В.С. Рыхлов

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Часть 2. Теоремы равносходимости

научно-методическое пособие

Оглавление

Предисловие автора

При чтении спецкурсов, руководстве курсовыми, бакалаврскими и магистерскими выпускными работами, при работе с аспирантами и соискателями постоянно возникает потребность в быстром введении слушателей в спектральную теорию обыкновенных дифференциальных операторов или некоторые специальные разделы этой теории.

К нашему большому сожалению, имеется не так уж много доступных материалов для этого. Чтобы дополнить эти материалы, издается настоящее пособие, в котором излагается содержание кандидатской диссертации автора [1]. К сожалению, материалы диссертаций, как правило, недоступны массовой аудитории, хотя, как кажется автору, именно диссертации представляют особый интерес для читателей, интересующихся соответствующей тематикой. Это связано с тем, что именно в диссертациях дается подробная история вопроса, четкие постановки решаемых задач и подробное изложения доказательств полученных результатов.

Данный материал, как надеется автор, позволит читателям получить необходимые предварительные сведения из некоторых разделов спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, получить представление о задачах и проблемах, возникающих в этой теории и методах для решения этих задач и проблем.

Дальнейший материал есть изложение кандидатской диссертации автора [1]. В тексте диссертации исправлены выявленные к настоящему времени описки и неточности. Обращаем Ваше внимание на то, что все исторические сведения и цитированная литература относятся к моменту написания этой диссертации. Ради удобства, излагаемый материал разбит на три части в соответствии с главами диссертации (часть 1, часть 2, часть 3). В части 2 настоящего пособия излагаются введение диссертации и глава 2.

Введение

Многие вопросы современной математики, механики и физики приводят к спектральному анализу несамосопряженных операторов. Спектральный анализ таких операторов включает в себя задачи определения собственных значений (с.з.), собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) или, как часто говорят, корневых функций (к.ф.), разложения произвольной функции в ряд по с.п.ф., вопросы полноты и базисности с.п.ф., равносходимости разложений по с.п.ф. и по известным системам функций и т. д. Такого рода задачи и вопросы всегда возникают, например, при обосновании метода Фурье решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Хотя многие задачи спектрального анализа несамосопряженных операторов еще далеки от окончательного решения, именно в последние три десятилетия он обогатился целым рядом фундаментальных результатов, которые стимулировали исследования в данной области. На это указывают многочисленные публикации.

Настоящая работа посвящена спектральному анализу двух классов несамосопряженных операторов: квазидифференциальных и интегральных. В ней, в частности, решаются вопросы безусловной базисности в $L_2[0,1]$ с.п.ф. квазидифференциальных (к.д.) операторов, равносходимости разложений произвольной функции по с.п.ф. этих операторов и по тригонометрической системе, а также равносходимости с рядом Уолша-Фурье разложений по с.п.ф. интегральных операторов.

Вопросом о разложении по с.п.ф. краевой задачи на отрезке $[0,1]$, порождаемой дифференциальным уравнением n-го порядка

$$\ell(y) - \lambda y = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y - \lambda y = 0 \tag{0.1}$$

и линейно независимыми краевыми условиями

$$U_i(y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y^{(n-j)}(0) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y^{(n-j)}(1) = 0,\ i = \overline{1,n}, \tag{0.2}$$

одним из первых занимался G. Birkhoff [2, 3]. Он доказал, что при некоторых ограничениях на коэффициенты форм $U_i(y)$, называемых условиями регулярности [4, с. 66–67], ряд Фурье по с.п.ф. функции $f(x)$, имеющей ограниченную вариацию, сходится к

$\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big)$ в каждой внутренней точке $[0,1]$, а в точках 0 и 1 ряд сходится к $\alpha f(0+0)+\beta f(1-0)$, где постоянные α и β определяются краевыми условиями. При этом G. Birkhoff предполагал, что $p_1(x)\equiv 0$ или, по крайней мере, из $C^{n-1}[0,1]$, а $p_j(x)$, $j=\overline{2,n}$, непрерывны на $[0,1]$. При получении этого результата G. Birkhoff решил также вопросы о распределении с.з. и об асимптотике собственных функций задачи (0.1)–(0.2). Основным средством для решения этих вопросов была асимптотика системы решений уравнения (0.1) при $|\lambda|\to\infty$, полученная G. Birkhoff'ом в [5].

В дальнейшем Я.Д. Тамаркин усилил результат G. Birkhoff'a, показав в [6], что при $p_1(x)\in C^{n-1}[0,1]$ и регулярных краевых условиях для всякой интегрируемой функции ряды по с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2) и по тригонометрической системе равномерно равносходятся внутри $[0,1]$. Аналогичный результат, но значительно позже, получил M. Stone [7]. Теорема Я.Д. Тамаркина обобщала теоремы о равносходимости E. Hobson'a [8], В.А. Стеклова [9], A. Haar'a [10, 11], доказанные ими для краевых задач второго порядка.

Более общие краевые задачи, а также краевые задачи в пространстве вектор-функций (но опять-таки с условиями регулярности краевых условий и достаточной гладкости коэффициента при $(n-1)$-ой производной или аналогичных ему коэффициентов) изучались Я.Д. Тамаркиным [12, 13], G. Birkhoff'ом и R.E. Langer'ом [14] и многими другими.

Совсем недавно А.П. Хромов [15,16] распространил теорему о равносходимости Я.Д. Тамаркина на интегральные операторы, ядра которых обобщают свойства функции Грина задачи (0.1)–(0.2) с регулярными краевыми условиями. А.П. Хромов установил, что такие операторы являются в определенном смысле каноническими в классе интегральных операторов, для разложений по с.п.ф. которых имеет место равносходимость с тригонометрическим рядом. Случай $p_1(x)\notin C^{n-1}[0,1]$ А.П. Хромовым не рассматривался.

В основе перечисленных выше результатов лежал метод Пуанкаре–Коши [17] или, по-другому, метод контурного интеграла. Другой подход к проблеме равносходимости продемонстрировал В.А. Ильин [18–21]. При получении своих результатов он существенно использовал формулу среднего значения. В.А. Ильин доказал равномерную равносходимость с тригонометрическим рядом разложений в биортогональный ряд по с.п.ф. произвольного несамосопряженного дифференциального оператора, порожденного выражением $\ell(y)$, с произвольными краевыми условиями, обеспечивающими некоторое асимптотическое поведение с.з. Доказанные В.А. Ильиным теоремы формулируются в терминах условий на коэффициенты $\ell(y)$ и функции биортогональной системы и охватывают ранее известные результаты, касающиеся равносходимости, в частности, случаи регулярных краевых условий. Более того, эти теоремы впервые устанавливают локальный характер не только требований на разлагаемую функцию, но и требований на коэффициенты $\ell(y)$ и функции биортогональной системы.

В начале 60-х годов Г.М. Кесельманом [22] и В.П. Михайловым [23] была доказана теорема о безусловной базисности в $L_2[0,1]$ с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2) при условии, что $p_1(x) \in C^{n-1}[0,1]$, остальные коэффициенты суммируемы на $[0,1]$, а краевые условия регулярны при n нечетном и усиленно регулярны при n четном (определение усиленной регулярности см. в [4, с. 71]; оно гарантирует простоту достаточно больших по модулю с.з.). Договоримся далее называть краевые условия, регулярные при n нечетном и усиленно-регулярные при n четном, просто усиленно-регулярными. Как показано в [24], в гильбертовом пространстве понятие базиса безусловной сходимости, удовлетворяющего дополнительному требованию $0 < m \le \|\varphi_j\| \le M < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$, эквивалентно понятию базиса Рисса, которое было введено Н.К. Бари [25].

Все приведенные выше результаты относятся к задачам (0.1)–(0.2) с достаточно гладким коэффициентом $p_1(x)$, а также к обобщениям именно таких задач. Вопрос о влиянии свойств этого коэффициента на равносходимость, безусловную базисность при уменьшении его гладкости до сих пор оставался открытым, если не считать частного случая, рассмотренного М.И. Ломоносовым [26, 27]. Решению этого вопроса и посвящены первая и вторая главы диссертации, причем решается этот вопрос на классе к.д. операторов, определяемых к.д. выражениями n-го порядка на $[0,1]$

$$D_n y = y^{[n]}, \tag{0.3}$$

где

$$D_k y = y^{[k]} = i\frac{d}{dx}y^{[k-1]} + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}(x) y^{[j]},\ k = n, n-1, \ldots, 1,\ D_0 y = y^{[0]} = y,$$

$p_{kj} \in L_1[0,1]$ (выражения $y^{[n]}$ являются частным случаем выражений, введенных Д. Шином [28]) и линейно независимыми краевыми условиями

$$U_i(y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y^{[n-j]}(0) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y^{[n-j]}(1) = 0,\ i = \overline{1,n}. \tag{0.4}$$

В этом случае роль $p_1(x)$ играют коэффициенты $p_{k,k-1}(x)$, $k = \overline{1,n}$.

В первой главе решается вопрос о безусловной базисности в $L_2[0,1]$ с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4). Основным является следующий результат (теорема (5.1)[1]): с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4) образуют базис безусловной сходимости в $L_2[0,1]$, если $p_{k,k-1}(x) \in L_2[0,1]$, $k = \overline{1,n}$, а краевые условия усиленно-регулярны. Следствием этого результата является утверждение о том, что с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2) образуют базис безусловной сходимости

[1]Нумерация параграфов в диссертации сквозная; при этом для формул, лемм, теорем, следствий и замечаний используется единая нумерация, состоящая из двух чисел, заключенных в круглые скобки: первое число — номер параграфа, второе число — номер формулы, леммы и т. д. в этом параграфе.

в $L_2[0,1]$, если $p_1(x) \in L_2[0,1]$, а краевые условия усиленно-регулярны (теорема (5.2)). В [22] для справедливости этого утверждения требовалось, чтобы $p_1(x) \in C^{n-1}[0,1]$. Отметим, что по терминологии [29] к.д. оператор (0.3)–(0.4), удовлетворяющий теореме (5.1), является спектральным оператором.

Во второй главе решается вопрос о равносходимости внутри $[0,1]$ разложений по с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4) с регулярными краевыми условиями и по тригонометрической системе. Основной является теорема (7.1). В ней утверждается, что множество функций $f(x)$, для которых имеет место равносходимость, зависит от свойств коэффициентов $p_{k,k-1}(x)$, $k = \overline{1,n}$, а именно: если, например, $p_{k,k-1}(x) \in L_r[0,1]$, то равносходимость имеет место для функций $f(x) \in L_q[0,1]$, где $1/r + 1/q < 1$; если $p_{k,k-1}(x) \in C[0,1]$ и $\omega(p_{k,k-1};\delta)_{C[0,1]} = O(\ln^{-\alpha}\frac{1}{\delta})$, где $\omega(p_{k,k-1};\delta)_{C[0,1]}$ есть модуль непрерывности функции $p_{k,k-1}(x)$ в метрике $C[0,1]$, то равносходимость имеет место для функций $f(x) \in L_1[0,1]$, таких, что $\omega(f;\delta)_{L_1[0,1]} = O(\ln^{-\beta}\frac{1}{\delta})$, где $\alpha + \beta > 1$, и наоборот. При этом, если в первом случае условие на r и q заменить на противоположное, а именно: $1/r + 1/q > 1$, то утверждение теоремы станет неверным. Аналогично, во втором и третьем случае утверждение теоремы станет неверным, если $\alpha + \beta < 1$. Следствием этой теоремы является теорема (7.3) о равносходимости разложений по с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2) с регулярными краевыми условиями и по тригонометрической системе, формулировка которой дословно повторяет формулировку теоремы (7.1), но только вместо $p_{k,k-1}(x)$, $k = \overline{1,n}$, берется коэффициент $p_1(x)$. Для сравнения теоремы (7.3) с теоремой Я.Д. Тамаркина рассмотрим случай $f(x) \in L_1[0,1]$ (Я.Д. Тамаркин рассматривал именно этот случай). Из теоремы (7.3) следует, что для равносходимости достаточно, например, чтобы $\omega(p_1;\delta)_{C[0,1]} = O(\ln^{-\alpha}\frac{1}{\delta})$, где $\alpha > 1$. В теореме Тамаркина для этого требовалось, чтобы $p_1(x) \in C^{n-1}[0,1]$. Отметим, что из результата М.И. Ломоносова [27] следует равносходимость для задачи (0.1)–(0.2) второго порядка с распадающимися краевыми условиями при $p_1(x) \in L_\infty[0,1]$ и $f(x) \in L_2[0,1]$. В теореме (7.3) для этого достаточно, чтобы $p_1(x) \in L_r[0,1]$ и $f(x) \in L_2[0,1]$, где $1/r + 1/2 < 1$ или $r > 2$.

В третьей главе изучается равносходимость с рядом Уолша–Фурье разложений по с.п.ф. одного класса интегральных операторов. Система функций Уолша была введена и исследована J. Walsh'ем [30]. Изучение этой системы, затем, продолжили S. Kaczmarz и H. Steinhaus [31], R. Paley [32], N. Fine [33] и многие другие. В последнее время вновь возрос интерес к этой системе функций. Она нашла применение в вычислительной технике и некоторых разделах физики [34]. В конце 60-х годов J. Gibbs и его сотрудники M. Millard и B. Ireland [35–37] заложили основы диадического анализа, опирающегося на систему функций Уолша. Дальнейшее развитие диадический анализ получил в работах P. Butzer'а и H. Wagner'а [38, 39], которые определили и детально исследовали диадную производную.

Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ есть система функций Уолша в нумерации R. Paley [32] (система функций Уолша–Пэли). Рассмотрим вполне непрерывный оператор, действующий в $L_1[0,1]$

$$Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt \quad (0 \le x \le 1), \tag{0.5}$$

где

$$A(x,t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)\psi_k(t)}{k^n} + V(x,t) \quad (n \ge 2).$$

Так как разложение по с.п.ф. оператора

$$I_n f = \int\limits_0^1 I_n(x,t) f(t)\,dt,$$

где

$$I_n(x,t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)\psi_k(t)}{k^n},$$

есть разложение в обычный ряд Уолша–Фурье, то естественно поставить вопрос, при каких условиях на функцию $V(x,t)$ имеет место равносходимость в метрике $L_\infty[0,1]$ разложений произвольной функции $f(x) \in L_1[0,1]$ по с.п.ф. оператора A и по системе Уолша. Решению этого вопроса и посвящена третья глава. Основным является следующий результат (теорема (11.1)): если существуют некоторые диадные производные по x и по t от функции $V(x,t)$, если коэффициенты Уолша–Фурье этих диадных производных стремятся к нулю с достаточной скоростью, если оператор A^{-1} существует и выполняются некоторые другие условия, то имеет место указанная выше равносходимость. При этом, если все условия на функцию $V(x,t)$ оставить без изменения, кроме условий на скорость стремления к нулю коэффициентов Уолша–Фурье, а последние условия заменить на противоположные, то утверждение теоремы (11.1) станет неверным.

Перейдем теперь к более подробному изложению диссертации.

Первая глава состоит из пяти параграфов (§1–§5). В §1 вводятся необходимые понятия, даются определения и показывается, что оператор, сопряженный к оператору (0.3)–(0.4) принадлежит тому же классу к.д. операторов, что и исходный оператор. В §2 доказывается очень важная для первых двух глав теорема (2.2) об асимптотике системы решений уравнения $y^{[n]} - \lambda y = 0$ при $|\lambda| \to \infty$, учитывающей свойства коэффициентов $p_{k,k-1}(x)$, $k = \overline{1,n}$. Метод получения этой асимптотики аналогичен методу из [5], [4, с. 55–62], но существенным моментом является использование преобразования (2.6). Теорема (2.2), помимо широкого использования ее в дальнейшем, представляет и самостоятельный интерес. Она, в частности усиливает и обобщает на к.д. уравнения соответствующий результат

В.Г. Хрыптуна [40]. В §3 доказывается лемма (3.4), обобщающая лемму Г.М. Кесельмана [22, с. 89–90], а затем, на основе этой леммы и теоремы (2.2), находится асимптотика с.з. оператора (0.3)–(0.4) с регулярными краевыми условиями, учитывающая свойства коэффициентов $p_{k,k-1}(x)$, $k = \overline{1,n}$ (теорема (3.11)). В §4 при помощи системы решений к.д. уравнения, полученной в теореме (2.2), находится асимптотика функции Грина оператора (0.3)–(0.4) (лемма (4.5)). Затем, на основе этой асимптотики методом контурного интеграла доказывается теорема (4.20) о разложении произвольной функции из области определения к.д. оператора с регулярными краевыми условиями в равномерно сходящийся ряд по с.п.ф. этого оператора. Наконец, в следствии (4.24) устанавливается полнота в $L_1[0,1]$ с.п.ф. рассматриваемого класса операторов. В последнем §5 главы на основе предыдущих результатов методом работы [22] доказывается теорема (5.1) о безусловной базисности в $L_2[0,1]$ с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4) и следствие из нее (теорема (5.2)) о безусловной базисности с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2).

Вторая глава состоит из четырех параграфов (§6–§9). В §6 приводятся используемые в дальнейшем понятия и результаты из теории пространств Орлича, теории приближения функций многочленами. На основе результата П.А. Ульянова [41] о вложении некоторых классов функций в пространства Орлича доказывается лемма (6.14). После всего этого доказывается теорема (6.18), аналогичная теореме Х. Штейнгауза [42, с. 111]. В этих теоремах речь идет о том, какие условия нужно наложить на функции $W(x)$ и $f(x)$, чтобы имела место равносходимость на $[0,1]$ или хотя бы внутри $[0,1]$ для $W\sigma_s(f)$ и $\sigma_s(Wf)$, где $\sigma_s(f)$ обозначает s-ую частичную сумму тригонометрического ряда функции $f(x)$. Теорема (6.18), помимо использования ее в дальнейшем, представляет самостоятельный интерес, тем более, что строятся контрпримеры, показывающие точность этой теоремы. В §7 формулируется теорема (7.1) о равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4), а также следствие из нее (теорема (7.3)) для оператора (0.1)–(0.2). После этого доказывается лемма об оценках норм интегральных операторов, действующих из $L_p[0,1]$ ($1 < p \leq \infty$) в $L_\infty[0,1]$, ядрами которых являются квазипроизводные от функции Грина оператора (0.3)–(0.4) с регулярными краевыми условиями. Аналогичную лемму в случае краевой задачи (0.1)–(0.2) впервые доказал и использовал А.П. Хромов в доказательстве теоремы о равносходимости для интегральных операторов [15, 16]. Далее, в §7 вводится обыкновенный дифференциальный оператор первого порядка в пространстве вектор-функций, тесно связанный с к.д. оператором (0.3)–(0.4), и устанавливается связь между компонентами его функции Грина (она является матрицей-функцией) и квазипроизводными от функции Грина оператора (0.3)–(0.4) (лемма (7.10)). После этого на основе теорем (2.2), (4.20), (6.18), лемм (4.5), (7.5), (7.10) доказываются две леммы, из которых и следуют утверждения теорем (7.1) и (7.3). В первой из этих лемм (лемма (7.13)) устанавливается равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по с.п.ф. оператора (0.3)–(0.4), у которого все коэффициенты, кроме $p_{k,k-1}(x)$, $k=\overline{1,n}$, равны нулю. Во второй (лемма (7.52)) — равносходимость разложений по с.п.ф. двух к.д. операторов, у которых коэффициенты $p_{k,k-1}(x)$ одинаковы. Леммы доказываются методом контурного интеграла. Для того, чтобы получить формулу, выражающую резольвенту возмущенного оператора через резольвенту исходного оператора, потребовалось использование того факта, что к.д. оператор является частным случаем обыкновенного дифференциального оператора первого порядка в пространстве вектор-функций. В §8 строятся контрпримеры, показывающие точность теоремы (7.1). Здесь вновь существенно используется лемма (7.5). Центральное место в этом параграфе занимает лемма (8.29) о расходимости одной числовой последовательности. В ее доказательстве используются некоторые факты из статьи А.И. Рубинштейна [43]. Наконец, в последнем §9 второй главы доказывается теорема (9.1), которая обобщает теорему (7.1) на тот случай, когда условия, наложенные на функции $p_{k,k-1}(x)$, выполняются не на всем отрезке $[0,1]$, а лишь на некотором $[a,b]\subset[0,1]$.

