98.

Wang J. J., Hung C. N., Hsu L. H. Optimal 1-hamiltonian graphs // Inform. Process. Lett. – 1998. – Vol. 65, № 3. – P. 157–161.

Wang J. J., Hung C. N., Tan J. J. M., Hsu L. H., Sung T. Y. Construction schemes for fault-tolerant hamiltonian graphs // Networks. – 2000. – Vol. 35, № 3. – P. 233–245.

Wong W. W., Wong C. K. Minimum *k*-hamiltonian graphs // J. Graph Theory. – 1984. – Vol. 8. – P. 155–165.

Wormald N. C. Triangles in labeled cubic graphs // Comb. Math. Lect. Notes in Math. – 1978. – № 687. – P. 337–345.

Wormald N. C. Enumeration of labeled graphs II. Cubic graphs with a given connectivity // London Math. Soc. (2). – 1979. – № 20. – P. 1–7.

Wormald N. C. The number of labeled cubic graphs with no triangles // Congr. Numer. – 1981. – Vol. 33. – P. 359–378.

Zhang L. Fault tolerant networks with small degree // IEEE Transactions on Computers. – 2002. – Vol. 51, № 5. – P. 553–560.

Абросимов М. Б. Об отказоустойчивости систем, представленных графами // Проблемы теоретической кибернетики : тезисы докладов XII международной конф. – М. : Изд-во МГУ, 1999.– С. 4.

Абросимов М. Б. О неизоморфных оптимальных 1-отказоустойчивых реализациях некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений.– Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2000. – Вып. 3. – С. 3–10.

Абросимов М. Б. Минимальные вершинные расширения графов // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур : докл. 3-й Всерос. конф. с международным участием. – Томск : Изд-во СО РАН, 2000. – С. 59–64.

Абросимов М. Б. Минимальные вершинные расширения 4-, 5-, 6- и 7-вершинных графов / Сарат. гос. ун-т. – Саратов, 2000. – Деп. в ВИНИТИ 06.09.2000, № 2352-В00. – 26 с.

Абросимов М. Б. Минимальные вершинные расширения циклов с числом вершин не более одиннадцати / Сарат. гос. ун-т.– Саратов, 2001. – Деп. в ВИНИТИ 14.08.2001, № 1869-В2001. – 17 с.

Абросимов М. Б. Точные расширения графов с числом вершин не более одиннадцати / Сарат. гос. ун-т. – Саратов, 2001. – Деп. в ВИНИТИ 14.08.2001, № 1870-В2001. – 15 с.

Абросимов М. Б. Минимальные вершинные расширения дополнений графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2001. – Вып. 4. – С. 11–19.

Абросимов М. Б. Минимальные вершинные расширения объединений некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений.– Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2001. – Вып. 4.– С. 3–11.

Абросимов М. Б. О минимальных расширениях графов, содержащих изолированные вершины // Вестн. Томск. гос. ун-та. Приложение. – 2002. – № 1(II). – С. 24–29.

Абросимов М. Б. Минимальные k-расширения предполных графов // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 6(493). – С. 3–11.

Абросимов М. Б. О неизоморфных минимальных реберных 1-расширениях графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2004. – Вып 6. – С. 3–9.

Абросимов М. Б. Минимальные расширения транзитивных турниров // Вестн. Томск. гос. ун-та. Приложение. – 2006. – № 17. – С. 187–190.

Абросимов М. Б. Некоторые вопросы о минимальных расширениях графов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2006. – Т. 6, вып. 1/2. – С. 86–91.

Абросимов М. Б. Минимальные расширения неориентированных звезд // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2006. – Вып 7. – С. 3–5.

Абросимов М. Б., Долгов А. А. Точные расширения некоторых турниров // Вестн. Томск. гос. ун-та. Приложение. – 2007. – № 23. – С. 211–216.

Абросимов М. Б., Долгов А. А. Семейства точных расширений турниров // Прикладная дискретная математика. – 2008. – № 1. – С. 101–107.

Абросимов М. Б., Долгов А. А. О реконструируемости малых турниров // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9, вып. 2. – С. 94–98.

