В.С. Рыхлов

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Часть 3. Равносходимость с рядом Уолша-Фурье

научно-методическое пособие

Оглавление

Предисловие автора

При чтении спецкурсов, руководстве курсовыми, бакалаврскими и магистерскими выпускными работами, при работе с аспирантами и соискателями постоянно возникает потребность в быстром введении слушателей в спектральную теорию обыкновенных дифференциальных операторов или некоторые специальные разделы этой теории.

К нашему большому сожалению, имеется не так уж много доступных материалов для этого. Чтобы дополнить эти материалы, издается настоящее пособие, в котором излагается содержание кандидатской диссертации автора [1]. К сожалению, материалы диссертаций, как правило, недоступны массовой аудитории, хотя, как кажется автору, именно диссертации представляют особый интерес для читателей, интересующихся соответствующей тематикой. Это связано с тем, что именно в диссертациях дается подробная история вопроса, четкие постановки решаемых задач и подробное изложения доказательств полученных результатов.

Данный материал, как надеется автор, позволит читателям получить необходимые предварительные сведения из некоторых разделов спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, получить представление о задачах и проблемах, возникающих в этой теории и методах для решения этих задач и проблем.

Дальнейший материал есть изложение кандидатской диссертации автора [1]. В тексте диссертации исправлены выявленные к настоящему времени описки и неточности. Обращаем Ваше внимание на то, что все исторические сведения и цитированная литература относятся к моменту написания этой диссертации. Ради удобства, излагаемый материал разбит на три части в соответствии с главами диссертации (часть 1, часть 2, часть 3). В части 3 настоящего пособия излагаются введение диссертации и глава 3.

Введение

Многие вопросы современной математики, механики и физики приводят к спектральному анализу несамосопряженных операторов. Спектральный анализ таких операторов включает в себя задачи определения собственных значений (с.з.), собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) или, как часто говорят, корневых функций (к.ф.), разложения произвольной функции в ряд по с.п.ф., вопросы полноты и базисности с.п.ф., равносходимости разложений по с.п.ф. и по известным системам функций и т. д. Такого рода задачи и вопросы всегда возникают, например, при обосновании метода Фурье решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Хотя многие задачи спектрального анализа несамосопряженных операторов еще далеки от окончательного решения, именно в последние три десятилетия он обогатился целым рядом фундаментальных результатов, которые стимулировали исследования в данной области. На это указывают многочисленные публикации.

Настоящая работа посвящена спектральному анализу двух классов несамосопряженных операторов: квазидифференциальных и интегральных. В ней, в частности, решаются вопросы безусловной базисности в $L_2[0,1]$ с.п.ф. квазидифференциальных (к.д.) операторов, равносходимости разложений произвольной функции по с.п.ф. этих операторов и по тригонометрической системе, а также равносходимости с рядом Уолша-Фурье разложений по с.п.ф. интегральных операторов.

Вопросом о разложении по с.п.ф. краевой задачи на отрезке $[0,1]$, порождаемой дифференциальным уравнением n-го порядка

$$\ell(y) - \lambda y = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y - \lambda y = 0 \qquad (0.1)$$

и линейно независимыми краевыми условиями

$$U_i(y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y^{(n-j)}(0) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y^{(n-j)}(1) = 0,\ i = \overline{1,n}, \qquad (0.2)$$

одним из первых занимался G. Birkhoff [2,3]. Он доказал, что при некоторых ограничениях на коэффициенты форм $U_i(y)$, называемых условиями регулярности [4, с. 66–67], ряд Фурье по с.п.ф. функции $f(x)$, имеющей ограниченную вариацию, сходится к $\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big)$ в каждой внутренней точке $[0,1]$, а в точках 0 и 1 ряд сходится к $\alpha f(0+0) + \beta f(1-0)$, где постоянные α и β определяются краевыми условиями. При этом G. Birkhoff предполагал, что $p_1(x) \equiv 0$ или, по крайней мере, из $C^{n-1}[0,1]$, а $p_j(x)$, $j = \overline{2,n}$, непрерывны на $[0,1]$. При получении этого результата G. Birkhoff решил также вопросы о распределении с.з. и об асимптотике собственных функций задачи (0.1)–(0.2). Основным средством для решения этих вопросов была асимптотика системы решений уравнения (0.1) при $|\lambda| \to \infty$, полученная G. Birkhoff'ом в [5].

В дальнейшем Я.Д. Тамаркин усилил результат G. Birkhoff'а, показав в [6], что при $p_1(x) \in C^{n-1}[0,1]$ и регулярных краевых условиях для всякой интегрируемой функции ряды по с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2) и по тригонометрической системе равномерно равносходятся внутри $[0,1]$. Аналогичный результат, но значительно позже, получил M. Stone [7]. Теорема Я.Д. Тамаркина обобщала теоремы о равносходимости E. Hobson'а [8], В.А. Стеклова [9], A. Haar'а [10, 11], доказанные ими для краевых задач второго порядка.

Более общие краевые задачи, а также краевые задачи в пространстве вектор-функций (но опять-таки с условиями регулярности краевых условий и достаточной гладкости коэффициента при $(n-1)$-ой производной или аналогичных ему коэффициентов) изучались Я.Д. Тамаркиным [12, 13], G. Birkhoff'ом и R.E. Langer'ом [14] и многими другими.

Совсем недавно А.П. Хромов [15, 16] распространил теорему о равносходимости Я.Д. Тамаркина на интегральные операторы, ядра которых обобщают свойства функции Грина задачи (0.1)–(0.2) с регулярными краевыми условиями. А.П. Хромов установил, что такие операторы являются в определенном смысле каноническими в классе интегральных операторов, для разложений по с.п.ф. которых имеет место равносходимость с тригонометрическим рядом. Случай $p_1(x) \notin C^{n-1}[0, 1]$ А.П. Хромовым не рассматривался.

В основе перечисленных выше результатов лежал метод Пуанкаре–Коши [17] или, по-другому, метод контурного интеграла. Другой подход к проблеме равносходимости продемонстрировал В.А. Ильин [18–21]. При получении своих результатов он существенно использовал формулу среднего значения. В.А. Ильин доказал равномерную равносходимость с тригонометрическим рядом разложений в биортогональный ряд по с.п.ф. произвольного несамосопряженного дифференциального оператора, порожденного выражением $\ell(y)$, с произвольными краевыми условиями, обеспечивающими некоторое асимптотическое поведение с.з. Доказанные В.А. Ильиным теоремы формулируются в терминах условий на коэффициенты $\ell(y)$ и функции биортогональной системы и охватывают ранее известные результаты, касающиеся равносходимости, в частности, случаи регулярных краевых условий. Более того, эти теоремы впервые устанавливают локальный характер не только требований на разлагаемую функцию, но и требований на коэффициенты $\ell(y)$ и функции биортогональной системы.

В начале 60-х годов Г.М. Кесельманом [22] и В.П. Михайловым [23] была доказана теорема о безусловной базисности в $L_2[0, 1]$ с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2) при условии, что $p_1(x) \in C^{n-1}[0, 1]$, остальные коэффициенты суммируемы на $[0, 1]$, а краевые условия регулярны при n нечетном и усиленно регулярны при n четном (определение усиленной регулярности см. в [4, с. 71]; оно гарантирует простоту достаточно больших по модулю с.з.). Договоримся далее называть краевые условия, регулярные при n нечетном и усиленно-регулярные при n четном, просто усиленно-регулярными. Как показано в [24], в гильбертовом пространстве понятие базиса безусловной сходимости, удовлетворяющего дополнительному требованию $0 < m \le \|\varphi_j\| \le M < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$, эквивалентно понятию базиса Рисса, которое было введено Н.К. Бари [25].

Все приведенные выше результаты относятся к задачам (0.1)–(0.2) с достаточно гладким коэффициентом $p_1(x)$, а также к обобщениям именно таких задач. Вопрос о влиянии свойств этого коэффициента на равносходимость, безусловную базисность при уменьшении его гладкости до сих пор оставался открытым, если не считать частного случая, рассмотренного М.И. Ломоносовым [26, 27]. Решению этого вопроса и посвящены первая и вторая главы диссертации, причем решается этот вопрос на классе к.д. операторов, определяемых к.д. выражениями n-го порядка на $[0, 1]$

$$D_n y = y^{[n]}, \tag{0.3}$$

где

$$D_k y = y^{[k]} = i\frac{d}{dx}y^{[k-1]} + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}(x)y^{[j]},\ k = n, n-1, \ldots, 1,\ D_0 y = y^{[0]} = y,$$

$p_{kj} \in L_1[0, 1]$ (выражения $y^{[n]}$ являются частным случаем выражений, введенных Д. Шином [28]) и линейно независимыми краевыми условиями

$$U_i(y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y^{[n-j]}(0) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y^{[n-j]}(1) = 0,\ i = \overline{1, n}. \tag{0.4}$$

В этом случае роль $p_1(x)$ играют коэффициенты $p_{k,k-1}(x)$, $k = \overline{1, n}$.

В первой главе решается вопрос о безусловной базисности в $L_2[0, 1]$ с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4). Основным является следующий результат (теорема (5.1)[1]): с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4) образуют базис безусловной

[1]Нумерация параграфов в диссертации сквозная; при этом для формул, лемм, теорем, следствий и замечаний используется единая нумерация, состоящая из двух чисел, заключенных в круглые скобки: первое число — номер параграфа, второе число — номер формулы, леммы и т. д. в этом параграфе.

сходимости в $L_2[0,1]$, если $p_{k,k-1}(x) \in L_2[0,1]$, $k=\overline{1,n}$, а краевые условия усиленно-регулярны. Следствием этого результата является утверждение о том, что с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2) образуют базис безусловной сходимости в $L_2[0,1]$, если $p_1(x) \in L_2[0,1]$, а краевые условия усиленно-регулярны (теорема (5.2)). В [22] для справедливости этого утверждения требовалось, чтобы $p_1(x) \in C^{n-1}[0,1]$. Отметим, что по терминологии [29] к.д. оператор (0.3)–(0.4), удовлетворяющий теореме (5.1), является спектральным оператором.

Во второй главе решается вопрос о равносходимости внутри $[0,1]$ разложений по с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4) с регулярными краевыми условиями и по тригонометрической системе. Основной является теорема (7.1). В ней утверждается, что множество функций $f(x)$, для которых имеет место равносходимость, зависит от свойств коэффициентов $p_{k,k-1}(x)$, $k=\overline{1,n}$, а именно: если, например, $p_{k,k-1}(x) \in L_r[0,1]$, то равносходимость имеет место для функций $f(x) \in L_q[0,1]$, где $1/r+1/q<1$; если $p_{k,k-1}(x) \in C[0,1]$ и $\omega(p_{k,k-1};\delta)_{C[0,1]} = O(\ln^{-\alpha}\frac{1}{\delta})$, где $\omega(p_{k,k-1};\delta)_{C[0,1]}$ есть модуль непрерывности функции $p_{k,k-1}(x)$ в метрике $C[0,1]$, то равносходимость имеет место для функций $f(x) \in L_1[0,1]$, таких, что $\omega(f;\delta)_{L_1[0,1]} = O(\ln^{-\beta}\frac{1}{\delta})$, где $\alpha+\beta>1$, и наоборот. При этом, если в первом случае условие на r и q заменить на противоположное, а именно: $1/r+1/q>1$, то утверждение теоремы станет неверным. Аналогично, во втором и третьем случае утверждение теоремы станет неверным, если $\alpha+\beta<1$. Следствием этой теоремы является теорема (7.3) о равносходимости разложений по с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2) с регулярными краевыми условиями и по тригонометрической системе, формулировка которой дословно повторяет формулировку теоремы (7.1), но только вместо $p_{k,k-1}(x)$, $k=\overline{1,n}$, берется коэффициент $p_1(x)$. Для сравнения теоремы (7.3) с теоремой Я.Д. Тамаркина рассмотрим случай $f(x) \in L_1[0,1]$ (Я.Д. Тамаркин рассматривал именно этот случай). Из теоремы (7.3) следует, что для равносходимости достаточно, например, чтобы $\omega(p_1;\delta)_{C[0,1]} = O(\ln^{-\alpha}\frac{1}{\delta})$, где $\alpha>1$. В теореме Тамаркина для этого требовалось, чтобы $p_1(x) \in$

$C^{n-1}[0,1]$. Отметим, что из результата М.И. Ломоносова [27] следует равносходимость для задачи (0.1)–(0.2) второго порядка с распадающимися краевыми условиями при $p_1(x) \in L_\infty[0,1]$ и $f(x) \in L_2[0,1]$. В теореме (7.3) для этого достаточно, чтобы $p_1(x) \in L_r[0,1]$ и $f(x) \in L_2[0,1]$, где $1/r + 1/2 < 1$ или $r > 2$.