Третья глава состоит из четырех параграфов (§10–§13). В §10 приводятся некоторые сведения из [39], в частности, определение и основные свойства диадной производной. В §11 формулируется теорема (11.1) о равносходимости с рядом Уолша–Фурье. Затем показывается, что требование существования A^{-1} является совершенно необходимым для равносходимости, и находится явный вид этого оператора. Оказывается, что

$$A^{-1}=(E+N)(D^{[n]}+a_nE),$$

где $Nf=\int_0^1 N(x,t)f(t)dt$, $N(x,t)$ выражается через диадные производные от $V(x,t)$ (см. формулу (0.5)), $D^{[n]}$ есть оператор n-кратного диадного дифференцирования, наконец, a_n есть некоторая константа. Метод обращения A аналогичен методу А.П. Хромова [15,16], но только вместо обычной производной используется диадная производная и ее свойства. В §12 доказывается теорема (11.1). Основной идеей доказательства является использование явного вида оператора A^{-1}, найденного в §11. Идея использования явного вида обратного оператора при доказательстве теорем равносходимости для интегральных операторов принадлежит А.П. Хромову [15, 16]. Основная часть §12 посвящена доказательству равносходимости для более широкого класса операторов, чем $(E+N)(D^{[n]}+a_nE)=A^{-1}$, а именно: рассматриваются операторы с меньшими требованиями на ядро $N(x,t)$ по сравнению с требованиями теоремы (11.1). Доказательство равносходимости проводится методом контурного интеграла. Для этого потребовалось получение асимптотики функции Грина оператора $(E+N)(D^{[n]}+bE)$, где b — произвольная константа. Эта асимптотика получается так. Сначала методом возмущения находится асимптотика функции Грина оператора

$(E+N)D^{[n]}$ (лемма (12.36)). Этот оператор рассматривается как возмущение $D^{[n]}$. После этого аналогично находится асимптотика функции Грина оператора $(E+N)(D^{[n]}+bE)$ (леммы (12.37) и (12.46)) , рассматриваемого как возмущение $(E+N)D^{[n]}$. Основным результатом §12 является лемма (12.51) о равносходимости разложений по с.п.ф. оператора $(E+N)(D^{[n]}+bE)$ и по системе Уолша. Из этой леммы и следует утверждение теоремы (11.1). В последнем §13 строятся контрпримеры, показывающие точность теоремы (11.1).

В тексте диссертации используются следующие обозначения:

1) $\mathbb{C},\ \mathbb{N},\ \mathbb{Z}$ — множества комплексных, натуральных и целых чисел;

2) $\|\cdot\|_r = \|\cdot\|_{L_r[0,1]}$ $(1 \le r \le \infty)$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$;

3) δ_{kj} — символ Кронекера ($\delta_{kj}=1$ при $k=j$ и 0 при $k\ne j$); $\chi(x)$ — функция Хевисайда (она равна 1 при $x\ge 0$ и 0 при $x<0$); $E(a)$ — целая часть a;

4) $C,\ C_k,\ \tilde{C},\ldots$ — различные константы; если нужно будет подчеркнуть их зависимость от каких-то величин, то будем писать эти величины в круглых скобках.

Основные результаты диссертации опубликованы в [52–57] и докладывались на семинаре кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики (под руководством А.П. Хромова) и на объединенном семинаре (под руководством Н.П. Купцова) Саратовского Государственного университета, на Межвузовском семинаре по функциональному анализу в г. Ульяновске в августе–сентябре 1979 г., на Всесоюзном симпозиуме по теории апроксимации функций в комплексной области в г. Уфе в мае 1980 г., на семинаре кафедры общей математики в МГУ (под руководством В.А. Ильина и Ш.А. Алимова).

Глава 2

Равносходимость разложений по собственным функциям квазидифференциальных операторов с тригонометрическим рядом Фурье

В этой главе находятся условия на коэффициенты $p_{k,k-1}(x)$ $(k = \overline{1,n})$ к.д. оператора (1.1)–(1.2) и на разлагаемую функцию $f(x)$, при которых имеет место равномерная внутри отрезка $[0,1]$ равносходимость этой функции в ряд Фурье по с.п.ф оператора (1.1)–(1.2) и в обычный тригонометрический ряд Фурье по системе $\{\exp(2k\pi ix)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$. Глава состоит из §6–§9.

В начале §6 приводятся некоторые сведения из теории пространств Орлича и теории приближения функций многочленами, доказываются некоторые вспомогательные леммы. Затем получается результат, аналогичный теореме Х. Штейнгауза [42, с. 111]. В §7 доказывается обобщение леммы А.П. Хромова [15,16] об оценках норм интегральных операторов, ядрами которых являются производные от функции Грина дифференциального оператора (0.1)–(0.2). Затем вводится обыкновенный дифференциальный оператор первого порядка в пространстве вектор-функций, тесно связанный с к.д. оператором (1.1)–(1.2), и устанавливается связь между функциями Грина этих двух операторов. После этого доказывается основная теорема второй главы — теорема о равносходимости разложений по с.п.ф. оператора (1.1)–(1.2) и в обычный тригонометрический ряд Фурье. В §8 строятся контрпримеры, показывающие точность теоремы о равносходимости. Наконец, в §9 доказывается локальная теорема равносходимости. Помимо общих обозначений (см. Введение), в данной главе используются те же дополнительные обозначения, что и в первой главе (см. §1).

§6. Аналог теоремы Х. Штейнгауза

Обозначим через $\sigma_m(f)$ — m-ую частичную сумму обычного тригонометрического ряда Фурье на отрезке $[0, 1]$. Х. Штейнгауз в 1913 году доказал следующую теорему [42, с. 111].

(6.1) Теорема (Х. Штейнгауз). *Если $f \in L_1[0,1]$, W удовлетворяет условию Липшица порядка 1 на $[0, 1]$ и обе функции периодичны, то*

$$\lim_{m\to\infty} \|W\sigma_m(f) - \sigma_m(Wf)\|_{C[0,1]} = 0.$$

В дальнейшем потребуются результаты, которые аналогичны этой теореме. Прежде чем их сформулировать, докажем несколько лемм. Но сначала приведем некоторые факты из [46].

(6.2) Определение. *Функция $M(u)$ называется N-функцией, если она допускает представление*

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)\, dt,$$

где $p(t)$ — положительная при $t > 0$, непрерывная справа при $t \geq 0$, неубывающая функция, удовлетворяющая условиям

$$p(0) = 0, \quad p(\infty) = \lim_{t\to\infty} p(t) = \infty.$$

(6.3) Определение. *Пусть $p(t)$ удовлетворяет предыдущему определению. Определим функцию $q(s)$ $(s \geq 0)$ равенством*

$$q(s) = \sup_{p(t)\leq s} t.$$

Тогда функции $M(u)$ и $N(v) = \int_0^{|v|} q(s)\, ds$ называются дополнительными друг к другу N-функциями.

(6.4) Определение. *Выпуклую функцию $Q(u)$ будем называть главной частью (гл.ч.) N- функции $M(u)$, если $Q(u) = M(u)$ при больших значениях аргумента.*

(6.5) Определение. *Говорят, что N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию при больших значениях u, если существуют такие постоянные $k > 0$ и $u_0 \geq 0$, что*

$$M(2u) \leq kM(u) \quad (u \geq u_0).$$

Рассмотрим N-функцию $M_\alpha(u)$ $(\alpha > 0)$, обладающую свойством

$$\text{гл.ч. } M_\alpha(u) = u(\ln^+ u)^\alpha =: M_{1\alpha}(u), \tag{6.6}$$

где $\ln^+ u = \ln u$ при $u \geq e$ и $\ln^+ u = 1$ при $0 \leq u \leq e$. Так как $M_\alpha(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то пространство Орлича $L^*_{M_\alpha}[a,b]$ (определение пространства Орлича и его свойства можно найти, например, в [46, с. 83–98]) совпадает с классом функций (см. [46, с. 91])

$$L(\ln^+ L)^\alpha[a,b] = \left\{ f(x) : \int_a^b |f(x)|(\ln^+ |f(x))^\alpha \, dx < +\infty \right\}.$$

Будем обозначать норму пространства $L^*_M[a,b]$ через $\|\cdot\|_M$.

Докажем следующую лемму.

(6.7) Лемма. *Если $g(x) \in L(\ln^+ L)^\alpha[a,b]$ $(\alpha > 0)$, то для любого β, $0 < \beta < \alpha$, существует константа $\eta(\beta)$ такая, что при $|b_1 - a_1| \leq \eta(\beta)$, где $a_1, b_1 \in [a,b]$,*

$$\int_{a_1}^{b_1} |g(x)| \, dx \leq \|g\|_{M_\alpha} \ln^{-\beta} \frac{1}{|b_1 - a_1|}.$$

Доказательство. В силу (6.6) при $u \geq u_1 \geq e$ имеем $M_\alpha(u) = M_{1\alpha}(v)$. Если $v \geq v_1 := u_1 \ln_1^\alpha$, то и $M_\alpha^{-1}(v) = M_{1\alpha}^{-1}(v)$. Пусть $N_\alpha(u)$ — дополнительная N-функция к $M_\alpha(u)$. В силу неравенства Гельдера ((см. [46, с. 91])

$$\int_{a_1}^{b_1} |g(x)| \, dx \leq \|g\|_{M_\alpha} \|\varkappa_{[a_1,b_1]}\|_{N_\alpha}, \tag{6.8}$$

где $\varkappa_{[a_1,b_1]}(x)$ есть характеристическая функция отрезка $[a_1, b_1]$. Из формулы (9.11) ([46, с. 89]) следует при $|b_1 - a_1| \leq 1/v_1$

$$\|\varkappa_{[a_1,b_1]}\|_{N_\alpha} = |b_1 - a_1| M_{1\alpha}^{-1} \left(\frac{1}{|b_1 - a_1|} \right). \tag{6.9}$$

Но $M_{1\alpha}^{-1}(v)$ явно записать нельзя. Оценим эту функцию сверху. Для этого рассмотрим

$$M_{2\beta}(v) = v \ln^{-\beta} v \quad (0 < \beta < \alpha). \tag{6.10}$$

Очевидно, существует число $v_2(\beta) > 0$, такое, что при $v \geq v_2(\beta)$ функция $M_{2\beta}(v)$ не убывает и $M_{1\alpha}(M_{2\beta}(v)) \geq v$, то есть

$$M_{2\beta}(v) \geq M_{1\alpha}^{-1}(v). \tag{6.11}$$

Поэтому в силу (6.9)–(6.11)

$$\|\varkappa_{[a_1,b_1]}\|_{N_\alpha} = \ln^{-\beta} \frac{1}{|b_1 - a_1|} \tag{6.12}$$

при $|b_1 - a_1| \leq \eta(\beta)$, где $\eta(\beta) = \min\{1/v_1, 1/v_2(\beta)\}$. Из (6.12) и (6.8) следует утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$

Пусть $\Theta(l)$ есть часть окружности радиуса l с центром в начале координат, лежащая в угле $\hat{S}$ ρ-плоскости. Простым подсчетом можно убедиться в справедливости следующей леммы.

(6.13) Лемма. *Справедливы равенства*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Theta(l)}\sum_{j=1}^{\nu}\omega_j e^{\rho\omega_j s}\,d\rho=\frac{\sin ls}{\pi s},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Theta(l)}\sum_{j=\nu+1}^{n}\omega_j e^{\rho\omega_j s}\,d\rho=\frac{\sin ls}{\pi s},$$

где s — любое положительное число, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Обозначим через $\omega_1(f,\delta)$ $(0\le\delta\le 1)$ модуль непрерывности в $L_1[0,1]$ функции f, то есть

$$\omega_1(f,\delta)=\sup_{h\le\delta}\int_0^{1-h}|f(t+h)-f(t)|\,dt,$$

а через $\omega(f,\delta)$ — модуль непрерывности функции f в метрике $C[0,1]$, то есть

$$\omega(f,\delta)=\sup_{h\le\delta}\sup_{t\in[0,1-h]}|f(t+h)-f(t)|.$$

Пусть

1) $H_1^{\alpha}[0,1]=\left\{f\in L_1[0,1]:\ \omega_1(f,\delta)=O\left(\frac{1}{\ln^{\alpha}\frac{1}{\delta}}\right)\right\}$ при $\alpha>0$,

$H_1^{0}[0,1]=L_1[0,1]$;

2) $H_{\infty}^{\alpha}[0,1]=\begin{cases}\tilde{H}_{\infty}^{\alpha}[0,1] \text{ при } 0\le\alpha\le 1;\\ \tilde{H}_{\infty}^{\alpha}[0,1]\cup V[0,1] \text{ при } \alpha>1,\end{cases}$

где

$$\tilde{H}_{\infty}^{\alpha}[0,1]=\left\{f\in C[0,1]:\ \omega(f,\delta)=O\left(\frac{1}{\ln^{\alpha}\frac{1}{\delta}}\right)\right\}$$

при $\alpha>0$, $\tilde{H}_{\infty}^{0}[0,1]=L_{\infty}[0,1]$, $V[0,1]$ — пространство функций ограниченной вариации на $[0,1]$. Аналогично можно определить пространства $H_1^{\alpha}[a,b]$, $H_{\infty}^{\alpha}[a,b]$.

(6.14) Лемма. *Если $f\in H_1^{\alpha}[0,1]$ $(\alpha>0)$, то $f\in L(\ln^+ L)^{\alpha_1}[0,1]$, где $0<\alpha_1<\alpha$.*

Доказательство. Так как

$$\omega_1\left(f,\frac{1}{n}\right)\le C(f)\frac{1}{\ln^{\alpha}n},$$

то при $0<\alpha_1<\alpha$ будем иметь

$$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{\ln^{\alpha_1-1}n}{n}\omega_1\left(f,\frac{1}{n}\right)<+\infty.$$

Отсюда в силу следствия 4 из теоремы 2 ([41, с. 674–675]) следует утверждение леммы. Лемма доказана. □

В дальнейшем нам потребуются некоторые результаты из [47]. Сформулируем их в виде леммы.

(6.15) Лемма. *1) Если $f \in L_q[0,1]$ $(1 \le q \le \infty$, здесь $L_\infty[0,1] = C[0,1])$ есть периодическая с периодом 1 функция и $F_m(t)$ — тригонометрический многочлен наилучшего приближения f в $L_q[0,1]$ порядка m, то*

$$E_m(f)_q \le C\omega_q\Big(f, \frac{1}{m+1}\Big) \quad ([47, \text{с. } 338]), \tag{6.16}$$

где $E_m(f)_q$ — наилучшее приближение f в $L_q[0,1]$ тригонометрическими многочленами порядка m,

$$\|F_m^{(s)}\|_q \le m^s \|F_m\|_q \quad ([47, \text{с. } 230]), \tag{6.17}$$

$$\|F_m\|_q \le C\|F_m\|_{\tilde q}, \quad 1 \le q \le \tilde q \le \infty \quad ([47, \text{с. } 243]),$$

$$\|F_m\|_{\tilde q} \le C m^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\tilde q}} \|F_m\|_q, \quad 1 \le q \le \tilde q \le \infty \quad ([47, \text{с. } 243]).$$

2) Если $g \in C[0,1]$, G_m — алгебраический многочлен наилучшего приближения g в $C[0,1]$ порядка m, то

$$E_m(g) \le C\omega\Big(g, \frac{1}{m}\Big) \quad ([47, \text{с. } 269]),$$

где $E_m(g)$ — наилучшее приближение g в $C[0,1]$ алгебраическими многочленами порядка m,

$$\|G_m^{(s)}\|_{C[0,1]} \le m^{2s} \|G_m\|_{C[0,1]} \quad ([47, \text{с. } 239]).$$

(6.18) Теорема. *Пусть $W(x) = W_0 + \int_0^x g(t)\,dt$, $W = \mathrm{const}$, тогда для любого $\delta \in (0, 1/2)$*

$$\lim_{s\to\infty} \|W\sigma_s(f) - \sigma_s(Wf)\|_{C[\delta, 1-\delta]} = 0, \tag{6.19}$$

если выполняется хотя бы одно из условий

1) $g \in L_\infty[0,1]$, $f \in L_1[0,1]$;

2) $g \in L_q[0,1]$, $f \in L_r[0,1]$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$;

3) $g \in H_1^\alpha[0,1]$, $f \in H_\infty^\beta[0,1]$, $\alpha + \beta > 1$.

Если условия 2)–3) заменить на противоположные, то утверждение (6.19) станет неверным.

Доказательство. Так как равносходимость (6.19) изучается внутри интервала (0,1), то в силу принципа локализации ([48, с. 91]), не нарушая общности, можно считать, что g, W и f периодические с периодом 1 функции.

1. Пусть $g \in L_\infty[0,1]$, $f \in L_1[0,1]$. Утверждение (6.19) в этом случае следует из теоремы (6.1).

Обозначим

$$D_s(x) := \frac{\sin 2\pi(s+\frac{1}{2})x}{2\sin \pi x}.$$

Очевидно,

$$A(x,s) := W\sigma_s(f) - \sigma_s(Wf) = 2\int_0^1 f(t)\int_t^x g(\tau)\,d\tau D_s(x-t)\,dt =$$

$$= 2\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\int_{x+t}^x g(\tau)\,d\tau D_s\,dt + O\left(\|f\|_1\|g\|_1\right). \tag{6.20}$$

2. Пусть $g \in L_q[0,1]$, $f \in L_r[0,1]$, $1/q+1/r<1$. Так как

$$|D_s(t)| \le \frac{1}{4|t|}, \quad \left|\int_x^{x+t} g(\tau)\,d\tau\right| \le |t|^{1-\frac{1}{q}}\|g\|_q,$$

то из (6.20) в силу того, что $r'<q$, следует

$$\|A(\cdot,s)\|_{C[\delta,1-\delta]} \le \|g\|_q\|f\|_r\left(\frac{1}{2}\left(\int_{-\delta}^{\delta}\frac{dt}{|t|^{\frac{r'}{q}}}\right)^{\frac{1}{r'}} + C(\delta)\right) = C(\delta,q,r)\|f\|_r\|g\|_q. \tag{6.21}$$

Зафиксируем f и рассмотрим в $L_q[0,1]$ операторы

$$A_s:\ (A_sg)(x) := A(x,s) \quad (x \in [\delta,1-\delta]).$$

Так как $L_\infty[0,1]$ всюду плотно в $L_q[0,1]$, для $h \in L_\infty[0,1]$ имеем $\|A_sh\|_{C[\delta,1-\delta]} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$ (по уже доказанному утверждению теоремы при условии 1)) и в силу (6.21) множество $\{A_sg\}_{s=0}^\infty$ ограничено в $C[\delta,1-\delta]$, то из теоремы Банаха-Штейнгауза следует справедливость (6.19) при выполнении условия 2).

