В.С. Рыхлов

# ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

## Часть 1. Базисность Рисса собственных функций

научно-методическое пособие

# Оглавление

# Предисловие автора

При чтении спецкурсов, руководстве курсовыми, бакалаврскими и магистерскими выпускными работами, при работе с аспирантами и соискателями постоянно возникает потребность в быстром введении слушателей в спектральную теорию обыкновенных дифференциальных операторов или некоторые специальные разделы этой теории.

К нашему большому сожалению, имеется не так уж много доступных материалов для этого. Чтобы дополнить эти материалы, издается настоящее пособие, в котором излагается содержание кандидатской диссертации автора [1]. К сожалению, материалы диссертаций, как правило, недоступны массовой аудитории, хотя, как кажется автору, именно диссертации представляют особый интерес для читателей, интересующихся соответствующей тематикой. Это связано с тем, что именно в диссертациях дается подробная история вопроса, четкие постановки решаемых задач и подробное изложения доказательств полученных результатов.

Данный материал, как надеется автор, позволит читателям получить необходимые предварительные сведения из некоторых разделов спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, получить представление о задачах и проблемах, возникающих в этой теории и методах для решения этих задач и проблем.

Дальнейший материал есть изложение кандидатской диссертации автора [1]. В тексте диссертации исправлены выявленные к настоящему времени описки и неточности. Обращаем Ваше внимание на то, что все исторические сведения и цитированная литература относятся к моменту написания этой диссертации. Ради удобства, излагаемый материал разбит на три части в соответствии с главами диссертации (часть 1, часть 2, часть 3). В части 1 настоящего пособия излагается введение диссертации и глава 1.

# Введение

Многие вопросы современной математики, механики и физики приводят к спектральному анализу несамосопряженных операторов. Спектральный анализ таких операторов включает в себя задачи определения собственных значений (с.з.), собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) или, как часто говорят, корневых функций (к.ф.), разложения произвольной функции в ряд по с.п.ф., вопросы полноты и базисности с.п.ф., равносходимости разложений по с.п.ф. и по известным системам функций и т. д. Такого рода задачи и вопросы всегда возникают, например, при обосновании метода Фурье решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Хотя многие задачи спектрального анализа несамосопряженных операторов еще далеки от окончательного решения, именно в последние три десятилетия он обогатился целым рядом фундаментальных результатов, которые стимулировали исследования в данной области. На это указывают многочисленные публикации.

Настоящая работа посвящена спектральному анализу двух классов несамосопряженных операторов: квазидифференциальных и интегральных. В ней, в частности, решаются вопросы безусловной базисности в $L_2[0,1]$ с.п.ф. квазидифференциальных (к.д.) операторов, равносходимости разложений произвольной функции по с.п.ф. этих операторов и по тригонометрической системе, а также равносходимости с рядом Уолша-Фурье разложений по с.п.ф. интегральных операторов.

Вопросом о разложении по с.п.ф. краевой задачи на отрезке $[0,1]$, порождаемой дифференциальным уравнением n-го порядка

$$\ell(y) - \lambda y = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y - \lambda y = 0 \qquad (0.1)$$

и линейно независимыми краевыми условиями

$$U_i(y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y^{(n-j)}(0) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y^{(n-j)}(1) = 0,\ i = \overline{1,n}, \qquad (0.2)$$

одним из первых занимался G. Birkhoff [2,3]. Он доказал, что при некоторых ограничениях на коэффициенты форм $U_i(y)$, называемых условиями регулярности [4, с. 66–67], ряд Фурье по с.п.ф. функции $f(x)$, имеющей ограниченную вариацию, сходится к $\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big)$ в каждой внутренней точке $[0,1]$, а в точках 0 и 1 ряд сходится к $\alpha f(0+0) + \beta f(1-0)$, где постоянные $\alpha$ и $\beta$ определяются краевыми условиями. При этом G. Birkhoff предполагал, что $p_1(x) \equiv 0$ или, по крайней мере, из $C^{n-1}[0,1]$, а $p_j(x)$, $j = \overline{2,n}$, непрерывны на $[0,1]$. При получении этого результата G. Birkhoff решил также вопросы о распределении с.з. и об асимптотике собственных функций задачи (0.1)–(0.2). Основным средством для решения этих вопросов была асимптотика системы решений уравнения (0.1) при $|\lambda| \to \infty$, полученная G. Birkhoff'ом в [5].

В дальнейшем Я.Д. Тамаркин усилил результат G. Birkhoff'а, показав в [6], что при $p_1(x) \in C^{n-1}[0,1]$ и регулярных краевых условиях для всякой интегрируемой функции ряды по с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2) и по тригонометрической системе равномерно равносходятся внутри $[0,1]$. Аналогичный результат, но значительно позже, получил M. Stone [7]. Теорема Я.Д. Тамаркина обобщала теоремы о равносходимости E. Hobson'а [8], В.А. Стеклова [9], A. Haar'а [10, 11], доказанные ими для краевых задач второго порядка.

Более общие краевые задачи, а также краевые задачи в пространстве вектор-функций (но опять-таки с условиями регулярности краевых условий и достаточной гладкости коэффициента при $(n-1)$-ой производной или аналогичных ему коэффициентов) изучались Я.Д. Тамаркиным [12, 13], G. Birkhoff'ом и R.E. Langer'ом [14] и многими другими.

Совсем недавно А.П. Хромов [15, 16] распространил теорему о равносходимости Я.Д. Тамаркина на интегральные операторы, ядра которых обобщают свойства функции Грина задачи (0.1)–(0.2) с регулярными краевыми условиями. А.П. Хромов установил, что такие операторы являются в определенном смысле каноническими в классе интегральных операторов, для разложений по с.п.ф. которых имеет место равносходимость с тригонометрическим рядом. Случай $p_1(x) \notin C^{n-1}[0,1]$ А.П. Хромовым не рассматривался.

В основе перечисленных выше результатов лежал метод Пуанкаре–Коши [17] или, по-другому, метод контурного интеграла. Другой подход к проблеме равносходимости продемонстрировал В.А. Ильин [18–21]. При получении своих результатов он существенно использовал формулу среднего значения. В.А. Ильин доказал равномерную равносходимость с тригонометрическим рядом разложений в биортогональный ряд по с.п.ф. произвольного несамосопряженного дифференциального оператора, порожденного выражением $\ell(y)$, с произвольными краевыми условиями, обеспечивающими некоторое асимптотическое поведение с.з. Доказанные В.А. Ильиным теоремы формулируются в терминах условий на коэффициенты $\ell(y)$ и функции биортогональной системы и охватывают ранее известные результаты, касающиеся равносходимости, в частности, случаи регулярных краевых условий. Более того, эти теоремы впервые устанавливают локальный характер не только требований на разлагаемую функцию, но и требований на коэффициенты $\ell(y)$ и функции биортогональной системы.

В начале 60-х годов Г.М. Кесельманом [22] и В.П. Михайловым [23] была доказана теорема о безусловной базисности в $L_2[0,1]$ с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2) при условии, что $p_1(x) \in C^{n-1}[0,1]$, остальные коэффициенты суммируемы на $[0,1]$, а краевые условия регулярны при $n$ нечетном и усиленно регулярны при $n$ четном (определение усиленной регулярности см. в [4, с. 71]; оно гарантирует простоту достаточно больших по модулю с.з.). Договоримся далее называть краевые условия, регулярные при $n$ нечетном и усиленно-регулярные при $n$ четном, просто усиленно-регулярными. Как показано в [24], в гильбертовом пространстве понятие базиса безусловной сходимости, удовлетворяющего дополнительному требованию $0 < m \le \|\varphi_j\| \le M < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$, эквивалентно понятию базиса Рисса, которое было введено Н.К. Бари [25].

Все приведенные выше результаты относятся к задачам (0.1)–(0.2) с достаточно гладким коэффициентом $p_1(x)$, а также к обобщениям именно таких задач. Вопрос о влиянии свойств этого коэффициента на равносходимость, безусловную базисность при уменьшении его гладкости до сих пор оставался открытым, если не считать частного случая, рассмотренного М.И. Ломоносовым [26, 27]. Решению этого вопроса и посвящены первая и вторая главы диссертации, причем решается этот вопрос на классе к.д. операторов, определяемых к.д. выражениями $n$-го порядка на $[0, 1]$

$$D_n y = y^{[n]}, \tag{0.3}$$

где

$$D_k y = y^{[k]} = i\frac{d}{dx}y^{[k-1]} + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}(x)y^{[j]},\ k = n, n-1, \ldots, 1,\ D_0 y = y^{[0]} = y,$$

$p_{kj} \in L_1[0, 1]$ (выражения $y^{[n]}$ являются частным случаем выражений, введенных Д. Шином [28]) и линейно независимыми краевыми условиями

$$U_i(y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y^{[n-j]}(0) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y^{[n-j]}(1) = 0,\ i = \overline{1, n}. \tag{0.4}$$

В этом случае роль $p_1(x)$ играют коэффициенты $p_{k,k-1}(x)$, $k = \overline{1, n}$.

В первой главе решается вопрос о безусловной базисности в $L_2[0, 1]$ с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4). Основным является следующий результат (теорема (5.1)[1]): с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4) образуют базис безусловной

[1]Нумерация параграфов в диссертации сквозная; при этом для формул, лемм, теорем, следствий и замечаний используется единая нумерация, состоящая из двух чисел, заключенных в круглые скобки: первое число — номер параграфа, второе число — номер формулы, леммы и т. д. в этом параграфе.

сходимости в $L_2[0,1]$, если $p_{k,k-1}(x) \in L_2[0,1]$, $k=\overline{1,n}$, а краевые условия усиленно-регулярны. Следствием этого результата является утверждение о том, что с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2) образуют базис безусловной сходимости в $L_2[0,1]$, если $p_1(x) \in L_2[0,1]$, а краевые условия усиленно-регулярны (теорема (5.2)). В [22] для справедливости этого утверждения требовалось, чтобы $p_1(x) \in C^{n-1}[0,1]$. Отметим, что по терминологии [29] к.д. оператор (0.3)–(0.4), удовлетворяющий теореме (5.1), является спектральным оператором.

Во второй главе решается вопрос о равносходимости внутри $[0,1]$ разложений по с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4) с регулярными краевыми условиями и по тригонометрической системе. Основной является теорема (7.1). В ней утверждается, что множество функций $f(x)$, для которых имеет место равносходимость, зависит от свойств коэффициентов $p_{k,k-1}(x)$, $k=\overline{1,n}$, а именно: если, например, $p_{k,k-1}(x) \in L_r[0,1]$, то равносходимость имеет место для функций $f(x) \in L_q[0,1]$, где $1/r+1/q<1$; если $p_{k,k-1}(x) \in C[0,1]$ и $\omega(p_{k,k-1};\delta)_{C[0,1]} = O(\ln^{-\alpha}\frac{1}{\delta})$, где $\omega(p_{k,k-1};\delta)_{C[0,1]}$ есть модуль непрерывности функции $p_{k,k-1}(x)$ в метрике $C[0,1]$, то равносходимость имеет место для функций $f(x) \in L_1[0,1]$, таких, что $\omega(f;\delta)_{L_1[0,1]} = O(\ln^{-\beta}\frac{1}{\delta})$, где $\alpha+\beta>1$, и наоборот. При этом, если в первом случае условие на $r$ и $q$ заменить на противоположное, а именно: $1/r+1/q>1$, то утверждение теоремы станет неверным. Аналогично, во втором и третьем случае утверждение теоремы станет неверным, если $\alpha+\beta<1$. Следствием этой теоремы является теорема (7.3) о равносходимости разложений по с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2) с регулярными краевыми условиями и по тригонометрической системе, формулировка которой дословно повторяет формулировку теоремы (7.1), но только вместо $p_{k,k-1}(x)$, $k=\overline{1,n}$, берется коэффициент $p_1(x)$. Для сравнения теоремы (7.3) с теоремой Я.Д. Тамаркина рассмотрим случай $f(x) \in L_1[0,1]$ (Я.Д. Тамаркин рассматривал именно этот случай). Из теоремы (7.3) следует, что для равносходимости достаточно, например, чтобы $\omega(p_1;\delta)_{C[0,1]} = O(\ln^{-\alpha}\frac{1}{\delta})$, где $\alpha>1$. В теореме Тамаркина для этого требовалось, чтобы $p_1(x) \in$

$C^{n-1}[0,1]$. Отметим, что из результата М.И. Ломоносова [27] следует равносходимость для задачи (0.1)–(0.2) второго порядка с распадающимися краевыми условиями при $p_1(x) \in L_\infty[0,1]$ и $f(x) \in L_2[0,1]$. В теореме (7.3) для этого достаточно, чтобы $p_1(x) \in L_r[0,1]$ и $f(x) \in L_2[0,1]$, где $1/r + 1/2 < 1$ или $r > 2$.

В третьей главе изучается равносходимость с рядом Уолша–Фурье разложений по с.п.ф. одного класса интегральных операторов. Система функций Уолша была введена и исследована J. Walsh'ем [30]. Изучение этой системы, затем, продолжили S. Kaczmarz и H. Steinhaus [31], R. Paley [32], N. Fine [33] и многие другие. В последнее время вновь возрос интерес к этой системе функций. Она нашла применение в вычислительной технике и некоторых разделах физики [34]. В конце 60-х годов J. Gibbs и его сотрудники M. Millard и B. Ireland [35–37] заложили основы диадического анализа, опирающегося на систему функций Уолша. Дальнейшее развитие диадический анализ получил в работах P. Butzer'a и H. Wagner'a [38,39], которые определили и детально исследовали диадную производную.

Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ есть система функций Уолша в нумерации R. Paley [32] (система функций Уолша–Пэли). Рассмотрим вполне непрерывный оператор, действующий в $L_1[0,1]$

$$Af = \int_0^1 A(x,t) f(t)\, dt \quad (0 \le x \le 1), \tag{0.5}$$

где

$$A(x,t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)\psi_k(t)}{k^n} + V(x,t) \quad (n \ge 2).$$

Так как разложение по с.п.ф. оператора

$$I_n f = \int\limits_0^1 I_n(x,t) f(t)\, dt,$$

где

$$I_n(x,t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)\psi_k(t)}{k^n},$$

есть разложение в обычный ряд Уолша–Фурье, то естественно поставить вопрос, при каких условиях на функцию $V(x,t)$ имеет место равносходимость в метрике $L_\infty[0,1]$ разложений произвольной функции $f(x) \in L_1[0,1]$ по с.п.ф. оператора A и по системе Уолша. Решению этого вопроса и посвящена третья глава. Основным является следующий результат (теорема (11.1)): если существуют некоторые диадные производные по $x$ и по $t$ от функции $V(x,t)$, если коэффициенты Уолша–Фурье этих диадных производных стремятся к нулю с достаточной скоростью, если оператор $A^{-1}$ существует и выполняются некоторые другие условия, то имеет место указанная выше равносходимость. При этом, если все условия на функцию $V(x,t)$ оставить без изменения, кроме условий на скорость стремления к нулю коэффициентов Уолша–Фурье, а последние условия заменить на противоположные, то утверждение теоремы (11.1) станет неверным.

Перейдем теперь к более подробному изложению диссертации.

Первая глава состоит из пяти параграфов (§1–§5). В §1 вводятся необходимые понятия, даются определения и показывается, что оператор, сопряженный к оператору (0.3)–(0.4) принадлежит тому же классу к.д. операторов, что и исходный оператор. В §2 доказывается очень важная для первых двух глав теорема (2.2) об асимптотике системы решений уравнения $y^{[n]} - \lambda y = 0$ при $|\lambda| \to \infty$, учитывающей свойства коэффициентов $p_{k,k-1}(x)$, $k = \overline{1,n}$. Метод получения этой асимптотики аналогичен методу из [5], [4, с. 55–62], но существенным моментом является использование преобразования (2.6). Теорема (2.2), помимо широкого использования ее в дальнейшем, представляет и самостоятельный интерес. Она, в частности усиливает и обобщает на к.д. уравнения соответствующий результат В.Г. Хрыптуна [40]. В §3 доказывается лемма (3.4), обобщающая лемму Г.М. Кесельмана [22, с. 89–90], а затем, на основе этой леммы и теоремы (2.2), находится асимптотика с.з. оператора (0.3)–(0.4) с регулярными краевыми условиями, учитывающая свойства коэффициентов $p_{k,k-1}(x)$, $k = \overline{1,n}$ (теорема (3.11)). В §4 при помощи системы решений к.д. уравнения, полученной в теореме (2.2), находится асимптотика функции Грина оператора (0.3)–(0.4) (лемма (4.5)). Затем, на основе этой асимптотики методом контурного интеграла доказывается теорема (4.20) о разложении произвольной функции из области определения к.д. оператора с регулярными краевыми условиями в равномерно сходящийся ряд по с.п.ф. этого оператора. Наконец, в следствии (4.24) устанавливается полнота в $L_1[0,1]$ с.п.ф. рассматриваемого класса операторов. В последнем §5 главы на основе предыдущих результатов методом работы [22] доказывается теорема (5.1) о безусловной базисности в $L_2[0,1]$ с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4) и следствие из нее (теорема (5.2)) о безусловной базисности с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2).

Вторая глава состоит из четырех параграфов (§6–§9). В §6 приводятся используемые в дальнейшем понятия и результаты из теории пространств Орлича, теории приближения функций многочленами. На основе результата П.А. Ульянова [41] о вложении некоторых классов функций в пространства Орлича доказывается лемма (6.14). После всего этого доказывается теорема (6.18), аналогичная теореме Х. Штейнгауза [42, с. 111]. В этих теоремах речь идет о том, какие условия нужно наложить на функции $W(x)$ и $f(x)$, чтобы имела место равносходимость на $[0,1]$ или хотя бы внутри $[0,1]$ для $W\sigma_s(f)$ и $\sigma_s(Wf)$, где $\sigma_s(f)$ обозначает $s$-ую частичную сумму тригонометрического ряда функции $f(x)$. Теорема (6.18), помимо использования ее в дальнейшем, представляет самостоятельный интерес, тем более, что строятся контрпримеры, показывающие точность этой теоремы. В §7 формулируется теорема (7.1) о равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4), а также следствие из нее (теорема (7.3)) для оператора (0.1)–(0.2). После этого доказывается лемма об оценках норм интегральных операторов, действующих из $L_p[0,1]$ $(1 < p \leq \infty)$ в $L_\infty[0,1]$, ядрами которых являются квазипроизводные от функции Грина оператора (0.3)–(0.4) с регулярными краевыми условиями. Аналогичную лемму в случае краевой задачи (0.1)–(0.2) впервые доказал и использовал А.П. Хромов в доказательстве теоремы о равносходимости для интегральных операторов [15,16]. Далее, в §7 вводится обыкновенный дифференциальный оператор первого порядка в пространстве вектор-функций, тесно связанный с к.д. оператором (0.3)–(0.4), и устанавливается связь между компонентами его функции Грина (она является матрицей-функцией) и квазипроизводными от функции Грина оператора (0.3)–(0.4) (лемма (7.10)). После этого на основе теорем (2.2), (4.20), (6.18), лемм (4.5), (7.5), (7.10) доказываются две леммы, из которых и следуют утверждения теорем (7.1) и (7.3). В первой из этих лемм (лемма (7.13)) устанавливается равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4), у которого все коэффициенты, кроме $p_{k,k-1}(x)$, $k = \overline{1,n}$, равны нулю. Во второй (лемма (7.52)) — равносходимость разложений по с.п.ф. двух к.д. операторов, у которых коэффициенты $p_{k,k-1}(x)$ одинаковы. Леммы доказываются методом контурного интеграла. Для того, чтобы получить формулу, выражающую резольвенту возмущенного оператора через резольвенту исходного оператора, потребовалось использование того факта, что к.д. оператор является частным случаем обыкновенного дифференциального оператора первого порядка в пространстве вектор-функций. В §8 строятся контрпримеры, показывающие точность теоремы (7.1). Здесь вновь существенно используется лемма (7.5). Центральное место в этом параграфе занимает лемма (8.29) о расходимости одной числовой последовательности. В ее доказательстве используются некоторые факты из статьи А.И. Рубинштейна [43]. Наконец, в последнем §9 второй главы доказывается теорема (9.1), которая обобщает теорему (7.1) на тот случай, когда условия, наложенные на функции $p_{k,k-1}(x)$, выполняются не на всем отрезке $[0,1]$, а лишь на некотором $[a,b] \subset [0,1]$.

Третья глава состоит из четырех параграфов (§10–§13). В §10 приводятся некоторые сведения из [39], в частности, определение и основные свойства диадной производной. В §11 формулируется теорема (11.1) о равносходимости с рядом Уолша–Фурье. Затем показывается, что требование существования $A^{-1}$ является совершенно необходимым для равносходимости, и находится явный вид этого оператора. Оказывается, что

$$A^{-1} = (E+N)(D^{[n]} + a_n E),$$

где $Nf = \int_0^1 N(x,t)f(t)dt$, $N(x,t)$ выражается через диадные производные от $V(x,t)$ (см. формулу (0.5)), $D^{[n]}$ есть оператор $n$-кратного диадного дифференцирования, наконец, $a_n$ есть некоторая константа. Метод обращения $A$ аналогичен методу А.П. Хромова [15, 16], но только вместо обычной производной используется диадная производная и ее свойства. В §12 доказывается теорема (11.1). Основной идеей доказательства является использование явного вида оператора $A^{-1}$, найденного в §11. Идея использования явного вида обратного оператора при доказательстве теорем равносходимости для интегральных операторов принадлежит А.П. Хромову [15, 16]. Основная часть §12 посвящена доказательству равносходимости для более широкого класса операторов, чем $(E+N)(D^{[n]} + a_n E) = A^{-1}$, а именно: рассматриваются операторы с меньшими требованиями на ядро $N(x,t)$ по сравнению с требованиями теоремы (11.1). Доказательство равносходимости проводится методом контурного интеграла. Для этого потребовалось получение асимптотики функции Грина оператора $(E+N)(D^{[n]} + bE)$, где $b$ — произвольная константа. Эта асимптотика получается так. Сначала методом возмущения находится асимптотика функции Грина оператора $(E+N)D^{[n]}$ (лемма (12.36)). Этот оператор рассматривается как возмущение $D^{[n]}$. После этого аналогично находится асимптотика функции Грина оператора $(E+N)(D^{[n]}+bE)$ (леммы (12.37) и (12.46)) , рассматриваемого как возмущение $(E+N)D^{[n]}$. Основным результатом §12 является лемма (12.51) о равносходимости разложений по с.п.ф. оператора $(E+N)(D^{[n]}+bE)$ и по системе Уолша. Из этой леммы и следует утверждение теоремы (11.1). В последнем §13 строятся контрпримеры, показывающие точность теоремы (11.1).

В тексте диссертации используются следующие обозначения:

1) $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ — множества комплексных, натуральных и целых чисел;

2) $\|\cdot\|_r = \|\cdot\|_{L_r[0,1]}$ $(1 \le r \le \infty)$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$;

3) $\delta_{kj}$ — символ Кронекера ($\delta_{kj} = 1$ при $k = j$ и 0 при $k \ne j$); $\chi(x)$ — функция Хевисайда (она равна 1 при $x \ge 0$ и 0 при $x < 0$); $E(a)$ — целая часть $a$;

4) $C$, $C_k$, $\tilde{C}, \ldots$ — различные константы; если нужно будет подчеркнуть их зависимость от каких-то величин, то будем писать эти величины в круглых скобках.

Основные результаты диссертации опубликованы в [52–57] и докладывались на семинаре кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики (под руководством А.П. Хромова) и на объединенном семинаре (под руководством Н.П. Купцова) Саратовского Государственного университета, на Межвузовском семинаре по функциональному анализу в г. Ульяновске в августе–сентябре 1979 г., на Всесоюзном симпозиуме по теории апроксимации функций в комплексной области в г. Уфе в мае 1980 г., на семинаре кафедры общей математики в МГУ (под руководством В.А. Ильина и Ш.А. Алимова).

# Глава 1

# Безусловная базисность в $L_2[0,1]$ собственных функций квазидифференциальных операторов

В этой главе находятся условия, при которых с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4) образуют базис безусловной сходимости в $L_2[0,1]$. Глава состоит из §1–§5.

В §1 показывается, что оператор, сопряженный к оператору (0.3)–(0.4), принадлежит тому же классу к.д. операторов, что и исходный оператор, а также даются некоторые определения. В §2 находится асимптотика системы решений к.д. уравнения $y^{[n]} - \lambda y = 0$ при $|\lambda| \to \infty$. В §3 описываются классы регулярных краевых условий. После этого доказывается обобщение леммы Г.М. Кесельмана [22, с. 89–90]. В оставшейся части §3 получается асимптотика с.з. оператора (0.3)–(0.4). В §4 изучается функция Грина к.д. оператора. Затем доказывается теорема о разложении по с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4). В следствии из этой теоремы устанавливается полнота в $L_1[0,1]$ с.п.ф. этого оператора. Наконец, в §5 доказывается основная теорема первой главы — теорема о безусловной базисности в $L_2[0,1]$ с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2).

# §1. Основные понятия и определения

Рассмотрим линейный к.д. оператор $L$ на отрезке $[0,1]$, определяемый к.д. выражением

$$D_n y = y^{[n]}, \tag{1.1}$$

где

$$D_k y = y^{[k]} = i\frac{d}{dx}y^{[k-1]} + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj} y^{[j]},\ k = n, n-1, \ldots, 1, \quad D_0 y = y^{[0]} = y,$$

$p_{kj}(x) \in L_1[0,1]$, и линейно независимыми нормированными [4, с. 65–66] краевыми условиями вида

$$U_m(Y) = U_{m0}(Y) + U_{m1}(Y) = 0, \quad m = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

где

$$U_{m0}(Y) = \alpha_m y^{[k_m]}(0) + \sum_{j=0}^{k_m-1} \alpha_{mj} y^{[j]}(0),$$

$$U_{m1}(Y) = \beta_m y^{[k_m]}(1) + \sum_{j=0}^{k_m-1} \beta_{mj} y^{[j]}(1),$$

$n-1 \geq k_1 \geq \ldots \geq k_n \geq 0$, $k_{m+2} < k_m$, $\prod_{m=1}^{n}(|\alpha_m| + |\beta_m|) \neq 0$, $Y = (y^{[0]}(x), y^{[1]}(x), \ldots, y^{[n-1]}(x))$. Краевые условия (0.4) всегда можно преобразовать к виду (1.2).

Интерес для дальнейшего рассмотрения представляет только случай $n \geq 2$, так как при $n = 1$ не возникает никаких трудностей в случае негладкого коэффициента $p_{10}$.

Через $D_L$ обозначим область определения оператора $L$. Она состоит из тех функций $y$, для которых все квазипроизводные до порядка $n-1$ абсолютно непрерывны на $[0,1]$, удовлетворяют краевым условиям (1.2), а $y^{[n]} \in L_1[0,1]$.

Введем в рассмотрение следующее к.д. выражение, которое имеет тот же вид, что и выражение $D_n y$,

$$D_n^* z = z^{\{n\}}, \tag{1.3}$$

где при $r_{kj} = \bar{p}_{n-j,n-k}$

$$D_k^* z = z^{\{k\}} = i\frac{d}{dx}z^{\{k-1\}} + \sum_{j=0}^{k-1} r_{kj} z^{\{j\}},\ k = n, n-1, \ldots, 1, \quad D_0^* z = z^{\{0\}} = z.$$

Назовем $D_n^* z$ сопряженным к.д. выражением к $D_n y$. Справедлива следующая формула

$$(D_n y, z) = i\sum_{j=1}^{n}\left(y^{[n-j]}(1)\overline{z^{\{j-1\}}(1)} - y^{[n-j]}(0)\overline{z^{\{j-1\}}(0)}\right) + (y, D_n^* z),$$

где $(g, h) = \int\limits_0^1 g(x)\overline{h(x)}dx$. Используя эту формулу, можно определенным образом построить $n$ линейно независимых форм $V_m(Z)$ относительно величин $z^{\{j\}}(0)$, $z^{\{j\}}(1)$, $j = \overline{1, n-1}$ (см. [4, с. 20–21]), которые назовем сопряженными к формам $U_m(Y)$, а оператор, порожденный к.д. выражением (1.3) и краевыми условиями

$$V_m(Z) = 0, \quad m = \overline{1, n}, \tag{1.4}$$

назовем сопряженным к $L$ к.д. оператором и обозначим его через $L^*$. Не нарушая общности, можно считать краевые условия (1.4) нормированными. Таким образом, операторы $L$ и $L^*$ принадлежат к одному и тому же классу к.д. операторов. На этот класс тривиально переносятся все понятия, определения и результаты главы I книги [4]. Дадим несколько определений.