В третьей главе изучается равносходимость с рядом Уолша–Фурье разложений по с.п.ф. одного класса интегральных операторов. Система функций Уолша была введена и исследована J. Walsh'ем [30]. Изучение этой системы, затем, продолжили S. Kaczmarz и H. Steinhaus [31], R. Paley [32], N. Fine [33] и многие другие. В последнее время вновь возрос интерес к этой системе функций. Она нашла применение в вычислительной технике и некоторых разделах физики [34]. В конце 60-х годов J. Gibbs и его сотрудники M. Millard и B. Ireland [35–37] заложили основы диадического анализа, опирающегося на систему функций Уолша. Дальнейшее развитие диадический анализ получил в работах P. Butzer'а и H. Wagner'а [38,39], которые определили и детально исследовали диадную производную.

Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ есть система функций Уолша в нумерации R. Paley [32] (система функций Уолша–Пэли). Рассмотрим вполне непрерывный оператор, действующий в $L_1[0,1]$

$$Af = \int_0^1 A(x,t) f(t)\,dt \quad (0 \le x \le 1), \tag{0.5}$$

где

$$A(x,t) = 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{\psi_k(x)\psi_k(t)}{k^n} + V(x,t) \quad (n \ge 2).$$

Так как разложение по с.п.ф. оператора

$$I_n f = \int\limits_0^1 I_n(x,t) f(t)\,dt,$$

где

$$I_n(x,t) = 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{\psi_k(x)\psi_k(t)}{k^n},$$

есть разложение в обычный ряд Уолша–Фурье, то естественно поставить вопрос, при каких условиях на функцию $V(x,t)$ имеет место равносходимость в метрике $L_\infty[0,1]$ разложений произвольной функции $f(x) \in L_1[0,1]$ по с.п.ф. оператора A и по системе Уолша. Решению этого вопроса и посвящена третья глава. Основным является следующий результат (теорема (11.1)): если существуют некоторые диадные производные по x и по t от функции $V(x,t)$, если коэффициенты Уолша–Фурье этих диадных производных стремятся к нулю с достаточной скоростью, если оператор A^{-1} существует и выполняются некоторые другие условия, то имеет место указанная выше равносходимость. При этом, если все условия на функцию $V(x,t)$ оставить без изменения, кроме условий на скорость стремления к нулю коэффициентов Уолша–Фурье, а последние условия заменить на противоположные, то утверждение теоремы (11.1) станет неверным.

Перейдем теперь к более подробному изложению диссертации.

Первая глава состоит из пяти параграфов (§1–§5). В §1 вводятся необходимые понятия, даются определения и показывается, что оператор, сопряженный к оператору (0.3)–(0.4) принадлежит тому же классу к.д. операторов, что и исходный оператор. В §2 доказывается очень важная для первых двух глав теорема (2.2) об асимптотике системы решений уравнения $y^{[n]} - \lambda y = 0$ при $|\lambda| \to \infty$, учитывающей свойства коэффициентов $p_{k,k-1}(x)$, $k = \overline{1,n}$. Метод получения этой асимптотики аналогичен методу из [5], [4, с. 55–62], но существенным моментом является использование преобразования (2.6). Теорема (2.2), помимо широкого использования ее в дальнейшем, представляет и самостоятельный интерес. Она, в частности усиливает и обобщает на к.д. уравнения соответствующий результат В.Г. Хрыптуна [40]. В §3 доказывается лемма (3.4), обобщающая лемму Г.М. Кесельмана [22, с. 89–90], а затем, на основе этой леммы и теоремы (2.2), находится асимптотика с.з. оператора (0.3)–(0.4) с регулярными краевыми условиями, учитывающая свойства коэффициентов $p_{k,k-1}(x)$, $k = \overline{1,n}$ (теорема (3.11)). В §4 при помощи системы решений к.д. уравнения, полученной в теореме (2.2), находится асимптотика функции Грина оператора (0.3)–(0.4) (лемма (4.5)). Затем, на основе этой асимптотики методом контурного интеграла доказывается теорема (4.20) о разложении произвольной функции из области определения к.д. оператора с регулярными краевыми условиями в равномерно сходящийся ряд по с.п.ф. этого оператора. Наконец, в следствии (4.24) устанавливается полнота в $L_1[0,1]$ с.п.ф. рассматриваемого класса операторов. В последнем §5 главы на основе предыдущих результатов методом работы [22] доказывается теорема (5.1) о безусловной базисности в $L_2[0,1]$ с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4) и следствие из нее (теорема (5.2)) о безусловной базисности с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2).

Вторая глава состоит из четырех параграфов (§6–§9). В §6 приводятся используемые в дальнейшем понятия и результаты из теории пространств Орлича, теории приближения функций многочленами. На основе результата П.А. Ульянова [41] о вложении некоторых классов функций в пространства Орлича доказывается лемма (6.14). После всего этого доказывается теорема (6.18), аналогичная теореме Х. Штейнгауза [42, с. 111]. В этих теоремах речь идет о том, какие условия нужно наложить на функции $W(x)$ и $f(x)$, чтобы имела место равносходимость на $[0,1]$ или хотя бы внутри $[0,1]$ для $W\sigma_s(f)$ и $\sigma_s(Wf)$, где $\sigma_s(f)$ обозначает s-ую частичную сумму тригонометрического ряда функции $f(x)$. Теорема (6.18), помимо использования ее в дальнейшем, представляет самостоятельный интерес, тем более, что строятся контрпримеры, показывающие точность этой теоремы. В §7 формулируется теорема (7.1) о равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4), а также следствие из нее (теорема (7.3)) для оператора (0.1)–(0.2). После этого доказывается лемма об оценках норм интегральных операторов, действующих из $L_p[0,1]$ $(1 < p \leq \infty)$ в $L_\infty[0,1]$, ядрами которых являются квазипроизводные от функции Грина оператора (0.3)–(0.4) с регулярными краевыми условиями. Аналогичную лемму в случае краевой задачи (0.1)–(0.2) впервые доказал и использовал А.П. Хромов в доказательстве теоремы о равносходимости для интегральных операторов [15,16]. Далее, в §7 вводится обыкновенный дифференциальный оператор первого порядка в пространстве вектор-функций, тесно связанный с к.д. оператором (0.3)–(0.4), и устанавливается связь между компонентами его функции Грина (она является матрицей-функцией) и квазипроизводными от функции Грина оператора (0.3)–(0.4) (лемма (7.10)). После этого на основе теорем (2.2), (4.20), (6.18), лемм (4.5), (7.5), (7.10) доказываются две леммы, из которых и следуют утверждения теорем (7.1) и (7.3). В первой из этих лемм (лемма (7.13)) устанавливается равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4), у которого все коэффициенты, кроме $p_{k,k-1}(x)$, $k = \overline{1,n}$, равны нулю. Во второй (лемма (7.52)) — равносходимость разложений по с.п.ф. двух к.д. операторов, у которых коэффициенты $p_{k,k-1}(x)$ одинаковы. Леммы доказываются методом контурного интеграла. Для того, чтобы получить формулу, выражающую резольвенту возмущенного оператора через резольвенту исходного оператора, потребовалось использование того факта, что к.д. оператор является частным случаем обыкновенного дифференциального оператора первого порядка в пространстве вектор-функций. В §8 строятся контрпримеры, показывающие точность теоремы (7.1). Здесь вновь существенно используется лемма (7.5). Центральное место в этом параграфе занимает лемма (8.29) о расходимости одной числовой последовательности. В ее доказательстве используются некоторые факты из статьи А.И. Рубинштейна [43]. Наконец, в последнем §9 второй главы доказывается теорема (9.1), которая обобщает теорему (7.1) на тот случай, когда условия, наложенные на функции $p_{k,k-1}(x)$, выполняются не на всем отрезке $[0,1]$, а лишь на некотором $[a,b] \subset [0,1]$.

Третья глава состоит из четырех параграфов (§10–§13). В §10 приводятся некоторые сведения из [39], в частности, определение и основные свойства диадной производной. В §11 формулируется теорема (11.1) о равносходимости с рядом Уолша–Фурье. Затем показывается, что требование существования A^{-1} является совершенно необходимым для равносходимости, и находится явный вид этого оператора. Оказывается, что

$$A^{-1} = (E + N)(D^{[n]} + a_n E),$$

где $Nf = \int_0^1 N(x,t)f(t)dt$, $N(x,t)$ выражается через диадные производные от $V(x,t)$ (см. формулу (0.5)), $D^{[n]}$ есть оператор n-кратного диадного дифференцирования, наконец, a_n есть некоторая константа. Метод обращения A аналогичен методу А.П. Хромова [15, 16], но только вместо обычной производной используется диадная производная и ее свойства. В §12 доказывается теорема (11.1). Основной идеей доказательства является использование явного вида оператора A^{-1}, найденного в §11. Идея использования явного вида обратного оператора при доказательстве теорем равносходимости для интегральных операторов принадлежит А.П. Хромову [15, 16]. Основная часть §12 посвящена доказательству равносходимости для более широкого класса операторов, чем $(E + N)(D^{[n]} + a_n E) = A^{-1}$, а именно: рассматриваются операторы с меньшими требованиями на ядро $N(x,t)$ по сравнению с требованиями теоремы (11.1). Доказательство равносходимости проводится методом контурного интеграла. Для этого потребовалось получение асимптотики функции Грина оператора $(E + N)(D^{[n]} + bE)$, где b — произвольная константа. Эта асимптотика получается так. Сначала методом возмущения находится асимптотика функции Грина оператора $(E+N)D^{[n]}$ (лемма (12.36)). Этот оператор рассматривается как возмущение $D^{[n]}$. После этого аналогично находится асимптотика функции Грина оператора $(E+N)(D^{[n]}+bE)$ (леммы (12.37) и (12.46)) , рассматриваемого как возмущение $(E+N)D^{[n]}$. Основным результатом §12 является лемма (12.51) о равносходимости разложений по с.п.ф. оператора $(E+N)(D^{[n]}+bE)$ и по системе Уолша. Из этой леммы и следует утверждение теоремы (11.1). В последнем §13 строятся контрпримеры, показывающие точность теоремы (11.1).

В тексте диссертации используются следующие обозначения:

1) $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ — множества комплексных, натуральных и целых чисел;

2) $\|\cdot\|_r = \|\cdot\|_{L_r[0,1]}$ $(1 \le r \le \infty)$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$;

3) δ_{kj} — символ Кронекера ($\delta_{kj} = 1$ при $k = j$ и 0 при $k \neq j$); $\chi(x)$ — функция Хевисайда (она равна 1 при $x \ge 0$ и 0 при $x < 0$); $E(a)$ — целая часть a;

4) $C,\ C_k,\ \tilde{C}, \ldots$ — различные константы; если нужно будет подчеркнуть их зависимость от каких-то величин, то будем писать эти величины в круглых скобках.

Основные результаты диссертации опубликованы в [52–57] и докладывались на семинаре кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики (под руководством А.П. Хромова) и на объединенном семинаре (под руководством Н.П. Купцова) Саратовского Государственного университета, на Межвузовском семинаре по функциональному анализу в г. Ульяновске в августе–сентябре 1979 г., на Всесоюзном симпозиуме по теории апроксимации функций в комплексной области в г. Уфе в мае 1980 г., на семинаре кафедры общей математики в МГУ (под руководством В.А. Ильина и Ш.А. Алимова).

Глава 3

Равносходимость с рядом Уолша-Фурье разложений по собственным функциям одного класса интегральных операторов

В этой главе решается вопрос о том, какие условия нужно наложить на ядро $A(x,t)$ интегрального оператора

$$Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,t \quad (0 \le x \le 1),$$

чтобы имела место равносходимость в метрике пространства $L_\infty[0,1]$ разложений по с.п.ф. оператора A и в обычный ряд Уолша-Фурье. Глава состоит из §10–§13.

В §10 приводятся некоторые сведения из работы [39]. В §11 формулируется основная теорема третьей главы — теорема о равносходимости и находится явный вид оператора A^{-1}. В §12 доказывается теорема о равносходимости. Наконец, в §13 строятся контрпримеры, показывающие точность этой теоремы.

§10. Некоторые предварительные сведения

Обозначим $\mathbb{P} = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Каждое $k \in \mathbb{P}$ обладает единственным двоичным разложением

$$k = \sum_{j=0}^{m_k} k_j 2^j \quad \left(2^{m_k} \le k < 2^{m_k+1},\ m_k \in \mathbb{P},\ k_j \in \{0,1\}\right).$$

Аналогично, каждое $x \in [0,1)$ обладает единственным разложением

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 2^{-j} \quad \left(x_j \in \{0,1\}\right),$$

при этом конечное разложение будет в случае, когда $x = p2^q \in [0,1)$, где $p \in \mathbb{P}$, $q \in \mathbb{N}$. Определим систему функций Уолша-Пэли $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ на $[0,1)$ формулой

$$\psi_k(x) = \exp\left(\pi i \sum_{j=0}^{m_k} k_j x_{j+1}\right). \tag{10.1}$$

Функции $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ образуют ортонормированную систему, полную в любом пространстве $L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$.