Абросимов М. Б., Долгов А. А. О бесконтурных точных расширениях// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Т. 10, вып. 1. – С. 83–88.

Абросимов М. Б. Минимальные реберные расширения некоторых предполных графов // Прикладная дискретная математика. – 2010. – № 1. – С. 105–117.

Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. – 2010. – Т. 88, вып. 5. – С. 643–650.

Абросимов М. Б., Комаров Д. Д. Минимальные реберные расширения сверхстройных деревьев с малым числом вершин / Сарат. гос. ун-т. – Саратов, 2010. – Деп. в ВИНИТИ 18.10.2010 № 589-В2010. – 27 с.

Абросимов М. Б., Комаров Д. Д. Минимальные вершинные расширения сверхстройных деревьев с малым числом вершин / Сарат. гос. ун-т. – Саратов, 2010. – Деп. в ВИНИТИ 18.10.2010 № 590-В2010. – 38 с.

Абросимов М. Б. Минимальные реберные расширения направленных и ориентированных звезд // Прикладная дискретная математика. – 2011. – № 2. – С. 77–89.

Абросимов М. Б. Об одной гипотезе, связанной с вершинными расширениями соединений графов // Проблемы теоретической кибернетики : материалы XVI Международной конф. / под ред. Ю. И. Журавлева. – Н. Новгород : Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2011. – С. 16–19.

Абросимов М. Б. Минимальные вершинные расширения направленных звезд // Дискрет. матем. – 2011. – Т. 23, № 2. – С. 93–102.

Абросимов М. Б. О нижней оценке числа ребер минимального реберного 1-расширения сверхстройного дерева // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11, вып. 3, ч. 2. – С. 111–117.

Абросимов М. Б., Бондаренко П. П. О минимальных вершинных 1-расширениях циклов с вершинами двух типов // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2011. – № 4. – С. 80–81.

Абросимов М. Б., Долгов А. А. К вопросу о единственности точных вершинных расширений // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2011. – № 4. – С. 81–82.

Абросимов М. Б., Комаров Д. Д. О минимальных реберных 1-расширениях двух семейств деревьев // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2011. – № 4. – С. 83–84.

Абросимов М. Б., Моденова О. В. О некоторых свойствах минимальных вершинных расширений орграфов // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2011. – № 4. – С. 84–85.

Абросимов М. Б. О минимальных вершинных 1-расширениях соединений графов специального вида // Прикладная дискретная математика. – 2011. – № 4. – С. 34–41.

Абросимов М. Б. Характеризация графов с заданным числом дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения // Прикладная дискретная математика. – 2012. – № 1. – С. 111–120.

Абросимов М. Б. О числе дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения сверхстройного дерева // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12, вып. 2. – С. 103–113.

Абросимов М. Б., Кузнецов Н. А. О минимальных 1-расширениях циклов с числом вершин до 17 // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Международной науч. конф. – Саратов : Издат. центр «Наука», 2012. – С. 6–8.

Абросимов М. Б., Моденова О. В. Об орграфах, имеющих минимальные вершинные 1-расширения с малым количеством дополнительных дуг // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Международной науч. конф. – Саратов : Издат. центр «Наука», 2012. – С. 8–11.

Авиженис А. Отказоустойчивость – свойство, обеспечивающее постоянную работоспособность цифровых систем // Тр. Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. – 1978. – Т. 66, № 10. – С. 5–25.

Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М. : Мир, 1979.

Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. – М. : Наука, 1973.

Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем.– М. : Наука, 1997.

Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М. : Мир, 1982.

Долгов А. А. О семействах точных вершинных k-расширений графов при $k > 1$ // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2010». – М. : МАКС Пресс, 2010. – С. 30–32.

Долгов А. А. Семейство точных 2-расширений турниров // Прикладная дискретная математика. – 2010. – № 9. – С. 96–99.

Кабанов М. А. Об отказоустойчивых реализациях графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1997. – Вып.1. – С. 50–58.