**(1.5) Определение.** *Число $\lambda$ называется собственным значением оператора $L$, если в области определения $D_L$ оператора $L$ существует функция $y(x) \not\equiv 0$ такая, что $Ly = \lambda y$. Эта функция $y(x)$ называется собственной функцией оператора $L$, соответствующей собственному значению $\lambda$.*

**(1.6) Определение.** *Кратностью собственного значения называется размерность пространства, порожденного всеми собственными функциями, соответствующими этому собственному значению.*

**(1.7) Определение.** *Пусть* $\lambda$ *— собственное значение оператора* $L$, *а* $y_0(x)$ *— соответствующая собственная функция. Система функций* $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ *называется цепочкой функций, присоединенных к собственной функции* $y_0(x)$, *если функции* $y_0(x)$, $y_1(x)$, $\ldots$, $y_k(x)$ *являются решениями следующих задач*

$$Ly_q - \lambda y_q = y_{q-1}, \quad q = 0, \ldots, k.$$

**(1.8) Определение.** *Последовательность* $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ *векторов гильбертова пространства* $H$ *называется базисом этого пространства, если каждый вектор* $f \in H$ *разлагается единственным образом в ряд* $f = \sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j$, *сходящийся по норме гильбертова пространства* $H$.

**(1.9) Определение.** *Базис, не теряющий свойства быть базисом при любой перестановке своих членов, называется базисом безусловной сходимости.*

**(1.10) Определение.** *Базис* $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ *называется базисом Рисса гильбертова пространства* $H$, *если существует такой ограниченный, обратимый оператор* $A$ *и такой ортонормированный базис* $\{\chi_j\}_{j=1}{}^{\infty}$ *в* $H$, *что* $A\chi_j = \varphi_j$ *для всех* $j = 1, 2, \ldots$.

Помимо общих обозначений (см. Введение), в этой главе используются некоторые дополнительные обозначения:

1) $\lambda = -(i\rho)^n$;

2) $S_k = \{\rho \in \mathbb{C} : \pi k/n \le \arg \rho \le \pi(k+1)/n\}$, $S$ есть некоторый угол $S_k$, $T(T_k)$ есть углы, получающиеся из $S(S_k)$ сдвигом на вектор $(-c)$;

3) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — различные корни $n$-ой степени из $-1$, занумерованные для $\rho \in T$ таким образом, что

$$\mathrm{Re}(\rho + c)\omega_1 \le \mathrm{Re}(\rho + c)\omega_2 \le \ldots \le \mathrm{Re}(\rho + c)\omega_n; \tag{1.11}$$

4) $\nu$ есть номер, для которого $\mathrm{Re}(\rho+c)\omega_\nu \le 0 \le \mathrm{Re}(\rho+c)\omega_{\nu+1}$ (очевидно, $\nu=\mu$ при $n=2\mu$ для всех $\rho\in T$ и $\nu=\mu-1$ или $\nu=\mu$ при $n=2\mu-1$ в зависимости от того, какой половине сектора $T$ принадлежит $\rho$);

5) $\rho_{js}=\rho(\omega_j-\omega_s)$, $\rho_j=\rho\omega_j$;

6) ${\omega_j}^{(k)}$ обозначает $\omega_j$ для области $T_k$;

7) матрицы обозначаются прописными буквами, их элементы и алгебраические дополнения — соответствующими строчными и прописными буквами, но с индексами;

8) $AC[0,1]$ — множество абсолютно непрерывных функций на отрезке $[0,1]$.

# §2. Асимптотика системы решений

Рассмотрим к.д. уравнение на отрезке [0,1]

$$y^{[n]}+(i\rho)^n y=0, \tag{2.1}$$

где

$$y^{[k]}=i\frac{d}{dx}y^{[k-1]}+\sum_{j=0}^{k-1}p_{kj}(x)y^{[j]},\ k=n,n-1,\dots,1,\quad y^{[0]}=y,$$

$p_{k,k-1}(x)\in L_r[0,1]$ $(1\le r\le\infty)$, $p_{kj}\in L_1[0,1]$, $j=\overline{0,k-2}$. Справедлива следующая теорема.

**(2.2) Теорема.** *Во всякой области $T$ уравнение (2.1) имеет $n$ линейно независимых решений $y_1(x,\rho),\dots,y_n(x,\rho)$, регулярных по $\rho\in T$, при $|\rho|$ достаточно большом и имеющих асимптотику*

$$y_k^{[m]}(x,\rho)=V(x)(i\rho\omega_k)^m e^{\rho\omega_k x}\big(1+O(\varphi(x,\rho))\big), \tag{2.3}$$

*где*

$$k = \overline{1, n},\ m = \overline{0, n-1}, \quad V(x) = \exp\left( \frac{i}{n} \int_0^x \sum_{j=1}^n p_{j,j-1}(\tau)\, d\tau \right),$$

$$\varphi(x, \rho) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{1 \le j < s \le n} \Big( |f_{js\alpha}(x, \rho)| + |g_{js\alpha}(x, \rho)| +$$

$$+ \|f_{js\alpha}(\cdot, \rho)\|_{r'} + \|g_{js\alpha}(\cdot, \rho)\|_{r'} \Big) + \frac{1}{|\rho|},$$

$$f_{js\alpha}(x, \rho) = \int\limits_0^x e^{\rho(\omega_j - \omega_s)(x-t)} p_{\alpha,\alpha-1}(t) dt, \tag{2.4}$$

$$g_{js\alpha}(x, \rho) = \int\limits_x^1 e^{\rho(\omega_j - \omega_s)(t-x)} p_{\alpha,\alpha-1}(t) dt. \tag{2.5}$$

*Доказательство.* Для доказательства теоремы преобразуем уравнение (2.1) к эквивалентному уравнению. Зафиксируем произвольное достаточно малое число $\varepsilon > 0$. Введем новые квазипроизводные $y^{|\underline{k}|}$ следующим образом

$$\begin{cases} y^{[0]} = & V y^{|\underline{0}|}, \\ y^{[k]} = & V \left( y^{|\underline{k}|} + \left( \sum_{j=1}^k P_{j,j-1} - \frac{k}{n} \sum_{j=1}^n P_{j,j-1} \right) y^{|\underline{k-1}|} \right),\ k = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $V(x)$ определена в формулировке теоремы, $P_{j,j-1}(x)$ — фиксированные функции из $AC[0, 1]$, для которых

$$\|p_{j,j-1} - P_{j,j-1}\|_r \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.7}$$

Так как $V \neq 0$, то уравнение (2.1) перейдет в уравнение

$$y^{|\underline{n}|} + (i\rho)^n y^{|\underline{0}|} = 0, \tag{2.8}$$

где в силу (2.6)

$$y^{|\underline{k}|} = i \frac{d}{dx} y^{|\underline{k-1}|} + \sum_{j=0}^{k-1} q_{kj} y^{|\underline{j}|}, \quad k = n, n-1, \ldots, 1, \tag{2.9}$$

$$q_{k,k-1} = (p_{k,k-1} - P_{k,k-1}) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (p_{j,j-1} - P_{j,j-1}), \tag{2.10}$$

то есть на основании (2.7)

$$\|q_{k,k-1}\|_r \le \varepsilon, \quad k = \overline{1,n}, \tag{2.11}$$

$$\sum_{k=1}^{n} q_{k,k-1} = 0, \tag{2.12}$$

а остальные коэффициенты в (2.9) зависят вполне определенным образом (явный их вид в дальнейшем не понадобится) от коэффициентов выражения $y^{[n]}$, от $P_{j,j-1}$ и $P'_{j,j-1}$.

Рассмотрим к.д. уравнение (2.8). Существенным отличием его от исходного уравнения (2.1) является то, что коэффициенты к.д. выражения $y^{[\underline{n}]}$ обладают свойствами (2.11) и (2.12). Обозначим $y^{[\underline{m}]} = z_m$ ($m = \overline{0, n-1}$), тогда уравнение (2.8) можно записать в виде системы

$$\begin{cases} i\frac{d}{dx} z_m - z_{m+1} + \sum\limits_{j=0}^{m} q_{m+1,j} z_j = 0, \quad m = \overline{0, n-2}, \\ i\frac{d}{dx} z_{n-1} + (i\rho)^n z_1 + \sum\limits_{j=0}^{n-1} q_{nj} z_j = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Рассмотриим сначала более простую систему

$$\begin{cases} i\frac{d}{dx} v_m - v_{m+1} = -q_{m+1,m} v_m, \quad m = \overline{0, n-2}, \\ i\frac{d}{dx} v_{n-1} + (i\rho)^n v_1 = -q_{n,n-1} v_{n-1}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Найдем фундаментальную матрицу решений системы (2.14) тем же методом, что и в книге [4, с. 55-62]. Фундаментальная матрица решений системы

$$\begin{cases} i\frac{d}{dx} v_m - v_{m+1} = 0, \quad m = \overline{0, n-2}, \\ i\frac{d}{dx} v_{n-1} + (i\rho)^n v_1 = 0 \end{cases}$$

очевидна и имеет вид $\left((i\rho\omega_k)^{m-1} e^{\rho\omega_k x}\right)_{m,k=1}^{n}$. Считая правую часть системы (2.14) известной и применяя к этой системе метод вариации произвольных постоянных, для нахождения $k$-го столбца фундаментальной матрицы решений системы (2.14) получим следующую систему интегральных уравнений

$$
\left\{
\begin{aligned}
v_{mk}(x,\rho) = \quad & (i\rho\omega_k)^m e^{\rho\omega_k x} - \int\limits_0^x \sum_{s=1}^{n} K_{msk}(x,t,\rho) q_{s,s-1}(t) v_{s-1,k}(t,\rho)\, dt + \\
& + \int\limits_x^1 \sum_{s=1}^{n} N_{msk}(x,t,\rho) q_{s,s-1}(t) v_{s-1,k}(t,\rho)\, dt, \quad m = \overline{0, n-1},
\end{aligned}
\right.
\tag{2.15}
$$

где

$$
K_{msk}(x,t,\rho) = \sum_{j=1}^{k} (i\rho\omega_j)^m e^{\rho\omega_j(x-t)} \frac{\Omega_{sj}}{(i\rho)^{s-1}\Omega},
$$

$$
N_{msk}(x,t,\rho) = \sum_{j=k+1}^{n} (i\rho\omega_j)^m e^{\rho\omega_{(}x-t)} \frac{\Omega_{sj}}{(i\rho)^{s-1}\Omega},
$$

$$
\Omega = \det \left(\omega_j^{s-1}\right)_{s,j=1}^{n}.
$$

Положим в (2.15)

$$
v_{mk}(x,\rho) = (i\rho\omega_k)^m e^{\rho\omega_k x} u_{mk}(x,\rho), \quad m = \overline{0, n-1}. \tag{2.16}
$$

Тогда в силу того, что

$$
\frac{\Omega_{s,j}}{\Omega} = -\frac{\omega_j^{n+1-s}}{n},
$$

для нахождения $u_{mk}(x,\rho)$ получим следующую систему

$$
\left\{ \; u_{mk}(x,\rho) = 1 + \int\limits_0^1 \sum_{s=1}^{n} A_{msk}(x,t,\rho) u_{s-1,k}(t,\rho) dt, \quad m = \overline{0, n-1}, \right. \tag{2.17}
$$

где

$$
A_{msk}(x,t,\rho) = \left\{
\begin{array}{ll}
-\frac{1}{in} \sum\limits_{j=1}^{k} \left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m} e^{\rho_{jk}(x-t)} q_{s,s-1}(t), & t \le x; \\
\frac{1}{in} \sum\limits_{j=k+1}^{n} \left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m} e^{\rho_{kj}(t-x)} q_{s,s-1}(t), & t > x.
\end{array}
\right.
$$