Если определить операцию $\oplus$ почленного сложения по модулю 2 чисел $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 2^{-j}$ и $y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j 2^{-j}$ следующим образом

$$x \oplus y := \sum_{j=1}^{\infty} \left((x_j + y_j) \bmod 2\right) 2^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j| 2^{-j}, \tag{10.2}$$

то, как показано в [33],

$$(\forall k \in \mathbb{P})\ \psi_k(x \oplus y) = \psi_k(x)\psi_k(y)$$

для фиксированного $x \in [0,1)$ и почти всех (п.в.) $y \in [0,1)$. Операция $\oplus$ обладает важным свойством, а именно: для любого фиксированного $y \in [0,1)$ и $f(z) \in L_1[0,1]$

$$\int_0^1 f(y \oplus z)\, dz = \int_0^1 f(z)\, dz. \tag{10.3}$$

Кроме того, как отмечено в [38], если $f \in L_p[0,1]$ $(1 \le p \le \infty)$ и $g \in L_1[0,1]$, то

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1, \tag{10.4}$$

где

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(x \oplus t) g(t)\, dt = \int\limits_0^1 f(t) g(x \oplus t) dt.$$

Если $f \in L_1[0,1]$, то этой функции можно поставить в соответствие ряд Уолша-Фурье

$$\sum_{k=0}^{\infty} f\hat{}(k) \psi_k(x),$$

где обозначено $f\hat{}(k) = (f, \psi_k)$.

А теперь приведем несколько определений и теорем из [39].

(10.5) Определение. *Если для функции f существует*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m} 2^j \big(f(x) - f(x \oplus 2^{-j-1})\big) = c$$

в некоторой точке $x \in [0,1)$, то c назовём диадной производной от f в точке x и обозначим $f^{[1]}(x) = c$. $f^{[r]}(x)$ при $r \in \mathbb{N}$ определяется по индукции.

Функции Уолша обладают следующим свойством

$$\psi_k^{[r]}(x) = k^r \psi_k(x) \quad (k \in \mathbb{P},\ r \in \mathbb{N}).$$

Кроме того,

$$\big(f^{[r]}\big)\hat{}(k) = k^r f\hat{}(k). \tag{10.6}$$

Введем оператор

$$(I_r f)(x) = \int\limits_0^1 I_r(x \oplus t) f(t)\, dt,$$

где

$$I_r(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)}{k^r}.$$

Этот оператор назовём антидифференциальным оператором r-го порядка. Это название оправдывается следующей теоремой ([39, с. 176]).

(10.7) Теорема. *Для $f \in L_1[0,1]$ и п.в. x справедлива формула*

$$(I_r f)^{[r]}(x) = f(x) - f\hat{}(0).$$

(10.8) Определение. *Положим при $r \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$*

$$\begin{array}{lcl} AW^0[0,1] & = & \big\{f:\ \exists g \in L_1[0,1],\ f(x) - f\hat{}(0) = (I_1 g)(x) \text{ п.в.}\big\},\\ AW^{r-1}[0,1] & = & \big\{f:\ f, f^{[1]}, \dots, f^{[r-1]} \in AW^0[0,1]\big\},\\ W^r_{L_p[0,1]} & = & \big\{f:\ f \in AW^{r-1}[0,1], f^{[r]} \in L_p[0,1]\big\}. \end{array}$$

(10.9) Теорема. *Если $f \in AW^{r-1}[0,1]$, то f диадно дифференцируема r раз и п.в.*

$$f(x) - f\hat{}(0) = (I_r f^{[1]})(x).$$

Договоримся в этой главе наряду с общими обозначениями (см. Введение) использовать следующие дополнительные обозначения:

1) $\mathbb{P}_1 = \{-k^2 : k \in \mathbb{P}\}$;

2) $\lambda = \rho^n$;

3) интегральные операторы и их ядра обозначаются одной и той же буквой;

4) если $f \in L_1[0,1]$, то $f\hat{}(k) = \int_0^1 f(x)\psi_k(x)\,dx$; если $F(x,t) \in L_1\big([0,1]\times[0,1]\big)$, то
$$F\hat{}\hat{}(k,j) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 F(x,t)\psi_k(x)\psi_j(t)\,dt\,dx;$$

5) $D^{[k]}f(x) = f^{[k]}(x)$, $D^{[k]}_x F(x,t) = F^{[k]}_{x^k}(x,t)$;

6) $O_r(h)$ есть такая функция из $L_r[0,1]$, что $\|O_r(h)\|_r \le C|h|$; соответственно определяются $O_r(1)$ и $o_r(1)$.

§11. Формулировка теоремы о равносходимости

Рассмотрим следующий оператор

$$Af = \int\limits_0^1 A(x,t)f(t)\,dt \qquad (x \in [0,1)),$$

действующий в пространстве $L_1[0,1]$, где

$$A(x,t) = I_n(x \oplus t) + V(x,t),$$

$$I_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)}{k^n}, \quad n \geq 2,$$

$\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — система функций Уолша-Пэли, определенная в §10 формулой (10.1), наконец, $\oplus$ — операция почленного сложения по модулю 2, определенная формулой (10.2). Справедлива следующая теорема равносходимости.

(11.1) Теорема. *Предположим*

1) $V(x,t) \in AW^{n-1}[0,1]$ *по* x *для п.в.* t*;*

2) $V_n(x,t) \in W^1_{L_p[0,1]}$ *по* t *для п.в.* x*, где* $V_n(x,t) = V^{[n]}_{x^n}(x,t)$*,* $p > 1$*;*

3) $\|V_{n1}(x,\cdot)\|_p \in L_1[0,1]$*,* $\|V_{n1}(\cdot,t)\|_1 \in L_p[0,1]$*, где* $V_{n1}(x,t) = V^{[1]}_{n,t}(x,t)$*;*

4) A^{-1} *существует;*

5) существует константа $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{P}_1$ *такая, что для* $M(x,t) = V_{n1}(x,t) + \delta_{n2} a I_1(x \oplus t)$ *выполняется хотя бы одно из условий*

а) $|M^{\wedge\wedge}(k,j)| \leq \frac{C}{k^\alpha j^\beta}$*, где* $\alpha + \beta > 1$ *и* $\alpha, \beta > 0$*;*

б) $\|M^{\wedge}(\cdot,j)\|_1 \leq \frac{C}{j^\gamma}$*, где* $\gamma > 1$*.*

Тогда существует такое целое число m_0, что для любой функции $f \in L_1[0,1]$

$$\lim_{k\to\infty} \|S_{m_0+k}(f) - w_k(f)\|_\infty = 0, \tag{11.2}$$

где $S_{m_0+k}(f)$ — (m_0+k)-ая частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора A (с.п.ф. оператора A занумерованы в порядке неубывания модулей с.з.; с.з. и с.п.ф. оператора A определяются в соответствии с определениями (1.5)–(1.7), если в них вместо оператора L рассматривать оператор A^{-1}), $w_k(f) = \sum_{s=0}^{k} f\hat{}(s)\psi_s(x)$. Если неравенства в условиях 5а) и 5б) заменить на противоположные, то утверждение (11.2) станет неверным.

Оператор A, очевидно, будет вполне непрерывным интегральным оператором, так как его можно с любой степенью точности приблизить операторами конечного ранга, если учесть, что в силу теоремы (10.9)

$$V(x,t) = V\hat{}\hat{}(0,0) + V\hat{}(x,0) + V\hat{}(0,t) + \int_0^1 I_n(x\oplus\tau) \int_0^1 V_{n1}(\tau,\xi) I_1(\xi\oplus t)\, d\xi\, d\tau.$$

Требование существования A^{-1} необходимо для справедливости утверждения (11.2). В самом деле, предположим противное, то есть A^{-1} не существует, а утверждение (11.2) имеет место. Тогда найдётся функция $f_0 \in L_1[0,1]$ такая, что $f_0 \neq 0$ и $Af_0 = 0$. Но в этом случае для любого $k \in \mathbb{P}$ имеем $S_{m_0+k}(f_0) = 0$ и в силу (11.2) будет $\lim_{k\to\infty} \|w_k(f_0)\|_\infty = 0$, но тогда и подавно

$$\lim_{k\to\infty} \|\omega_k(f_0)\|_2 = \lim_{k\to\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{k} |f_0\hat{}(j)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Следовательно, для всех $j \in \mathbb{P}$ имеем $f_0\hat{}(j) = 0$ и в силу полноты системы Уолша-Пэли в $L_1[0,1]$ будет $f_0 = 0$. Полученное противоречие показывает необходимость требования существования A^{-1}.

Так как вместо оператора A мы будем рассматривать A^{-1}, то найдём явный вид A^{-1}. Но сначала докажем следующие леммы.

(11.3) **Лемма.** $I_1(x) \in L_q[0,1]$ *для любого* $1 \le q < \infty$.

Доказательство. Если $2 \le q < \infty$, то по известной теореме Ф. Рисса ([42, с. 211])

$$\|I_1\|_q \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} |I_1\hat{}(x)|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{q'}}\right)^{\frac{1}{q'}} < \infty,$$

так как $1 < q' \le 2$. Случай $1 \le q < 2$ легко следует из только что рассмотренного. Лемма доказана. $\square$

(11.4) Лемма. *Если* $F(x,t) \in AW[0,1] \times L_1[0,1]$ *и* $\int_0^1 \int_0^1 |F_\tau^{[1]}(\tau,t)|\, d\tau\, dt < \infty$, *то*

$$D_x^{[1]} \int_0^1 F(x,t)\, dt = \int_0^1 F_x^{[1]}(x,t)\, dt. \tag{11.5}$$

Доказательство. В силу теоремы (10.9)

$$\int_0^1 F(x,t)\, dt = \int_0^1 \left(\int_0^1 I_1(x \oplus \tau) F_\tau^{[1]}(\tau,t)\, d\tau + F\hat{}(0,t)\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 I_1(x \oplus \tau) F_\tau^{[1]}(\tau,t)\, d\tau\, dt + \int_0^1 F\hat{}(0,t)\, dt.$$

Учитывая (10.3) и (10.4), можно установить, что

$$\int_0^1 \int_0^1 \left|I_1(x \oplus \tau) F_\tau^{[1]}(\tau,t)\right| d\tau\, dt \le \|I_1\|_1 \int_0^1 \int_0^1 |F_\tau^{[1]}(\tau,t)|\, d\tau\, dt. \tag{11.6}$$

Отсюда в силу леммы (11.3) и условий, наложенных на функцию $F(x,t)$, следует ограниченность интеграла в левой части (11.6). Следовательно,

$$\int_0^1 F(x,t)\, dt = \int_0^1 I_1(x \oplus \tau) \int_0^1 F_\tau^{[1]}(\tau,t)\, d\tau\, dt + \int_0^1 F\hat{}(0,t)\, dt =$$

$$= (I_1, g)(x) + F\hat{}\hat{}(0,0),$$

где $g(x) = \int_0^1 F_x^{[1]}(x,t)\, dt \in L_1[0,1]$. По теореме (10.7) из этого представления следует формула (11.5). Лемма доказана. $\square$

Для нахождения A^{-1} воспользуемся приемом, предложенным А.П. Хромовым в [15,16] при доказательстве теоремы равносходимости с тригонометрическим рядом Фурье для интегрального оператора. Обозначим $A_0 = A$, $A_1 = D^{[1]}A_0 - \alpha_1 A_0, \ldots, A_n = D^{[n]}A_{n-1} - \alpha_n A_{n-1}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — пока произвольные константы. Покажем, что их можно подобрать таким образом, что оператор A_n^{-1} существует. Предположим противное, то есть существует функция $f_1(x) \neq 0$ п.в. такая, что $A_n f_1 = 0$. Тогда

$$D^{[1]}(A_{n-1}f_1) - \alpha_n(A_{n-1}f_1) = 0. \qquad (11.7)$$

Если $\alpha_n \notin \mathbb{P}$, то единственным решением уравнения (11.7) будет функция, равная нулю п.в. ([39, п. 4.1]). Следовательно, $A_{n-1}f_1 = 0$, то есть

$$D^{[1]}(A_{n-2}f_1) - \alpha_{n-1}(A_{n-2}f_1) = 0$$

и т. д. В результате получим, что если $\alpha_j \notin \mathbb{P}$, $j = \overline{1,n}$, то $Af_1 = 0$. Но так как A^{-1} существует, то $f_1 = 0$, а это противоречит нашему предположению. Таким образом, A_n^{-1} существует, если $\alpha_j \notin \mathbb{P}$, $j = \overline{1,n}$.