3. Наконец, пусть $g \in H_1^\alpha[0,1]$, $f \in H_\infty^\beta[0,1]$, $\alpha+\beta>1$. Рассмотрим случай $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$. В остальных случаях доказательство упрощается. Пусть F_m — тригонометрический многочлен наилучшего приближения для f в $C[0,1]$ порядка m. Из (6.16) и определения $H_\infty^\beta[0,1]$ следует

$$E_m(f) \le C(f)\frac{1}{\ln^\beta m}. \tag{6.22}$$

Рассмотрим α_1, α_2 такие, что $0<\alpha_2<\alpha_1<\alpha$, но $\alpha_2+\beta>1$. В силу лемм (6.14) и (6.7) при $|t|<\eta(\alpha_2)$

$$\left|\int_{x+t}^x g(\tau)\,d\tau\right| \le \|g\|_{M_{\alpha_1}}\frac{1}{\ln^{\alpha_2}\dfrac{1}{|t|}}. \tag{6.23}$$

Не нарушая общности, можно считать $\delta<\eta(\alpha_2)$. Обозначив $f_m(x) := f(x)-F_m(x)$, получим

$$2\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\int_{x+t}^x g(\tau)\,d\tau D_s(t)\,dt = 2\int_{-\delta}^{\delta} f_m(x+t)\int_{x+t}^x g(\tau)\,d\tau D_s(t)\,dt +$$

$$+2\int_{-\delta}^{\delta} F_m(x+t)\int_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau D_s(t)\,dt = B_{1m}(x,s)+B_{2m}(x,s). \tag{6.24}$$

Из (6.22) и (6.23) следует

$$\|B_{1m}(\cdot,s)\|_{C[\delta,1-\delta]} \le C(f,\delta)\|g\|_{M_{\alpha_1}}\frac{1}{\ln^{\beta} m}\int_0^1 \frac{|\sin 2\pi(s+\frac12)t|}{t\ln^{\alpha_2}\frac{2}{t}}\,dt. \tag{6.25}$$

Далее, аналогично рассуждениям [48, с. 115], получим при $a_s = \frac{1}{2(s+\frac12)}$

$$\int_0^1 \frac{|\sin 2\pi(s+\frac12)t|}{t\ln^{\alpha_2}\frac{2}{t}}\,dt = \sum_{k=0}^{2s}\int_{ka_s}^{(k+1)a_s}\frac{|\sin 2\pi(s+\frac12)t|}{t\ln^{\alpha_2}\frac{2}{t}}\,dt =$$

$$= C(\alpha_2) + \int_0^{a_s}\sin 2\pi\Big(s+\frac12\Big)t\sum_{k=0}^{2s}\frac{1}{(t+ka_s)\ln^{\alpha_2}\frac{2}{t+ka_s}}\,dt \le$$

$$\le C(\alpha_2) + 2\sum_{k=2}^{2s+1}\frac{1}{k\ln^{\alpha_2}\frac{2(2s+1)}{k}} \le C_1(\alpha_2)\ln^{1-\alpha_2} s. \tag{6.26}$$

Таким образом, из (6.25) и (6.26) получим

$$\|B_{1m}(\cdot,s)\|_{C[\delta,1-\delta]} \le C(f,\delta,\alpha_2)\|g\|_{M_{\alpha_1}}\frac{\ln^{1-\alpha_2} s}{\ln^{\beta} m}. \tag{6.27}$$

Оценим теперь $\|B_{2m}(\cdot,s)\|_{C[\delta,1-\delta]}$. Представим $B_{2m}(x,s)$ в виде

$$B_{2m}(x,s) = \int_0^{\delta} + \int_{-\delta}^{0} = E_{1m}(x,s) + E_{2m}(x,s). \tag{6.28}$$

Рассмотрим, например, $E_{1m}(x,s)$, так как второе слагаемое оценивается аналогично. Очевидно,

$$E_{1m}(x,s) = 2\int_0^{\delta} F_m(x+t)\int_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau \hat{D}_s(t)\,dt + O\left(\|f\|_1\|g\|_1\right), \tag{6.29}$$

где

$$\hat{D}_s(t) = \frac{\sin 2\pi(s+\frac12)t}{2\pi t}.$$

Обозначим через Θ_s контур $\Theta(2\pi(s+\frac12))$. В силу леммы (6.13)

$$2\int_0^{\delta} F_m(x+t)\int_{x+t}^{x} g(\tau)d\tau\hat{D}_s(t)\,dt = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Theta_s}\sum_{j=1}^{\nu}\int_0^{\delta} F_m(x+t)\int_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau\omega_j e^{\rho_j t}\,dt\,d\rho.$$

Проводя в каждом слагаемом два раза интегрирование по частям по t и пользуясь неравенством (6.17), получим

$$\left\|2\int_0^{\delta} F_m(x+t)\int_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau\hat{D}_s(t)\,dt\right\|_{C[\delta,1-\delta]} \le C(n)\|g\|_1\|f\|_{\infty}\left(1+\frac{m^2}{s}\right). \tag{6.30}$$

Из (6.28)–(6.30) следует

$$\|B_{2m}(\cdot,s)\|_{C[\delta,1-\delta]} \le C(n)\|g\|_1\|f\|_\infty\left(1+\frac{m^2}{s}\right). \tag{6.31}$$

Таким образом, из (6.20), (6.24), (6.27), (6.31) следует

$$\|A(\cdot,s)\|_{C[\delta,1-\delta]} \le C(f,\delta,\alpha_2,n)\|g\|_{M_{\alpha_1}}, \tag{6.32}$$

если согласовать m и s формулой $m=E(\sqrt[4]{s})$ и учесть, что $\alpha_2+\beta>1$.

Так как N-функция $M_{\alpha_1}(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то множество ограниченных функций всюду плотно в пространстве $L^*_{M_{\alpha_1}}[0,1]$ ([46, с. 98]). Для завершения доказательства случая 2) теоремы осталось воспользоваться оценкой (6.32), случаем 1) теоремы и теоремой Банаха-Штейнгауза.

Покажем теперь точность условий 2)–3). Предположим, что f — четная, а g — нечетная функции относительно 1/2. Тогда

$$A\left(\frac12,s\right)=2\int_0^{1/2}f_1(t)\int_0^t g_1(\tau)\,d\tau\,dt+4\sum_{k=1}^{s}\int_0^{\frac12}f_1(t)\int_0^t g_1(\tau)\,d\tau\cos 2k\pi t\,dt, \tag{6.33}$$

где $f_1(t)=f(1/2-t)$, $g_1(t)=g(1/2-t)$ $(0\le t\le 1/2)$.

Пусть $q>1$ и $r>1$ таковы, что $1/q+1/r>1$. Построим такие функции $f\in L_r[0,1]$ и $g\in L_q[0,1]$, что последовательность $\{A(1/2,s)\}$ для них расходится. Для этого рассмотрим $q_1>q$, $r_1>r$, но по-прежнему $1/q_1+1/r_1>1$, и положим

$$f_1(t)=t^{-1/r_1},\quad g_1(t)=t^{-1/q_1}\quad (0\le t\le 1/2).$$

Тогда, очевидно, $f\in L_r[0,1]$, $g\in L_q[0,1]$. Кроме того,

$$B(s)=\frac1s\sum_{j=0}^{s-1}A\left(\frac12,j\right)=\frac2s\int_0^{1/2}f_1(t)\int_0^t g_1(\tau)\,d\tau\left(\frac{\sin\pi st}{\sin\pi t}\right)^2dt$$

и, следовательно,

$$B(s)\ge\frac2s\int_0^{1/2s}\frac{1}{t^{1/r_1}}\int_0^t\frac{d\tau}{\tau^{1/q_1}}\left(\frac{\sin\pi st}{\sin\pi t}\right)^2dt\ge$$

$$\ge\frac{2}{(1-1/q_1)s}\int_0^{1/2s}t^{1-1/q_1-1/r_1}\left(\frac{2st}{\pi t}\right)^2dt=C(q_1,r_1)s^{1/q_1+1/r_1-1}\quad(C(q_1,r_1)>0).$$

Так как $1/q_1+1/r_1>1$, то $B(s)\xrightarrow[s\to\infty]{}+\infty$, а значит последовательность $\{A(1/2,s)\}$ не может сходиться. Тем самым показано, что утверждение (6.19) становится неверным при замене условия 2) на противоположное.

Пусть $\alpha,\beta\ge0$ таковы, что $\alpha+\beta<1$. Построим такие функции $g\in H_1^\alpha[0,1]$ и $f\in H_\infty^\beta[0,1]$, что последовательность $\{A(1/2,s)\}$ для них расходится. Для этого рассмотрим

$\alpha_1 > \alpha$, $\beta_1 > \beta$, но по-прежнему $\alpha_1+\beta_1 < 1$. В качестве g_1 возьмем функцию $\frac{1}{\tau}\ln^{-1-\alpha_1}\frac{1}{\tau}$. Так как $g_1 \in L(\ln^+ L)^{\tilde\alpha}[0,1/2]$, где $\alpha < \tilde\alpha < \alpha_1$, то, воспользовавшись леммой (6.7), нетрудно получить, что $g_1 \in H_1^\alpha[0,1/2]$, а значит и $g \in H_1^\alpha[0,1/2]$. Построим теперь требуемую функцию f. Сначала определим функцию

$$h(t) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{5^k} Q_{m_k}(t),$$

где $m_k = E(M_k)$, $M_k = 5^{5^{\frac{k-1}{\alpha_1+\beta_1}}}$, а

$$Q_m(t) = 2\sin 4m\pi t \sum_{k=1}^m \frac{\sin 2k\pi t}{k} = \left(\frac{\cos 2m\pi t}{m} + \cdots + \frac{\cos 2(2m-1)\pi t}{1}\right) -$$
$$-\left(\frac{\cos 2(2m+1)\pi t}{1} + \cdots + \frac{\cos 2(3m)\pi t}{m}\right).$$

Точно так же, как и в [43, с. 107], можно показать, что $h \in H_\infty^{\alpha_1+\beta_1}[0,1/2]$. Кроме того, так как

$$\sum_{j=m_s}^{3m_s} \int_0^{1/2} h(t)\cos 2j\pi t\, dt = 0 \quad (s = 1, 2, \dots),$$

то

$$\sum_{j=1}^{2m_k-1} \int_0^{\frac12} h(t)\cos 2j\pi t\, dt = \sum_{j=m_k}^{2m_k-1} \int_0^{\frac12} h(t)\cos 2j\pi t\, dt +$$
$$+\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=m_s}^{3m_s} \int_0^{\frac12} h(t)\cos 2j\pi t\, dt = \sum_{j=m_k}^{2m_k-1} \int_0^{\frac12} h(t)\cos 2j\pi t\, dt. \tag{6.34}$$

Далее, существует константа $C > 0$ такая, что

$$\sum_{j=m_k}^{2m_k-1} \int_0^{\frac12} h(t)\cos 2j\pi t\, dt = \frac{1}{5^k}\sum_{j=m_k}^{2m_k-1} \frac{1}{2m_k - j} \ge \frac{C}{5^k}\log_5 m_k \ge$$
$$\ge \frac{C}{5^k}\log_5 M_{k-1} = \frac{C}{25} 5^{(k-2)\frac{1-\alpha_1-\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty, \tag{6.35}$$

так как $\alpha_1 + \beta_1 < 1$.

Положим

$$f_1(t) = h(t) \Big/ \int_0^t g_1(\tau)\, d\tau \tag{6.36}$$

и покажем, что $f_1 \in H_\infty^\beta[0,1/2]$. В самом деле,

$$|f_1(t+d) - f_1(t)| \le \frac{|h(t+d) - h(t)|}{\int_0^{t+d} g_1(\tau)\, d\tau} + \frac{\int_t^{t+d} g_1(\tau)\, d\tau |h(t)|}{\int_0^{t+d} g_1(\tau)\, d\tau \int_0^t g_1(\tau)\, d\tau} = X_1(t,d) + X_2(t,d). \tag{6.37}$$

Так как $h \in H_\infty^{\alpha_1+\beta_1}[0,1/2]$, то

$$X_1(t,d) \le C(h)\ln^{\alpha_1}\frac{1}{t+d}\ln^{-\alpha_1-\beta_1}\frac{1}{d} \le C(h)\ln^{-\beta_1}\frac{1}{d}. \tag{6.38}$$

Рассмотрим теперь $X_2(t,d)$. Возможны следующие случаи.

а) $0 \le t \le d$. Так как $g_1 \in H_1^{\alpha}[0,1/2]$, $h \in H_{\infty}^{\alpha_1+\beta_1}[0,1/2]$ и $h(0)=0$, то

$$X_2(t,d) \le C(g_1,h)\frac{\ln^{\alpha_1}\frac{1}{t+d}\ln^{\alpha_1}\frac{1}{t}}{\ln^{\alpha_1+\beta_1}\frac{1}{t}\ln^{\alpha}\frac{1}{d}} \le C(g_1,h)\frac{1}{\ln^{\beta}\frac{1}{d}}, \tag{6.39}$$

если считать $\alpha_1-\alpha=\beta_1-\beta$.

б) $d \le t \le 1/2-d$. Применяя первую теорему о среднем к $\int_t^{t+d} g_1(\tau)\,d\tau$ и помня, что $h \in H_{\infty}^{\alpha_1+\beta_1}[0,1/2]$ и $h(0)=0$, получим при $0<\theta_d(t)<1$

$$X_2(t,d) \le C(h)\frac{d}{(t+\theta_d(t)d)\ln^{1+\alpha_1}\frac{1}{t+\theta_d(t)d}}\frac{\ln^{\alpha_1}\frac{1}{t+d}\ln^{\alpha_1}\frac{1}{t}}{\ln^{\alpha_1+\beta_1}\frac{1}{t}} \le C(h)\frac{d}{t}\ln^{-1-\beta_1}\frac{1}{t+d}.$$

Функция $\frac{d}{t}\ln^{-1-\beta_1}\frac{1}{t+d}$ монотонно убывает при $d \le t \le \frac{1}{2}e^{-1-\beta_1}$. Следовательно, при этих t

$$X_2(t,d) \le C(h)\frac{d}{t}\ln^{-1-\beta_1}\frac{1}{2d} \le \tilde{C}(h)\ln^{-\beta}\frac{1}{d}. \tag{6.40}$$

При $\frac{1}{2}e^{-1-\beta_1} \le t \le \frac{1}{2}-d$

$$X_2(t,d) \le C_1(\beta_1,h)d \le C_1(\beta_1,h)\ln^{-\beta}\frac{1}{d}. \tag{6.41}$$

Таким образом, из (6.37)–(6.41) следует, что $f_1(t) \in H_{\infty}^{\beta}[0,1/2]$. При $t\in[0,1/2]$ положим $f(t) := f_1(\frac{1}{2}-t)$. Далее, продолжим f четно на отрезок $[1/2,1]$. Совершенно ясно, что $f \in H_{\infty}^{\beta}[0,1]$.

В силу (6.33)–(6.36) $A(1/2,2m_k-1)\xrightarrow[k\to\infty]{}+\infty$, а значит и последовательность $\left\{A(\frac{1}{2},s)\right\}$ не может сходиться. Тем самым показано, что утверждение (6.19) становится неверным при замене условия 3) на противоположное. Теорема (6.19), таким образом, полностью доказана. $\square$

§7. Теорема о равносходимости

Продолжим изучение к.д. оператора L, определенного в §1 к.д. выражением (1.1) и регулярными краевыми условиями (1.2). В этом параграфе будет начато, а в следующем — закончено доказательство следующей теоремы равносходимости.

(7.1) Теорема. *Если L есть к.д. оператор с регулярными краевыми условиями, $p_{kj}\in L_1[0,1]$ $(k=\overline{1,n},\ j=\overline{0,k-2})$ и выполняется одно из условий для $k=\overline{1,n}$*

1) $p_{k,k-1}\in H_{\infty}^{\alpha}[0,1]$, $f\in H_1^{\beta}[0,1]$, $\alpha+\beta>1$;

2) $p_{k,k-1}\in L_r[0,1]$, $f\in L_q[0,1]$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}<1$;

3) $p_{k,k-1} \in H_1^{\alpha}[0,1]$, $f \in H_{\infty}^{\beta}[0,1]$, $\alpha+\beta>1$,

то существует число $l \in \mathbb{Z}$ *такое, что для любого* $\delta \in (0,1/2)$

$$\lim_{m\to\infty} \|S_{2m+l}(f) - \sigma_m(f)\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0, \tag{7.2}$$

где $S_{2m+l}(f)$ *—* $(2m+l)$*-ая частичная сумма ряда Фурье функции* f *по с.п.ф. оператора* L*, занумерованным в порядке неубывания модулей с.з.,* $\sigma_m(f) = \sum_{|s|\le m}(f,e_s)e_s$*, где* $e_s(x) = \exp(2s\pi ix)$*. Если неравенства в условиях 1)–3) заменить на противоположные, то утверждение (7.2) станет неверным.*

Из этой теоремы легко вытекает следующая теорема (контрпримеры, показывающие точность теоремы (7.1), подходят и для теоремы (7.3)).

(7.3) Теорема. *Если краевые условия (0.2) регулярны, коэффициенты* $p_j \in L_1[0,1]$ $(j=\overline{2,n})$ *в уравнении (0.1) и выполняется одно из условий*

1) $p_1 \in H_{\infty}^{\alpha}[0,1]$, $f \in H_1^{\beta}[0,1]$, $\alpha+\beta>1$;

2) $p_1 \in L_r[0,1]$, $f \in L_q[0,1]$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}<1$;

3) $p_1 \in H_1^{\alpha}[0,1]$, $f \in H_{\infty}^{\beta}[0,1]$, $\alpha+\beta>1$,

то существует число $\breve{l} \in \mathbb{Z}$ *такое, что для любого* $\delta \in (0,1/2)$

$$\lim_{m\to\infty} \|\breve{S}_{2m+\breve{l}}(f) - \sigma_m(f)\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0, \tag{7.4}$$

где $\breve{S}_{2m+\breve{l}}(f)$ *—* $(2m+\breve{l})$*-ая частичная сумма ряда Фурье функции* f *по с.п.ф. задачи (0.1)–(0.2), занумерованным в порядке неубывания модулей с.з.,* $\sigma_m(f)$ *определена в теореме (7.1). Если неравенства в условиях 1)–3) заменить на противоположные, то утверждение (7.4) станет неверным.*

Отметим, что малость $\|p_{k,k-1}\|_r$ $(k=\overline{1,n},\ 1\le r\le\infty)$ находится в нашем распоряжении. В самом деле, зададим произвольное $\varepsilon>0$. Вместо оператора L рассмотрим новый оператор $\tilde{L}$, определенный к.д. выражением $y^{[\underline{n}]}$ с коэффициентами q_{kj} (см. формулы (2.6) и (2.9), но только $P_{k,k-1}$ считаем из пространства $C^1[0,1]$) и краевыми условиями, получающимися из (1.2) в результате замены (2.6) (регулярность краевых условий, как легко видеть, сохранится). Из (2.7) и (2.10), как и в §2, следует, что $\|q_{k,k-1}\|_r \le \varepsilon$ $(k=\overline{1,n})$. Для резольвент этих операторов справедливо равенство $R(\lambda)f = V\tilde{R}(\lambda)\big(V^{-1}f\big)$. Следовательно,

$$\|S_{2m+l}(f)-\sigma_m(f)\|_{C[\delta,1-\delta]} = \|V\tilde{S}_{2m+l}(V^{-1}f) - V\sigma_m(V^{-1}f) + V\sigma_m(V^{-1}f) - \sigma_m(f)\|_{C[\delta,1-\delta]} \le$$

$$\le C\|\tilde{S}_{2m+l}(f_1)-\sigma_m(f_1)\|_{C[\delta,1-\delta]} + \|V\sigma_m(f_1)-\sigma_m(Vf_1)\|_{C[\delta,1-\delta]},$$

где $f_1 = V^{-1}f$, а $\tilde{S}_{2m+l}(f_1)$ — $(2m+l)$-ая частичная сумма ряда Фурье функции f_1 по с.п.ф. оператора $\tilde{L}$. Таким образом, если теорема (7.1) будет доказана для оператора $\tilde{L}$, то тем самым, в силу теоремы (6.18) она будет доказана и для оператора L.