Из неравенств (1.11) и (2.11) следует, что $\|A_{msk}(x,\cdot,\rho)\|_r = O(\varepsilon)$. Таким образом, для достаточно малого числа $\varepsilon$ система (2.17) однозначно разрешима, ее решение $u_{mk}(x,\rho)$ $(m = \overline{0, n-1})$ образуют функции, непрерывные по $x \in [0,1]$ и регулярные по $\rho \in T$, причем справедлива асимптотика

$$u_{mk}(x,\rho) = 1 + O(\varepsilon), \quad m = \overline{0, n-1}. \tag{2.18}$$

Зафиксируем это $\varepsilon$. Уточним асимптотику (2.18), воспользовавшись свойством (2.12). Так как система (2.17) имеет решение, то соотношения (2.17) выполняются как тождества. Сделаем в (2.17) два раза последовательную подстановку. Получим тождества

$$u_{mk}(x,\rho) \equiv 1 - \frac{1}{in}\int_0^x \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^k \left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m} e^{\rho_{jk}(x-t)} q_{s,s-1}(t)\Bigg(1-$$

$$-\frac{1}{in}\int_0^t \sum_{\alpha=1}^n\sum_{\beta=1}^k \left(\frac{\omega_k}{\omega_\beta}\right)^{\alpha-s} e^{\rho_{\beta k}(t-\tau)} q_{\alpha,\alpha-1}(\tau)\Bigg(1-\frac{1}{in}\int_o^\tau \sum_{\gamma=1}^n\sum_{\delta=1}^k \left(\frac{\omega_k}{\omega_\delta}\right)^{\gamma-\alpha}\times$$

$$\times e^{\rho_{\delta k}(\tau-\tau_1)} q_{\gamma,\gamma-1}(\tau_1)\int_0^1 B_{\gamma k}(\tau_1,\tau_2,\rho)\,d\tau_2\,d\tau_1 + \frac{1}{in}\int_\tau^1 \sum_{\gamma=1}^n\sum_{\delta=k+1}^n \left(\frac{\omega_k}{\omega_\delta}\right)^{\gamma-\alpha}\times$$

$$\times e^{\rho_{k\delta}(\tau_1-\tau)} q_{\gamma,\gamma-1}(\tau_1)\int_0^1 B_{\gamma k}(\tau_1,\tau_2,\rho)\,d\tau_2\,d\tau_1\Bigg)d\tau + \frac{1}{in}\int_t^1 \sum_{\alpha=1}^n\sum_{\beta=k+1}^n \left(\frac{\omega_k}{\omega_\beta}\right)^{\alpha-s}\times$$

$$\times e^{\rho_{k\beta}(\tau-t)} q_{\alpha,\alpha-1}(\tau)\Bigg(1-\frac{1}{in}\int_0^\tau \sum_{\gamma=1}^n\sum_{\delta=1}^k \left(\frac{\omega_k}{\omega_\delta}\right) e^{\rho_{\delta k}(\tau-\tau_1)} q_{\gamma,\gamma-1}(\tau_1)\times$$

$$\times\int_0^1 B_{\gamma k}(\tau_1,\tau_2,\rho)\,d\tau_2\,d\tau_1 + \frac{1}{in}\int_\tau^1 \sum_{\gamma=1}^n\sum_{\delta=k+1}^n \left(\frac{\omega_k}{\omega_\delta}\right)^{\gamma-\alpha} e^{\rho_{k\delta}(\tau_1-\tau)} q_{\gamma,\gamma-1}(\tau_1)\times$$

$$\times\int_0^1 B_{\gamma k}(\tau_1,\tau_2,\rho)\,d\tau_2\,d\tau_1\Bigg)d\tau\Bigg)dt + \frac{1}{in}\int_x^1 \sum_{s=1}^n\sum_{j=k+1}^n \left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m}\times$$

$$\times e^{\rho_{kj}(t-x)} q_{s,s-1}(t)\Bigg(1-\frac{1}{in}\int_0^t \sum_{\alpha=1}^n\sum_{\beta=1}^k \left(\frac{\omega_k}{\omega_\beta}\right)^{\alpha-s} e^{\rho_{\beta k}(t-\tau)} q_{\alpha,\alpha-1}(\tau)\times$$

$$\times\Bigg(1-\frac{1}{in}\int_0^\tau \sum_{\gamma=1}^n\sum_{\delta=1}^k \left(\frac{\omega_k}{\omega_\delta}\right)^{\gamma-\alpha} e^{\rho_{\delta k}(\tau-\tau_1)} q_{\gamma,\gamma-1}(\tau_1)\int_0^1 B_{\gamma k}(\tau_1,\tau_2,\rho)\,d\tau_2\,d\tau_1+$$

$$+\frac{1}{in}\int\limits_{\tau}^{1}\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\delta=k+1}^{n}\left(\frac{\omega_k}{\omega_\delta}\right)^{\gamma-\alpha} e^{\rho_{k\delta}(\tau_1-\tau)}q_{\gamma,\gamma-1}(\tau_1)\int\limits_{0}^{1}B_{\gamma k}(\tau_1,\tau_2,\rho)d\tau_2 d\tau_1\Bigg)d\tau+$$

$$+\frac{1}{in}\int\limits_{t}^{1}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=k+1}^{n}\left(\frac{\omega_k}{\omega_\beta}\right)^{\alpha-s} e^{\rho_{k\beta}(\tau-t)}q_{\alpha,\alpha-1}(\tau)\Bigg(1-\frac{1}{in}\int\limits_{0}^{\tau}\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\delta=1}^{k}\left(\frac{\omega_k}{\omega_\delta}\right)^{\gamma-\alpha}\times$$

$$\times e^{\rho_{\delta k}(\tau-\tau_1)}q_{\gamma,\gamma-1}(\tau_1)\int\limits_{0}^{1}B_{\gamma k}(\tau_1,\tau_2,\rho)\,d\tau_2\,d\tau_1+\frac{1}{in}\int\limits_{\tau}^{1}\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\delta=k+1}^{n}\left(\frac{\omega_k}{\omega_\delta}\right)^{\gamma-\alpha}\times$$

$$\times e^{\rho_{k\delta}(\tau_1-\tau)}q_{\gamma,\gamma-1}(\tau_1)\int\limits_{0}^{1}B_{\gamma k}(\tau_1,\tau_2,\rho)\,d\tau_2\,d\tau_1\Bigg)d\tau\Bigg)dt,\quad m=\overline{0,n-1},\quad (2.19)$$

где

$$B_{\gamma k}(x,t,\rho)=1+\sum_{\tilde\alpha=1}^{n}A_{\gamma-1,\tilde\alpha,k}(x,t,\rho)u_{\tilde\alpha-1,k}(t,\rho),\quad \gamma=\overline{1,n}.$$

В силу (2.12) в правой части тождества (2.19) отсутствуют слагаемые, у которых или $\delta=\beta$, или $\beta=j$, и слагаемые, включающие интегрирование только по $t$ при $j=k$ или только по $t$ и $\tau$ при $\beta=k$. Оценим оставшиеся слагаемые.

1. Рассмотрим слагаемые

$$I_{1mk}(x,\rho)=\frac{1}{in}\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m}\int\limits_{0}^{x}e^{\rho_{jk}(x-t)}q_{s,s-1}(t)dt.$$

Подставив в $I_{1mk}(x,\rho)$ выражение для $q_{s,s-1}(t)$ из (2.10), проинтегрировав по частям слагаемые, которые содержат $P_{l,l-1}$, получим оценку

$$I_{1mk}(x,\rho)=O\left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|f_{jkl}(x,\rho)|\right)+O\left(\frac{1}{|\rho|}\right),$$

где $f_{jkl}(x,\rho)$ определяются формулой (2.4).

2. Рассмотрим слагаемые

$$I_{2mk}(x,\rho)=\frac{1}{(in)^2}\sum_{s,\alpha=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq j}}^{k-1}\left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m}\left(\frac{\omega_k}{\omega_\beta}\right)^{\alpha-s}\times$$

$$\times \int\limits_0^x e^{\rho_{jk}(x-t)} q_{s,s-1}(t) \int\limits_0^t e^{\rho_{\beta k}(t-\tau)} q_{\alpha,\alpha-1}(\tau) d\tau dt.$$

Рассуждая так же, как и в пункте 1, получим оценку

$$I_{2mk}(x,\rho) = O\left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{k-1} \|f_{\beta kl}(\cdot,\rho)\|_{r'}\right) + O\left(\frac{1}{|\rho|}\right).$$

3. Рассмотрим слагаемые

$$I_{3mk}(x,\rho) = \frac{1}{(in)^3} \sum_{s,\alpha,\gamma=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq j}}^{k} \sum_{\substack{\delta=1 \\ \delta\neq\beta}}^{k} \left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m} \left(\frac{\omega_k}{\omega_\beta}\right)^{\alpha-s} \left(\frac{\omega_k}{\omega_\delta}\right)^{\gamma-\alpha} \times$$

$$\times \int\limits_0^x e^{\rho_{jk}(x-t)} q_{s,s-1}(t) \int\limits_0^t e^{\rho_{\beta k}(\tau-t)} q_{\alpha,\alpha-1}(\tau) \int\limits_0^\tau e^{\rho_{\delta k}(\tau-\tau_1)} q_{\gamma,\gamma-1}(\tau_1) \times$$

$$\times \int\limits_0^1 B_{\gamma k}(\tau_1,\tau_2,\rho) d\tau_2 d\tau_1 d\tau dt.$$

Очевидно,

$$\sum_{s=1}^{n} \int\limits_0^x e^{\rho_{jk}(x-t)} q_{s,s-1}(t) \int\limits_0^t e^{\rho_{\beta k}(t-\tau)} q_{\alpha,\alpha-1}(\tau) \int\limits_0^\tau e^{\rho_{\delta k}(\tau-\tau_1)} q_{\gamma,\gamma-1}(\tau_1) \times$$

$$\times \int\limits_0^1 B_{\gamma k}(\tau_1,\tau_2,\rho) d\tau_2 d\tau_1 d\tau dt = \sum_{s=1}^{n} \int\limits_0^x q_{\alpha,\alpha-1}(\tau) \int\limits_0^\tau e^{\rho_{\delta k}(\tau-\tau_1)} q_{\gamma,\gamma-1}(\tau_1) \times$$

$$\times \int\limits_0^1 B_{\gamma k}(\tau_1,\tau_2,\rho) d\tau_2 d\tau_1 \left( \int\limits_\tau^x e^{\rho_{jk}(x-t)+\rho_{\beta k}(t-\tau)} q_{s,s-1}(t) dt \right) d\tau =$$

$$= O\left(a_{j\beta k}(x,\rho)\right),$$

где

$$a_{j\beta k}(x,\rho) = \sum_{s=1}^{n} \left( \int\limits_0^x \left| \int\limits_\tau^x e^{\rho_{jk}(x-t)+\rho_{\beta k}(t-\tau)} q_{s,s-1}(t) dt \right|^{r'} d\tau \right)^{\frac{1}{r'}}.$$

Рассмотрим случай $j<\beta$. Имеем

$$\rho_{jk}(x-t)+\rho_{\beta k}(t-\tau)=\rho_{\beta k}(x-\tau)+\rho_{j\beta}(x-t).$$

Следовательно,

$$a_{j\beta k}(x,\rho)=O\left(\sum_{s=1}^{n}\left(\int\limits_0^x\left|\int\limits_\tau^x e^{\rho_{j\beta}(x-t)}q_{s,s-1}(t)dt\right|^{r'}d\tau\right)^{\frac{1}{r'}}\right)=$$

$$=O\left(\sum_{l=1}^{n}|f_{j\beta l}(x,\rho)|\right)+O\left(\frac{1}{|\rho|}\right)+O\left(\sum_{s=1}^{n}\left(\int\limits_0^x\left|e^{\rho_{j\beta}(x-\tau)}\int\limits_0^\tau e^{\rho_{j\beta}(\tau-t)}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times q_{s,s-1}(t)dt\right|^{r'}d\tau\right)^{\frac{1}{r'}}\right)=O\left(\sum_{l=1}^{n}\Big(|f_{j\beta l}(x,\rho)|+\|f_{j\beta l}(\cdot,\rho)\|_{r'}\Big)+\frac{1}{|\rho|}\right).$$

Случай $j>\beta$ рассматривается аналогично, но оценки будут включать функции $g_{\beta jl}(x,\rho)$, определенные формулой (2.5). Следовательно,

$$I_{3mk}(x,\rho)=O\left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{1\le j<\beta\le n}\Big(|f_{j\beta l}(x,\rho)|+|g_{j\beta l}(x,\rho)|+\right.$$

$$\left.+\|f_{j\beta l}(\cdot,\rho)\|_{r'}+\|g_{j\beta l}(\cdot,\rho)\|_{r'}\Big)+\frac{1}{|\rho|}\right).$$

Остальные слагаемые в правой части тождества (2.19) оцениваются аналогично.

Следовательно,

$$u_{mk}(x,\rho)=1+O\big(\varphi(x,\rho)\big),\quad m=\overline{0,n-1},\quad k=\overline{1,n}.$$

Вспомнив замену (2.16), для компонент фундаментальной матрицы решений системы (2.14) получим асимптотику

$$v_{mk}(x,\rho)=(i\rho\omega_k)^m e^{\rho_k x}\Big(1+O\big(\varphi(x,\rho)\big)\Big),\ m=\overline{0,n-1},\ k=\overline{1,n}. \quad (2.20)$$

Найдем теперь асимптотику фундаментальной матрицы решений системы (2.13). Представим эту систему в виде

$$\begin{cases} i\frac{d}{dx}z_m-z_{m+1}+q_{m+1,m}z_m=F_m, \quad m=\overline{0,n-2},\\ i\frac{d}{dx}z_{n-1}+(i\rho)^n z_1+q_{n,n-1}z_n-1=F_{n-1}, \end{cases} \quad (2.21)$$

где $F_m = -\sum\limits_{j=0}^{m-1} q_{m+1,j} z_j$. Если $F_j = 0$ при $j = \overline{0, n-1}$, то фундаментальная матрица решений такой системы имеет асимптотику (2.20). Проведя далее те же рассуждения, что и в [4, с. 55–62], получим для компонент фундаментальной матрицы решений системы (2.21) ( а значит и системы (2.13) ) асимптотику при $|\rho| \to \infty$ вида

$$z_{mk}(x,\rho) = (i\rho\omega_k)^m e^{\rho\omega_k x}\Big(1 + O\big(\varphi(x,\rho)\big)\Big).$$

Последовательно возвращаясь от системы (2.13) к уравнению (2.8), а затем от него при помощи формул (2.6) к уравнению (2.1), получим утверждение теоремы (2.2). Таким образом теорема (2.2) доказана. $\square$

## §3. Асиптотика собственных значений

Рассмотрим линейный к.д. оператор $L$, определенный в §1 к.д. выражением (1.1) и краевыми условиями (1.2). На основании теоремы (2.2) среди всевозможных краевых условий вида (1.2) выделим класс регулярных краевых условий. Рассмотрим фиксированную область $S$, для которой справедливы неравенства (1.11).