Так как $\omega_j \notin \mathbb{P}$, $j = \overline{1,n}$, где ω_j — различные корни n-ой степени из -1, то при $n \geq 3$ можно положить $\alpha_j = \omega_j$, $j = \overline{1,n}$. При $n = 2$ полагаем $\alpha_1 = i\sqrt{a}$, $\alpha_2 = -i\sqrt{a}$. В силу условия, наложенного на a, α_1 и α_2 не будут принадлежать $\mathbb{P}$.

Таким образом,

$$A_n = \prod_{j=1}^{n}\big(D^{[1]} - \alpha_j E\big)A = \big(D^{[n]} - a_n E\big)A, \qquad (11.8)$$

где $a_n = 1$ при $n \geq 3$ и $a_2 = a$.

Так как $V(x,t) \in AW^{n-1}[0,1]$ по x для п.в. t и

$$\int_0^1 |V_n(\tau,t)|\,d\tau = \int_0^1 \left|\int_0^1 V_{n1}(\tau,\xi)I_1(\xi \oplus t)\,d\xi\right| d\tau \leq$$

$$\leq \int_0^1 \big\|V_{n1}(\tau,\cdot)\big\|_p\,d\tau \|I_1\|_{p'} < \infty$$

в силу леммы (11.3) и условия 3) теоремы (11.1), что влечет

$$\int_0^1\int_0^1 |V_n(\tau,t)f(t)|\,d\tau\,dt < \infty \quad \big(\forall f(x) \in L_1[0,1]\big),$$

то, воспользовавшись теоремой (10.7) и леммой (11.4), получим на основании (11.8)

$$A_n f = f(x) - f\hat{}(0) + a_n \int_0^1 I_n(x \oplus t) f(t)\, dt + \int_0^1 V_n(x,t) f(t)\, dt +$$

$$+ a_n \int_0^1 V(x,t) f(t)\, dt = (E + \tilde{N}) f, \tag{11.9}$$

где

$$\tilde{N}(x,t) = -1 + a_n I_n(x \oplus t) + V_n(x,t) + a_n V(x,t).$$

Легко видеть, что $\tilde{N}(x,t)$ удовлетворяет свойствам:

1°) $\tilde{N}(x,t) \in W^1_{L_p[0,1]}$ по t для п.в. x, где $p > 1$ и то же самое, что и в формулировке теоремы (11.1);

2°) $\|\tilde{N}_1(\cdot,t)\|_1 \in L_p[0,1]$, $\|\tilde{N}_1(x,\cdot)\|_p \in L_1[0,1]$, где $\tilde{N}_1(x,t) = \tilde{N}_t^{[1]}(x,t)$;

3°) выполняется хотя бы одно из условий:

а) $\left|\tilde{N}_1\hat{}\hat{}(k,j)\right| \le C_1 \frac{1}{k^\alpha j^\beta}$, где $\alpha + \beta > 1$ и $\alpha, \beta > 0$;

б) $\left\|\tilde{N}_1\hat{}(\cdot,j)\right\|_1 \le C_1 \frac{1}{j^\gamma}$, где $\gamma > 1$.

Если обозначить $A_n^{-1} = (E + \tilde{N})^{-1} = E + N$, то в силу (11.8), (11.9) и того, что A^{-1} существует,

$$A^{-1} = (E + N)(D^{[n]} + a_n E).$$

Так как

$$N(x,t) = -\tilde{N}(x,t) - \int_0^1 N(x,\tau)\tilde{N}(\tau,t)\, d\tau, \quad N(x,t) = -\tilde{N}(x,t) - \int_0^1 \tilde{N}(x,\tau) N(\tau,t)\, d\tau,$$

то, воспользовавшись тем, что оператор $\tilde{N}$, очевидно, можно приблизить с любой степенью точности в метрике $\|\cdot\|_{L_1[0,1]\to L_1[0,1]}$ конечномерным оператором, и тем, что $\tilde{N}(x,t)$ удовлетворяет свойствам 1°–3°, можно показать, что этим же свойствам удовлетворяет и $N(x,t)$.

Предположим далее, что $N(x,t)$ удовлетворяет следующим свойствам:

$1^{\circ\circ}$) $N(x,t) \in W^1_{L_p[0,1]}$ по t для п.в. x;

$2^{\circ\circ}$) $\|N_1(x,\cdot)\|_p \in L_1[0,1]$, где $N_1(x,t) = N_t^{[1]}(x,t)$;

$3^{\circ\circ}$) выполняется хотя бы одно из условий:

а) $|N_1\hat{}\hat{}(k,j)| \le C_2 \frac{1}{k^\alpha j^\beta}$, где $\alpha+\beta>1$ и $\alpha,\beta>0$;

б) $\|N_1\hat{}(\cdot,j)\|_1 \le C_2 \frac{1}{j^\gamma}$, где $\gamma>1$.

Эти условия отличаются от условий 1°–3° только тем, что условие $2^{\circ\circ}$ более слабое.

(11.10) Замечание. *Обозначим через $X[0,1]$ или пространство $L_q[0,1]$, $1 \le q < \infty$ или пространство $L^\infty_W[0,1]$ с нормой $\|\cdot\|_\infty$, где $L^\infty_W[0,1])$ есть замыкание линейной оболочки системы $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ по $\|\cdot\|_\infty$. Определим класс Липшица $Lip_W(\varepsilon, X)$, $\varepsilon>0$, как множество функций $f \in X[0,1]$, для которых*

$$\|f(\cdot) - f(\cdot \oplus h)\|_X = O(h^\varepsilon), \quad h \to +0,$$

а W-модуль непрерывности, как

$$\omega_W(f;\delta;X) = \sup_{0<h<\delta} \|f(\cdot) - f(\cdot \oplus h)\|_X.$$

В статье [50] показано, что

$$f \in Lip_W(\varepsilon, X) \iff \omega_W(f;\delta;X) = O(\delta^\varepsilon). \qquad (11.11)$$

Кроме того, лемма 4.1 из [39] утверждает, что если $f \in W^r_{X[0,1]}$, то

$$\omega_W(f;\delta;X)) = O\big(\delta^r \omega_W(f^{[r]};\delta;X)\big). \qquad (11.12)$$

Таким образом, пользуясь (11.11), (11.12) и тем, что

$$|f\hat{}(k)| = O\left(\omega_W\left(f;\frac{1}{k};X\right)\right), \quad k \to \infty,$$

как установлено в [33], можно получать различные достаточные условия для выполнимости условий 1°–3° или $1^{\circ\circ}$–$3^{\circ\circ}$ в терминах диадной прозводной, W-модуля непрерывности и классов Липшица.

§12. Доказательство теоремы равносходимости

Рассмотрим оператор $D^{[n]}$. Из уравнения

$$D^{[n]}y - \lambda y = 0 \tag{12.1}$$

в силу (10.6) следует

$$(k^n - \lambda)y\hat{}(k) = 0, \qquad k \in \mathbb{P}.$$

Так как для системы функций Уолша-Пэли справедлива теорема единственности ([39, Утверждение (2.3)]), то отсюда получим, что уравнение (12.1) имеет нетривиальное решение только тогда, когда $\lambda = k^n$, $k \in \mathbb{P}$, и этим решением будет функция $\psi_k(x)$.

Обозначим резольвенту оператора $D^{[n]}$ через $Q_{0\lambda}$. Тогда если $\lambda \notin \mathbb{P}$ и $y = Q_{0\lambda}f$, то

$$y^{[n]} - \lambda y = f$$

и, следовательно,

$$y = Q_{0\lambda}f = \int_0^1 Q_0(x, t, \lambda)f(t)\,dt,$$

где

$$Q_0(x, t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k(x \oplus t)}{k^n - \lambda}.$$

Рассмотрим в ρ-плоскости область $S_\delta = S \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} K_\delta(j)$, где $S = \{\rho \in \mathbb{C} : -\pi/n \le \arg\rho < \pi/n\}$, $K_\delta(j) = \{\rho \in \mathbb{C} : |\rho - j| \le \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало. Справедливы следующие леммы.

(12.2) Лемма. *Если $z \in W^1_{L_q[0,1]}$, где $q > 1$, а $y \in AW[0,1]$, то*

$$\int_0^1 y^{[1]}(t)z(t)\,dt = \int_0^1 y(t)z^{[1]}(t)\,dt.$$

Доказательство. Пользуясь теоремой (10.9) и свойством (10.6), получим

$$\int_0^1 y^{[1]}(t)z(t)\,dt = \int_0^1 y^{[1]}(t)\int_0^1 I_1(t\oplus\tau)z^{[1]}(\tau)\,d\tau\,dt =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 y^{[1]}(t)I_1(t\oplus\tau)\,dt z^{[1]}(\tau)\,d\tau = \int_0^1 y(t)z^{[1]}(t)\,dt.$$

Таким образом, лемма доказана. □

(12.3) Лемма. *Если* $-1\le b<n-1$, *то при* $\rho\in S_\delta$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^b}{|k^n-\lambda|}\le C(\delta,b)\frac{\ln|\rho|}{|\rho|^{n-1-b}}. \qquad (12.4)$$

Доказательство. Рассмотрим $\rho\in S_\delta$ и $\big||\rho|-k\big|\ge\delta$, $k=1,2,\dots$. Для остальных ρ доказательство аналогично.

а) $b\ne -1$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t)=\frac{t^b}{t^n-\mu},$$

где $\mu=|\lambda|=|\rho|^n$. Очевидно, при $b\ge 0$ имеем $\varphi'(t)<0$ на $\big(0,|\rho|\big)$ и $\big(|\rho|,\infty\big)$, а при $b<0$ имеем $\varphi'(t)\le 0$ на $\big[\sigma|\rho|,|\rho|\big)$ и $\big(|\rho|,\infty\big)$ и $\varphi'(t)\ge 0$ на $\big[0,\sigma|\rho|\big]$, где

$$\sigma=\sqrt[n]{\frac{b}{b-n}}.$$

Следовательно, в случае $b\ge 0$, обозначив $\varkappa=E(|\rho|)$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^b}{|k^n-\mu|}\le -\sum_{k=1}^{\varkappa-2}\varphi(k)-\varphi(\varkappa-1)-\varphi(\varkappa)+\varphi(\varkappa+1)+\sum_{k=\varkappa+2}^{\infty}\varphi(k)\le$$

$$\le -\int_1^{\varkappa-1}\varphi(t)\,dt-\varphi(\varkappa-1)-\varphi(\varkappa)+\varphi(\varkappa+1)+\int_{\varkappa+1}^{\infty}\varphi(t)\,dt. \qquad (12.5)$$

В случае же $b<0$, если положить $\nu=E(\sigma|\rho|)$, будет

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^b}{|k^n-\mu|}\le -\varphi(1)-\sum_{k=2}^{\nu}\varphi(k)-\sum_{k=\nu+1}^{\varkappa-2}\varphi(k)-\varphi(\varkappa-1)-\varphi(\varkappa)+\varphi(\varkappa+1)+\sum_{k=\kappa+2}^{\infty}\varphi(k)\le$$

$$\leq -\varphi(1)-\int_1^{\varkappa-1}\varphi(t)\,dt-\varphi(\varkappa-1)-\varphi(\varkappa)+\varphi(\varkappa+1)+\int_{\varkappa+1}^{\infty}\varphi(t)\,dt. \quad (12.6)$$

Так как по условию $\big||\rho|-\varkappa\big|\geq\delta$ и $\big||\rho|-(\varkappa+1)\big|\geq\delta$, то

$$-\varphi(\varkappa-1)-\varphi(\varkappa)+\varphi(\varkappa+1)=O\Big(\frac{1}{|\rho|^{n-1-b}}\Big); \quad (12.7)$$

$$\varphi(1)=O\Big(\frac{1}{|\rho|^n}\Big). \quad (12.8)$$

Рассмотрим теперь $-\int_1^{\varkappa-1}\varphi(t)\,dt$ и $\int_{\varkappa+1}^{\infty}\varphi(t)\,dt$. Не нарушая общности, можно считать b рациональным числом, так как в противном случае

$$-\int_1^{\varkappa-1}\frac{t^b}{t^n-\mu}\,dt=-\int_1^{\varkappa-1}\frac{t^{b-b_1}t^{b_1}}{t^n-\mu}\,dt\leq-\varkappa^{b-b_1}\int_1^{\varkappa-1}\frac{t^{b_1}}{t^n-\mu}\,dt, \quad (12.9)$$

$$\int_{\varkappa+1}^{\infty}\frac{t^b}{t^n-\mu}\,dt=\int_{\varkappa+1}^{\infty}\frac{t^{b-b_2}t^{b_2}}{t^n-\mu}\,dt\leq\varkappa^{b-b_2}\int_{\varkappa+1}^{\infty}\frac{t^{b_2}}{t^n-\mu}dt, \quad (12.10)$$

где $b>b_1>-1$, $n-1>b_2>b$ и b_1, b_2 уже рациональные числа.