Докажем следующую лемму, которая обобщает на к.д. операторы лемму А.П. Хромова, доказанную им при получении теоремы о равносходимости для интегральных операторов [15, 16].

(7.5) Лемма. *Если $g \in L_p[0,1]$ $(1 < p \le \infty)$, то справедливы оценки при $\rho \in \hat{S}(d)$*

$$\left\| \int_0^1 \left| G^{[k],\overline{\{s\}}}_{x^k,t^s}(x,t,\lambda) \right| |g(t)|\, dt \right\|_\infty \le C(p) \frac{|\rho|^{s+k}}{|\rho|^{n-1}} \varkappa_{p'}(\rho) \|g\|_p, \tag{7.6}$$

где $0 \le k+s \le n-1$,

$$\varkappa_{p'}(\rho) = \left(\frac{1 - |e^{p'\rho_\nu}|}{|\operatorname{Re}\rho_\nu|} \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\frac{1 - |e^{-p'\rho_{\nu+1}}|}{|\operatorname{Re}\rho_{\nu+1}|} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Доказательство. В силу асимптотики (4.8)

$$\left(\int_0^1 \left| G^{[k],\overline{\{s\}}}_{x^k,t^s}(x,t,\lambda) \right|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \le C_1 \frac{|\rho|^{s+k}}{|\rho|^{n-1}} \left(\int_0^x \left(\left| e^{\rho_\nu(x-t)} \right| + \left| e^{\rho_{\nu+1}(x-1-t)} \right| \right)^{p'} dt + \right.$$

$$\left. + \int_x^1 \left(\left| e^{\rho_\nu(1+x-t)} \right| + \left| e^{\rho_{\nu+1}(x-t)} \right| \right)^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \le C_2(p) \frac{|\rho|^{s+k}}{|\rho|^{n-1}} \left(\int_0^x \left(\left| e^{p'\rho_\nu(x-t)} \right| + \left| e^{p'\rho_{\nu+1}(x-1-t)} \right| \right) dt + \right.$$

$$\left. + \int_x^1 \left(\left| e^{p'\rho_\nu(1+x-t)} \right| + \left| e^{p'\rho_{\nu+1}(x-t)} \right| \right) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \le C_3(p) \frac{|\rho|^{s+k}}{|\rho|^{n-1}} \varkappa_{p'}(\rho). \tag{7.7}$$

Применяя теперь к

$$\int_0^1 \left| G^{[k],\overline{\{s\}}}_{x^k,t^s}(x,t,\lambda) \right| |g(t)|\, dt$$

неравенство Гельдера и используя оценку (7.7), получим (7.6). Лемма доказана. □

(7.8) Лемма. *Если $\alpha_1 \ge 1$, $\alpha_2 > 0$, $0 \le \alpha_3 < \pi/2$, а*

$$\zeta_m = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ z = me^{i\varphi}, \ \varphi \in [\alpha_3, \pi/2], \ m > 1 \right\},$$

то для интеграла

$$I_m = \int\limits_{\zeta_m} \frac{1}{|\operatorname{Re} z|^{\alpha_1}} \left(1 - \left| e^{-\alpha_2 z} \right| \right)^{\alpha_1} |dz|$$

справедливы оценки

1) если $\alpha > 1$, то $I_m \le C(\alpha_1, \alpha_2)$, *2) если* $\alpha_1 = 1$, *то* $I_m \le C(\alpha_2)\ln m$.

Доказательство. 1. Предположим, что $\alpha_1 > 1$. Тогда если $\tau = \pi/2 - \varphi$, то $\operatorname{Re} z = m\sin\tau$. Из неравенств $\frac{2}{\pi}\tau \le \sin\tau \le \tau$ следует

$$I_m \le \int_{\alpha_3}^{\pi/2} \frac{1}{\left(m\frac{2}{\pi}\tau\right)^{\alpha_1}} \left(1 - e^{-\alpha_2 m\tau}\right)^{\alpha_1} m\,d\tau = C_1(\alpha_1,\alpha_2)\int_{\alpha_3\alpha_2 m}^{\alpha_2 m\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-e^{-\xi}}{\xi}\right)^{\alpha_1} d\xi \le$$

$$\le C_1(\alpha_1,\alpha_2)\left(\int_0^1 \left(\frac{1-e^{-\xi}}{\xi}\right)^{\alpha_1} d\xi + \int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi^{\alpha_1}}\right) \le C(\alpha_1,\alpha_2).$$

2. Пусть теперь $\alpha_1 = 1$. Совершенно аналогично предыдущему пункту

$$I_m \le C_1(1,\alpha_2)\int_0^{m\frac{\pi}{2}} \frac{1-e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi = C_2(\alpha_2)\left(\int_0^1 \frac{1-e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi + \int_1^{m\frac{\pi}{2}} \frac{1-e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi\right) \le C(\alpha_2)\ln m.$$

Таким образом, лемма доказана. □

Рассмотрим оператор $\hat{L}_\lambda :\ D_{\hat{L}_\lambda} \to L_1^n[0,1]$, где

$$D_{\hat{L}_\lambda} = \left\{\hat{W} = (w_1,\ldots,w_n)^T :\ w_j(x) \in AC[0,1]\ (j=\overline{1,n}),\ U_m(\hat{W}) = 0\ (m = 1,n)\right\},$$

U_m — линейные формы из (1.2), $L_1^n[0,1] = \left\{F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T :\ f_j(x) \in L_1[0,1]\ (j = \overline{1,n})\right\}$, причем равенство

$$\hat{L}_\lambda \hat{W} = F$$

при $\hat{W} \in D_{\hat{L}_\lambda}$ означает, что

$$\begin{cases} i\frac{d}{dx}w_k - w_{k+1} + \sum\limits_{j=0}^{k-1} p_{kj}w_{j+1} = f_k \quad (k = \overline{1, n-1}), \\ i\frac{d}{dx}w_n - \lambda w_1 + \sum\limits_{j=0}^{n-1} p_{nj}w_{j+1} = f_n. \end{cases} \tag{7.9}$$

Легко видеть, что оператор $\hat{L}_\lambda$ есть не что иное, как обыкновенный линейный дифференциальный оператор первого порядка в пространстве вектор-функций (такие операторы изучались в [4, с. 104–130]). Оператор $\hat{L}_\lambda$ тесно связан с к.д. оператором L вида (1.1)–(1.2), на что указывает следующая лемма.

(7.10) Лемма. *Для функции Грина оператора* $\hat{L}_\lambda$ *справедлива следующая формула*

$$\hat{G}(x,t,\lambda) = \left(\hat{G}_{kj}(x,t,\lambda)\right)_{k,j=1}^n, \tag{7.11}$$

где $\hat{G}_{kj}(x,t,\lambda) = G^{[k-1],\overline{\{n-j\}}}_{x^{k-1},t^{n-j}}(x,t,\lambda)$, *а* $G(x,t,\lambda)$ *есть функция Грина оператора* L.

Доказательство. Если y_1, y_2, $\ldots$, y_n есть фундаментальная система решений уравнения $y^{[n]} - \lambda y = 0$, то, очевидно, матрица $A(x) = \big(y_k^{[j-1]}(x)\big)_{k,j=1}^n$ является фундаментальной матрицей решений системы (7.9). Применяя к этой системе метод вариации произвольных постоянных, получим для решения $\hat{W}$ формулу

$$\hat{W}(x) = \int_0^1 \hat{J}(x,t)F(t)\,dt + A(x)C, \tag{7.12}$$

где C — постоянный вектор, а

$$\hat{J}(x,t) = (-1)^{\chi(t-x)}\frac{1}{2i}A(x)A^{-1}(t).$$

Очевидно,

$$A(x)A^{-1}(t) = \frac{1}{(-1)^{E(\frac{n}{2})}W(t)}\Big(\sum_{s=1}^n y_s^{[k-1]}(x)A_{js}(t)\Big)_{k,j=1}^n = \frac{(-1)^{n-1+E(\frac{n-1}{2})+E(\frac{n}{2})}}{W(t)}\times$$

$$\times\Big(W^{[k-1]}_{n-j+1,x^{k-1}}(x,t)(-1)^{n-j}\Big)_{k,j=1}^n = 2i(-1)^{\chi(t-x)}\Big(g^{[k-1],\overline{\{n-j\}}}_{x^{k-1},t^{n-j}}(x,t,\lambda)\Big)_{k,j=1}^n$$

в силу формул (4.3) и (4.12). Подставляя вектор (7.12) в краевые условия $U_m(\hat{W}) = 0$ $(m = \overline{1,n})$, найдем вектор C. Используя этот вектор в формуле (7.12), придем к (7.11). Лемма доказана. □

Обозначим через L_0 обыкновенный дифференциальный оператор, получающийся из L при $p_{kj} = 0$ $(k = \overline{1,n},\ j = \overline{0,k-1})$, а через L_1 — к.д. оператор, получающийся из L при $p_{kj} = 0$ $(k = \overline{1,n},\ j = \overline{0,k-2})$. Квазипроизводные в последнем случае обозначим через $y^{|\bar{k}|}$ $(k = \overline{0,n})$. Договоримся также обозначать все объекты, связанные с операторами L_0 и L_1, теми же буквами, что и в случае оператора L, но с соответствующими индексами. Докажем следующую лемму.

(7.13) Лемма. *Для оператора L_1 справедлива теорема (7.1).*

Доказательство. Контрпримеры, показывающие точность этой леммы, а следовательно и теоремы (7.1), будут построены в §8. Если мы докажем равносходимость разложений в ряды Фурье по с.п.ф. операторов L_1 и L_0, то в силу теоремы равносходимости Тамаркина [6] все будет доказано.

Рассмотрим задачу

$$L_1 y - \lambda y = f. \tag{7.14}$$

Если λ не является собственным значением, то ее решением будет $y = R_1(\lambda)f$, откуда

$$y^{|\bar{k}|} = D_{1k}R_1(\lambda)f \quad (k = \overline{0,n-1}), \tag{7.15}$$

где операторы D_{1k} получаются из D_k при $p_{kj}=0$, $k=\overline{1,n}$, $j=\overline{0,k-2}$. С другой стороны, задачу (7.14) можно записать в виде

$$\left\{\begin{array}{l} i\frac{d}{dx}y^{|\overline{k-1}|}-y^{|\overline{k}|}=-p_{k,k-1}y^{|\overline{k-1}|} \quad (k=\overline{1,n-1}),\\ i\frac{d}{dx}y^{|\overline{n-1}|}-\lambda y^{|\overline{0}|}=-p_{n,n-1}y^{|\overline{n-1}|}+f, \end{array}\right. \tag{7.16}$$

$$U_m(Y_1)=0 \quad (m=\overline{1,n}),$$

где $y^{|\overline{0}|}=y$, $Y_1=(y^{|\overline{0}|},\ldots,y^{|\overline{n-1}|})$. Вспоминая определение оператора $\hat{L}_{0\lambda}$, обозначая его резольвенту через $\left(\hat{R}_{0kj}(\lambda)\right)_{k,j=1}^{n}$, считая правую часть (7.16) известной вектор-функцией и используя (7.15), получим

$$D_{1,k-1}R_1(\lambda)f=\hat{R}_{0kn}(\lambda)f-\sum_{j=1}^{n}\hat{R}_{0kj}(\lambda)p_{j,j-1}D_{1,j-1}R_1(\lambda)f \quad (k=\overline{1,n}). \tag{7.17}$$

Так как в силу леммы (7.10) $\hat{R}_{0kn}(\lambda)=D_{0,k-1}R_0(\lambda)$, то (7.17) можно записать

$$D_{1,k-1}R_1(\lambda)f=D_{0,k-1}R_0(\lambda)f-\sum_{j=1}^{n}\hat{R}_{0kj}(\lambda)p_{j,j-1}D_{1,j-1}R_1(\lambda)f \quad (k=\overline{1,n}). \tag{7.18}$$

Обозначим $D_{1,k-1}R_1(\lambda)f=v_k(x,\rho)\rho^{k-n}$, $D_{0,k-1}R_0(\lambda)f=u_k(x,\rho)\rho^{k-n}$. Тогда из (7.18) следует

$$v_k=u_k-\sum_{j=1}^{n}\rho^{j-k}\hat{R}_{0kj}(\lambda)p_{j,j-1}v_j \quad (k=\overline{1,n}). \tag{7.19}$$

В силу леммы (7.10) и (4.5) при $\rho\in\hat{S}(d)$ имеем

$$\left(\rho^{j-k}\hat{R}_{0kj}(\lambda)p_{j,j-1}\right)_{C[0,1]\to C[0,1]}=O(\|p_{j,j-1}\|_1).$$

Так как малость $\|p_{j,j-1}\|_1$, как отмечалось выше, находится в нашем распоряжении, то операторы $\rho^{j-k}\hat{R}_{0kj}(\lambda)p_{j,j-1}$ всегда можно сделать операторами сжатия. Следовательно, система (7.19) однозначно разрешима и ее решение можно представить в виде ряда, который в исходных обозначениях и при $k=1$ запишется как

$$\begin{aligned} R_1(\lambda)f=R_0(\lambda)f-\sum_{j=1}^{n}\hat{R}_{01j}p_{j,j-1}D_{0,j-1}R_0(\lambda)f+\\ +\sum_{j,j_1=1}^{n}\hat{R}_{01j}(\lambda)p_{j,j-1}\hat{R}_{0jj_1}(\lambda)p_{j_1,j_1-1}D_{0,j_1-1}R_0(\lambda)f-\\ -\sum_{j,j_1,j_2=1}^{n}\hat{R}_{01j}(\lambda)p_{j,j-1}\hat{R}_{0jj_1}(\lambda)p_{j_1,j_1-1}\hat{R}_{0j_1j_2}(\lambda)p_{j_2,j_2-1}D_{0,j_2-1}R_0(\lambda)f+\ldots. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Из этой формулы следует, что

$$R_1(\lambda)f=R_0(\lambda)f-\sum_{j=1}^{n}\hat{R}_{01j}(\lambda)p_{j,j-1}D_{0,j-1}R_0(\lambda)f+\tilde{R}(\lambda)f, \tag{7.21}$$

причем для $\tilde{R}(\lambda)f$ справедлива оценка

$$\tilde{R}(\lambda)f = O\left(\sum_{j,j_1=1}^{n} a_{1j}(\lambda)a_{jj_1}(\lambda)b_{j_1}(\lambda) + \sum_{j,j_1,j_2=1}^{n} a_{1j}(\lambda)a_{jj_1}(\lambda)a_{j_1j_2}(\lambda)b_{j_2}(\lambda) + \dots\right), \qquad (7.22)$$

где

$$a_{jk}(\lambda) = \left\| \int_0^1 \left|\hat{G}_{0jk}(x,t,\lambda)\right| |p_{k,k-1}(t)|\, dt \right\|_\infty,$$

$$b_j(\lambda) = \left\| \int_0^1 \left|\hat{G}_{0,x}^{(j-1)}(x,t,\lambda)\right| |f(t)|\, dt \right\|_\infty.$$

1. Предположим, что $p_{k,k-1} \in H_\infty^\alpha[0,1]$ $(k=\overline{1,n})$, $f \in H_1^\beta[0,1]$, $\alpha+\beta>1$. В силу лемм (7.5) и (7.10) при $\rho \in \hat{S}(d)$

$$a_{jk}(\lambda) \le C\frac{\varkappa_1(\rho)}{|\rho|^{k-j}}\|p_{k,k-1}\|_\infty.$$

Следовательно, с учетом асимптотики (4.8) при условии, что $\sum_{k=1}^n \|p_{k,k-1}\|_\infty$ достаточно мала, получим, при $\rho \in \hat{S}(d)$

$$|\tilde{R}(\lambda)f| \le C_1\frac{\varkappa_1^2(\rho)}{|\rho|^{n-1}}\|f\|_1. \qquad (7.23)$$

Пусть j_m и k_m обозначает число с.з. операторов L_1 и L_0, соответственно (с учетом кратностей), попавших внутрь контура Γ_m (контуры Γ_m , а так же их прообразы γ_m при отображении $\lambda = -(i\rho)^n$ определены в §4). Так как в силу леммы (7.8) $\int_{\gamma_m}\varkappa_1^2(\rho)\,|d\rho| \le C_2$, то из оценки (7.23) и формулы (7.21) следует, что

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m} R_1(\lambda)f\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m} R_0(\lambda)f\,d\lambda + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}\hat{R}_{01j}(\lambda)p_{j,j-1}D_{0,j-1}R_0(\lambda)f\,d\lambda + O(\|f\|_1)$$

или

$$S_{1j_m}(f) = S_{0k_m}(f) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}\hat{R}_{01j}(\lambda)p_{j,j-1}D_{0,j-1}R_0(\lambda)f\,d\lambda + O(\|f\|_1). \qquad (7.24)$$

Оценим средний член. Так как все его слагаемые оцениваются одинаково, то рассмотрим, например,

$$I_m(x,\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}\hat{R}_{01n}(\lambda)p_{n,n-1}D_{0,n-1}R_0(\lambda)f\,d\lambda.$$

Обозначим для краткости $p_{n,n-1}(x)$ через $p(x)$ и предположим, что $x\in[\delta,1-\delta]$, где δ — произвольное фиксированное число из $(0,1/2)$, и $n=2\mu$ (случай $n=2\mu-1$ рассматривается аналогично). С учетом того, что $\hat{R}_{01n}(\lambda)=R_0(\lambda)$ (лемма (7.10)),

$$\hat{R}_{01n}(\lambda)pD_{0,n-1}R_0(\lambda)f = i^{n-1}\int_0^1\int_0^1 G_0(x,\tau,\lambda)p(\tau)G_{0,\tau}^{(n-1)}(\tau,t,\lambda)\,d\tau f(t)\,dt. \qquad (7.25)$$