**(3.1) Определение.** *Нормированные краевые условия (1.2) называются регулярными относительно к.д. выражения (1.1), если отличны от нуля числа:*

*а) $\eta_0$ и $\eta_1$ при $n = 2\mu - 1$, где*

$$\eta_0 + s\eta_1 = \det\big(a_{lj}\big)_{l,j=1}^{n}, \tag{3.2}$$

$a_{lj} = \alpha_l \omega_j^{k_l}$ *при* $j = \overline{1, \mu-1}$, $a_{l\mu} = \big(\alpha_l + sV(1)\beta_l\big)\omega_\mu^{k_l}$, $a_{lj} = \beta_l \omega_j^{k_l}$ *при* $j = \overline{\mu+1, n}$;

*б) $\eta_1$ и $\eta_{-1}$ при $n = 2\mu$ , где*

$$\eta_{-1}s^{-1} + \eta_0 + \eta_1 s = \det\big(b_{lj}\big)_{l,j=1}^{n}, \tag{3.3}$$

$b_{lj} = \alpha_l \omega_j^{k_l}$ *при* $j = \overline{1, \mu-1}$, $b_{l\mu} = \big(\alpha_l + sV(1)\beta_l\big)\omega_\mu^{k_l}$, $b_{l,\mu+1} = \big(\alpha_l + 1/sV(1)\beta_l\big)\omega_{\mu+1}^{k_l}$, $b_{lj} = \beta_l \omega_j^{k_l}$ *при* $j = \overline{\mu+2, n}$.

Определение (3.1) отличается от традиционного [4, с. 67–67] лишь наличием при $s$ и $1/s$ дополнительного множителя $V(1)$ и, таким образом, не зависит от выбора области $S$, при помощи которой были занумерованы числа $\omega_k$ (см. [4, с. 67–69]). Более того, так как $V(1) \neq 0$, то эти определения выделяют один и тот же класс краевых условий. Поэтому, будем называть регулярными краевые условия относительно некоторого к.д. выражения просто регулярными краевыми условиями. В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, обобщающая лемму Г.М.Кесельмана [22, с. 89–90]) (другое доказательство можно найти в [29, с. 420–422]).

**(3.4) Лемма.** *Если* $f \in L_2[0,1]$ *и*

$$a_{m\alpha}(f) = \max_{r \in A_m} \left| \int_0^1 f(t) e^{r\alpha t}\, dt \right|,$$

*где* $\operatorname{Re}\alpha \leq 0$, $\alpha \neq 0$, $A_m = \{r \in \mathbb{C} : |r - 2\pi m - b| \leq M\}$, $b \in \mathbb{C}$, $m = 1, 2, \ldots$, $M < \ln 2/|\alpha|$, *то*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{m\alpha}^2(f) \leq C(|\alpha|, |b|) \|f\|_2^2. \tag{3.5}$$

*Доказательство.* Воспользуемся методом из [29, с. 420–422]. Пусть

$$\max_{r \in A_m} \left| \int_0^1 f(t) e^{r\alpha t}\, dt \right| = \left| \int_0^1 f(t) e^{r_m \alpha t}\, dt \right|, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\operatorname{Re}\alpha = 0$. Обозначим $\alpha = i\beta$, тогда

$$a_{m\alpha}(f) \leq \left| \int_0^{1/|\beta|} f(t) e^{i r_m \beta t}\, dt \right| + \cdots + \left| \int_{E(|\beta|)/|\beta|}^1 f(t) e^{i r_m \beta t}\, dt \right| =$$

$$= b_{om}(f) + \cdots + b_{E(|\beta|),m}(f).$$

Лемма будет доказана, если мы докажем неравенство (3.5) для каждого слагаемого $b_{jm}(f)$. Рассмотрим $b_{om}(f)$, так как для остальных слагаемых рассуждения аналогичны. Очевидно

$$b_{om}(f)=\Big|\int\limits_0^{1/|\beta|}\Big(f(t)e^{ib\beta t}\Big)e^{i(r_m-b)\beta t}\,dt\Big|=\Big|\int\limits_0^{1/|\beta|}f_1(t)e^{i(r_m-b)\beta t}\,dt\Big|. \qquad (3.6)$$

Рассмотрим две системы функций

$$g_m(x)=\sqrt{|\beta|}e^{i(r_m-b)\beta x}\quad (m=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

$$h_m(x)=\sqrt{|\beta|}e^{i2\pi m\beta x}\quad (m=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

где, например, $r_m=b+2\pi m$ при $m=0,-1,-2,\ldots$. Функция $h_m(x)$ образует полную ортогональную систему на $[0,1/|\beta|]$.

Так как

$$g_m(x)-h_m(x)=h_m(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\big(i(r_m-b-2\pi m)\big)^k\beta^k}{k!}x^k$$

и по условию $|r_m-b-2\pi m|\le M$, то легко видеть, что для любой конечной системы комплексных чисел $\{s_m\}$

$$\Big\|\sum_m s_m(g_m-h_m)\Big\|_{L_2[0,1/|\beta|]}\le\big(e^{M|\alpha|}-1\big)\left(\sum_m|s_m|^2\right)^{\frac12}.$$

Так как $M<\ln 2/|\alpha|$, то $e^{M|\alpha|}-1<1$. Следовательно, к системе $\big\{g_m(x)\big\}$ можно применить теорему Пэли-Винера [44, с. 255], в силу которой

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\big|(f_1,g_m)\big|^2\le e^{2M|\alpha|}\|f_1\|_{L_2[0,1/|\beta|]}. \qquad (3.7)$$

Учитывая (3.6) и (3.7), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty}b_{om}^2(f)\le 4e^{|b||\alpha|}\|f\|_2^2,$$

а это и требовалось установить.

2. Пусть $\operatorname{Re}\alpha < 0$. Обозначим $\alpha = -\beta + i\beta_1$, $r_m = r_{1m} + ir_{2m}$, где $\beta > 0$. Тогда

$$a_{m\alpha}(f) \le \int\limits_0^1 |f(t)| e^{(-\beta r_{1m} - \beta_1 r_{2m})t}\, dt.$$

Отсюда, в силу того, что по условию $r_{1m} \ge 2\pi m - |b| - |M|$ и $|r_{2m}| \le M + |b|$, следует

$$a_{m\alpha}(f) \le e^{2|\alpha|(M+|b|)} \int\limits_0^1 |f(t)| e^{-2\pi\beta m t}\, dt. \tag{3.8}$$

Полагая $f(t) = 0$ при $t > 1$, делая замену $s = 2\pi\beta t$ и обозначая $f_2(t) = \frac{1}{2\pi\beta} f\left(\frac{t}{2\pi\beta}\right)$, получим для интеграла в правой части (3.8) представление

$$b_m(|f_2|) = \int\limits_0^\infty e^{-mt} |f_2(t)|\, dt. \tag{3.9}$$

Проводя далее дословно рассуждения [29, с. 421–422], получим с учетом (3.8)–(3.9) утверждение доказываемой леммы в данном случае. Таким образом, лемма (3.4) полностью доказана. $\square$

Обозначим при $n = 2\mu - 1$ через $\zeta^{(1)}$ и $\zeta^{(0)}$ корни уравнения $\eta_1\zeta + \eta_0 = 0$, отвечающего области $S_m$ с $m$ соответственно нечетным и четным, при $n = 2\mu$ через $\zeta'$ и $\zeta''$ корни уравнения $\eta_1\zeta^2 + \eta_0\zeta + \eta_{-1} = 0$, отвечающего области $S_0$, в случае $\eta_0^2 - 4\eta_1\eta_{-1} \ne 0$, в противном случае через $\zeta$ обозначим двойной корень этого уравнения. Введем следующую функцию от натурального аргумента

$$\Psi_s^{(k)}(m, \xi) = \max_{\rho \in B_s^{(k)}(m,\xi)} \big(\varphi(0, \rho) + \varphi(1, \rho)\big), \tag{3.10}$$

где

$$B_s^{(k)}(m, \xi) = \left\{ \rho \in \mathbb{C} : \ \left| \frac{1}{\omega_\mu^{(k)}} \big((-1)^s 2\pi m i + \ln_0 \xi\big) - \rho \right| \le \delta_0 \right\},$$

$k$ есть одно из чисел $\overline{0, 2n-1}$, $s \in \mathbb{Z}$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\delta_0 > 0$ достаточно мало и фиксировано, а $\ln_0 \xi$ обозначает какое-нибудь фиксированное значение логарифма. Справедлива следующая теорема.

**(3.11) Теорема.** *С.з. оператора $L$, порожденного регулярными краевыми условиями, образуют две бесконечные последовательности $\lambda'_k = -(i\rho'_k)^n$ и $\lambda''_k = -(i\rho''_k)^n$, где $k = N, N+1, \dots$ $(N \in \mathbb{Z})$ и для $\rho'_k$ и $\rho''_k$ справедливы следующие асимптотики:*

*1) при нечетном $n$, $n = 2\mu - 1$, вида*

$$\rho'_k = \frac{1}{\omega_\mu^{(1)}}\big((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0 \zeta^{(1)} + h_{1k}\big), \tag{3.12}$$

$$\rho''_k = \frac{1}{\omega_\mu^{(0)}}\big((-1)^{\mu}2k\pi i + \ln_0 \zeta^{(0)} + h_{2k}\big), \tag{3.13}$$

*где $h_{1k} = O\big(\Psi^{(1)}_{\mu+1}(k, \zeta^{(1)})\big)$, $h_{2k} = O\big(\Psi^{(0)}_{\mu}(k, \zeta^{(0)})\big)$;*

*2) при четном $n$, $n = 2\mu$, и $\eta_0^2 - 4\eta_1\eta_{-1} \neq 0$ вида*

$$\rho'_k = \frac{1}{\omega_\mu^{(0)}}\big((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0 \zeta' + h_{3k}\big),$$

$$\rho''_k = \frac{1}{\omega_\mu^{(0)}}\big((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0 \zeta'' + h_{4k}\big),$$

*где $h_{3k} = O\big(\Psi^{(0)}_{\mu+1}(k, \zeta')\big)$, $h_{4k} = O\big(\Psi^{(0)}_{\mu+1}(k, \zeta'')\big)$;*

*3) при четном $n$, $n = 2\mu$, и $\eta_0^2 - 4\eta_1\eta_{-1} = 0$ вида*

$$\rho'_k = \frac{1}{\omega_\mu^{(0)}}\big((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0 \zeta + h_{5k}\big),$$

$$\rho''_k = \frac{1}{\omega_\mu^{(0)}}\big((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0 \zeta + h_{6k}\big),$$

*где $h_{5k}$ и $h_{6k}$ имеют оценку $O\Big(\big(\Psi^{(0)}_{\mu+1}(k, \zeta)\big)^{\frac{1}{2}}\Big)$.*

*В первых двух случаях все с.з., начиная с некоторого, простые, а в третьем, начиная с некоторого, простые или двукратные. Если дополнительно потребовать, чтобы $p_{k,k-1} \in L_2[0,1]$, $k = \overline{1,n}$, то*

$$\sum_{s=N}^{\infty} |h_{js}|^2 \le C_j \sum_{k=1}^{n} \|p_{k,k-1}\|_2^2, \quad j = \overline{1,4}. \tag{3.14}$$

*Доказательство.* Воспользуемся методом, которым доказывалась аналогичная теорема для обыкновенных дифференциальных операторов (см. [4, с. 74–83]). Для того, чтобы проиллюстрировать применение этого метода в данном случае, достаточно рассмотреть, например, $n = 2\mu - 1$.

Рассмотрим фиксированную область $T_0$, для которой выполняются неравенства (1.11). При помощи системы решений уравнения $y^{[n]} - \lambda y = 0$, полученной в теореме (2.2), составим определитель

$$\Delta(\lambda) = \det\big(U_m(Y_j)\big)_{m,j=1}^{n},$$

где $Y_j = \big(y_j^{[0]}(x,\rho), \dots, y_j^{[n-1]}(x,\rho)\big)$. Как известно (см. [4, с. 26]) с.з. $L$ являются нулями этого определителя.

Введем обозначение $\{a\} = a + O\big((\varphi(0,\rho) + \varphi(1,\rho))\big)$. Подставляя выражения (2.3) в нормированные формы $U_m(Y)$ и учитывая, что функция $e^{\rho\omega_j} = e^{-c\omega_j}e^{(\rho+c)\omega_j}$ экспоненциально убывает при $j < \mu$, $|\rho| \to \infty$, $\rho \in T_0$, а функция $e^{\rho\omega_j}$ при $j > \mu$ и $|\rho| \to \infty$, $\rho \in T_0$, экспоненциально возрастает, получим, что

$$U_m(Y_j) = (i\rho\omega_j)^{k_m}\{\alpha_m\} \text{ при } j < \mu,$$

$$U_m(Y_\mu) = (i\rho\omega_\mu)^{k_m}\big(\{\alpha_m\} + e^{\rho_\mu}V(1)\{\beta_m\}\big),$$

$$U_m(Y_j) = (i\rho\omega_j)^{k_m}e^{\rho_j}V(1)\{\beta_m\} \text{ при } j > \mu.$$

Подставим все эти выражения в уравнение

$$\Delta(\lambda) = \det\big(U_m(Y_j)\big)_{m,j=1}^{n} = 0$$

и сократим на общие множители $(i\rho)^{k_1}, (i\rho)^{k_2}, \dots, (i\rho)^{k_n}$ строк и $e^{\rho_{\mu+1}}V(1), e^{\rho_{\mu+2}}V(1), \dots, e^{\rho_n}V(1)$ последних столбцов определителя $\Delta(\lambda)$. Тогда это уравнение запишется в виде $\Delta_0(\rho) = 0$, где

$$\Delta_0(\rho) = \det\big(A_{lj}(\rho)\big)_{l,j=1}^{n}, \qquad (3.15)$$

причем $A_{lj}(\rho) = \{\alpha_l\}\omega_j^{k_l}$ при $j = \overline{1, \mu-1}$, $A_{l\mu}(\rho) = \big(\{\alpha_l\} + e^{\rho_\mu}V(1)\{\beta_l\}\big)\omega_\mu^{k_l}$, $A_{lj}(\rho) = \{\beta_l\}\omega_j^{k_l}$ при $j = \overline{\mu+1, n}$.