Итак, рассмотрим при $-1+1/l\leq m/l<n-1$, где m и l — целые числа, следующий интеграл

$$\int_c^d\frac{t^{\frac{m}{l}}}{\mu-t^n}\,dt=\frac{l}{|\rho|^{n-1-\frac{m}{l}}}\int_{\left(\frac{c}{|\rho|}\right)^{\frac{1}{l}}}^{\left(\frac{d}{|\rho|}\right)^{\frac{1}{l}}}\frac{x^{l+m-1}\,dx}{1-x^{nl}}. \quad (12.11)$$

Из всех возможных случаев рассмотрим случай $m=2q+1$, $l=2r$, $n=2s$, так как остальные случаи рассматриваются аналогично. Тогда $nl=2n_1$, где $n_1=2sr$, $l+m=2r+2q+1=m_1$. Так как $1-l\leq m<l(n-1)$, то $1\leq m_1<2n_1$ и в силу формулы 2.146(3) из [51]

$$\int\frac{x^{m_1-1}\,dx}{1-x^{2n_1}}=\frac{1}{2n_1}\Bigg(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\sum_{k=1}^{n_1-1}\cos\frac{km_1\pi}{n_1}\ln\left|1-2x\cos\frac{k\pi}{n_1}+x^2\right|+$$

$$+2\sum_{k=1}^{n_1-1}\sin\frac{km_1\pi}{n_1}\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{k\pi}{n_1}}{\sin\frac{k\pi}{n_1}}\Bigg).$$

Но так как

$$\cos\frac{km_1\pi}{n_1}=-\cos\frac{(n_1-k)m_1\pi}{n_1},\quad \cos\frac{k\pi}{n_1}=-\cos\frac{(n_1-k)\pi}{n_1},\quad \cos\frac{k\pi m_1}{n_1}\Big|_{k=\frac{n_1}{2}}=0,$$

то

$$\int \frac{x^{m_1-1}\,dx}{1-x^{2n_1}} = \frac{1}{2n_1}\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \sum_{k=1}^{n_1-1}\cos\frac{km_1\pi}{n_1}\ln\left|\frac{1-2x\cos\frac{k\pi}{n_1}+x^2}{1+2x\cos\frac{k\pi}{n_1}+x^2}\right| + \right.$$

$$\left. +2\sum_{k=1}^{n_1-1}\sin\frac{km_1\pi}{n_1}\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{k\pi}{n_1}}{\sin\frac{k\pi}{n_1}}\right). \qquad (12.12)$$

Из (12.9)–(12.12) следуют оценки

$$\int_1^{\varkappa-1}\frac{t^b\,dt}{t^n-\mu} = O\left(\frac{\ln|\rho|}{|\rho|^{n-1-b}}\right), \qquad (12.13)$$

$$\int_{\varkappa+1}^{\infty}\frac{t^b\,dt}{t^n-\mu} = O\left(\frac{\ln|\rho|}{|\rho|^{n-1-b}}\right). \qquad (12.14)$$

Таким образом, учитывая (12.5)–(12.8), (12.13), (12.14), получим утверждение леммы в этом случае.

б) $b=-1$. В этом случае совершенно так же, как и в случае а), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k|k^n-\mu|} \le C(\delta)\frac{1}{|\rho|^n} + \int_1^{\varkappa-1}\frac{dt}{t(\mu-t^n)} + \int_{\kappa+1}^{\infty}\frac{dt}{t(\mu-t^n)}.$$

Очевидно,

$$\int_1^{\varkappa-1}\frac{dt}{t(\mu-t^n)} = \frac{1}{\mu}\int_1^{\varkappa-1}\frac{dt}{t} - \frac{1}{n\mu}\int_1^{\varkappa-1}\frac{d(\mu-t^n)}{\mu-t^n} = O\left(\frac{\ln|\rho|}{|\rho|^n}\right).$$

Интеграл

$$\int_{\varkappa+1}^{\infty}\frac{dt}{t(t^n-\mu)}$$

оценивается аналогично. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k|k^n-\mu|} = O\left(\frac{\ln|\rho|}{|\rho|^n}\right),$$

а это и есть утверждение леммы в данном случае. Таким образом лемма полностью доказана. □

(12.15) Следствие. *При* $\rho \in S_\delta$

$$\left|Q^{[k]}_{0,x^k}(x,t,\lambda)\right| \le C(\delta)\frac{\ln|\rho|}{|\rho|^{n-1-k}} \quad (k=\overline{0,n-2}). \tag{12.16}$$

(12.17) Следствие. *При* $\rho \in S_\delta$ *и* $1 \le q < +\infty$

$$\left\|Q^{[n-1]}_{0,x^{n-1}}(\cdot,0,\lambda)\right\|_q \le C(\delta,q)\ln|\rho|. \tag{12.18}$$

Доказательство. Очевидно, $Q^{[n-1]}_{0,x^{n-1}}(x,0,\lambda) \in L_q[0,1]$ при $1 \le q < +\infty$ в силу теоремы Ф. Рисса ([42, с. 211]). Так как

$$Q^{[n-1]}_{0,x^{n-1}}(x,0,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k_n-\lambda+\lambda)\psi_k(x)}{k(k_n-\lambda)} = I_1(x) + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k(x)}{k(k_n-\lambda)},$$

то в силу леммы (11.3) и неравенства (12.4) при $b=-1$ отсюда следует оценка (12.18). Следствие доказано. □

Рассмотрим оператор $(E+N)D^{[n]}$, где $N(x,t)$ удовлетворяет услвиям $1^{\circ\circ}$–$2^{\circ\circ}$ и условию:

$\tilde{3}^{\circ\circ}$) выполняется одно из двух условий:

а) $|N_1\hat{}\hat{}(k,j)| \le C_3\frac{1}{k^\alpha j^\beta}$, $\alpha>0$ и $\beta>0$;

б) $\|N_1\hat{}(\cdot,j)\|_1 \le C_3\frac{1}{j^\gamma}$, $\gamma>0$.

Обозначим резольвенту этого оператора через $Q_{1\lambda}$. Покажем, что при $\rho \in S_\delta$ оператор $Q_{1\lambda}$ существует и является интегральным оператором.

Если $y = Q_{1\lambda}f$, то

$$(E+N)y^{[n]} - \lambda y = f. \tag{12.19}$$

Если мы покажем, что уравнение (12.19) однозначно разрешимо, то тем самым докажем существование оператора $Q_{1\lambda}$.

Уравнение (12.19) можно записать, воспользовавшись леммой (12.2) и обозначив $N_1(x,t) = N_t^{[1]}(x,t)$,

$$y^{[n]} - \lambda y = f - N_1 y^{[n-1]}.$$

Считая правую часть известной функцией и помня, что $\rho \in S_\delta$, получим

$$y = Q_{0\lambda} f - Q_{0\lambda} N_1 y^{[n-1]}. \tag{12.20}$$

В силу леммы (11.4) уравнение (12.20) можно продифференцировать $n-1$ раз и получить

$$y^{[n-1]} = Q_{0\lambda}^{[n-1]} f - Q_{0\lambda}^{[n-1]} N_1 y^{[n-1]}, \tag{12.21}$$

где

$$Q_{0\lambda}^{[n-1]} g = \int_0^1 Q_{0,x^{n-1}}^{[n-1]}(x,t,\lambda) g(t)\, dt.$$

Решим это уравнение в пространстве $L_{p'}[0,1]$, где $1/p + 1/p' = 1$, а $p > 1$ и является тем же числом, что и в условии $2^{\circ\circ}$. Покажем, что оператор $M_\lambda = Q_{0\lambda}^{[n-1]} N_1 Q_{0\lambda}^{[n-1]} N_1$ с ядром $M(x,t,\lambda)$ является оператором сжатия из $L_{p'}[0,1]$ в $L_{p'}[0,1]$. Пусть $g \in L_{p'}[0,1]$. Очевидно,

$$M_\lambda g = \int_0^1 Q_{0,x^{n-1}}^{[n-1]}(x,\tau,\lambda) \int_0^1 N_1(\tau,\tau_1) \int_0^1 Q_{0,\tau_1^{n-1}}^{[n-1]}(\tau_1,\tau_2,\lambda) \int_0^1 N_1(\tau_2,t) g(t)\, dt\, d\tau_2\, d\tau_1\, d\tau. \tag{12.22}$$

В силу свойства $2^{\circ\circ}$, оценки (10.4) и следствия (12.17) для п.в. x

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left| Q_{0,x}^{[n-1]}(x,\tau,\lambda) N_1(\tau,\tau_1) Q_{0,\tau_1}^{[n-1]}(\tau_1,\tau_2,\lambda) N_1(\tau_2,t) g(t) \right| dt\, d\tau_2\, d\tau_1\, d\tau \le$$

$$\le \int_0^1 \left| Q_{0,x}^{[n-1]}(x,\tau,\lambda) \right| \|N_1(\tau,\cdot)\|_p\, d\tau \left\| Q_{0,x}^{[n-1]}(\cdot,0,\lambda) \right\|_{p'} \left\| \|N_1(x,\cdot)\|_p \right\|_1 \|g\|_{p'} < \infty.$$

Поэтому для п.в. x в правой части равенства (12.22) можно как угодно переставлять порядок интегрирования. Следовательно, обозначив

$$A_1(x,t) = \int_0^1 \int_0^1 Q_{0,x^{n-1}}^{[n-1]}(x,\tau,\lambda) N_1(\tau,\tau_1) Q_{0,\tau_1^{n-1}}^{[n-1]}(\tau_1,t,\lambda)\, d\tau_1\, d\tau,$$

получим

$$M_\lambda g = \int_0^1 A_1(x,\tau) \int_0^1 N_1(\tau,t) g(t)\, dt\, d\tau$$

и при этом

$$\|M_\lambda g\|_{p'} \le \big\| \|N_1(x,\cdot)\|_p \big\|_1 A_1 \|g\|_{p'}, \tag{12.23}$$

где

$$A_1 = \Big\| \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,1]} |A_1(\cdot,t)| \Big\|_{p'}.$$

На основании леммы (11.4) и того, что $Q^{[n-1]}_{0,\tau_1^{n-1}}(\tau_1,t,\lambda) = Q^{[n-1]}_{0,t^{n-1}}(\tau_1,t,\lambda)$, будем иметь

$$A_1(x,t) = D_x^{[n-1]} D_t^{[n-1]} \int_0^1 \int_0^1 Q_0(x,\tau,\lambda) N_1(\tau,\tau_1) Q_0(\tau_1,t,\lambda)\, d\tau_1\, d\tau = D_x^{[n-1]} D_t^{[n-1]} B(x,t). \tag{12.24}$$

Поменяв знаки $\sum$ и $\int$ в $B(x,t)$, получим

$$B(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi_j(t)}{j^n-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_1\hat{}\hat{}(k,j)\psi_k(x)}{k^n-\lambda}.$$

Так как для любого фиксированного $x \in [0,1)$ ряд по j удовлетворяет теореме 5.6 из [39] о почленном дифференцировании рядов Уолша-Фурье в силу условий на $N_1\hat{}\hat{}(k,j)$ и леммы (12.3), то

$$D_x^{[n-1]} D_t^{[n-1]} B(x,t) = D_x^{[n-1]} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{n-1}\psi_j(t)}{j^n-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k(x) N_1\hat{}\hat{}(k,j)}{k^n-\lambda}. \tag{12.25}$$

Поменяв в (12.25) порядок суммирования и вновь воспользовавшись теоремой 5.6 [39], получим

$$D_x^{[n-1]} D_t^{[n-1]} B(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{n-1}\psi_k(x)}{k^n-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{n-1} N_1\hat{}\hat{}(k,j)\psi_k(t)}{j^n-\lambda}$$

и, следовательно, в силу (12.24) и леммы (12.3)

$$A_1 \le C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{n-1}}{k^\alpha |k^n-\lambda|} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{n-1}}{j^\beta |j^n-\lambda|} \le C(\delta,\alpha,\beta) \frac{\ln^2|\rho|}{|\rho|^{\alpha+\beta}}.$$

Учитывая эту оценку и неравенство (12.23), получим

$$\|M_\lambda g\|_{p'} \le C(N_1,\delta,\alpha,\beta)\frac{\ln^2|\rho|}{|\rho|^{\alpha+\beta}}\|g\|^{p'}, \qquad (12.26)$$

то есть при $|\rho|$ достаточно большом $\|M_\lambda\|_{L_{p'}[0,1]\to L_{p'}[0,1]} < 1$. Следовательно, уравнение (12.21) однозначно разрешимо и

$$y^{[n-1]} = (E-M_\lambda)^{-1}Q_{0\lambda}^{[n-1]}f - (E-M_\lambda)^{-1}Q_{0\lambda}^{[n-1]}N_1Q_{0\lambda}^{[n-1]}f. \qquad (12.27)$$

Очевидно, в силу (12.27), оценки (12.26) и следствия (12.17)

$$y^{[n-1]} = Q_{0\lambda}^{[n-1]}f + O_{p'}\left(\frac{\ln^4|\rho|}{|\rho|^{\alpha+\beta}}\|f\|_1\right). \qquad (12.28)$$

Отсюда и из (12.20) следует

$$y^{[s]} = Q_{0\lambda}^{[s]}f + O\left(\frac{\ln^5|\rho|}{|\rho|^{n-1-s+\alpha+\beta}}\|f\|_1\right), \qquad (12.29)$$

$$Q_{1,x^s}^{[s]}(x,t,\lambda) = Q_{0,x^s}^{[s]}(x,t,\lambda) + O\left(\frac{\ln^5|\rho|}{|\rho|^{n-1-s+\alpha+\beta}}\right), \qquad (12.30)$$

где $s=\overline{0,n-2}$, а $Q_1(x,t,\lambda)$ обозначает ядро оператора $Q_{1\lambda}$.