Рассмотрим внутренний интеграл и воспользуемся асимптотикой (4.8). Получим

$$\int_0^1 G_0(x,\tau,\lambda)p(\tau)G_{0,\tau}^{(n-1)}(\tau,t,\lambda)\,d\tau = \int_0^1 \left(B(x,\tau,\rho) + O\left(\frac{1}{|\rho|^{n-1}}\Big(|e^{\rho_\nu x}| + |e^{\rho_{\nu+1}(x-1)}|\Big)\right)\right) p(\tau)\times$$

$$\times\left(B_{\tau^{n-1}}^{(n-1)}(\tau,t,\rho) + O\Big(|e^{\rho_\nu \tau}| + |e^{\rho_{\nu+1}(\tau-1)}|\Big)\right) d\tau = \int_0^1 B(x,\tau,\rho)p(\tau)B_{\tau^{n-1}}^{(n-1)}(\tau,t,\rho)\,d\tau +$$

$$+\int_0^1 B(x,\tau,\rho)p(\tau)O\Big(|e^{\rho_\nu \tau}| + |e^{\rho_{\nu+1}(\tau-1)}|\Big)\,d\tau + O\left(\frac{1}{|\rho|^{n-1}}\Big(|e^{\rho_\nu \delta}| + |e^{-\rho_{\nu+1}\delta}|\Big)\right). \tag{7.26}$$

Так как

$$B(x,\tau,\rho) = O\left(\frac{1}{|\rho|^{n-1}}\Big(|e^{\rho_\nu(x-t)}|\chi(x-t) + |e^{\rho_{\nu+1}(x-t)}|\chi(t-x)\Big)\right),$$

то из (7.26) получим

$$\int_0^1 G_0(x,\tau,\lambda)p(\tau)G_{0,\tau}^{(n-1)}(\tau,t,\lambda)\,d\tau = A(x,t,\rho) + \tilde{A}(x,t,\rho), \tag{7.27}$$

где

$$A(x,t,\rho) = \int_0^1 B(x,\tau,\rho)p(\tau)B_{\tau^{n-1}}^{(n-1)}(\tau,t,\rho)\,d\tau, \quad \tilde{A}(x,t,\rho) = O\left(\frac{1}{|\rho|^{n-1}}\Big(|e^{\rho_\nu \delta}| + |e^{-\rho_{\nu+1}\delta}|\Big)\right).$$

Справедлива оценка

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}\int_0^1 \tilde{A}(x,t,\rho)f(t)\,dt\,d\lambda\right| \le C(\delta)\|f\|_1. \tag{7.28}$$

Рассмотрим $A(x,t,\rho)$. Так как случаи $x \ge t$ и $x \le t$, по-существу, ничем друг от друга не отличаются, то будем считать, что $x \ge t$. Имеем

$$A(x,t,\rho) = \int_0^t + \int_t^x + \int_x^1 = A_1(x,t,\rho) + A_2(x,t,\rho) + A_3(x,t,\rho). \tag{7.29}$$

Вспоминая определение $B(x,t,\rho)$ (формула (4.4)) и обозначая

$$B_{kj}(x,\tau,t) = \frac{\omega_k}{i^{2n}n^2\rho^{n-1}}e^{\rho_k(x-\tau)+\rho_j(\tau-t)},$$

получим

$$A_1(x,t,\rho) = \sum_{k=1}^{\mu}\sum_{j=\mu+1}^{n}\int_0^t B_{kj}(x,\tau,t)p(\tau)\,d\tau = \sum_{k=1}^{\mu}\sum_{j=\mu+1}^{n} D_{kj}(x,t,\rho), \tag{7.30}$$

$$A_2(x,t,\rho) = -\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu}\int\limits_t^x B_{kj}(x,\tau,t)p(\tau)\,d\tau = -\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu} D_{kj}(x,t,\rho), \tag{7.31}$$

$$A_3(x,t,\rho) = \sum_{k=\mu+1}^{n}\sum_{j=1}^{\mu}\int\limits_x^1 B_{kj}(x,\tau,t)p(\tau)\,d\tau = \sum_{k=\mu+1}^{n}\sum_{j=1}^{\mu} D_{kj}(x,t,\rho), \tag{7.32}$$

Пусть F_s — тригонометрические многочлены наилучшего приближения f в метрике $L_1[0,1]$ порядка s, а P_s — алгебраические многочлены наилучшего приближения функции p в метрике $C[0,1]$ порядка s. Считаем, что $\alpha > 0$. В противном случае рассуждения упрощаются.

Рассмотрим $\int_0^x D_{kj}(x,t,\rho)f(t)\,dt$ при $k=\overline{1,\mu}$, $j=\overline{\mu+1,n}$. Очевидно тождество

$$\int\limits_0^x D_{kj}(x,t,\rho)f(t)\,dt \equiv \int\limits_0^x\int\limits_0^t B_{kj}(x,\tau,t)p_s(\tau)\,d\tau f_s(t)\,dt +$$

$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^t B_{kj}(x,\tau,t)P_s(\tau)\,d\tau f_s(t)\,dt + \int\limits_0^x\int\limits_0^t B_{kj}(x,\tau,t)p(\tau)\,d\tau F_s(t)\,dt =$$

$$= d_{kj1}(x,\rho) + d_{kj2}(x,\rho) + d_{kj3}(x,\rho),$$

где $p_s = p - P_s$, $f_s = f - F_s$.

В силу леммы (6.15) и того, что

$$\int\limits_0^t \left|e^{\rho_k(x-\tau)+\rho_j(\tau-t)}\right| d\tau = \frac{1}{\mathrm{Re}(\rho_j-\rho_k)}\Big(|e^{\rho_k(x-t)}| - |e^{\rho_k x-\rho_j t}|\Big) \le$$

$$\le \frac{1}{\mathrm{Re}(\rho_j-\rho_k)}\Big(1-|e^{\rho_k-\rho_j}|\Big) =: \chi_{kj}(\rho),$$

имеем

$$|d_{kj1}(x,\rho)| \le C(p,f)\frac{\chi_{kj}(\rho)}{|\rho|^{n-1}\ln^{\alpha+\beta} s}. \tag{7.33}$$

В $d_{kj2}(x,\rho)$ проводим два раза интегрирование по частям по τ. Получим

$$d_{kj2}(x,\rho) = \frac{\omega_k}{i^{2n}n^2\rho^n(\omega_j-\omega_k)}\int\limits_0^x f_s(t)\Big(P_s(t)e^{\rho_k(x-t)} - P_s(0)e^{\rho_k x-\rho_j t}\Big)\,dt - \frac{\omega_k}{i^{2n}n^2\rho^{n+1}(\omega_j-\omega_k)^2}\times$$

$$\times\int\limits_0^x f_s(t)\Big(P_s^{(1)}(t)e^{\rho_k(x-t)} - P_s^{(1)}(0)e^{\rho_k x-\rho_j t} - \int\limits_0^t e^{\rho_k-\rho_j t+(\rho_j-\rho_k)\tau}P_s^{(2)}(\tau)\,d\tau\Big)\,dt,$$

откуда в силу леммы (6.15) следует

$$|d_{kj2}(x,\rho)| \le C(p,f)\left(\frac{\alpha_s(f)}{|\rho|^n} + \frac{s^4}{|\rho|^{n+1}}\right), \tag{7.34}$$

где $\alpha_s(f) \to 0$ при $s \to \infty$ (даже если $f \in H_1^0[0,1]$).

В $d_{kj3}(x,\rho)$ меняем порядок интегрирования и проводим один раз интегрирование по частям по t. Получим

$$d_{kj3}(x,\rho) = \frac{-\omega_k}{i^{2n}n^2\rho^n\omega_j}\int\limits_0^x p(\tau)\Big(F_s(x)e^{(\rho_k-\rho_j)(x-\tau)} - F_s(\tau)e^{\rho_k(x-\tau)} - \int_\tau^x e^{\rho_k(x-\tau)+\rho_j(\tau-t)}F_s'(t)\,dt\Big)\,d\tau.$$

Отсюда, используя лемму (6.15), легко получим

$$\big|d_{kj3}(x,\rho)\big| \le C(p,f)\frac{s}{|\rho|^n}\Big(\frac{1}{|\rho|} + \varkappa_1(\rho) + \chi_{kj}(\rho)\Big). \tag{7.35}$$

Следовательно, в силу (7.33)–(7.35)

$$\Big|\int\limits_0^x D_{kj}(x,t,\rho)f(t)\,dt\Big| \le C(p,f)\Big(\frac{\chi_{kj}(\rho)}{|\rho|^{n-1}\ln^{\alpha+\beta}s} + \frac{\alpha_s(f)}{|\rho|^n} + \frac{s^4}{|\rho|^{n+1}} +$$

$$+\frac{s\varkappa_1(\rho)}{|\rho|^n} + \frac{s\chi_{kj}(\rho)}{|\rho|^n}\Big) \quad (k=\overline{1,\mu},\ j=\overline{\mu+1,n}).$$

Применяя теперь лемму (7.8) и учитывая (7.30), получим

$$\Big|-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\int\limits_0^x A_1(x,t,\rho)f(t)\,dt\,d\lambda\Big| \le C(p,f)\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{j=\mu+1}^{n}\int\limits_{\gamma_m}\Big(\frac{\chi_{kj}(\rho)}{\ln^{\alpha+\beta}s} + \frac{\alpha_s(f)}{|\rho|} +$$

$$+\frac{s^4}{|\rho|^2} + \frac{s\varkappa_1(\rho)}{|\rho|} + \frac{s\chi_{kj}(\rho)}{|\rho|}\Big)\,|d\rho| \le C_1(p,f)\Big(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta}s} + \alpha_s(f) + \frac{s^4}{m} + \frac{s\ln m}{m}\Big). \tag{7.36}$$

Рассмотрим теперь $\int_0^x D_{kj}(x,t,\rho)f(t)\,dt$ при $k=\overline{1,\mu}$, $j=\overline{1,\mu}$. Если $k \ne j$, то рассуждаем, так же, как и при оценке $\int_0^x D_{kj}(x,t,\rho)f(t)\,dt$ при $k=\overline{1,\mu}$, $j=\overline{\mu+1,n}$. Получим

$$\Big|\int\limits_0^x D_{kj}(x,t,\rho)f(t)\,dt\Big| \le C(p,f)\Big(\frac{\chi_{\underline{\{k,j\}},\overline{\{k,j\}}}(\rho)}{|\rho|^{n-1}\ln^{\alpha+\beta}s} + \frac{\alpha_s(f)}{|\rho|^n} + \frac{s^4}{|\rho|^{n+1}} +$$

$$+\frac{s\varkappa_1(\rho)}{|\rho|^n} + \frac{s\chi_{\underline{\{k,j\}},\overline{\{k,j\}}}(\rho)}{|\rho|^n}\Big) \quad (k=\overline{1,\mu},\ j=\overline{1,\mu},\ k\ne j), \tag{7.37}$$

где $\underline{(k,j)} = \min\{k,j\}$, $\overline{(k,j)} = \max\{k,j\}$.

Пусть теперь $k=j$, $j=\overline{1,\mu}$. В этом случае

$$\int\limits_0^x D_{jj}(x,t,\rho)f(t)\,dt = \frac{\omega_j}{i^{2n}n^2\rho^{n-1}}\int\limits_0^x e^{\rho_j(x-t)}\int\limits_t^x p(\tau)\,d\tau f(t)\,dt.$$

Так как $p \in C[0,1]$, то

$$\Big|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\int\limits_0^x D_{jj}(x,t,\rho)f(t)\,dt\,d\lambda\Big| \le C(p)\int\limits_0^x |f(t)||x-t|\int\limits_{\gamma_m}\big|e^{\rho_j(x-t)}\big|\,|d\rho|\,dt \le$$

$$\leq C_1(p) \int\limits_0^x |f(t)||x-t| \frac{1}{|x-t|} \int\limits_0^\infty e^{-\xi}\, d\xi\, dt \leq C_2(p)||f||_1 \quad (j = \overline{1,\mu}). \tag{7.38}$$

Следовательно, в силу (7.31), (7.37), (7.38) получим

$$\left| -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \int\limits_0^x A_2(x,t,\rho) f(t)\, dt\, d\lambda \right| \leq C_1(p,f) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} s} + \alpha_s(f) + + \frac{s^4}{m} + \frac{s \ln m}{m} \right) + C_2(p)\|f\|. \tag{7.39}$$

Наконец, рассмотрим $\int_0^x D_{kj}(x,t,\rho) f(t)\, dt$ при $k = \overline{\mu+1,n}$, $j = \overline{1,\mu}$. В этом случае проводим те же рассуждения, что и при $k = \overline{1,\mu}$, $j = \overline{\mu+1,n}$. Получим

$$\left| \int\limits_0^x D_{kj}(x,t,\rho) f(t)\, dt \right| \leq C(p,f) \left(\frac{\chi_{jk(\rho)}}{|\rho|^{n-1} \ln^{\alpha+\beta} s} + \frac{\alpha_s(f)}{|\rho|} + \right.$$

$$\left. + \frac{s^4}{|\rho|^{n+1}} + \frac{s\varkappa_1(\rho)}{|\rho|} + \frac{s\chi_{jk}(\rho)}{|\rho|^n} \right) \quad (k = \overline{\mu+1,n},\ j = \overline{1,\mu}).$$

Отсюда следует (см. (7.32))

$$\left| -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \int\limits_0^x A_3(x,t,\rho) f(t)\, dt\, d\lambda \right| \leq C_1(p,f) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} s} + \alpha_s(f) + \frac{s^4}{m} + \frac{s \ln m}{m} \right). \tag{7.40}$$

Таким образом, полагая $s = E\big(m^{\frac{1}{8}}\big)$ и учитывая, что $\alpha + \beta > 1$, из (7.24), (7.25), (7.27)–(7.29), (7.36), (7.39), (7.40) получим

$$\|S_{1j_m}(f) - S_{0k_m}(f)\|_{C[\delta,1-\delta]} \leq \beta_m(p,f) + C(\delta,p)\|f\|_1, \tag{7.41}$$

где $\beta_m(p,f) \to 0$ при $m \to \infty$.

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. В силу того, что множество D_{L_1} всюду плотно в $L_1[0,1]$ (следствие (4.24)), найдется функция $h_\varepsilon \in D_{L_1}$ такая, что

$$\|f - h_\varepsilon\|_1 < \frac{\varepsilon}{4C(\delta,\rho)}. \tag{7.42}$$

Далее, при $m \geq m_0(\varepsilon)$:

$$\beta_m(p, f - h_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{7.43}$$

В силу теоремы (4.20)

$$\|S_{1j_m}(h_\varepsilon) - h_\varepsilon\|_{C[\delta,1-\delta]} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{7.44}$$

Так как $h_\varepsilon(x) \in AC[0,1]$ и, следовательно, тригонометрический ряд Фурье h_ε равномерно внутри $(0,1)$ сходится к h_ε ([42, с. 121]), то в силу того, что для оператора L_0 справедлива теорема равносходимости Тамаркина [6], получим

$$\|S_{0k_m}(h_\varepsilon) - h_\varepsilon\|_{C[\delta,1-\delta]} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{7.45}$$

Наконец, из тождества

$$S_{1j_m}(f) - S_{0k_m}(f) \equiv (S_{1j_m} - S_{0k_m})(f - h_\varepsilon) + \big(S_{1j_m}(h_\varepsilon) - h_\varepsilon\big) + \big(h_\varepsilon - S_{0k_m}(h_\varepsilon)\big)$$

с учетом оценок (7.41)–(7.45) следует, что

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists m_0(\varepsilon))\,(\forall m \ge m_0(\varepsilon))\ \|S_{1j_m}(f) - S_{0k_m}(f)\|_{C[\delta,1-\delta]} < \varepsilon,$$

а это и требовалось доказать.

2. Пусть теперь $p_{k,k-1} \in L_r[0,1]$ $(k = \overline{1,n})$, $f \in L_q[0,1]$, $1/q + 1/r < 1$. В силу лемм (7.5) и (7.10)

$$a_{jk}(\lambda) \le C(r)\varkappa_{r'}(\rho)|\rho|^{j-k}\|p_{k,k-1}\|_r,$$
$$b_j(\lambda) \le C(q)\varkappa_{q'}(\rho)|\rho|^{j-n}\|f\|_q.$$

Из этих оценок, оценки (7.22) и формулы (7.21) следует (при условии, что $\sum_{k=1}^n \|p_{k,k-1}\|_r$ достаточно мала)

$$R_1(\lambda)f = R_0(\lambda)f + O\biggl(\sum_{j=1}^n \|p_{j,j-1}\|_r\|f\|_q\frac{\varkappa_{r'}(\rho)\varkappa_{q'}(\rho)}{|\rho|^{n-1}}\biggr).$$

Далее, в силу того, что $1/q' + 1/r' > 1$ и справедлива лемма (7.8), имеем

$$\|S_{1j_m}(f) - S_{0k_m}(f)\|_{C[0,1]} \le C(q,r)\int\limits_{\gamma_m}\varkappa_{r'}(\rho)\varkappa_{q'}(\rho)\,|d\rho|\|f\|_q \le C_1(q,r)\|f\|_q. \tag{7.46}$$

Из справедливости теоремы (4.20) для оператора L_1, теоремы равносходимости Тамаркина [6] для оператора L_0 и того, что если $h \in D_{L_1}$, то $h(x) \in AC[0,1]$, а значит тригонометрический ряд Фурье h равномерно сходится внутри $(0,1)$ к h ([42, с. 121]), следует, что

$$(\forall h \in D_{L_1})\ \lim_{m\to\infty}\|S_{1j_m}(h) - S_{0k_m}(h)\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0.$$

А так как D_{L_1} всюду плотно в $L_q[0,1]$ (следствие (4.24)) и справедливо (7.46), то по теореме Банаха-Штейнгауза получим утверждение леммы (7.13) в данном случае.

3. Предположим, что $p_{k,k-1} \in H_1^\alpha[0,1]$ $(k = \overline{1,n})$, $f \in H_\infty^\beta[0,1]$, $\alpha+\beta > 1$. Будем считать, что $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, так как в остальных случаях доказательство упрощается.

В данном случае

$$\Phi(\rho) = \|\varphi(\cdot,\rho)\|_\infty = O\Big(\frac{1}{\ln^\alpha|\rho|}\Big), \tag{7.47}$$

где функция $\varphi(x,\rho)$ та же, что и в §2. В самом деле, рассмотрим функции

$$f_{jsm}(x,\rho) = \int\limits_0^x e^{(\rho_j-\rho_s)(x-t)}p_{m,m-1}(t)\,dt, \quad 1 \le j < s \le n,\ 1 \le m \le n,$$

которые входят в $\varphi(x,\rho)$. Разбивая $f_{jsm}(x,\rho)$ на два слагаемых в соответствии с тождеством $p_{m,m-1} \equiv (p_{m,m-1} - P_{ms}) + P_{ms}$, где P_{ms} — тригонометрический многочлен наилучшего приближения $p_{m,m-1}$, порядка s, проводя во втором слагаемом один раз интегрирование по частям, пользуясь тем, что $p_{m,m-1} \in H_1^\alpha[0,1]$ и справедлива лемма (6.15), получим

$$\|f_{jsm}(\cdot,\rho)\|_\infty \le C(p_{m,m-1})\left(\frac{s}{|\rho|} + \frac{1}{\ln^\alpha s}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\|f_{jsm}(\cdot,\rho)\|_\infty \le C(p_{m,m-1})\frac{1}{\ln^\alpha |\rho|},$$

если положить $s = E\big(|\rho|^{\frac{1}{2}}\big)$. Аналогично оцениваются и другие слагаемые, входящие в $\varphi(x,\rho)$. Таким образом, оценка (7.47) получена.