Согласно определению чисел $\eta_0$ и $\eta_1$ (определение (3.1)) из (3.15) следует, что

$$\Delta_0(\rho) = \{\eta_0\} + e^{\rho\omega_\mu^{(0)}}\{\eta_1\}. \tag{3.16}$$

Если $\rho$ есть корень уравнения $\Delta_0(\rho) = 0$, то из (3.16) получим

$$\rho = \frac{1}{\omega_\mu^{(0)}}\Big((-1)^\mu 2k\pi i + \ln_0 \zeta^{(0)} + O\big((\varphi(0,\rho) + \varphi(1,\rho))\big)\Big), \tag{3.17}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Точно так же, как и в [4, с. 77–79], можно показать, что действительно существуют нули функции $\Delta_0(\lambda)$, определяемые формулой (3.17). Обозначая их через $\rho_k''$, в силу (3.17) получим

$$\rho_k'' = \frac{1}{\omega_\mu^{(0)}}\big((-1)^\mu 2k\pi i + \ln_0 \zeta^{(0)} + h_{2k}\big), \tag{3.18}$$

где

$$h_{2k} = O\big((\varphi(0,\rho_k'') + \varphi(1,\rho_k'))\big). \tag{3.19}$$

Так как $\varphi(0,\rho) + \varphi(1,\rho) = o(1)$ при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in T_0$, то, начиная с некоторого $k$, будем иметь $|h_{2k}| \le \delta_0$. Следовательно, из (3.10) следует, что $h_{2k} = O\big(\Psi_\mu^{(0)}(k, \zeta^{(0)})\big)$, то есть асимптотика (3.13) доказана.

Предположим теперь, что $p_{k,k-1} \in L_2[0,1]$, $k = \overline{1,n}$. Покажем, что в этом случае

$$\sum_{s=N}^{\infty} |h_{2s}|^2 \le C \sum_{k=1}^{n} \|p_{k,k-1}\|_2^2. \tag{3.20}$$

Не нарушая общности, можно считать $N = 1$. В силу (3.18)–(3.20) и определения $\varphi(x,\rho)$ (см. теорему (2.2)) для доказательства (3.20) достаточно показать сходимость рядов вида

$$A_{jsl} = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^1 e^{\rho_k''(\omega_j - \omega_s)t} p_{l,l-1}(t)\, dt \right|^2,$$

$$B_{jsl} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \left| \int_x^1 e^{\rho_k''(\omega_j - \omega_s)(t-x)} p_{l,l-1}(t)\, dt \right|^2 dx,$$

где $1 \le j < s \le n$, $l = \overline{1,n}$ или аналогичных им рядов.

Рассмотрим сначала ряд $B_{jsl}$. Так как по теореме Б. Леви

$$B_{jsl} = \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int\limits_x^1 e^{\rho_k''(\omega_j-\omega_s)(t-x)} p_{l,l-1}(t) dt \right|^2 dx, \tag{3.21}$$

то изучим ряд, стоящий под знаком интеграла. Легко видеть, что

$$\int\limits_x^1 e^{\rho_k''(\omega_j-\omega_s)(t-x)} p_{l,l-1}(t)\, dt = \int\limits_0^1 e^{\rho_k''(\omega_j-\omega_s)t} g_{lx}(t)\, dt, \tag{3.22}$$

где $g_{lx}(t)$ есть $p_{l,l-1}(t+x)$ при $0 \le t \le 1-x$ и ноль при остальных $t$. Справедливо неравенство

$$\|g_{lx}(\cdot)\|_2 \le \|p_{l,l-1}\|_2. \tag{3.23}$$

Обозначим, далее,

$$\rho_k''(\omega_j - \omega_s) = \alpha_{js}(2k\pi + b + \tilde{h}_{2k}),$$

где $\alpha_{js} = (-1)^\mu i(\omega_j - \omega_s)/\omega_\mu$, $b = (-1)^{\mu+1} i \ln_0 \zeta^{(0)}$. Очевидно, $\operatorname{Re}\alpha_{js} \le 0$, $|\alpha_{js}| \le 2$, $|\tilde{h}_{2k}| \le M < \ln 2/2 \le \ln 2/|\alpha_{js}|$ при всех $k$, начиная с некоторого. Тогда в силу леммы (3.4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int\limits_0^1 e^{\rho_k''(\omega_j-\omega_s)t} g_{lx}(t)\, dt \right|^2 \le C\big(|\alpha_{js}|, |\ln_0 \zeta^{(0)}|\big) \|g_{lx}(\cdot)\|_2^2. \tag{3.24}$$

Из (3.21)–(3.24) следует сходимость рядов $B_{jsl}$.

Так как $g_{l0}(t) = p_{l,l-1}(t)$, то из (3.24) следует и сходимость рядов $A_{jsl}$. Следовательно, свойство (3.20) установлено.

Теорема (3.11) доказана. □

# §4. Теорема о разложении

Рассмотрим к.д. оператор $L$, определенный в §1 формулами (1.1)–(1.2) с регулярными краевыми условиями и $p_{kj} \in L_1[0,1]$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,k-1}$.

Будем считать, что $\rho \in \hat{S}$, где $\hat{S} = S_0 \bigcup S_1$ при $n = 4q-1, 4q+1, 4q$ и $\hat{S} = S_0 \bigcup S_{2n-1}$ при $n = 4q+2$. Обозначим через $\hat{S}(d)$ область, получающуюся из угла изменения $\rho$ удалением всех $\rho_k'$ и $\rho_k''$ (теорема (3.11)) вместе с круговыми окрестностями радиуса $d > 0$ ($d$ одно и то же для всех $k$ и достаточно мало).

Введём следующие квазипроизводные, тесно связанные с квазипроизводными из выражения (1.3)

$$\bar{D}_k^* y = y^{\overline{\{k\}}} = -i\frac{d}{dx} y^{\overline{\{k-1\}}} + \sum_{j=0}^{k-1} \bar{r}_{kj} y^{\overline{\{j\}}},\ k = n, n-1, \ldots, 1, \quad \bar{D}_0^* y = y^{\overline{\{0\}}} = y.$$

Пусть $R(\lambda) = (L - \lambda E)^{-1}$ есть резольвента оператора $L$. При $\rho \in \hat{S}(d)$ резольвента является ограниченным интегральным оператором, отображающим пространство $L_1[0,1]$ на $D_L$. Её ядро, которое называют функцией Грина (см. [4, с. 38–39]), обозначим через $G(x,t,\lambda)$. Для $G(x,t,\lambda)$ справедлива формула, аналогичная формуле (34) в [4, с. 47]:

$$G(x,t,\lambda) = (-1)^n H(x,t,\lambda)/\Delta(\lambda), \tag{4.1}$$

где

$$H(x,t,\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) & g(x,t) \\ U_1(Y_1) & \ldots & U_1(Y_n) & U_{1,x}(J) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(Y_1) & \ldots & U_n(Y_n) & U_{n,x}(J) \end{vmatrix}, \tag{4.2}$$

$$g(x,t) = (-1)^{\chi(t-x)} W_1(x,t)/(2iW(t)), \tag{4.3}$$

$$\Delta(\lambda) = \det\big(U_m(Y_l)\big)_{m,l=1}^n, \quad W(t) = \det\big(y_l^{[n-m]}\big)_{m,l=1}^n,$$

$W_1(x,t)$ есть определитель, получающийся из $W(t)$ заменой первой строки строкой $\big(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\big)$, $Y_l = \big(y_l^{[0]}(x), \ldots, y_l^{[n-1]}(x)\big)$, $\{y_l(x)\}_{l=1}^n$ есть фундаментальная система решений уравнения $y^{[n]} - \lambda y = 0$, $J(x,t) = \big(D_{0,x} g(x,t), \ldots, D_{n-1,x} g(x,t)\big)$, индекс $x$ у линейных форм $U_m$ и у квазипроизводных $D_j$ означает, что они применяются по переменной $x$.

Обозначим для краткости

$$B(x,t,\rho)=\begin{cases} -\frac{1}{in(i\rho)^{n-1}}\sum\limits_{s=1}^{\nu}\omega_s e^{\rho\omega_s(x-t)}, & x\geq t;\\ \frac{1}{in(i\rho)^{n-1}}\sum\limits_{s=\nu+1}^{n}\omega_s e^{\rho\omega_s(x-t)}, & x<t;\end{cases} \tag{4.4}$$

$$\Phi(\rho)=\|\varphi(\cdot,\rho)\|_\infty,\quad [a]=a+O\big(\Phi(\rho)\big).$$

**(4.5) Лемма.** *Если $G(x,t,\lambda)$ есть функция Грина к.д. оператора $L$ с регулярными краевыми условиями и $\rho\in\hat{S}(d)$, то*

*1) в каждом из отрезков $[0,x]$ и $[x,1]$ функция $G_{t^s}^{\overline{\{s\}}}(x,t,\lambda)$ ($s=\overline{0,n-1}$) непрерывно-дифференцируема по $t$ и*

$$G_{t^s}^{\overline{\{s\}}}(x,t,\lambda)\Big|_{t=x-0}-G_{t^s}^{\overline{\{s\}}}(x,t,\lambda)\Big|_{t=x+0}=\frac{1}{i}\delta_{s,n-1}, \tag{4.6}$$

$$G_{t^n}^{\overline{\{n\}}}(x,t,\lambda)=\lambda G(x,t,\lambda); \tag{4.7}$$

*2) справедливы следующие асимптотические формулы при $|\rho|\to\infty$*

$$G_{x^k,t^s}^{[k],\overline{\{s\}}}(x,t,\lambda)=(-1)^s i^{s+k}\frac{V(x)}{V(t)}B_{x^k,t^s}^{(k+s)}(x,t,\rho)+$$

$$+O\left(\frac{\Phi(\rho)}{|\rho|^{n-1-s-k}}\Big(|e^{\rho_\nu(x-t)}|\chi(x-t)+|e^{\rho_{\nu+1}(x-t)}|\chi(t-x)\Big)\right)+ \tag{4.8}$$

$$+O\bigg(\frac{|\rho|^{s+k}}{|\rho|^{n-1}}\Big(|e^{\rho_\nu(1+x-t)}|+|e^{\rho_{\nu+1}(x-1)+\rho_\nu(1-t)}|+|e^{\rho_\nu x-\rho_{\nu+1}t}|+|e^{\rho_{\nu+1}(x-1-t)}|\Big)\bigg),$$

*где $0\leq k+s\leq n-1$.*

*Доказательство.* Обозначим

$$z_j(t)=W^{-1}(t)W_{1j}(t),\quad j=\overline{1,n}, \tag{4.9}$$

тогда легко проверить, что

$$z_j^{\overline{\{s\}}}(t)=W^{-1}W_{s+1,j}(t),\quad s=\overline{0,n-1},\ j=\overline{1,n}, \tag{4.10}$$

$$z_j^{\overline{\{n\}}}=\lambda z_j(t),\quad j=\overline{1,n}. \tag{4.11}$$

Здесь через $W_{k,j}(t)$ обозначено алгебраическое дополнения к элементу $(k, j)$ в определителе $W(t)$ (см. перечень обозначений в конце §1).

Пусть $W_s(x.t)$ есть определитель, получающийся из $W(t)$ выбрасыванием $s$-й строки и добавлением в качестве первой строки строки $\big(y_1(x), \ldots, y_n(x)\big)$. Тогда из (4.3), (4.9)–(4,11) следует формула при $s = \overline{0, n-1}$

$$g_s(x,t) = (-1)^{\chi(t-x)} \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} y_j(x) z_j^{\overline{\{s\}}}(t) = (-1)^{\chi(t-x)+s} \frac{W_{s+1}(x,t)}{2iW(t)}, \qquad (4.12)$$

$$g_n(x,t) = \lambda g(x,t), \qquad (4.13)$$

где $g_s(x,t) = g_{t^s}^{\overline{\{s\}}}(x,t)$. Так как $t$ входит в $G_{t^s}^{\overline{\{s\}}}(x,t,\rho)$ через $g_s(x,t)$, то из формул (4.12)–(4.13) следуют формулы (4.6)–(4.7).

Докажем теперь асимптотику (4.8). Рассмотрим случай $x \geq t$. В качестве системы решений уравнения $y^{[n]} - \lambda y = 0$ возьмём систему решений (2.3). Из формул (4.1)–(4.3), (4.12) следует, что если умножить 1-й, 2-й, …, $\nu$-й столбец определителя (4.2) на $\frac{1}{2} z_1(t,\rho)$, $\frac{1}{2} z_2(t,\rho)$, …, $\frac{1}{2} z_\nu(t,\rho)$, а $(\nu+1)$-й, $(\nu+2)$-й, …, $n$-й столбец на $-\frac{1}{2} z_{\nu+1}(t,\rho)$, $-\frac{1}{2} z_{\nu+2}(t,\rho)$, …, $-\frac{1}{2} z_n(t,\rho)$, соответственно, сложить с последним столбцом, затем применить оператор $D_k$ по $x$ и $\bar{D}_s^*$ по $t$ и разложить полученный определитель по последнему столбцу, то получим

$$G_{x^k,t^s}^{[k],\overline{\{s\}}}(x,t,\lambda) = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{\nu} y_j^{[k]}(x,\rho) z_j^{\overline{\{s\}}}(t,\rho) + \sum_{l=1}^{n} \frac{(-1)^l}{\Delta(\lambda)} \times$$

$$\times \left( \sum_{j=1}^{\nu} U_{l1}(Y_j) z_j^{\overline{\{s\}}}(t,\rho) - \sum_{j=\nu+1}^{n} U_{l0}(Y_j) z_j^{\overline{\{s\}}}(t,\rho) \right) A_{l,x^k}^{[k]}(x,\rho), \qquad (4.14)$$

где

$$A_{l,x^k}^{[k]}(x,\rho) = \begin{vmatrix} y_1^{[k]}(x,\rho) & U_1(Y_1) & \ldots & U_{l-1}(Y_1) & U_{l+1}(Y_1) & \ldots & U_n(Y_1) \\ y_2^{[k]}(x,\rho) & U_1(Y_2) & \ldots & U_{l-1}(Y_2) & U_{l+1}(Y_2) & \ldots & U_n(Y_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{[k]}(x,\rho) & U_1(Y_n) & \ldots & U_{l-1}(Y_n) & U_{l+1}(Y_n) & \ldots & U_n(Y_n) \end{vmatrix}.$$

Если $\rho \in \hat{S}(d)$, то из доказательства теоремы (3.11) следует, что

$$\big|\Delta(\lambda)\big| \geq C|\rho|^{\sigma} \big| e^{\sum_{j=\nu+1}^{n} \rho\omega_j} \big|, \qquad (4.15)$$

где $\sigma = \sum_{m=1}^{n} k_m$, $C > 0$.