Пусть теперь $\|N_1\hat{}(\cdot,j)\|_1 \le C/j^\gamma$, где $\gamma>0$. Повторяем предыдущие рассуждения до оценки (12.23) включительно. Далее рассуждаем следующим образом. В силу леммы (11.4)

$$A_1(x,t) = D_t^{[n-1]}\int_0^1\int_0^1 Q_{0,x^{n-1}}^{[n-1]}(x,\tau,\lambda)N_1(\tau,\tau_1)\,d\tau Q_0(\tau_1,t,\lambda)\,d\tau_1 = D_t^{[n-1]}T(x,t),$$

причем мы воспользовались тем, что $D_{\tau_1}^{[n-1]}Q_0(\tau_1,t,\lambda) = D_t^{[n-1]}Q_0(\tau_1,t,\lambda)$. Очевидно,

$$T(x,t) = \sum_{j=0}^\infty \frac{\psi_j(t)}{j^n-\lambda}\int_0^1 Q_{0,x^{n-1}}^{[n-1]}(x,\tau,\lambda)N_1\hat{}(\tau,j)\,d\tau.$$

Так как при $\rho\in S_\delta$

$$\left\|\sum_{j=1}^\infty \frac{j^{n-1}}{|j^n-\lambda|}\int_0^1 \left|Q_{0,x^{n-1}}^{[n-1]}(\cdot,\tau,\lambda)N_1\hat{}(\tau,j)\right|d\tau\right\|_1 \le$$

$$\le C(\delta)\ln|\rho|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^{n-1}\big\|N_1\hat{}(\cdot,j)\big\|_1}{|j^n-\lambda|}\le C(\delta,\gamma)\frac{\ln^2|\rho|}{|\rho|^\gamma}$$

(при получении этой оценки мы воспользовались свойством (10.4), следствием (12.17) и леммой (12.3)), то ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^{n-1}}{|j^n-\lambda|}\int_0^1\left|Q^{[n-1]}_{0,x^{n-1}}(x,\tau,\lambda)N_1\hat{}(\tau,j)\right|d\tau$$

сходится для п.в. $x\in[0,1)$. Поэтому в силу теоремы 5.6 [39]

$$A_1(x,t)=D_t^{[n-1]}T(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^{n-1}\psi_j(t)}{j^n-\lambda}\int_0^1 Q^{[n-1]}_{0,x^{n-1}}(x,\tau,\lambda)N_1\hat{}(\tau,j)\,d\tau$$

и, следовательно

$$A_1\le C(p',\delta,\gamma)\frac{\ln^2|\rho|}{|\rho|^\gamma}. \tag{12.31}$$

Таким образом, из (12.31) и (12.23) получим

$$\|M_\lambda g\|_{p'}\le C(p',\delta,\gamma)\frac{\ln^2|\rho|}{|\rho|^\gamma}\|g\|_{p'}. \tag{12.32}$$

Используя оценку (12.32) вместо (12.26), совершенно так же, как и в предыдущем случае, установим

$$y^{[n-1]}=Q^{[n-1]}_{0\lambda}f+O_{p'}\left(\frac{\ln^4|\rho|}{|\rho|^\gamma}\|f\|_1\right), \tag{12.33}$$

$$y^{[s]}=Q^{[s]}_{0\lambda}f+O\left(\frac{\ln^5|\rho|}{|\rho|^{n-1-s+\gamma}}\|f\|_1\right), \tag{12.34}$$

$$Q^{[s]}_{1,x^s}(x,t,\lambda)=Q^{[s]}_{0,x^s}(x,t,\lambda)+O\left(\frac{\ln^5|\rho|}{|\rho|^{n-1-s+\gamma}}\right), \tag{12.35}$$

где $s=\overline{0,n-2}$.

Таким образом, доказана следующая лемма.

(12.36) Лемма. *Предположим ядро $N(x,t)$ удовлетворяет свойствам $1^{\circ\circ}$–$2^{\circ\circ}$ и $\tilde{3}^{\circ\circ}$, тогда при $\rho\in S_\delta$ и $|\rho|$ достаточно большом резольвента $Q_{1\lambda}$ оператора $(E+N)D^{[n]}$ существует, $Q_{1\lambda}f=\int_0^1 Q_1(x,t,\lambda)f(t)\,dt$ — для любой функции $f\in L_1[0,1]$ и справедливы следующие формулы:*

а) (12.28)–(12.30) в случае $\tilde{3}^{\circ\circ}$ *а),*

б) (12.33)–(12.35) в случае $\tilde{3}^{\circ\circ}$ *б),*

где $y = Q_{1\lambda} f$.

Рассмотрим теперь оператор $(E + N)(D^{[n]} + bE)$, где $b \in \mathbb{C}$ и совершенно произвольно (в частности, при $b = a_n$ получим оператор A^{-1} (при соответствующих условиях на $N(x,t)$), при $b = 0$ получим уже рассмотренный оператор $(E + N)D^{[n]}$). Обозначим резольвенту этого оператора через Q_λ. Справедлива следующая лемма.

(12.37) Лемма. *Если ядро* $N(x,t)$ *удовлетворяет условиям* $1^{\circ\circ}$–$2^{\circ\circ}$ *и* $\tilde{3}^{\circ\circ}$, *то при* $\rho \in S_\delta$ *и* $|\rho|$ *достаточно большом* $Q_\lambda f = \int_0^1 Q_1(x,t,\lambda) f(t)\,dt$, *где* $f \in L_1[0,1]$ *и*

$$Q(x,t,\lambda) = Q_1(x,t,\lambda) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \tag{12.38}$$

Доказательство. Если λ не является с.з. операторов $(E + N)(D^{[n]} + bE)$ и $(E + N)D^{[n]}$ то, очевидно,

$$Q_\lambda = Q_{1\lambda} - bQ_\lambda(E + N)Q_{1\lambda}.$$

Рассмотрим операторное уравнение относительно Φ

$$\Phi = Q_{1\lambda} - b\Phi(E + N)Q_{1\lambda}. \tag{12.39}$$

Покажем, что его решение, если оно существует, совпадает с Q_λ. В самом деле,

$$\Phi = Q_{1\lambda} - b\Phi(E+N)Q_{1\lambda} = \big(E - b\Phi(E+N)\big)Q_{1\lambda} =$$

$$= \bigg(E - \Phi\Big(\big((E+N)(D^{[n]} + bE) - \lambda E\big) - \big((E+N)D^{[n]} - \lambda E\big)\Big)\bigg)Q_{1\lambda} =$$

$$= \bigg(E - \Phi\Big(\big((E+N)(D^{[n]} + bE) - \lambda E\big)Q_{1\lambda} - E\Big)\big((E+N)D^{[n]} - \lambda E\big)\bigg)Q_{1\lambda} =$$

$$= Q_{1\lambda} - \Phi\big((E+N)(D^{[n]} + bE) - \lambda E\big)Q_{1\lambda} + \Phi.$$

Следовательно,

$$Q_{1\lambda} = \Phi\big((E+N)(D^{[n]}+bE)-\lambda E\big)Q_{1\lambda}$$

и для любой функции $f \in AW^{n-1}[0,1] = D_{(E+N)(D^{[n]}+bE)} = D_{(E+N)D^{[n]}}$ будем иметь

$$Q_{1\lambda}\big((E+N)D^{[n]}-\lambda E\big)f = \Phi\big((E+N)(D^{[n]}+bE)-\lambda E\big)Q_{1\lambda}\big((E+N)D^{[n]}-\lambda E\big)f =$$

$$= \Phi\big((E+N)(D^{[n]}+bE)-\lambda E\big)f.$$

Таким образом

$$E = \Phi\big((E+N)(D^{[n]}+bE)-\lambda E\big),$$

то есть $\Phi = Q_\lambda$.

Решим уравнение (12.39) в S_δ. Будем искать его решение в виде интегрального оператора. Переходя к ядрам, получим

$$Q(x,t,\lambda) = Q_1(x,t,\lambda) + \int_0^1 Q(x,t,\lambda)K(\tau,t,\lambda)\,d\tau, \tag{12.40}$$

где

$$K(x,t,\lambda) = -bQ_1(x,t,\lambda) - b\int_0^1 N(x,\tau)Q_1(\tau,t,\lambda)\,d\tau.$$

Зафиксируем $x \in [0,1)$. Так как в силу леммы (12.36) и следствия (12.15)

$$|K(\tau,t,\lambda)| \le C(\delta)\frac{\ln\rho}{|\rho|^{n-1}}, \tag{12.41}$$

то уравнение (12.40) однозначно разрешимо в $L_\infty[0,1]$ при $|\rho|$ достаточно большом и

$$Q(x,t,\lambda) = Q_1(x,t,\lambda) + O\left(\frac{\ln^2|\rho|}{|\rho|^{2n-2}}\right). \tag{12.42}$$

Отсюда получим утверждение доказываемой леммы при $n \ge 3$.

Рассмотрим теперь случай $n = 2$. В силу (12.40)–(12.42) и леммы (12.36)

$$Q(x,t,\lambda) = Q_1(x,t,\lambda) + B_1(x,t,\lambda) + B_2(x,t,\lambda) + o\left(\frac{1}{|\rho|}\right), \tag{12.43}$$

где
$$B_1(x,t,\lambda) = -b\int_0^1 Q_0(x,\tau,\lambda)Q_0(\tau,t,\lambda)\,d\tau,$$
$$B_2(x,t,\lambda) = -b\int_0^1\int_0^1 Q_0(x,\tau,\lambda)N(\tau,\xi)Q_0(\xi,t,\lambda)\,d\xi\,d\tau.$$
Рассуждая так же, как и в лемме (12.3), можно получить
$$|B_1(x,t,\lambda)| = O\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2-\mu)^2}\right) = O\left(\sum_{k=1}^{\varkappa}\frac{1}{(k^2-\mu)^2} + \sum_{k=\varkappa+1}^{2\varkappa}\frac{1}{(k^2-\mu)^2} +\right.$$
$$\left. + \sum_{k=2\varkappa+1}^{\infty}\frac{1}{(k^2-\mu)^2}\right) = O\left(\int_1^{\varkappa}\frac{dt}{(t^2-\mu)^2} + \int_{\varkappa+1}^{2\kappa}\frac{dt}{(t^2-\mu)^2} + \int_{2\varkappa+1}^{\infty}\frac{dt}{(t^2-\mu)^2}\right).$$
Интегралы $\int_1^{\varkappa}$ и $\int_{\varkappa+1}^{2\varkappa}$ оцениваются одинаково. Оценим, например, первый интеграл:
$$\int_1^{\varkappa}\frac{dt}{(\mu-t^2)^2} = \frac{1}{2}\int_1^{\varkappa}\frac{t\,dt^2}{t^2(\mu-t^2)^2} \le \frac{\varkappa}{2}\int_1^{\varkappa^2}\frac{d\tau}{\tau(\mu-\tau)^2} =$$
$$= \frac{\varkappa}{2}\left(\frac{1}{\mu^2}\int_1^{\varkappa^2}\frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{\mu^2}\int_1^{\varkappa^2}\frac{d\tau}{\mu-\tau} + \frac{1}{\mu}\int_1^{\varkappa^2}\frac{d\tau}{(\mu-\tau)^2}\right) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).$$
Далее,
$$\int_{2\varkappa+1}^{\infty}\frac{dt}{(t^2-\mu)^2} = \int_{2\varkappa+1}^{\infty}\frac{dt}{t^4\left(1-(\frac{|\rho|}{t})^2\right)^2} = O\left(\int_{2\varkappa+1}^{\infty}\frac{dt}{t^4}\right) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).$$
Таким образом,
$$|B_1(x,t,\lambda)| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \tag{12.44}$$
Рассмотрим теперь $B_2(x,t,\lambda)$. В силу лемм (12.2) и (12.3)
$$B_2(x,t,\lambda) = -b\int_0^1\int_0^1 Q_0(x,\tau,\lambda)N_1(\tau,\xi)\int_0^1 I_1(\xi\oplus\zeta)Q_0(\zeta,t,\lambda)\,d\zeta\,d\xi\,d\tau =$$
$$= O\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|k^2-\lambda|}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s|s^2-\lambda|}\right) = O\left(\frac{\ln^2|\rho|}{|\rho|^3}\right) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \tag{12.45}$$
Из оценок (12.44)–(12.45) и асимптотики (12.43) следует утверждение доказываемой леммы и в этом случае. Лемма доказана. □

Следующая лемма является простым следствием предыдущей леммы и леммы (12.36).