Предположим, что F_s — алгебраические многочлены наилучшего приближения f порядка s. Тогда, очевидно,

$$R_1(\lambda)f - VR_0(\lambda)(V^{-1}f) = \int_0^1 Q(x,t,\lambda)f_s(t)\,dt + \int_0^1 Q(x,t,\lambda)F_s(t)\,dt =$$

$$= A_{1s}(x,\rho) + A_{2s}(x,\rho), \tag{7.48}$$

где $f_s = f - F_s$ и

$$Q(x,t,\lambda) = G_1(x,t,\lambda) - \frac{V(x)}{V(t)}G_0(x,t,\lambda).$$

В силу асимптотики (4.8), оценки (7.47), леммы (6.15) и того, что $f \in H_\infty^\beta[0,1]$,

$$\|A_{1s}(\cdot,\rho)\|_{C[\delta,1-\delta]} \le \frac{C(f)}{|\rho|^{n-1}\ln^\beta s}\left(\frac{\varkappa_1(\rho)}{\ln^\alpha|\rho|} + |e^{\rho_\nu\delta}| + |e^{-\rho_{\nu+1}\delta}|\right). \tag{7.49}$$

Рассмотрим теперь $A_{2s}(x,\rho)$. Так как на основании (4.8) при $x \in [\delta, 1-\delta]$ и $\rho \in \hat{S}(d)$

$$H(x,t,\rho) = \frac{1}{i}\Big(\bar{D}^*_{1,n-1,t}G_1(x,t,\lambda) - \frac{V(x)}{V(t)}\bar{D}^*_{0,n-1,t}G_0(x,t,\lambda)\Big) =$$

$$= O\left(\frac{1}{\ln^\alpha|\rho|}\Big(|e^{\rho_\nu(x-t)}|\chi(x-t) + |e^{\rho_{\nu+1}(x-t)}|\chi(t-x)\Big) + |e^{\rho_\nu\delta}| + |e^{-\rho_{\nu+1}\delta}|\right),$$

то, учитывая (4.6)–(4.8) и используя лемму (6.15), получим

$$A_{2s}(x,\rho) = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \Big(\bar{D}^*_{1n,t}G_1(x,t,\lambda) - \frac{V(x)}{V(t)}\bar{D}^*_{0n,t}G_0(x,t,\lambda)\Big)F_s(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\Big(F_s(1)H(x,1,\lambda) - F_s(0)H(x,0,\lambda) - \int_0^1 H(x,t,\lambda)F_s^{(1)}(t)\,dt +$$

$$+\int\limits_0^1 \bar{r}_{n,n-1}(t)\bar{D}^*_{1,n-1,t}G_1(x,t,\lambda)F_s(t)\,dt - \int\limits_0^1 \frac{V(x)}{nV(t)}\sum_{j=1}^n p_{j,j-1}(t)\bar{D}^*_{0,n-1,t}G_0(x,t,\lambda)F_s(t)\,dt\Big) =$$

$$= B_{1s}(x,\rho) + B_{2s}(x,\rho) + O\left(\frac{1}{|\rho|^n}\Big(\frac{1}{\ln^\alpha|\rho|} + s^2\big(\varkappa_1(\rho) + |e^{\rho_\mu\delta}| + |e^{-\rho_{\mu+1}\delta}|\big)\Big)\right), \qquad (7.50)$$

где

$$B_{1s}(x,\rho) = -\frac{1}{n\lambda}\int\limits_0^1 \frac{V(x)}{V(t)}\sum_{j=1}^n p_{j,j-1}(t)\bar{D}^*_{0,n-1,t}G_0(x,t,\lambda)F_s(t)\,dt,$$

$$B_{2s}(x,\rho) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 \bar{r}_{n,n-1}(t)\bar{D}^*_{1,n-1,t}G_1(x,t,\lambda)F_s(t)\,dt.$$

Обозначим

$$q(t) := \frac{1}{V(t)}\sum_{j=1}^n p_{j,j-1}(t).$$

Очевидно, $q \in H_1^\alpha[0,1]$. Пусть Q_s есть тригонометрический многочлен наилучшего приближения функции q порядка s. Разобьем $B_{1s}(x,\rho)$ на сумму двух слагаемых в соответствии с тождеством $q \equiv (q - Q_s) + Q_s$ и во втором слагаемом один раз проинтегрируем по частям. Тогда в силу леммы (6.15), получим

$$\|B_{1s}(\cdot,\rho)\|_{C[\delta,1-\delta]} \le C(f)\frac{1}{|\rho|^n}\left(\frac{1}{\ln^\alpha s} + \frac{s^2}{|\rho|}\right). \qquad (7.51)$$

Такая же оценка при помощи аналогичных рассуждений может быть получена и для $\|B_{2s}(\cdot,\rho)\|_{C[\delta,1-\delta]}$.

Учитывая это, а так же используя (7.48)–(7.51) и полагая $s = E\big(|\rho|^{\frac14}\big)$, придем к оценке

$$R_1(\lambda)f - VR_0(\lambda)(V^{-1}f) = O\left(\frac{1}{|\rho|^{n-1}\ln^\beta|\rho|}\Big(\frac{\varkappa_1(\rho)}{\ln^\alpha|\rho|} + |e^{\rho_\nu\delta}| + |e^{-\rho_{\mu+1}\delta}|\Big) + \frac{1}{|\rho|^n\ln^\alpha|\rho|}\right).$$

Отсюда в силу леммы (7.8), того, что $\alpha + \beta > 1$,

$$\int\limits_{\gamma_m}\left|e^{\rho_\nu\delta}\right||d\rho| \le C(\delta), \quad \int\limits_{\gamma_m}\left|e^{-\rho_{\nu+1}\delta}\right||d\rho| \le C(\delta),$$

получим

$$\|S_{1j_m}(f) - VS_{ok_m}(V^{-1}f)\|_{C[\delta,1-\delta]} = O\left(\frac{1}{\ln^{\alpha+\beta-1}m} + \frac{1}{\ln^\beta m} + \frac{1}{\ln^\alpha m}\right) = o(1)$$

при $m \to \infty$.

Чтобы закончить доказательство случая 3) леммы (7.13), осталось воспользоваться теоремой (6.18) и теоремой равносходимости [6].

Случай 3) леммы (7.13), а, следовательно, и вся лемма (7.13) , полностью доказаны. □

(7.52) Лемма. *Если $p_{kj} \in L_1[0,1]$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,k-1}$, а краевые условия (1.2) регулярны, то существуют две последовательности $\{l_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{j_m\}_{m=1}^{\infty}$ из $\mathbb{N}$ такие, что для любого $\delta \in (0,1/2)$*

$$\lim_{m\to\infty} \|S_{l_m}(f) - S_{1j_m}(f)\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0.$$

Доказательство. Так как краевую задачу $L_1 y - \lambda y = f$ можно записать в виде

$$\begin{cases} i\frac{d}{dx} y^{|\overline{k-1}|} - y^{|\bar{k}|} + \sum\limits_{j=0}^{k-1} p_{kj} y^{|\bar{j}|} = \sum\limits_{j=0}^{k-2} p_{kj} y^{|\bar{j}|} \quad (k = \overline{1,n-1}), \\ i\frac{d}{dx} y^{|\overline{n-1}|} - \lambda y^{|\bar{0}|} + \sum\limits_{j=0}^{n-1} p_{nj} y^{|\bar{j}|} = \sum\limits_{j=0}^{n-2} p_{nj} y^{|\bar{j}|} + f, \end{cases} \tag{7.53}$$

$$U_m(Y_1) = 0 \quad (m = \overline{1,n}),$$

то, вспоминая определение оператора $\hat{L}_\lambda$, считая правую часть (7.53) известной вектор-функцией и пользуясь леммой (7.10), получим

$$R_1(\lambda)f = R(\lambda)f + \sum_{s=1}^{n} \hat{R}_{1s}(\lambda) \left(\sum_{j=0}^{s-2} p_{sj} \right) D_{1j} R_1(\lambda) f.$$

Отсюда в силу леммы (4.8) и того, что

$$B^{(k+s)}_{x^k,t^s}(x,t,\rho) = O\left(\frac{|\rho|^{k+s}}{|\rho|^{n-1}} \right),$$

легко получим для $\rho \in \hat{S}(d)$ асимптотику

$$R_1(\lambda)f = R(\lambda)f + O\left(\frac{1}{|\rho|^n} \|f\|_1 \right).$$

Таким образом, обозначив через l_m и j_m число с.з. (с учетом кратности) операторов L и L_1 соответственно, попавших внутрь контура Γ_m, получим

$$\|S_{l_m}(f) - S_{1j_m}(f)\|_{C[0,1]} \le C\|f\|_1. \tag{7.54}$$

Рассмотрим множество функций D_L. Так как $D_L \in AC[0,1]$, то в силу леммы (7.13) и того, что обычный тригонометрический ряд Фурье функции $h \in AC[0,1]$ равномерно сходится к h внутри отрезка $[0,1]$ ([42, с. 121]), получим

$$\lim_{m\to\infty} \|S_{1j_m}(h) - h\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0. \tag{7.55}$$

Кроме того, в силу теоремы (4.20) для $h \in D_L$

$$\lim_{m\to\infty} \|S_{l_m}(h) - h\|_{C[0,1]} = 0. \tag{7.56}$$

Из (7.55) и (7.56) следует, что для $h \in D_L$

$$\lim_{m\to\infty} \|S_{l_m}(h) - S_{1j_m}(h)\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0. \tag{7.57}$$

Но так как множество D_L в силу следствия (4.24) всюду плотно в $L_1[0,1]$, то из (7.54) и (7.57) по теореме Банаха-Штейнгауза следует утверждение доказываемой леммы. Лемма доказана. □

Из лемм (7.13) и (7.52) следует утверждение (7.2) теоремы (7.1).

§8. Контрпримеры

В этом параграфе будет показана точность условий теоремы (7.1). Для того, чтобы сделать это, достаточно построить примеры операторов из рассматриваемого класса, для которых при выполнении условий, противоположных условиям 1)–3) теоремы(7.1), утверждение (7.2) перестаёт быть верным.

Рассмотрим два оператора $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_0$, определяемые дифференциальными выражениями $D^2y + \frac{1}{\sigma}p(x)Dy$ и D^2y, соответственно, и краевыми условиями $(Dy)(0) = (Dy)(1) = 0$, где $D = i\frac{d}{dx}$, $\sigma > 0$ — параметр, $p \in L_1[0,1]$. Договоримся в дальнейшем использовать в случае $n = 2$ все необходимые объекты, введенные ранее для произвольного n, но будем над ними ставить волну (например $\tilde{\rho}$, $\tilde{\omega}_k$ и т. д.). Операторы $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_0$ принадлежат классу к.д. операторов с регулярными краевыми условиями. Очевидно, контуры $\tilde{\Gamma}_m$ можно взять круговыми (начиная с некоторого m_0). При $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, где σ_0 — достаточно большое число, аналогично формуле (7.20) получим

$$\tilde{R}_1(\lambda)f = \tilde{R}_0(\lambda)f + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{\sigma}\right)^k \tilde{R}_0(\lambda)\big(D\tilde{R}_0(\lambda)p\big)^{k-1}D\tilde{R}_0(\lambda)f =$$

$$= \tilde{R}_0(\lambda)f + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{\sigma}\right)^k a_k(x,\lambda) = \tilde{R}_0(\lambda)f - \frac{1}{\sigma}a_1(x,\lambda) + b(x,\lambda,\sigma). \tag{8.1}$$

(8.2) Лемма. *Предположим $f, p \in L_1[0,1]$, $f(x) = 0$ при $x \in [1/2,1]$, а $p = 0$ при $x \in [0,1/2]$ и, кроме того, p — четная функция относительно точки $3/4$, тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m} a_1\Big(\frac{1}{2},\lambda\Big)\,d\lambda = C(p,f) - \frac{i}{8}\int_0^1 p_1(\tau)\int_0^1 f_1(t)\cos^2\frac{\pi}{4}(t+\tau)\hat{D}_m(t+\tau)\,dt\,d\tau, \tag{8.3}$$

где $p_1(\tau) = p\big(\frac{4-\tau}{4}\big)$, $f_1(t) = f\big(\frac{1-t}{2}\big)$ и

$$\hat{D}_m(t) = \frac{\sin\big(m+\frac{1}{2}\big)\pi t}{2\sin\frac{\pi}{2}t}.$$

Доказательство. Так как

$$\tilde{G}_0(x,t,\lambda) = \begin{cases} -\frac{\cos\tilde{\rho}t\cos\tilde{\rho}(1-x)}{\tilde{\rho}\sin\tilde{\rho}} & \text{при} \quad x \ge t, \\ -\frac{\cos\tilde{\rho}t\cos\tilde{\rho}(1-t)}{\tilde{\rho}\sin\tilde{\rho}} & \text{при} \quad x < t, \end{cases}$$

то используя теорию вычетов, можно получить следующую формулу

$$I_m(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m} a_1(x,\lambda)d\lambda = C_1(p,f) + i\sum_{k=1}^{m}\Bigg((1-x)\sin k\pi x\int_0^1 p(\tau)\sin 2k\pi\tau\,d\tau\times$$

$$\times\int_0^1 f(t)\cos k\pi t\,dt + 2\cos k\pi x\int_0^1 \tau p(\tau)\cos 2k\pi\tau\,d\tau\int_0^1 f(t)\cos k\pi t\,dt +$$

$$+\cos k\pi x\int_0^1 p(\tau)\cos 2k\pi\tau\,d\tau\int_0^1 (1-t)f(t)\sin k\pi t\,dt - \cos k\pi x\int_0^1 f(t)\sin k\pi t\times$$

$$\times\int_t^1 p(\tau)\sin 2k\pi\tau\,d\tau\,dt - \cos k\pi x\int_0^1 f(t)\cos k\pi t\int_t^x p(\tau)\,d\tau\,dt - \sin k\pi x\times$$

$$\times\int_x^1 p(\tau)\sin 2k\pi\tau\,d\tau\int_0^1 f(t)\cos k\pi t\,dt - \cos k\pi x\int_0^1 f(t)\cos k\pi t\times$$

$$\times\int_t^1 p(\tau)\cos 2k\pi\tau\,d\tau\,dt - \cos k\pi x\int_x^1 p(\tau)\cos 2k\pi\tau\,d\tau\int_0^1 f(t)\cos k\pi t\,dt\Bigg).$$

В силу условий, наложенных на p и f, отсюда следует

$$I_{2m}\Big(\frac{1}{2}\Big) = C_1(p,f) - \frac{i}{8}\sum_{k=1}^{m}\Bigg(\int_0^1 f_2(t)\cos k\pi t\,dt\int_0^1 p_2(\tau)\cos k\pi\tau\,d\tau -$$

$$-\int_0^1 f_2(t)\cos\Big(k-\frac{1}{2}\Big)\pi t\,dt\int_0^1 p_2(\tau)\cos\Big(k-\frac{1}{2}\Big)\pi\tau\,d\tau\Bigg) = C_1(p,f) - \frac{i}{8}d_m, \tag{8.4}$$

где $f_2(t) = f\big(\frac{t}{2}\big)$, $p_2(\tau) = p\big(\frac{\tau+3}{4}\big)$.

Преобразуем d_m. Очевидно, что

$$d_m = \int_0^1\int_0^1 f_2(t)p_2(\tau)\sum_{k=1}^{m}\Bigg(-\frac{1}{2}\sin k\pi(t+\tau)\sin\frac{\pi}{2}(t+\tau) + \cos k\pi(t+\tau)\sin^2\frac{\pi}{4}(t+\tau) -$$

$$-\frac{1}{2}\sin k\pi(t-\tau)\sin\frac{\pi}{2}(t-\tau) + \cos k\pi(t-\tau)\sin^2\frac{\pi}{4}(t-\tau)\Bigg)\,d\tau\,dt =$$

$$=\int_0^1\int_0^1 f_2(t)p_2(\tau)\Bigg(-\frac{1}{4}\Big(\cos\frac{\pi}{2}(t+\tau) - \cos\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\pi(t+\tau)\Big) + \Bigg(\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\pi(t+\tau)}{2\sin\frac{\pi}{2}(t+\tau)} - \frac{1}{2}\Bigg)\times$$

$$\times\sin^2\frac{\pi}{4}(t+\tau) - \frac{1}{4}\Big(\cos\frac{\pi}{2}(t-\tau) - \cos\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\pi(t-\tau)\Big) + \Bigg(\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\pi(t-\tau)}{2\sin\frac{\pi}{2}(t-\tau)} - \frac{1}{2}\Bigg)\times$$

$$\times\sin^2\frac{\pi}{4}(t-\tau)\,d\tau\,dt = C_2(p,f) + \int_0^1\int_0^1 f_1(t)p_1(\tau)\hat{D}_m(t+\tau)\cos^2\frac{\pi}{4}(t+\tau)\,d\tau\,dt +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^1 p_2(\tau)\Big(\int_{-\tau}^{1-\tau} f_2(t+\tau)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}t\sin\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\pi t\,dt\Big)\,d\tau, \tag{8.5}$$

где $f_1(t)=f_2(1-t)$, $p_1(\tau)=p_2(1-\tau)$.

Так как $f_2(t)\in L_1[0,1]$, $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}t\in V[-1,1]$, то по теореме 3.1 ([49, с. 44]) интеграл

$$\int_{-\tau}^{1-\tau} f_2(t+\tau)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}t\sin\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\pi t\,dt$$

равномерно по τ стремится к нулю при $m\to\infty$. Из (8.4)–(8.5) следует асимптотика (8.3). Лемма доказана. □

(8.6) Лемма. *Если выполняется одно из условий:*

1) $p\in L_r[0,1]$, $f\in L_q[0,1]$, $\frac{1}{q}+\frac{2}{r}<2$,

2) $p\in H_1^{\alpha}[0,1]$, $f\in H_\infty^{\beta}[0,1]$, $2\alpha+\beta>1$,

то для любого $\delta\in(0,1/2)$ *и* σ *достаточно большом последовательность*

$$\left\{\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m} b(\cdot,\lambda,\sigma)\,d\lambda\right\|_{C[\delta,1-\delta]}\right\}_{m=1}^{\infty}$$

ограничена.

Доказательство. 1. Пусть $p\in L_r[0,1]$, $f\in L_q[0,1]$, $1/q+2/r<2$. Из определения $b(x,\lambda,\sigma)$ (см.(8.1)) при σ достаточно большом следует оценка

$$b(x,\lambda,\sigma)=O\left(\left\|\int_0^1|\tilde G_0(x,t,\lambda)p(t)|\,dt\right\|_\infty\times\right.$$

$$\left.\times\left\|\int_0^1|D_x\tilde G_0(x,t,\lambda)p(t)|\,dt\right\|_\infty\left\|\int_0^1|D_x\tilde G_0(x,t,\lambda)f(t)|\,dt\right\|_\infty\right).$$

Воспользовавшись теперь леммой (7.5), получим

$$b(x,\lambda,\sigma)=O\left(\frac{1}{|\tilde\rho|}\varkappa_{r'}^2(\tilde\rho)\varkappa_{q'}(\tilde\rho)\right). \tag{8.7}$$

Так как по условию $2/r'+1/q'=3-2/r-1/q>1$, то из оценки (8.7) в силу пункта 1) леммы (7.8) следует утверждение доказательства леммы.