Каравай М. Ф. Применение теории симметрии к анализу и синтезу отказоустойчивых систем // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 6. – С. 159–173.

Каравай М. Ф. Инвариантно-групповой подход к исследованию k-отказоустойчивых структур // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 1. – С. 144–156.

Каравай М. Ф. Минимизированное вложение произвольных гамильтоновых графов в отказоустойчивый граф и реконфигурация при отказах. I. Одно-отказоустойчивые структуры // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 12. – С. 159–177.

Каравай М. Ф. Минимизированное вложение произвольных гамильтоновых графов в отказоустойчивый граф и реконфигурация при отказах. II. Решетки и k-отказоустойчивость // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 2. – С. 175–189.

Киреева А. В. Отказоустойчивость в функциональных графах // Упорядоченные множества и решетки. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1995. – Вып. 11. – С. 32–38.

Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы : построение и анализ / под ред. И. В. Красикова. – 2-е изд. – М. : Вильямс, 2005.

Курносова С. Г. Т-неприводимые расширения 3-, 4-, 5- и 6-вершинных графов / Сарат. гос. ун-т. – Саратов, 2003. – Деп. в ВИНИТИ 21.06.2003, № 1203-В2003. – 18 с.

Курносова С. Г. Каталог Т-неприводимые расширения для деревьем с числом вершин не более 10 / Сарат. гос. ун-т. – Саратов, 2004. – Деп. в ВИНИТИ 30.06.2004, № 1126-В2004. – 16 с.

Курносова С. Г. Т-неприводимые расширения полных бинарных деревьев // Вестн. Томск. гос. ун-та. Приложение. – 2005. – № 14. – С. 158–160.

Курносова С. Г. Т-неприводимые расширения объединений полных графов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2005. – Т. 5, вып. 1. – С. 107–115.

Курносова С. Г. Построение Т-неприводимых расширений для класса полных бинарных деревьев // Вестн. молодых ученых «Ломоносов». – М. : МАКС Пресс, 2006. – Вып. III. – С. 58–66.

Липский В. Комбинаторика для программистов.– М. : Мир, 1988.

Ловас Л., Пламмер М. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии.– М. : Мир, 1998.

Николаев А. Б., Подлазов В. С. Отказоустойчивое расширение системных сетей многопроцессорных вычислительных систем // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 1. – С. 162–170.

Пападимитру Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация, алгоритмы и сложность. – М. : Мир, 1995.

Пархоменко П. П. Передача сообщений в неисправных гиперкубах с использованием исправных подкубов // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 10. – С. 171–182.

Рейнгольд Э., Нивергельд Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика.– М. : Мир, 1980.

Салий В. Н. Доказательства с нулевым разглашением в задачах о расширениях графов // Вестн. Томск. гос. ун-та. Приложение. – 2003. – № 6. – С. 63–65.

Салий В. Н. Оптимальные реконструкции графов // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. – С. 59–65.

Теслер Г. С. Решение проблемы гарантоспособности компьютерных систем в аспекте базисов компьютерной науки // Математичні машини і системи. – 2008. – № 4. – С. 171–188.

Харари Ф. Теория графов. – 4-е изд. – М. : Едиториал УРСС, 2009.

Харченко В. С. Гарантоспособность и гарантоспособные системы : элементы методологии // Радіоелектронні і комп‘ютерні системи. – 2006. – № 5 – С. 7–19.

Харченко В. С. Парадигмы и принципы гарантоспособных вычислений : состояние и перспективы развития // Радіоелектронні і комп‘ютерні системи. – 2009. – № 2(36). – С. 91–100.

Холл М. Комбинаторика.– М. : Мир, 1970.

Научное издание

Абросимов Михаил Борисович

ГРАФОВЫЕ МОДЕЛИ
ОТКАЗОУСТОЙЧИВОСТИ

Технический редактор Ю. И. В о л о д и н а
Корректор А. Л. Ш и б а н о в а
Оригинал-макет В. А. Х а л о в а

Подписано в печать 14.08.2012
Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 11,16 (12,0). Тираж 100. Заказ

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Саратовского университета.
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А.