(12.46) Лемма. *Если ядро $N(x,t)$ удовлетворяет условиям $1^{\circ\circ}$–$3^{\circ\circ}$, то при $\rho \in S_\delta$ и $|\rho|$ достаточно большом*

$$Q(x,t,\lambda) = Q_0(x,t,\lambda) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \tag{12.47}$$

(12.48) Лемма. *Если ядро $N(x,t)$ удовлетворяет условиям $1^{\circ\circ}$–$2^{\circ\circ}$ и $\tilde{3}^{\circ\circ}$, то оператор $(E+N)(D^{[n]}+bE)$, а следовательно и операторы $(E+N)D^{[n]}$ и A^{-1} имеют счетное множество с.з. $\lambda_j = \rho_j^n$, $j = \Lambda, \Lambda+1, \ldots$, $\Lambda \in \mathbb{Z}$, которые, начиная с некоторого номера, однократны. При j достаточно больших $\rho_j \in K_\delta(j)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное достаточно большое $\hat{\lambda} = \hat{\rho}^n \in \mathbb{C}$ и окружность $S_r(\hat{\rho}) = \{\rho : |\rho - \hat{\rho}| = r\}$ такую, что $S_r(\hat{\rho}) \bigcap K_\delta(j) = \emptyset$ $(\forall j \in \mathbb{N})$. Пусть m и m_0 есть кратности с.з. операторов $(E+N)(D^{[n]}+bE)$ и $D^{[n]}$, соответственно, попавших внутрь этой окружности. В силу (12.38) и леммы (12.36)

$$|m - m_0| = \left| -\frac{1}{2\pi i} \int_{S_r(\hat{\rho})} \int_0^1 \big(Q(x,x,\lambda) - Q_0(x,x,\lambda)\big)\, dx\, d\rho \right| = o(1)$$

при $|\hat{\rho}| \to \infty$. Следовательно, $m = m_0$. То, что в конечной части λ-плоскости число с.з. оператора $(E+N)(D^{[n]}+bE)$ конечно, показывается аналогично. Лемма доказана. $\square$

(12.49) Лемма. *Если ядро $N(x,t)$ удовлетворяет условиям $1^{\circ\circ}$–$2^{\circ\circ}$ и $\tilde{3}^{\circ\circ}$, а $f \in AW^{n-1}[0,1]$, то существует целое число m_1 такое, что*

$$\lim_{k\to\infty} \left\| f - \tilde{S}_{m_1+k}(f) \right\|_\infty = 0,$$

где $\tilde{S}_{m_1+k}(f)$ — (m_1+k)-ая частичная сумма ряда Фурье функции f по с.п.ф. оператора $(E+N)(D^{[n]}+bE)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное число $r \in S_\delta$, тогда если $f \in AW^{n-1}[0,1]$, то

$$(E+N)(D^{[n]}+bE)f - r^n f = \big((E+N)(D^{[n]}+bE)f - \lambda f\big) + (\lambda - r^n)f.$$

Обозначим $f_1 = (E+N)(D^{[n]}+bE)f - r^n f$, тогда

$$Q_\lambda f_1 = f + (\lambda - r^n)Q_\lambda f,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \frac{f}{\lambda - r^n}\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} Q_\lambda f\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\frac{Q_\lambda f_1}{\lambda - r^n}\,d\lambda, \tag{12.50}$$

где Γ_k — круговые контуры в λ-плоскости, прообразы которых при отображении $\lambda = \rho^n$ лежат в S_δ. Пусть r_k — радиус Γ_k. Тогда при k достаточно больших в силу (12.50), асимптотики (12.38), леммы (12.36) и оценки (12.16) получим

$$\left\|f - \tilde{S}_{m_1+k}(g)\right\|_\infty \le C(\delta)\|f_1\|_1 \frac{r_k \ln r_k}{r_k^{\frac{n-1}{n}}(r_k - |r|^n)},$$

откуда следует утверждение доказываемой леммы. Лемма доказана. □

(12.51) Лемма. *Если ядро $N(x,t)$ удовлетворяет условиям $1^{\circ\circ}$–$3^{\circ\circ}$, то существует целое число m_1 такое, что для любой функции $f \in L_1[0,1]$*

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\tilde{S}_{m_1+k}(f) - w_k(f)\right\|_\infty = 0. \tag{12.52}$$

Доказательство. В силу асимптотики (12.47)

$$\left\|\tilde{S}_{m_1+k}(f) - \omega_k(f)\right\|_\infty \le C(\delta)\|f\|_1. \tag{12.53}$$

Если $g \in AW^{n-1}[0,1]$, то, очевидно, в силу леммы (12.49)

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\tilde{S}_{m_1+k}(g) - w_k(g)\right\|_\infty = 0. \tag{12.54}$$

Из (12.53)–(12.54) в силу теоремы Банаха–Штейнгауза и того, что множество $AW^{n-1}[0,1]$ всюду плотно в $L_1[0,1]$ следует утверждение (12.52). Лемма доказана. □

Из этой леммы следует справедливость теоремы (11.1).

Аналогичными рассуждениями легко доказывается следующая лемма, которая будет использоваться только при построении контрпримеров (её доказательство опирается на лемму (12.37)).

(12.55) Лемма. *Если ядро $N(x,t)$ удовлетворяет условиям $1^{\circ\circ}$–$2^{\circ\circ}$ и $\tilde{3}^{\circ\circ}$, то существуют целые числа m_1 и m_2 такие, что для любой функции $f \in L_1[0,1]$*

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\tilde{S}_{m_1+k}(f) - \tilde{S}_{1,m_2+k}(f)\right\|_\infty = 0,$$

где $\tilde{S}_{1,m_2+k}(f)$ — (m_2+k)-ая частичная сумма ряда Фурье функции f по с.п.ф. оператора $(E+N)D^{[n]}$, а $\tilde{S}_{m_1+k}(f)$, как и в лемм (12.49), обозначает соответствующую частичную сумму ряда Фурье по с.п.ф. оператора $(E+N)(D^n+bE)$.

§13. Контрпримеры

Прежде, чем строить контрпримеры к теореме (11.1), докажем следующую лемму.

(13.1) Лемма. *Если $0<\theta<1$, то функция*

$$h(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)}{k^\theta}$$

принадлежит пространству $L_q[0,1]$, где $1 \le q < 1/(1-\theta)$.

Доказательство. По лемме 5.2 из [39] ряд

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)}{k^\theta}$$

сходится к функции $h(x) \in L_1[0,1]$ для любого $x \in (0,1)$ и является её рядом Уолша-Фурье. Рассмотрим последовательность частичных сумм

$$h_m(x) = 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\psi_k(x)}{k^\theta}.$$

Применим к $h_m(x)$ преобразование Абеля. Получим

$$\|h_m\|_q \le \sum_{k=1}^{m-1} \left| \frac{1}{k^\theta} - \frac{1}{(k+1)^\theta} \right| \|D_{k+1}\|_q + \frac{1}{m^\theta}\|D_{m+1}\|_q, \tag{13.2}$$

где $D_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j(x)$ — ядро Уолша-Дирихле. Известна оценка $\|D_k\|_1 \le C \ln k$ (см. [33]). Кроме того, очевидно, $\|D_k\|_\infty \le k$. Так как для любого $x(t) \in L_\infty[0,1]$

$$\|x\|_q = \left(\int_0^1 |x(t)||x(t)|^{q-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \le \|x\|_\infty^{\frac{1}{q'}} \|x\|_1^{\frac{1}{q}},$$

то, следовательно,

$$\|D_k\|_q \le C k^{\frac{1}{q'}} \ln^{\frac{1}{q}} k.$$

Учитывая (13.2), отсюда получим

$$\|h_m\|_q \le C \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\ln^{\frac{1}{q}} k}{k^{\theta + \frac{1}{q}}} + \frac{\ln^{\frac{1}{q}} m}{m^{\theta + \frac{1}{q} - 1}} \right) \le C_1,$$

если $1 \le q < 1/(1-\theta)$.

Таким образом, получено, что $|h_m(x)|^q$ сходится п.в. на $[0,1]$ к $|h(x)|^q$ и $\left\|h_m^q\right\|_1 \le C$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Тогда по теореме Фату $\|h^q\|_1 \le C$ и, следовательно, $\|h\|_q < +\infty$. Лемма доказана. □

В силу леммы (12.55), чтобы показать точность условий 5а) и 5б) теоремы (11.1), достаточно построить соответствующие контрпримеры для леммы (12.51) в случае $b = 0$.

Пусть $n = 2$. Рассмотрим $N(x,t) = g(x)h(t)$, где

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)}{k^\alpha}, \qquad h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)}{k^{1+\beta}},$$

и пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)}{k^\theta}.$$

Считаем $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha+\beta+\theta = 1-\varepsilon < 1$, но $2(\alpha+\beta) > 1$. На основании теоремы 5.3 из [39] существует $N_t^{[1]}(x,t) = N_1(x,t)$ и $N_1(x,t) = g(x)h_1(t)$, где

$$h_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(t)}{k^\beta} \in L_p[0,1],$$

причем в силу леммы (13.1) будет $1 \le p < 1/(1-\beta)$. Таким образом, существует число $p > 1$ такое, что $\|N_1(x,\cdot)\|_p \in L_1[0,1]$, то есть $N(x,t)$ удовлетворяет свойствам $1^{\circ\circ}$–$2^{\circ\circ}$ и $\tilde{3}^{\circ\circ}$. Свойство же $3^{\circ\circ}$а) не выполняется. Из доказательства леммы (12.36) и того, что $2(\alpha+\beta) > 1$, следует

$$Q_{1\lambda} f = Q_{0\lambda} f - Q_{0\lambda} N_1 Q_{0\lambda}^{[1]} f + o\left(\frac{1}{|\lambda|}\|f\|_1\right).$$

Отсюда получим

$$\tilde{S}_{1,m_2+m}(f) - w_m(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m} Q_{0\lambda} N_1 Q_{0\lambda}^{[1]} f\, d\lambda + o(1). \tag{13.3}$$

Рассмотрим

$$I_m(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m} Q_{0\lambda} N_1 Q_{0\lambda}^{[1]} f\, d\lambda.$$

Из вида функций $Q_0(x,t,\lambda)$, $Q_{0,x}^{[1]}(x,t,\lambda)$, $f(x)$, $N_1(x,t)$ по теории вычетов следует

$$I_m(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{\substack{j=0\\ j\ne k}}^{\infty} \psi_j(x)\frac{g\hat{}(j)h_1\hat{}(k)f\hat{}(k)k}{j^2-k^2} + \sum_{k=0}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{\infty} \psi_k(x)\frac{g\hat{}(k)h_1\hat{}(j)f\hat{}(j)j}{j^2-k^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{\infty} \psi_j(x)\frac{g\hat{}(j)h_1\hat{}(k)f\hat{}(k)k}{j^2-k^2} + \sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} \psi_j(x)\frac{g\hat{}(j)h_1\hat{}(k)f\hat{}(k)k}{k^2-j^2}.$$

Очевидно, $\|I_m\|_\infty \ge \|I_m\|_{L_\infty[a_m,b_m)}$, где $0 \le a_m < b_m < 1$. Пусть $m = 2^r$, а $[a_m,b_m) = [0,1/2^{rs_r})$, где s_r — некоторое натуральное число, зависящее от r. Тогда на $[0,1/2^{rs_r})$

$$I_{2^r}(x) = \sum_{k=1}^{2^r}\left(\sum_{j=2^r+1}^{2^{rs_r}-1} \frac{g\hat{}(j)h_1\hat{}(k)f\hat{}(k)k}{j^2-k^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=2^{rs_r}}^{\infty} \psi_j(x)\frac{g\hat{}(j)h_1\hat{}(k)f\hat{}(k)k}{j^2-k^2}\right) + \sum_{k=2^r+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{2^r} \frac{g\hat{}(j)h_1\hat{}(k)f\hat{}(k)k}{k^2-j^2},$$