2. Пусть теперь $\rho\in H_1^{\alpha}[0,1]$, $f\in H_1^{\alpha}[0,1]$, $2\alpha+\beta>1$.

Начиная с этого места и до конца параграфа разные константы будем обозначать по-разному — это несколько упростит рассуждения.

Рассмотрим $a_2(x,\lambda)$. Так как в силу леммы (4.5)

$$D_x^k\tilde G_0(x,t,\lambda)=i^kB_{x^k}^{(k)}(x,t,\tilde\rho)+i^kH_{x^k}^{(k)}(x,t,\tilde\rho)\quad(k=0,1),$$

где

$$|H^{(k)}_{x^k}(x,t,\tilde\rho)| \le C\frac{1}{|\tilde\rho|^{1-k}}\Big(|e^{\tilde\rho_1 x}| + |e^{\tilde\rho_2(x-1)}|\Big),$$

то аналогично формуле (7.26) получим

$$a_2(x,\lambda) = -\int_0^1 \tilde B(x,t,\tilde\rho)p(t)\int_0^1 \tilde B^{(1)}_t(t,t_1,\tilde\rho)p(t_1)\times$$

$$\times\int_0^1 \tilde B^{(1)}_{t_1}(t_1,\tau,\tilde\rho)f(\tau)\,d\tau\,dt_1\,dt + b_2(x,\tilde\rho) = b_1(x,\tilde\rho)+b_2(x,\tilde\rho), \tag{8.8}$$

где через $b_2(x,\tilde\rho)$ обозначена сумма тех слагаемых, которые содержат под знаками интегралов хотя бы один раз функцию H. Легко видеть, что

$$\|b_2(\cdot,\tilde\rho)\|_{C[\delta,1-\delta]} \le C_1^3\|p\|_1^2\|f\|_\infty\frac{1}{|\tilde\rho|}\big|e^{\tilde\rho_1\delta}\big|,$$

где $C_1 = 1+2C$ и, следовательно,

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde\Gamma_m} b_2(\cdot,\tilde\rho)\,d\lambda\right\|_{C[\delta,1-\delta]} \le \frac{1}{\pi}C_1^3\|p\|_1^2\|f\|_\infty\int_{\tilde\gamma_m}\big|e^{\tilde\rho_1\delta}\big||d\tilde\rho| \le \frac{1}{\delta}C_1^3C_2\|p\|_1^2\|f\|_\infty. \tag{8.9}$$

Рассмотрим теперь $b_1(x,\rho)$. Справедливо тождество

$$b_1(x,\tilde\rho) = -\int_0^1 \tilde B(x,t,\tilde\rho)p(t)\int_0^1\int_0^1 \tilde B^{(1)}_t(t,t_1,\tilde\rho)p(t_1)\tilde B^{(1)}_{t_1}(t_1,\tau,\tilde\rho)\,dt_1 f(\tau)\,d\tau\,dt \equiv$$

$$\equiv -\int_0^x\int_0^t\int_0^\tau - \int_0^x\int_0^t\int_\tau^t - \int_0^x\int_0^t\int_t^1 - \int_0^x\int_t^x\int_0^t - \int_0^x\int_t^x\int_t^\tau -$$

$$-\int_0^x\int_t^x\int_\tau^1 - \int_0^x\int_x^1\int_0^t - \int_0^x\int_x^1\int_t^\tau - \int_0^x\int_x^1\int_\tau^1 - \int_x^1\int_0^x\int_0^\tau -$$

$$-\int_x^1\int_0^x\int_\tau^t - \int_x^1\int_0^x\int_t^1 - \int_x^1\int_x^t\int_0^\tau - \int_x^1\int_x^t\int_\tau^t - \int_x^1\int_x^t\int_t^1 -$$

$$-\int_x^1\int_t^1\int_0^t - \int_x^1\int_t^1\int_t^\tau - \int_x^1\int_t^1\int_\tau^1 = \sum_{j=1}^{18} g_j(x,\tilde\rho).$$

Так как слагаемые $g_{10}(x,\tilde\rho),\dots,g_{18}(x,\tilde\rho)$ симметричны слагаемым $g_9(x,\tilde\rho),\dots,g_1(x,\tilde\rho)$, соответственно, в том смысле, что получаются из них при замене конца "0"отрезка $[0,1]$ на "1"и наоборот, то оценки каждой симметричной пары совершенно одинаковы. Поэтому рассмотрим только слагаемые $g_1(x,\tilde\rho)$,..., $g_9(x,\tilde\rho)$.

1°. $$g_1(x,\tilde\rho) = \frac{\tilde\omega_1}{8\tilde\rho}\int_0^x p(t)\int_0^t\int_0^\tau e^{\tilde\rho_1(x+\tau-2t_1)}p(t_1)\,dt_1 f(\tau)\,d\tau\,dt =$$

$$= \frac{\tilde\omega_1}{8\tilde\rho}\int_0^x p(t)\int_0^t p(t_1)\int_{t_1}^t e^{\tilde\rho_1(x+\tau-2t_1)}f(\tau)\,d\tau\,dt_1\,dt.$$

Отсюда

$$|g_1(x,\tilde\rho)| \le \frac{1}{8|\tilde\rho|}\|f\|_\infty\|p\|_1\int_0^x |p(t_1)|(x-t_1)|e^{\tilde\rho_1(x-t_1)}|\,dt_1.$$

Следовательно,

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde\Gamma_m} g_1(\cdot,\tilde\rho)\,d\lambda\right\|_{C[\delta,1-\delta]} \le \frac{1}{8}C_2\|p\|_1^2\|f\|_\infty.$$

2°. $$g_2(x,\tilde\rho) = -\frac{\tilde\omega_1}{8\tilde\rho}\int_0^x p(t)\int_0^t e^{\tilde\rho_1(x-\tau)}\int_\tau^t p(t_1)\,dt_1 f(\tau)\,d\tau\,dt =$$
$$= -\frac{\tilde\omega_1}{16\tilde\rho}\int_0^x f(\tau)e^{\tilde\rho(x-\tau)}\left(\int_\tau^x p(t)\,dt\right)^2 d\tau = -\frac{\tilde\omega_1}{16\tilde\rho}\int_0^x f_s(\tau)e^{\tilde\rho_1(x-\tau)}\left(\int_\tau^x p(t)\,dt\right)^2 d\tau -$$
$$-\frac{\tilde\omega_1}{16\tilde\rho}\int_0^x F_s(\tau)e^{\tilde\rho_1(x-\tau)}\left(\int_\tau^x p(t)\,dt\right)^2 d\tau = A_1(x,\tilde\rho,s) + A_2(x,\tilde\rho,s),$$

где $f_s = f - F_s$, а F_s — алгебраический многочлен наилучшего приближения f в метрике $C[0,1]$ порядка s. В силу леммы (6.15) существует константы C_3 и C_4 такие, что

$$E_s(f)_\infty \le C_3\frac{1}{\ln^\beta s}, \tag{8.10}$$

$$\left\|F_s^{(r)}\right\|_\infty \le C_4\|f\|_\infty s^{2r}. \tag{8.11}$$

Рассмотрим $0 < \alpha_1 < \alpha$, но по-прежнему $2\alpha_1 + \beta > 1$, и пусть $0 < 2\delta_1 < \min\{\eta(\alpha_1),\delta\}$, где $\eta(\alpha_1)$ определена в лемме (6.7). Представим

$$A_1(x,\tilde\rho,s) = -\frac{\tilde\omega_1}{16\tilde\rho}\int_0^{x-\delta_1} f_s(\tau)e^{\tilde\rho_1(x-\tau)}\left(\int_\tau^x p(t)\,dt\right)^2 d\tau -$$
$$-\frac{\tilde\omega_1}{16\tilde\rho}\int_{x-\delta_1}^x f_s(\tau)e^{\tilde\rho_1(x-\tau)}\left(\int_\tau^x p(t)\,dt\right)^2 d\tau = A_{11}(x,\tilde\rho,s) + A_{12}(x,\tilde\rho,s).$$

Далее, пользуясь неравенством (8.11) и тем, что $x-\tau \ge \delta_1$, получим

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde\Gamma_m} A_{11}(\cdot,\tilde\rho,s)\,d\lambda\right\|_{C[\delta,1-\delta]} \le \frac{1}{16\delta_1}C_2(1+C_4)\|p\|_1^2\|f\|_\infty. \tag{8.12}$$

В силу леммы (6.7) и (6.13), неравенства (6.16) и аналогично (6.27)

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde\Gamma_m} A_{12}(\cdot,\tilde\rho,s)\,d\lambda\right\|_{C[\delta,1-\delta]} \le \frac{1}{8\pi}C_3\|p\|_{M_\alpha}^2\frac{1}{\ln^\beta s}\int_{x-\delta_1}^x \frac{|\sin(x-\tau)2\pi(m+\frac12)|}{x-\tau}\frac{1}{\ln^{2\alpha_1}\frac{1}{x-\tau}}\,d\tau =$$
$$= \frac{1}{8\pi}C_3\|p\|_{M_\alpha}^2\frac{1}{\ln^\beta s}\int_0^{\delta_1}\frac{|\sin 2\pi(m+\frac12)\tau|}{\tau\ln^{2\alpha_1}\frac{1}{\tau}}\,d\tau \le \frac{C_3C_5\|p\|_{M_\alpha}^2}{8\pi}\frac{\ln^{1-2\alpha_1} m}{\ln^\beta s}. \tag{8.13}$$

Рассмотрим теперь $A_2(x,\tilde\rho,s)$. Проводя один раз интегрирования по частям и пользуясь неравенством (8.11), получим

$$\|A_2(\cdot,\tilde\rho,s)\|_{C[\delta,1-\delta]} \le \frac{C_4\|p\|_1^2\|f\|_\infty}{8|\tilde\rho|^2} + \frac{C_4\|p\|_1^2\|f\|_\infty s^2\varkappa_1(\rho)}{16|\tilde\rho|^2}.$$

Так как в силу леммы (7.8)

$$\frac{1}{\pi}\int_{\tilde{\gamma}_m} \varkappa_1(\tilde{\rho})|d\tilde{\rho}| \le C_6 \ln m \tag{8.14}$$

и, кроме того,

$$\frac{1}{\pi}\int_{\tilde{\gamma}_m} \frac{1}{|\tilde{\rho}|}|d\tilde{\rho}| \le C_7, \tag{8.15}$$

$$\frac{1}{\tilde{r}_m} \le C_8\frac{1}{m} \quad (\tilde{r'}_m = \tilde{r''}_m = \tilde{r}_m), \tag{8.16}$$

то

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_m} A_2(\cdot,\tilde{\rho},s)\,d\lambda\right\|_{C[\delta,1-\delta]} \le \frac{1}{8}C_4C_7\|p\|_1^2\|f\|_\infty + \frac{1}{16}C_4C_6C_8\|p\|_1^2\|f\|_\infty\frac{\ln m}{m}s^2. \tag{8.17}$$

Окончательно получим, используя (8.12), (8.13) и (8.17),

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_m} g_2(\cdot,\tilde{\rho})\,d\lambda\right\|_{C[\delta,1-\delta]} \le \frac{C_2(1+C_4)\|p\|_1^2\|f\|_\infty}{16\delta_1} + \frac{C_3C_5}{8\pi}\|p\|_{M_\alpha}^2 +$$

$$+\frac{C_4C_7\|p\|_1^2\|f\|_\infty}{8} + \frac{C_4C_6C_8\|p\|_1^2\|f\|_\infty}{16}, \tag{8.18}$$

если положить $s = E\big(m^{\frac{1}{4}}\big)$. В силу теоремы 13.3 ([46, с. 132]) имеем $\|p\|_1 \le q\|p\|_{M_\alpha}$. Не нарушая общности, можно считать, что $C_j > 1$ $(j=\overline{1,8})$, $q>1$, $\|f\|_\infty > 1$, $\|p\|_{M_\alpha} > 1$. Тогда из (8.18) следует

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_m} g_2(\cdot,\tilde{\rho})\,d\lambda\right\|_{C[\delta,1-\delta]} \le \frac{1}{2\delta_1}q^2\|p\|_{M_\alpha}^2\|f\|_\infty\Big(\prod_{j=2}^{8}C_j\Big).$$

3°. $$g_3(x,\tilde{\rho}) = \frac{\tilde{\omega}_1}{8\tilde{\rho}}\int_0^x p(t)\int_0^t\int_t^1 e^{\tilde{\rho}_1(x-2t+2t_1-\tau)}p(t_1)\,dt_1 f(\tau)\,d\tau\,dt = \frac{\tilde{\omega}_1}{8\tilde{\rho}}\int_0^x p_s(t)\times$$

$$\times\int_0^t\int_t^1 e^{\tilde{\rho}_1(x-2t+2t_1-\tau)}p_s(t_1)\,dt_1 f_s(\tau)\,d\tau\,dt + \frac{\tilde{\omega}_1}{8\tilde{\rho}}\int_0^x P_s(t)\int_0^t\int_t^1 e^{\tilde{\rho}_1(x-2t+2t_1-\tau)}p_s(t_1)\,dt_1 f_s(\tau)\,d\tau dt+$$

$$+\frac{\tilde{\omega}_1}{8\tilde{\rho}}\int_0^x p(t)\int_0^t\int_t^1 P_s(t_1)e^{\tilde{\rho}_1(x-2t+2t_1-\tau)}\,dt_1 f_s(\tau)\,d\tau\,dt+$$

$$+\frac{\tilde{\omega}_1}{8\tilde{\rho}}\int_0^x p(t)\int_0^t\int_t^1 p(t_1)e^{\tilde{\rho}_1(x-2t+2t_1-\tau)}\,dt_1 F_s(\tau)\,d\tau\,dt = \sum_{j=1}^{4}B_j(x,\tilde{\rho},s), \tag{8.19}$$

где $p_s = p - P_s$, а P_s — тригонометрический многочлен наилучшего приближения p в метрике $L_1[0,1]$ порядка s. В силу леммы (6.15) существуют такие константы $C_9 > 1$, $C_{10} > 1$, $C_{11} > 1$, что

$$E_s(p)_1 \le C_9\frac{1}{\ln^\alpha s}, \tag{8.20}$$

$$\|P_s^{(r)}\| \le C_{10}s^r\|p\|_1, \quad \|P_s^{(r)}\|_\infty \le C_{11}s^{r+1}\|p\|_1. \tag{8.21}$$

Из (8.10), (8.14) и (8.20) следует

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_m} B_1(\cdot, \tilde{\rho}, s)\, d\lambda \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} \le \frac{C_3 C_6 C_9^2 \|f\|_\infty}{8} \frac{\ln m}{\ln^{2\alpha+\beta} s}. \tag{8.22}$$

Проводя в $B_2(x, \tilde{\rho}, s)$ один раз интегрирование по частям по t и пользуясь (8.11), (8.21) и (8.14)–(8.16), получим

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_m} B_2(\cdot, \tilde{\rho}, s)\, d\lambda \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} \le \frac{C_4 C_6 C_8 C_{10} C_{11} \|p\|_1^2 \|f\|_\infty}{2} \frac{s \ln m}{m} +$$

$$+ \frac{C_4 C_7 C_{10}^2 \|p\|_1^2 \|f\|_\infty}{4} + \frac{C_4 C_6 C_8 C_{10}^2 \|p\|_1^2 \|f\|_\infty}{4} \frac{s \ln m}{m}. \tag{8.23}$$

В $B_3(\cdot, \tilde{\rho}, s)$ проводим один раз интегрирование по частям по t_1 и пользуясь (8.11), (8.14), (8.16), (8.21), получим

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_m} B_3(\cdot, \tilde{\rho}, s) =\, d\lambda \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} \le \frac{C_4 C_6 C_8 C_{11} \|p\|_1^2 \|f\|_\infty}{2} \frac{s \ln m}{m} + \frac{C_4 C_6 C_8 C_{10} \|p\|_1^2 \|f\|_\infty}{8} \frac{s \ln m}{m}. \tag{8.24}$$

Наконец, рассмотрим $B_4(x, \tilde{\rho}, s)$. Проводя один раз интегрирование по частям по τ и пользуясь (8.11), (8.14)–(8.16), получим

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_m} B_4(\cdot, \tilde{\rho}, s)\, d\lambda \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} \le \frac{C_4 C_7 \|p\|_1^2 \|f\|_\infty}{4} + \frac{C_4 C_6 C_8}{8} \frac{s^2 \ln m}{m}. \tag{8.25}$$

Если положить $s = E\big(m^{\frac{1}{4}}\big)$, то в силу того, что $2\alpha + \beta > 1$, из (8.19), (8.22)–(8.25) следует

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_m} g_3(\cdot, \tilde{\rho})\, d\lambda \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} \le 2q^2 \|p\|_{M_\alpha}^2 \|f\|_\infty C_3 C_4 C_6 C_7 C_8 C_9^2 C_{10}^2 C_{11}.$$

Для остальных функций $g_4(x, \tilde{\rho}), \ldots, g_9(x, \tilde{\rho})$ рассуждения аналогичны. В целом, получим

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_m} b_1(\cdot, \tilde{\rho})\, d\lambda \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} \le 18 \left(\frac{2\|f\|_\infty}{\delta_1} \right) q^2 \|p\|_{M_\alpha}^2 \Big(\prod_{j=2}^{11} C_j \Big)^2. \tag{8.26}$$

Из (8.8), (8.9) и (8.26) следует

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_m} a_2(\cdot, \tilde{\rho})\, d\lambda \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} \le 19 \left(\frac{2C_1\|f\|_\infty}{\delta_1} \right) q^2 \|p\|_{M_\alpha}^2 \Big(\prod_{j=1}^{11} C_j \Big)^2. \tag{8.27}$$

Совершенно аналогично можно установить, что для $k > 2$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_m} a_k(\cdot, \tilde{\rho})\, d\lambda \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} \le (2 \cdot 3^k + 1) \left(\frac{2C_1\|f\|_\infty}{\delta_1} \right) q^k \|p\|_{M_\alpha}^k \Big(\prod_{j=1}^{11} C_j \Big)^k. \tag{8.28}$$

Таким образом, положив $\tilde{C} = 3q\big(\prod_{j=1}^{11} C_j\big)\|p\|_{M_\alpha}$, $\tilde{C}_1 = 6C_1\|f\|_\infty/\delta_1$ из (8.27)–(8.28) получим, начиная с некоторого m, при σ достаточно большом,

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_m} b(\cdot,\lambda,\sigma)\,d\lambda\right\|_{C[\delta,1-\delta]} \le \tilde{C}_1\left(\left(\frac{\tilde{C}}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{\tilde{C}}{\sigma}\right)^3+\dots\right)<\infty,$$

а это и есть утверждение доказываемой леммы. Лемма доказана. $\square$

(8.29) Лемма. *Если $\alpha+\beta<1$, $\alpha>0$, $\beta>0$, то существует функции $g\in H_1^\alpha[0,1]$, $h\in H_\infty^\beta[0,1]$ и последовательность $\{m_k\}_{k=\tilde{N}_1}^\infty$ из $\mathbb{N}$ такие, что*

$$|\varphi_{m_k}|\to\infty \quad \textit{при} \quad k\to\infty,$$

где

$$\varphi_m=\int_0^1 h(t)\int_0^1 g(\tau)\cos^2\frac{\pi}{4}(\tau+t)\hat{D}_m(\tau+t)\,d\tau\,dt, \quad \hat{D}_m(x)=\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\pi x}{2\sin\frac{\pi}{2}x}.$$

Доказательство. Преобразуем выражение для φ_m. Очевидно,

$$\varphi_m=\psi_m+0(1), \tag{8.30}$$

где

$$\psi_m=\int_0^{1/4} h(t)\int_0^{1/4} g(\tau)\tilde{D}_m(\tau+t)\,d\tau\,dt, \quad \tilde{D}_m(x):=\frac{\sin m\pi x}{\pi x}.$$

Будем считать далее, что $m=8l$, $l\in\mathbb{N}$.