В силу асимптотики (2.3) будем иметь

$$W(t) = V^n(t)(i\rho)^{\frac{(n-1)n}{2}}(-1)^{E(\frac{n}{2})}\Omega[1], \tag{4.16}$$

$$W_{s+1,j}(t) = V^{n-1}(t)(i\rho)^{\frac{(n-1)n}{2}-n+s+1}e^{-\rho_j t}(-1)^{E(\frac{n-1}{2})+n+1}\big[\Omega_{n-s,j}\big], \tag{4.17}$$

где, как и раньше, $\Omega = \det\left(\omega_m^{l-1}\right)_{l,m=1}^{n}$.

Подставляя (4.16)–(4.17) в (4.10) и учитывая, что

$$\frac{\Omega_{n-s,j}}{\Omega} = -\frac{\omega_j^{s+1}}{n},$$

получим

$$z_j^{\overline{\{s\}}}(t,\rho) = -\frac{1}{V(t)}\frac{\omega_j^{s+1}}{n(i\rho)^{n-s-1}}e^{-\rho\omega_j t}[1]. \tag{4.18}$$

Далее, из (2.3) следует, что

$$U_{l0}(Y_j) = (i\rho\omega_j)^{k_l}[\alpha_l], \quad U_{l1}(Y_j) = (i\rho\omega_j)^{k_l}V(1)[\beta_l],$$

$$A_{l,x^k}^{[k]}(x,\rho) = O\Big(|\rho|^{\sigma+k-k_l}\big|e^{\sum_{j=\nu+1}^{n}\rho_j}\big|\big(|e^{\rho_\nu x}|+|e^{\rho_{\nu+1}(x-1)}|\big)\Big).$$

Из этих оценок, а также из оценки (4.15), асимптотики (4.18), формулы (4.14) следует асимптотика (4.8) при $x \ge t$. При $x < t$ доказательство совершенно аналогичное.

Таким образом, лемма (4.5) полностью доказана. $\square$

Обозначим через $\mu_l$ $(l = 1, 2, \dots)$ числа $\rho_k'$, $\rho_k''$, занумерованные в порядке неубывания их модулей и с учетом кратности с.з. Рассмотрим в $\lambda$-плоскости последовательность замкнутых контуров $\Gamma_m$ $(m = 1, 2, \dots)$, обладающих следующими свойствами:

1) их прообразы $\gamma_m$ при отображении $\lambda = -(i\rho)^n$ целиком лежат в области $\hat{S}(d)$;

2) при $m$ достаточно больших между соседними контурами $\Gamma_m$ и $\Gamma_{m+1}$ лежат ровно одно с.з. в первых двух случаях теоремы (3.11) и ровно два с.з. в третьем случае;

3) все контуры $\Gamma_m$, начиная с некоторого, состоят из не более чем двух дуг окружностей с центром в начале координат, соединенных отрезками лучей, выходящих из начала координат;

4) если $r'_m = \max_{\rho \in \gamma_m} |\rho|$, $r''_m = \min_{\rho \in \gamma_m} |\rho|$, то $r'_m, r''_m \to \infty$ при $m \to \infty$ и, начиная с некоторого $m$,

$$r'_m - r''_m < 4\pi. \tag{4.19}$$

Пусть $l_m$ обозначает число с.з., попавших внутрь контура $\Gamma_m$.

**(4.20) Теорема.** *Если $L$ есть к.д. оператор с регулярными краевыми условиями, $p_{kj} \in L_1[0,1]$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,k-1}$, то для любой функции $f \in D_L$*

$$\lim_{m\to\infty} \big\|f - S_{l_m}(f)\big\|_{C[0,1]} = 0,$$

*где $S_{l_m}(f)$ — $l_m$-я частичная сумма биортогонального ряда Фурье функции $f$ по с.п.ф. оператора $L$.*

*Доказательство.* Из разложения функции Грина в ряд Лорана по параметру $\lambda$ в окрестности с.з. (см. [4, с. 50–51]) следует

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m} R(\lambda) f \, d\lambda = \sum_{k=1}^{l_m} \operatorname*{Res}_{\lambda = -(\mu_k i)^n} R(\lambda) f = S_{l_m}(f). \tag{4.21}$$

Кроме того, легко проверить, что для $f \in D_L$

$$f + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m} R(\lambda) f \, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m} \frac{R(\lambda) f_1}{\lambda - \alpha}\, d\lambda, \tag{4.22}$$

где обозначено $f_1 = Lf - \alpha f$, а $\alpha$ — любое фиксированное число, не являющееся с.з. и лежащее внутри $\Gamma_1$.

Из асимптотики (4.8) при $k = s = 0$ и $\lambda \in \Gamma_m$ следует оценка

$$\|R(\lambda) f_1\|_{C[0,1]} \le C\|f_1\|_1 (r''_m)^{1-n}. \tag{4.23}$$

Таким образом, получим в силу (4.21)–(4.23)

$$\|f - S_{l_m}(f)\|_{C[0,1]} \le C\|f_1\|_1 (r''_m)^{1-n}\big((r''_m)^n - |\alpha|\big)^{-1} 2\pi (r'_m)^n,$$

откуда следует утверждение теоремы, если учесть неравенство (4.19).

Теорема доказана. $\square$

**(4.24) Следствие.** *Если оператор $L$ удовлетворяет условиям теоремы (4.20), то система его с.п.ф. полна в $L_2[0,1]$.*

*Доказательство.* Пусть существует такой элемент $h \in L_2[0,1]$, $h \neq 0$, что

$$\big(\forall f \in D_L\big) \quad (f,h) = 0. \tag{4.25}$$

Так как $f \in D_L$, то $f = R(\alpha)g$, где $g = Lf - \alpha f$, $\alpha$ — любое фиксированное число, не являющееся с.з. Таким образом,

$$\big(\forall g \in L_1[0,1]\big) \quad (g, R^*(\bar{\alpha})h) = 0,$$

откуда $R^*(\bar{\alpha})h = 0$, а значит

$$h = (L^* - \bar{\alpha}E)R^*(\bar{\alpha})h = 0. \tag{4.26}$$

Так как (4.25) влечет (4.26), то $D_L$ всюду плотна в $L_2[0,1]$. Для того, чтобы закончить доказательство, осталось воспользоваться теоремой (4.20).

Следствие доказано. □

# §5. Теорема о безусловной базисности

Рассмотрим линейный к.д. оператор $L$, определенный в §1 к.д. выражением (1.1) и регулярными (определение (3.1)) краевыми условиями (1.2). В этом параграфе будет доказана следующая теорема.

**(5.1) Теорема.** *Если $p_{k,k-1} \in L_2[0,1]$, $p_{kj} \in L_1[0,1]$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k-2}$, то с.п.ф. оператора $L$ с регулярными краевыми условиями образуют базис безусловной сходимости в пространстве $L_2[0,1]$ в следующих случаях:*

1) $n = 2\mu - 1$;

2) $n = 2\mu$ и $\eta_0^2 - 4\eta_1\eta_{-1} \neq 0$.

Из это теоремы легко получается следующая теорема.

**(5.2) Теорема.** *Если* $p_1 \in L_2[0,1]$, $p_k \in L_1[0,1]$, $k = \overline{2,n}$, *то с.п.ф. краевой задачи (0.1)–(0.2) с регулярными краевыми условиями образуют базис безусловной сходимости в пространстве* $L_2[0,1]$ *в следующих случаях:*

1) $n = 2\mu - 1$;

2) $n = 2\mu$ и $\tilde{\eta}_0^2 - 4\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_{-1} \neq 0$,

где $\tilde{\eta}_0, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_{-1}$ определяются точно так же, как и $\eta_0, \eta_1, \eta_{-1}$, но только вместо $V(x)$ нужно брать $\tilde{V}(x) = \exp\left(\frac{1}{n}\int_0^x p_1(\tau)\,d\tau\right)$.

Прежде, чем доказывать теорему (5.1), дадим следующее определение.

**(5.3) Определение.** *Пусть* $\{\varphi_k\}$ *и* $\{\psi_k\}$ *— две полные биортогональные системы элементов гильбертова пространства* $H$. *Система* $\{\varphi_k\}$ *(или* $\{\psi_k\}$*) называется бесселевой, если для любого элемента* $f \in H$ *ряд* $\sum|(f,\varphi_k)|^2$ *(или* $\sum|(f,\psi_k)|^2$*) сходится.*

Дословно проводя рассуждения, аналогичные [22, с. 85–88], но только вместо обычных производных используя квазипроизводные, легко убеждаемся в справедливости следующей леммы.

**(5.4) Лемма.** *Краевые условия, сопряженные регулярным, также регулярны.*

*Доказательство теоремы (5.1).* Проводим рассуждения, аналогичные [22, с. 90–92].

1. Пусть $n = 2\mu - 1$. Среди алгебраических дополнений элементов $\mu$-го столбца определителя (3.2), составленного для области $S_0$, обязательно имеются отличные от нуля, в противном случае соответствующие краевые условия не были бы регулярными. Пусть, например, ненулевым дополнением обладает первый элемент $\mu$-го столбца. Предположим, что аналогичная ситуация имеет место и для области $S_1$ (для простоты

рассуждений). Тогда, используя формулу (73) из [4, с. 84], асимптотику системы решений (2.3), асимптотику с.з. (3.12)–(3.13), получим, что собственные функции оператора $L$ образуют две последовательности $\{y_{1k}\}$ и $\{y_{2k}\}$ и имеют следующие асимптотики

$$y_{1k} = V(x)\Big(a_1 e^{\delta_1\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i+\ln_0\zeta^{(1)}\right)x} + \dots + a_{\mu-1} e^{\delta_{\mu-1}\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i+\ln_0\zeta^{(1)}\right)x} +$$
$$+ a_\mu e^{\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i+\ln_0\zeta^{(1)}\right)x} + a_{\mu+1} e^{\delta_{\mu+1}\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i+\ln_0\zeta^{(1)}\right)(x-1)} +$$
$$+ \dots + a_n e^{\delta_n\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i+\ln_0\zeta^{(1)}\right)(x-1)} + O\big(h_{1k} + \varphi(x,\rho'_k)\big)\Big),$$
$$y_{2k} = V(x)\Big(b_1 e^{\varepsilon_1\left((-1)^{\mu}2k\pi i+\ln_0\zeta^{(0)}\right)x} + \dots + b_{\mu-1} e^{\varepsilon_{\mu-1}\left((-1)^{\mu}2k\pi i+\ln_0\zeta^{(0)}\right)x} +$$
$$+ b_\mu e^{\left((-1)^{\mu}2k\pi i+\ln_0\zeta^{(0)}\right)x} + b_{\mu+1} e^{\varepsilon_{\mu+1}\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i+\ln_0\zeta^{(0)}\right)(x-1)} +$$
$$+ \dots + b_n e^{\varepsilon_n\left((-1)^{\mu}2k\pi i+\ln_0\zeta^{(0)}\right)(x-1)} + O\big(h_{2k} + \varphi(x,\rho''_k)\big)\Big),$$

где $\delta_j = \omega_j^1/\omega_\mu^{(1)}$, $\varepsilon_j = \omega_j^0/\omega_\mu^{(0)}$; $a_1,\dots,a_n$ и $b_1\dots,b_n$ — алгебраические дополнения элементов первой строки определителя (3.2) при $s=\zeta^{(1)}$ и $s=\zeta^{(0)}$, соответственно. Коэффициенты $a_1,\dots,a_n$ и $b_1\dots,b_n$ не зависят от $k$ и $a_\mu \neq 0$ и $b_\mu \neq 0$.

Легко видеть, что

$$\mathrm{Re}\left((-1)^{\mu+1} i\delta_j\right) < 0 \text{ при } j<\mu, \quad \mathrm{Re}\left((-1)^{\mu+1} i\delta_j\right) > 0 \text{ при } j>\mu;$$
$$\mathrm{Re}\left((-1)^{\mu} i\varepsilon_j\right) < 0 \text{ при } j<\mu, \quad \mathrm{Re}\left((-1)^{\mu} i\varepsilon_j\right) > 0 \text{ при } j>\mu.$$

Так как сопряженный оператор $L^*$ имеет такую же структуру, что и оператор $L$, то собственные функции $\{z_{1k}\}$ и $\{z_{2k}\}$ оператора $L^*$ в силу леммы (5.4) имеют аналогичные асимптотики и с точностью до ограниченной константы, отличной от нуля, биортогональны собственным функциям оператора $L$.

При доказательстве свойства (3.14) было установлено попутно, что если $p_{j,j-1} \in L_2[0,1]$, $j=\overline{1.n}$, то

$$\sum_{k=N}^{\infty} |\varphi(x,\rho'_k)| < +\infty, \quad \sum_{k=N}^{\infty} |\varphi(x,\rho''_k)| < +\infty. \tag{5.5}$$

Из (3.14), (5.5) и леммы (3.4) следует, что последовательности собственных функций $\{y_{1k}\}, \{y_{2k}\}$ и $\{z_{1k}\}, \{z_{2k}\}$ операторов $L$ и $L^*$, соответственно, являются бесселевыми. Так как все с.з. операторов $L$ и $L^*$, за исключением конечного числа, просты, то последовательности их с.п.ф. $\{y_k\}$ и $\{z_k\}$ отличаются от последовательностей $\{y_{1k}\}, \{y_{2k}\}$ и $\{z_{1k}\}, \{z_{2k}\}$, соответственно, конечным числом элементов.Таким образом, системы $\{y_k\}$ и $\{z_k\}$ являются одновременно бесселевыми и полны в $L_2[0,1]$ (следствие (4.24)). Отсюда в силу известной теоремы Н.К. Бари (см. [25, с. 77]) следует, что последовательность $\{y_k\}$ образует базис Рисса, то есть базис безусловной сходимости в пространстве $L_2[9,1]$.