так как на $[0, 1/2^{rs_r})$

$$\psi_j(x) = \exp\left(\pi i \sum_{l=rs_r}^{\infty} j_l x_{l+1}\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } 1 \le j \le 2^{rs_r} - 1; \\ 1 \vee (-1) & \text{при } j \ge 2^{rs_r}. \end{cases}$$

Следовательно, на рассматриваемом интервале

$$I_{2^r}(x) \ge \sum_{k=1}^{2^r} \left(\sum_{j=2^r+1}^{2^{rs_r}-1} \frac{g\hat{}(j) h_1\hat{}(k) f\hat{}(k) k}{j^2 - k^2} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=2^{rs_r}}^{\infty} \frac{g\hat{}(j) h_1\hat{}(k) f\hat{}(k) k}{j^2 - k^2} \right) + \sum_{k=2^r+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^r} \frac{g\hat{}(j) h_1\hat{}(k) f\hat{}(k) k}{k^2 - j^2}. \tag{13.4}$$

Так как при $k = \overline{1, 2_r}$

$$\sum_{k=2^r+1}^{\infty} \frac{g\hat{}(j) h_1\hat{}(k) f\hat{}(k) k}{j^2 - k^2} \le C(r) \sum_{k=2^r+1}^{\infty} \frac{g\hat{}(j)}{j^2 - (2^r)^2} < +\infty,$$

то для любого r найдется $s_r \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{k=2^r+1}^{2^{rs_r}-1} \frac{g\hat{}(j) h_1\hat{}(k) f\hat{}(k) k}{j^2 - k^2} - \sum_{k=2^{rs_r}}^{\infty} \frac{g\hat{}(j) h_1\hat{}(k) f\hat{}(k) k}{j^2 - k^2} \ge 0. \tag{13.5}$$

Следовательно, из (13.4) и (13.5) получим

$$I_{2^r}(x) \ge \sum_{j=0}^{2^r} g\hat{}(j) \sum_{k=2^r+1}^{\infty} \frac{h_1\hat{}(k) f\hat{}(k) k}{k^2 - j^2}$$

(в ряде с положительными членами можно как угодно переставлять члены). Но так как

$$h_1\hat{}(k) = \frac{1}{k^\beta}, \quad g\hat{}(j) = \frac{1}{j^\alpha}, \quad f\hat{}(k) = \frac{1}{k^\theta},$$

то

$$I_{2^r}(x) \ge \sum_{j=0}^{2^r} \frac{1}{j^\alpha} \sum_{k=2^r+1}^{\infty} \frac{k^{1-\beta-\theta}}{k^2 - j^2} \ge \sum_{j=1}^{2^r} \frac{1}{j^\alpha} \sum_{k=2^r+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\theta+\beta}} \ge \int_1^{2^r+1} \frac{dt}{t^\alpha} \int_{2^r+1}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\beta+\theta}} =$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)(\beta+\theta)} \left((2^r+1)^{1-\alpha-\beta-\theta} - \frac{1}{(2^r+1)^{\beta+\theta}} \right) \ge \frac{1}{2(1-\alpha)(\beta+\theta)} 2^{r\varepsilon}$$

при r достаточно больших.

Таким образом, на $[0, 1/2^{rs_r})$

$$I_{2^r}(x) \geq \frac{1}{2(1-\alpha)(\beta+\theta)} 2^{r\varepsilon} \xrightarrow[r\to\infty]{} +\infty$$

и, следовательно, в силу (13.3)

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \tilde{S}_{1,m_2+2^r}(f) - w_{2^r}(f) \right\|_\infty = \infty. \tag{13.6}$$

Требуемый контрпример построен.

Чтобы построить контрпример для случая $3^{\circ\circ}$б) леммы (12.51), где $b=0$, рассмотрим $\alpha > 0$, $0 < \gamma < 1$, $\theta > 0$ и при этом α и θ настолько малы, что $\alpha+\gamma+\theta = 1-\varepsilon < 1$, но $2(\alpha+\gamma) > 1$. Пусть $N(x,t) = g(x)h(t)$, где

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)}{k^\alpha}, \quad h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(t)}{k^{1+\gamma}}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)}{k^\theta}.$$

Очевидно, $N(x,t)$ удовлетворяет свойствам $1^{\circ\circ}$–$2^{\circ\circ}$ и $\tilde{3}^{\circ\circ}$ и не удовлетворяет свойству $3^{\circ\circ}$, так как

$$\left\| N_1\hat{\ }(\cdot, j) \right\|_1 = \|g\|_1 |h_1\hat{\ }(j)| = \|g\|_1 \frac{1}{j^\gamma},$$

где $\gamma < 1$. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, можно показать, что имеет место (13.6). Таким образом, доказательство теоремы (11.1) полностью закончено.

В заключении выражаю благодарность своему научному руководителю Августу Петровичу ХРОМОВУ за постановку задач, руководство работой и обсуждение результатов.

Литература

[1] Рыхлов В. С. *Разложения по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных и интегральных операторов: Дис. ... канд. физ.-матем. наук*, Саратовский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, 1981. – 129 с.

[2] Birkhoff G. D. Boundary value and expansion problem of ordinary linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc*, 1908, vol. 9, pp. 373–395.

[3] Birkhoff G. D. Note on the expansion problems of ordinary linear differential equations, *Rend. Circ. mat. Palermo*, 1913, vol. 36, pp. 115–126.

[4] Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы*, М.: Наука, 1969. – 528 с.

[5] Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1908, vol. 9, p. 219–231.

[6] Tamarkine J. D. Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires et sur la généralisation de la série de Fourier, it Rend. Circ. mat. Palermo, 1912, vol. 34, pp. 345–382.

[7] Stone M. H. A comparison of the series of Fourier and Birkhoff, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1926, vol. 28, pp. 695–761.

[8] Hobson E. W. On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by a series of normal functions, *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2, 1908, vol. 6, p. 349–395.

[9] Stekloff V. A. Solution générale du problème de développement d'une fonction arbitraire en séries suivant les fonctions fondamentales de Sturm–Liouville, *Rend. Accad. Lincei*, 1910, vol. 19, p. 490–496.

[10] Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, I, *Math. Ann.*, 1910, Bd. 69, S. 331–371.

[11] Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, II, *Math. Ann.*, 1911, Bd. 71, S. 38–53.

[12] Тамаркин Я. Д. *О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*, Петроград, 1917. – 308 с.

[13] Tamarkin J.D. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions, *Math. Ztshr.*, 1928, Bd. 27, S. 1–54.

[14] Birkhoff G. D., Langer R. E. The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order, *Proc. Amer. Acad. Arts and Sci.*, 1923, vol. 58, p. 51–128.

[15] Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям интегральных операторов, *Функциональный анализ*, Ульяновск, 1980, вып. 14, с. 187–189.

[16] Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов, *Матем. сборник*, 1981, т. 114 (156), № 3, с. 378–405.

[17] Poincaré H. Sur les équations de la physique mathématique, *Rend.Circ. mat. Palermo*, 1894, vol. 8, p. 57–156.

[18] Ильин В. А. О равномерной расходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье, *Докл. АН СССР*, 1975, т. 223, № 3, с. 548–551.

[19] Ильин В. А. О равносходимости разложений в тригонометрический ряд Фурье и по собственным функциям пучка М. В. Келдыша обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов, *Докл. АН СССР*, 1975, т. 225, № 3, с. 497–499.

[20] Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений, I, *Дифференц. уравнения*, 1980, т. 16, № 5, с. 771–794.

[21] Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений, II, *Дифференц. уравнения*, 1980, т. 16, № 6, с. 980–1009.

[22] Кесельман Г. М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов, *Изв. вузов. Матем.*, 1964, № 2, с. 82–93.

[23] Михайлов В. П. О базисах Рисса в $L_2[0,1]$, *Докл. АН СССР*, 1962, т. 144, № 5, с. 981–984.

[24] Гельфанд И. М. Замечание к работе Н. К. Бари, *Учен. зап. МГУ*, 1951, т. 4, вып. 148, с. 224–225.

[25] Бари Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, *Учен. зап. МГУ*, 1951, т. 4, вып. 148, с. 68–107.

[26] Ломоносов М. И. О разложении по собственным функциям оператора $-\frac{d}{dy}[p(y)\frac{d}{dy}U] + q(y)U = \lambda U$, *Докл. АН СССР*, 1955, т. 105, № 3, с. 412–415.

[27] Ломоносов М. И. Об уравнении $-\frac{d}{dy}[p(y)\frac{d}{dy}U]+q(y)U=\lambda U$, *Зап. матем. отд. физ.-матем.фак-та и Харьков.матем. об-ва*, 1960, т. 26, с. 267–316.

[28] Шин Д. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве, *Докл. АН СССР*, 1938, т. 18, № 8, с. 523–526.

[29] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы: Спектральные операторы*, М.: Мир, 1974. – 664 с.

[30] Walsh J. L A closed set of normal orthogonal functions, *Amer. J. Math.*, 1923, vol. 55, p. 5–24.

[31] Kaczmarz S., Steinhaus H. Le systeme orthogonal de M. Rademacher, *Studia math.*, 1930, t. 2, s. 231–247.

[32] Paley R. E. A. C. A remarkable series of orthogonal functions, *Proc. London Math. Soc.*, 1932, vol. 32, pp. 241–279.

[33] Fine N. J On the Walsh Functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1949, vol. 65, no. 3, pp. 372–414.

[34] Хармут Х. *Теория секвентного анализа*, М.: Мир, 1980. – 576 с.

[35] Gibbs J. E. Some properties of functions on the nonnegative integers less than 2^n, *DES Rept. / Nat. Phys. Lab.*, 1969, no. 3.

[36] Gibbs J. E., Milliard M. J. Walsh fuctions as solutions of a logical differential equation, *DES Rept. / Nat. Phys. Lab.*, 1969, no. 1.

[37] Gibbs J. E., Ireland B. Some generalizations of the logical derivative, *DES Rept. / Nat. Phys. Lab.*, 1971, no. 8.

[38] Butzer P. L., Wagner H. J. Walsh-Fourier series and the concept of a derivative, *Appl. Anal.*, 1973, vol. 3, pp. 29–46.

[39] Butzer P. L., Wagner H. J. On dyadic analysis based on the pointwise pointwise dyadic derivative, *Anal. Math.*, 1975, t. 1, no. 3, pp. 171–196.

[40] Хрыптун В. Г. Разложение в равномерно сходящиеся ряды по собственным функциям, В кн.: *Обратные задачи для дифференциальных уравнений*, Новосибирск, 1972, с. 132–140.

[41] Ульянов П. Л Вложение некоторых классов функций H_p^ω, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1968, т. 32, № 3, с. 649–686.

[42] Бари Н. К. *Тригонометрические ряды*, М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

[43] Рубинштейн А. И. О равенстве Парсеваля, *Изв. вузов. Математика*, 1978, № 6, с. 102–108.

[44] Рисс Ф., Сёкефельви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу*, М.: Мир, 1979. – 592 с.

[45] Натансон И. П. *Теория функций вещественного переменного*, М.: Наука, 1974. – 480 с.

[46] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. *Выпуклые функции и пространства Орлича*, М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.

[47] Тиман А. Ф. *Теория приближения функций действительного переменного*, М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

[48] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*, т. 1, М.: Мир, 1965. – 616 с.

[49] Рогозинский В. В.,Харди Г. Х. *Ряды Фурье*, М.: Физматгиз, 1959. – 156 с.

[50] Morgenthaler G. V. On Walsh-Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1957, vol. 84, p. 472–507.

[51] Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, М.: Физматгиз, 1963. – 1108 с.

[52] Рыхлов В. С. Разложение по собственным функциям одного класса квазидифференциальных операторов, *Дифференциальные уравнения и тория функций*, Саратов: Изд-во СГУ, 1977, вып. 1, с. 151–169.

[53] Рыхлов В. С. Теоремы равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-ой производной, *Дифференциальные уравнения и теория функций*, Саратов: Изд-во СГУ, 1981, вып. 2, с. 57–75.

[54] Рыхлов В. С. Равносходимость с рядом Уолша–Фурье, *Дифференциальные уравнения и теория функций*, Саратов: Изд-во СГУ, 1980, вып. 3, с. 28–31.

[55] Рыхлов В. С. Теорема равносходимости для одного класса дифференциальных операторов, *Всесюз. симпозиум по теории аппроксимации функций в комплексной области:(Тез.докл.)*, Уфа, 1980, с. 120–121.

[56] Рыхлов В. С. Равносходимость для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-ой производной, *Функциональный анализ*, Ульяновск, 1980, вып. 14, с. 113–115.

[57] 56. Рыхлов В. С. Разложение по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных операторов, *Исследования по математике, физике и их приложениям: Тез.докл.*, Уфа, 1981, с. 36–38.