2. Пусть теперь $n = 2\mu$ и $\eta_0^2 - 4\eta_1\eta_{-1} \neq 0$. Покажем, что среди алгебраических дополнений $\mu$-го и $\mu+1$-го столбцов определителя (3.3) для области $S_0$, взятых при $s = \xi$, где $\xi$ — корень уравнения $\eta_1 s^2 + \eta_0 s + \eta_{-1} = 0$, имеется хотя бы одно отличное от нуля. Для доказательства допустим противное. Тогда, как легко видеть,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\eta_{-1}}{s} + \eta_0 + \eta_1 s\right)\bigg|_{s=\xi} = 0.$$

Отсюда следует, что $\xi$ — кратный корень уравнения $\eta_1 s^2 + \eta_0 s + \eta_{-1} = 0$, то есть $\eta_0^2 - 4\eta_1\eta_{-1} = 0$, а это противоречит исходному условию.

Если первый элемент $\mu$-го или $\mu+1$-го столбцов обладает отличным от нуля алгебраическим дополнением, то

$$y_{1k} = V(x)\Big(c_1 e^{\varepsilon_1\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0\zeta'\right)x} + \dots + c_{\mu-1} e^{\varepsilon_{\mu-1}\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0\zeta'\right)x} +$$
$$+ c_\mu e^{\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0\zeta'\right)x} + c_{\mu+1} e^{-\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0\zeta'\right)x} +$$
$$+ c_{\mu+2} e^{\varepsilon_{\mu+2}\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0\zeta'\right)(x-1)} + \dots + c_n e^{\varepsilon_n\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0\zeta'\right)(x-1)} +$$
$$+ O\big(h_{3k} + \varphi(x, \rho_k')\big)\Big); \tag{5.6}$$

$$y_{2k} = V(x)\Big(d_1 e^{\varepsilon_1\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0\zeta''\right)x} + \dots + d_{\mu-1} e^{\varepsilon_{\mu-1}\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0\zeta''\right)x} +$$
$$+ d_\mu e^{\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0\zeta''\right)x} + d_{\mu+1} e^{-\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0\xi''\right)x} +$$
$$+ d_{\mu+2} e^{\varepsilon_{\mu+2}\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0\zeta''\right)(x-1)} + \dots + d_n e^{\varepsilon_n\left((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0\zeta''\right)(x-1)} +$$

$$+O\big(h_{4k}+\varphi(x,\rho_k'')\big)\Big); \tag{5.7}$$

где $c_1,\dots,c_n$ и $d_1,\dots,d_n$ — алгебраические дополнения элементов первой строки определителя (3.3) при $s=\zeta'$ и $s=\zeta''$, соответственно.

Очевидно,

$$\operatorname{Re}\big((-1)^{\mu+1}i\varepsilon_j\big)<0 \text{ при } j\le\mu-1, \quad \operatorname{Re}\big((-1)^{\mu+1}i\varepsilon_j\big)>0 \text{ при } j\ge\mu+2,$$

а поэтому, как показывают несложные вычисления,

$$\|y_{1k}\|_2^2\ge v_0\frac{|\zeta'|^2-1}{|\zeta'|^2\ln|\zeta'|^2}\big(|c_\mu|^2|\zeta'|^2+|c_{\mu+1}|^2\big)+a_1(k), \tag{5.8$'$}$$

$$\|y_{2k}\|_2^2\ge v_0\frac{|\zeta''|^2-1}{|\zeta''|^2\ln|\zeta''|^2}\big(|d_\mu|^2|\zeta''|^2+|d_{\mu+1}|^2\big)+a_2(k), \tag{5.8$''$}$$

где $v_0=\min_{x\in[0,1]}|V(x)|^2>0$, $a_1(k)$ и $a_2(k)$ стремятся к нулю при $k\to\infty$.

Собственные функции $\{z_{1k},z_{2k}\}$ сопряженного оператора выражаются по формулам, аналогичным (5.6)–(5.7) и, следовательно, их нормы оцениваются снизу аналогично (5.8).

Покажем, что множество модулей скалярных произведений $|(y_{1k},z_{1k})|$, $|(y_{2k},z_{2k})|$ ограничено снизу положительным числом. Опишем около каждой точки $\mu_k$ комплексной $\rho$-плоскости окружность радиуса $\varepsilon$. При $\eta_0^2-4\eta_1\eta_{-1}\ne0$ число $\varepsilon$ можно выбрать столь малым, чтобы круги, соответствующие различным с.з., не пересекались. Как показано в лемме (4.5), вне описанных кругов выполняется неравенство

$$\big|\rho^{n-1}G(x,t,-(i\rho)^n)\big|\le C. \tag{5.9}$$

Вычет функции $G(x,t,\lambda)$ в точке $\lambda_k=-(i\mu_k)^n$ равен

$$-\frac{y_k(x)\bar z_k(t)}{(y_k,z_k)},$$

то есть в силу (5.9)

$$\left|\frac{y_k(x)\bar z_k(t)}{(y_k,z_k)}\right|=\left|\frac{ni^n}{2\pi i}\int_{|\rho-\mu_k|=\varepsilon}\rho^{n-1}G(x,t,-(i\rho)^n)\,d\rho\right|\le C\varepsilon.$$

Отсюда следует,

$$\frac{\|y_k\|_2^2\|x_k\|_2^2}{|(y_k,z_k)|^2} \le C^2\varepsilon^2 \quad \text{или} \quad |(y_k,z_k)| \ge \frac{1}{C\varepsilon}\|y_k\|_2\|z_k\|_2.$$

Учитывая (5.8), приходим к заключению, что $|(y_k,z_k)| \ge C_1 > 0$, где $C_1$ — некоторая постоянная, не зависящая от $k$.

Таким образом, доказано, что собственные функции операторов $L$ и $L^*$, выражаемые формулами (5.6)–(5.7), с точностью до ограниченного множителя, отличного от нуля, биортонормированы.

Рассуждая далее так же, как и в пункте 1, можно получить утверждение пункта 2 теоремы. Таким образом, теорема (5.1) полностью доказана. □

**(5.10) Замечание.** *Как показано в [22, с. 92–93], требование* $\eta_0^2 - 4\eta_1\eta_{-1} \ne 0$ *при* $n = 2\mu$ *отбросить нельзя.*

# Литература

[1] Рыхлов В. С. *Разложения по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных и интегральных операторов: Дис. ... канд. физ.-матем. наук*, Саратовский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, 1981. – 129 с.

[2] Birkhoff G. D. Boundary value and expansion problem of ordinary linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc*, 1908, vol. 9, pp. 373–395.

[3] Birkhoff G. D. Note on the expansion problems of ordinary linear differential equations, *Rend. Circ. mat. Palermo*, 1913, vol. 36, pp. 115–126.

[4] Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы*, М.: Наука, 1969. – 528 с.

[5] Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1908, vol. 9, p. 219–231.

[6] Tamarkine J. D. Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires et sur la généralisation de la série de Fourier, it Rend. Circ. mat. Palermo, 1912, vol. 34, pp. 345–382.

[7] Stone M. H. A comparison of the series of Fourier and Birkhoff, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1926, vol. 28, pp. 695–761.

[8] Hobson E. W. On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by a series of normal functions, *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2, 1908, vol. 6, p. 349–395.

[9] Stekloff V. A. Solution générale du problème de développement d'une fonction arbitraire en séries suivant les fonctions fondamentales de Sturm–Liouville, *Rend. Accad. Lincei*, 1910, vol. 19, p. 490–496.

[10] Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, I, *Math. Ann.*, 1910, Bd. 69, S. 331–371.

[11] Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, II, *Math. Ann.*, 1911, Bd. 71, S. 38–53.

[12] Тамаркин Я. Д. *О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*, Петроград, 1917. – 308 с.

[13] Tamarkin J.D. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions, *Math. Ztshr.*, 1928, Bd. 27, S. 1–54.

[14] Birkhoff G. D., Langer R. E. The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order, *Proc. Amer. Acad. Arts and Sci.*, 1923, vol. 58, p. 51–128.

[15] Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям интегральных операторов, *Функциональный анализ*, Ульяновск, 1980, вып. 14, с. 187–189.

[16] Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов, *Матем. сборник*, 1981, т. 114 (156), № 3, с. 378–405.

[17] Poincaré H. Sur les équations de la physique mathématique, *Rend.Circ. mat. Palermo*, 1894, vol. 8, p. 57–156.

[18] Ильин В. А. О равномерной расходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье, *Докл. АН СССР*, 1975, т. 223, № 3, с. 548–551.

[19] Ильин В. А. О равносходимости разложений в тригонометрический ряд Фурье и по собственным функциям пучка М. В. Келдыша обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов, *Докл. АН СССР*, 1975, т. 225, № 3, с. 497–499.

[20] Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений, I, *Дифференц. уравнения*, 1980, т. 16, № 5, с. 771–794.

[21] Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений, II, *Дифференц. уравнения*, 1980, т. 16, № 6, с. 980–1009.

[22] Кесельман Г. М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов, *Изв. вузов. Матем.*, 1964, № 2, с. 82–93.

[23] Михайлов В. П. О базисах Рисса в $L_2[0,1]$, *Докл. АН СССР*, 1962, т. 144, № 5, с. 981–984.

[24] Гельфанд И. М. Замечание к работе Н. К. Бари, *Учен. зап. МГУ*, 1951, т. 4, вып. 148, с. 224–225.

[25] Бари Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, *Учен. зап. МГУ*, 1951, т. 4, вып. 148, с. 68–107.

[26] Ломоносов М. И. О разложении по собственным функциям оператора $-\frac{d}{dy}[p(y)\frac{d}{dy}U] + q(y)U = \lambda U$, *Докл. АН СССР*, 1955, т. 105, № 3, с. 412–415.

[27] Ломоносов М. И. Об уравнении $-\frac{d}{dy}[p(y)\frac{d}{dy}U]+q(y)U=\lambda U$, *Зап. матем. отд. физ.-матем.фак-та и Харьков.матем. об-ва*, 1960, т. 26, с. 267–316.

[28] Шин Д. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве, *Докл. АН СССР*, 1938, т. 18, № 8, с. 523–526.

[29] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы: Спектральные операторы*, М.: Мир, 1974. – 664 с.

[30] Walsh J. L A closed set of normal orthogonal functions, *Amer. J. Math.*, 1923, vol. 55, p. 5–24.

[31] Kaczmarz S., Steinhaus H. Le systeme orthogonal de M. Rademacher, *Studia math.*, 1930, t. 2, s. 231–247.

[32] Paley R. E. A. C. A remarkable series of orthogonal functions, *Proc. London Math. Soc.*, 1932, vol. 32, pp. 241–279.

[33] Fine N. J On the Walsh Functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1949, vol. 65, no. 3, pp. 372–414.

[34] Хармут Х. *Теория секвентного анализа*, М.: Мир, 1980. – 576 с.

[35] Gibbs J. E. Some properties of functions on the nonnegative integers less than $2^n$, *DES Rept. / Nat. Phys. Lab.*, 1969, no. 3.

[36] Gibbs J. E., Milliard M. J. Walsh fuctions as solutions of a logical differential equation, *DES Rept. / Nat. Phys. Lab.*, 1969, no. 1.

[37] Gibbs J. E., Ireland B. Some generalizations of the logical derivative, *DES Rept. / Nat. Phys. Lab.*, 1971, no. 8.

[38] Butzer P. L., Wagner H. J. Walsh-Fourier series and the concept of a derivative, *Appl. Anal.*, 1973, vol. 3, pp. 29–46.

[39] Butzer P. L., Wagner H. J. On dyadic analysis based on the pointwise pointwise dyadic derivative, *Anal. Math.*, 1975, t. 1, no. 3, pp. 171–196.

[40] Хрыптун В. Г. Разложение в равномерно сходящиеся ряды по собственным функциям, В кн.: *Обратные задачи для дифференциальных уравнений*, Новосибирск, 1972, с. 132–140.

[41] Ульянов П. Л Вложение некоторых классов функций $H_p^\omega$, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1968, т. 32, № 3, с. 649–686.

[42] Бари Н. К. *Тригонометрические ряды*, М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

[43] Рубинштейн А. И. О равенстве Парсеваля, *Изв. вузов. Математика*, 1978, № 6, с. 102–108.

[44] Рисс Ф., Сёкефельви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу*, М.: Мир, 1979. – 592 с.

[45] Натансон И. П. *Теория функций вещественного переменного*, М.: Наука, 1974. – 480 с.

[46] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. *Выпуклые функции и пространства Орлича*, М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.

[47] Тиман А. Ф. *Теория приближения функций действительного переменного*, М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

[48] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*, т. 1, М.: Мир, 1965. – 616 с.

[49] Рогозинский В. В.,Харди Г. Х. *Ряды Фурье*, М.: Физматгиз, 1959. – 156 с.

[50] Morgenthaler G. V. On Walsh-Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1957, vol. 84, p. 472–507.

[51] Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, М.: Физматгиз, 1963. – 1108 с.

[52] Рыхлов В. С. Разложение по собственным функциям одного класса квазидифференциальных операторов, *Дифференциальные уравнения и тория функций*, Саратов: Изд-во СГУ, 1977, вып. 1, с. 151–169.

[53] Рыхлов В. С. Теоремы равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-ой производной, *Дифференциальные уравнения и теория функций*, Саратов: Изд-во СГУ, 1981, вып. 2, с. 57–75.

[54] Рыхлов В. С. Равносходимость с рядом Уолша–Фурье, *Дифференциальные уравнения и теория функций*, Саратов: Изд-во СГУ, 1980, вып. 3, с. 28–31.

[55] Рыхлов В. С. Теорема равносходимости для одного класса дифференциальных операторов, *Всесюз. симпозиум по теории аппроксимации функций в комплексной области:(Тез.докл.)*, Уфа, 1980, с. 120–121.

[56] Рыхлов В. С. Равносходимость для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-ой производной, *Функциональный анализ*, Ульяновск, 1980, вып. 14, с. 113–115.

[57] 56. Рыхлов В. С. Разложение по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных операторов, *Исследования по математике, физике и их приложениям: Тез.докл.*, Уфа, 1981, с. 36–38.