Положим

$$g(\tau):=\frac{1}{\tau\ln^{1+\alpha}\frac{a}{\tau}},$$

где $a>1$ — параметр. Из рассуждений статьи [43] следует, что эта функция из $H_1^\alpha[0,1]$.

Справедливо представление

$$\tilde{I}_m(t)=\int_0^{1/4} g(\tau)\tilde{D}_m(\tau+t)\,d\tau=\int_0^{\frac{2s-1}{m}-t} g(\tau)\frac{|\sin m\pi(\tau+t)|}{\pi(\tau+t)}\,d\tau-$$

$$-\int_{\frac{2s-1}{m}}^{\frac{2s}{m}-t} g(\tau)\frac{|\sin m\pi(\tau+t)|}{\pi(\tau+t)}\,d\tau+\dots-\int_{\frac{2s+2l-3}{m}-t}^{\frac{2s+2l-2}{m}-t} g(\tau)\frac{|\sin m\pi(\tau+t)|}{\pi(\tau+t)}\,d\tau+$$

$$+\int_{\frac{2s+2l-2}{m}-t}^{1/4} g(\tau)\frac{|\sin m\pi(\tau+t)|}{\pi(\tau+t)}\,d\tau=A_{s0}(m,t)-A_{s1}(m,t)+\dots-A_{s,2l-1}(m,t)+A_{s,2l}(m,t).$$

Если $a>a_1=\frac{1}{4}e^{1+\alpha}$, то функция $g(\tau)$ монотонно убывает на отрезке $[0,1/4]$. Следовательно,

$$A_{sj}(m,t)-A_{s,j+1}(m,t)\ge\int_{\frac{2s+j-2}{m}-t}^{\frac{2s+j-1}{m}-t} g(\tau)\frac{|\sin m\pi(\tau+t)|}{\pi(\tau+t)}\,d\tau-$$

$$-\int_{\frac{2s+j-2}{m}-t}^{\frac{2s+j-1}{m}-t} g\Big(\tau+\frac{1}{m}\Big)\frac{|\sin m\pi(\tau+t)|}{\pi(\tau+t+\frac{1}{m})}\,d\tau >$$

$$> \int_{\frac{2s+j-2}{m}-t}^{\frac{2s+j-1}{m}-t} \Big(g(\tau)-g\Big(\tau+\frac{1}{m}\Big)\Big)\frac{|\sin m\pi(\tau+t)|}{\pi(\tau+t)}\,d\tau > 0 \quad (j=\overline{1,2l-1}). \tag{8.31}$$

Кроме того,

$$A_{s0}\Big(m,\frac{2(s-1)}{m}\Big) > A_{s1}\Big(m,\frac{2(s-1)}{m}\Big).$$

Таким образом,

$$\tilde I_m\Big(\frac{2(s-1)}{m}\Big) = \Big(A_{s0}\Big(m,\frac{2(s-1)}{m}\Big) - A_{s1}\Big(m,\frac{2(s-1)}{m}\Big)\Big)+\dots+$$

$$+\Big(A_{s,2l-2}\Big(m,\frac{2(s-1)}{m}\Big) - A_{s,sl-1}\Big(m,\frac{2(s-1)}{m}\Big)\Big) > 0;$$

$$\tilde I_m\Big(\frac{2s-1}{m}\Big) = -\Big(A_{s1}\Big(m,\frac{2s-1}{m}\Big) - A_{s2}\Big(m,\frac{2s-1}{m}\Big)\Big)-\dots-$$

$$-\Big(A_{s,2l-1}\Big(m,\frac{2s-1}{m}\Big) - A_{s,2l}\Big(m,\frac{2s-1}{m}\Big)\Big) < 0$$

и, следовательно, внутри отрезка $\big[\frac{2(s-1)}{m},\frac{2s-1}{m}\big]$ функция $\tilde I_m(t)$ обращается в нуль.

Рассмотрим отрезок

$$\frac{2(s-1)}{m}+\frac{1}{2mM_m}\le t\le \frac{2s-1}{m}-\frac{1}{2mM_m},$$

где $M_m=\ln^{1-\varepsilon} m$, $\varepsilon>0$ и достаточно мало. Покажем, что на этом отрезке $\tilde I_m>0$. В самом деле, обозначив $t_m=\frac{1}{2mM_m}$, получим в силу (8.31)

$$\tilde I_m(t) = \Big(A_{s0}(m,t)-A_{s1}(m,t)\Big)+\Big(A_{s2}(m,t)-A_{s3}(m,t)\Big)+\dots+$$

$$+\Big(A_{s,2l-2}(m,t)-A_{s,2l-1}(m,t)\Big)+A_{s,2l}(m,t) > A_{s0}(m,t)-A_{s1}(m,t); \tag{8.32}$$

$$A_{s0}(m,t) > \frac{m}{(2s-1)\pi}\int_0^{t_m} g(\tau)\sin m\pi(\tau+t)\,d\tau \ge \frac{m}{(2s-1)\pi}\int_0^{t_m} g(\tau)\sin\Big(m\pi\tau+$$

$$+(2s-1)\pi-\frac{\pi}{2M_m}\Big)\,d\tau \ge \frac{m}{(2s-1)\pi}\int_0^{tm} g(\tau)\Big(\frac{1}{M_m}-2m\tau\Big)\,d\tau = \frac{m}{(2s-1)\pi\alpha M_m\ln^\alpha(2amM_m)}-$$

$$-\frac{2m^2}{(2s-1)\pi}\int_0^{t_m}\frac{d\tau}{\ln^{1+\alpha}\frac{a}{\tau}} \ge \frac{m}{(2s-1)\pi\alpha M_m\ln^\alpha(2amM_m)}\Big(1-\frac{\alpha}{\ln(2amM_m)}\Big) \ge$$

$$\ge \frac{m(1-\varepsilon_1)}{(2s-1)\pi\alpha M_m\ln^\alpha(2amM_m)} \tag{8.33}$$

при $a\ge a_2(\varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1>0$ и может быть сделано сколь угодно малым;

$$A_{s1}(m,1) \le \frac{m}{(2s-1)\pi}\int_{\frac{1}{2mM_m}}^{\frac{2}{m}} g(\tau)\,d\tau = \frac{m}{(2s-1)\pi\alpha}\Big(\frac{1}{\ln^\alpha\frac{am}{2}}-\frac{1}{\ln^\alpha(2amM_m)}\Big). \tag{8.34}$$

Следовательно, учитывая (8.32)–(8.34), получим

$$\tilde{I}_m(t) \geq \frac{m}{(2s-1)\pi\alpha \ln^\alpha(2amM_m)} \left(1 + \frac{1-\varepsilon_1}{M_m} - \left(1 + \frac{\ln 4M_m}{\ln \frac{am}{2}}\right)^\alpha\right) =$$

$$= \frac{m}{(2s-1)\pi\alpha \ln^\alpha(2amM_m)} \left(\frac{1-\varepsilon_1}{M_m} - \frac{\alpha \ln 4M_m}{\ln \frac{am}{2}} + O\left(\left(\frac{\ln 4M_m}{\ln \frac{am}{2}}\right)^2\right)\right) =$$

$$= \frac{m}{(2s-1)\pi\alpha M_m \ln^\alpha(2amM_m)} \left(1 - \varepsilon_1 - \frac{\alpha \ln(4\ln^{1-\varepsilon} m)}{\ln \frac{am}{2}} \ln^{1-\varepsilon} m + \right.$$

$$\left. + O\left(\frac{(\ln\ln m)^2 \ln^{1-\varepsilon} m}{(\ln \frac{am}{2})^2}\right)\right) \geq \frac{m(1-\varepsilon_2)}{(2s-1)\pi\alpha M_m \ln^\alpha(2amM_m)} > 0$$

при $a \geq a_3(\varepsilon_2)$, где $\varepsilon_2 > 0$ и может быть сделано сколь угодно малым.

Справедливо представление

$$\Psi_m = \sum_{s=2}^{l} \int_{\frac{2(s-1)}{m}}^{\frac{2s-1}{m}} \left(h(t) - h\Big(t + \frac{1}{m}\Big)\right) \tilde{I}_m(t)\, dt + \int_0^{\frac{1}{m}} \left(h(t) - h\Big(t + \frac{1}{m}\Big)\right) \tilde{I}_m(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{s=2}^{l} \int_{\frac{2(s-1)}{m}}^{\frac{2s-1}{m}} h\Big(t + \frac{1}{m}\Big) \left(\tilde{I}_m(t) + \tilde{I}_m\Big(t + \frac{1}{m}\Big)\right) dt +$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{m}} h\Big(t + \frac{1}{m}\Big) \left(\tilde{I}_m(t) + \tilde{I}_m\Big(t + \frac{1}{m}\Big)\right) dt = B_{1m} + B_{2m} + B_{3m} + B_{4m}. \tag{8.35}$$

Так как

$$B_{2m} = \int_0^{\frac{1}{4m}} \int_0^{\frac{1}{4m}} + \int_0^{\frac{1}{4m}} \int_{\frac{1}{4m}}^{\frac{1}{4}} + \int_{\frac{1}{4m}}^{\frac{1}{4}} \int_0^{\frac{1}{4}}$$

и $\sin x \leq x$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то

$$|B_{2m}| \leq 2\|h\|_\infty \left(\int_0^{4m} \int_0^{4m} |g(\tau)| \frac{|\sin m\pi(\tau+t)|}{\pi(\tau+t)}\, d\tau\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{1}{4m}} \int_{\frac{1}{4m}}^{\frac{1}{4}} |g(\tau)| \frac{d\tau\, dt}{\pi(\tau+t)} + \int_{\frac{1}{4m}}^{\frac{1}{m}} \int_0^{\frac{1}{4}} |g(\tau)| \frac{d\tau\, dt}{\pi(\tau+t)}\right) \leq \frac{10}{\pi} \|h\|_\infty \|g\|_1. \tag{8.36}$$

Совершенно аналогично

$$|B_{4m}| \leq \frac{17}{\pi} \|h\|_\infty \|g\|_1. \tag{8.37}$$

Наконец, так как $\sin m\pi\big(\tau + t + \frac{1}{m}\big) = -\sin m\pi(\tau+t)$, то

$$|B_{3m}| \leq \|h\|_\infty \sum_{s=2}^{l} \int_{\frac{2(s-1)}{m}}^{\frac{2s-1}{m}} \int_0^{\frac{1}{4}} |g(\tau)| \left|\frac{1}{\tau+t} - \frac{1}{\tau+t+\frac{1}{m}}\right| d\tau\, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi} \|h\|_\infty \|g\|_1 \sum_{s=1}^{l-1} \frac{1}{s^2} \leq \frac{\pi}{24} \|h\|_\infty \|g\|_1. \tag{8.38}$$

Обозначив $B_{0m} := -B_{1m}$, из (8.35)–(8.36) получим

$$\Psi_m = -B_{0m} + O(1). \tag{8.39}$$

Разобьем B_{0m} на сумму трех слагаемых следующим образом

$$B_{0m} = \sum_{s=2}^{l} \int_{\frac{2(s-1)}{m}+t_m}^{\frac{2s-1}{m}-t_m} \left(h\Big(t+\frac{1}{m}\Big) - h(t)\right) \tilde{I}_m(t)\,dt + \sum_{s=2}^{l} \int_{\frac{2s-1}{m}-t_m}^{\frac{2s-1}{m}} \left(h\Big(t+\frac{1}{m}\Big) - h(t)\right) \tilde{I}_m(t)\,dt +$$

$$+ \sum_{s=2}^{l} \int_{\frac{2(s-1)}{m}}^{\frac{2(s-1)}{m}+t_m} \left(h\Big(t+\frac{1}{m}\Big) - h(t)\right) \tilde{I}_m(t)\,dt = H_{1m} + H_{2m} + H_{3m}.$$

Так как $h \in H^{\beta}_{\infty}[0,1]$ (эта функция будет построена ниже), то

$$|H_{2m}| \le \sum_{s=2}^{l} \int_{\frac{2s-1}{m}-t_m}^{\frac{2s-1}{m}} \left|h\Big(t+\frac{1}{m}\Big) - h(t))\right| \int_0^{\frac{1}{4}} |g(\tau)| \frac{d\tau\,dt}{\pi(\tau+t)} \le$$

$$\le C(h)\|g\|_1 \frac{mt_m}{2\ln^{\beta} m} \sum_{s=1}^{l-1} \frac{1}{s} \le C_1(h)\|g\|_1 \frac{1}{\ln^{\beta-\varepsilon} m} \le C_1(h)\|g\|_1,$$

если взять $\varepsilon \le \beta$. Аналогично $H_{3m} = O(1)$. Следовательно,

$$B_{0m} = H_{1m} + O(1). \tag{8.40}$$

Построим теперь функцию $h \in H^{\beta}_{\infty}[0,1]$. Обозначим

$$\frac{1}{5^k} = \frac{1}{\log_5^{\beta} \tilde{M}_k} \quad \text{или} \quad \tilde{M}_k = 5^{5^{\frac{k}{\beta}}}$$

и пусть $\tilde{m}_k = E(\tilde{M}_k)$. Введем последовательность $\{m_k\}_1^{\infty}$:

1) $m_1 = \tilde{m}_1 - \gamma_1$, где γ_1 — целое число, $0 \le \gamma_1 \le 7$, такое, что $m_1 = 8l_1$ и l_1 — натуральное число;

2) $m_2 = 2\delta_2 m_1$, где $\delta_2 = E\big(\frac{\tilde{m}_2}{2m_1}\big)$, то есть $m_2 = 8l_2$, где $l_2 = 2\delta_2 l_1$; очевидно также, что $m_2 \le \tilde{m}_2$, а так как

$$\tilde{m}_1 < \tilde{m}_1 + (2\delta_2 - 1)\tilde{m}_1 - 2\delta_2\gamma_1$$

в силу того, что

$$(2\delta_2 - 1)\tilde{m}_1 - 2\delta_2\gamma_1 = 2\delta_2\tilde{m}_1 - \tilde{m}_1 - 2\delta_2\gamma_1 > \delta_2(m_1 - 2\gamma_1) > 0,$$

то

$$\tilde{m}_1 < 2\delta_2\tilde{m}_1 - 2\delta_2\gamma_1 = 2\delta_2 m_1 = m_2,$$

то есть $m_2 > \tilde{m}_1$;

. . . .

$k)$ $m_k = 2\delta_k m_{k-1}$, где $\delta_k = E\big(\frac{\tilde m_k}{2m_{k-1}}\big)$, то есть $m_k = 8l_k$, где $l_k = 2\delta_k l_{k-1}$; очевидно также, что $m_k \le \tilde m_k$, а так как

$$2\delta_k m_{k-1} = 2\delta_k(2\delta_{k-1})m_{k-2} \ge 2(\delta_{k-1}+1)m_{k-2}$$

и

$$\delta_{k-1} \le \tilde m_{k-1}/(2m_{k-2}) \le \delta_{k-1}+1,$$

то $m_k > \tilde m_{k-1}$;

. . . .

Определим непрерывную функцию h следующим равномерно сходящимся рядом с непрерывными членами

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k} h_{m_k}(t),$$

где $h_{m_k}(t)$ — периодические на $[0,1]$ функции с периодами $2/m_k$

$$h_{m_k}(t) = \begin{cases} m_k t, & 0 \le t \le \frac{1}{m_k}; \\ 1, & \frac{1}{m_k} \le t \le \frac{7}{4m_k}; \\ 8 - 4m_k t, & \frac{7}{4m_k} \le t \le \frac{2}{m_k}. \end{cases}$$

Числа m_k построены таким образом, что при $j > k$.

$$h_{m_j}\Big(t + \frac{1}{m_k}\Big) = h_{m_j}\left(t + \frac{(2\delta_{k-1})\dots(2\delta_j)}{m_j}\right) = h_{m_j}(t),$$

то есть все $1/m_k$ для всех h_{m_j} при $j > k$ являются периодами.

Покажем, что $h \in H_\infty^\beta[0,1]$. Пусть $1/m_{r+1} \le \delta < 1/m_r$, тогда

$$|h(t+\delta) - h(t)| \le \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{5^k}\big|h_{m_k}(t+\delta) - h_{m_k}(t)\big| + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{5^k}\big(h_{m_k}(t+\delta) + h_m(t)\big) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{r} \frac{4\delta m_k}{5^k} + 2\sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{5^k} = 4\delta\frac{m_r}{5^r}\Big(\frac{5^{r-1}m_1}{m_r} + \frac{5^{r-2}m_2}{m_r} + \frac{5^{r-3}m_3}{m_r} + \dots + \frac{5m_{r-1}}{m_r} + 1\Big) +$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 5^r} \le \frac{4}{5^r}\left(1 + \frac{r5^r m_{r-1}}{m_r}\right) + \frac{1}{2\cdot 5^r}.$$

Но так как

$$\frac{r5^r m_{r-1}}{m_r} = \frac{r5^r}{2\delta_r} \le \frac{r5^r 2m_{r-1}}{2(\tilde m_r - 2m_{r-1})} \le 2r5^r\frac{\tilde m_{r-1}}{\tilde m_r} \le$$

$$\le 4r5^r\frac{\tilde M_{r-1}}{\tilde M_r} = 4r5^r\frac{1}{5^{5^{\frac{r-1}{\beta}}(5^{\frac{1}{\beta}}-1)}} \to 0 \qquad (8.41)$$

при $r \to \infty$, то есть при $r \geq r_0$

$$\frac{r5^r m_{r-1}}{m_r} \leq 1,$$

то

$$|h(t+\delta) - h(t)| \leq \frac{9}{5^r} = \frac{45}{\log_5^\beta \tilde{M}_{r+1}} \leq \frac{45}{\log_5^\beta m_{r+1}} \leq \frac{45}{\log_5^\beta \frac{1}{\delta}},$$

а это и доказывает, что $h \in H_\infty^\beta[0,1]$.

Рассмотрим далее не все $m = 8l$, а только подпоследовательность $\{m_r\}_{r=r_0}^\infty$. Представим

$$H_{1m_r} = \sum_{s=2}^{l_r} \int_{\frac{2(s-1)}{m_r}+t_{m_r}}^{\frac{2s-1}{m_r}-t_{m_r}} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{5^k} \left(h_{m_k}\Big(t + \frac{1}{m_r}\Big) - h_{m_k}(t) \right) \tilde{I}_{m_r}(t)\, dt =$$

$$= \sum_{s=2}^{l_r} \int_{\frac{2(s-1)}{m_r}+t_{m_r}}^{\frac{2s-1}{m_r}-t_{m_r}} \frac{1}{5^r} \left(h_{m_r}\Big(t + \frac{1}{m_r}\Big) - h_{m_r}(t) \right) \tilde{I}_{m_r}(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{s=2}^{l_r} \int_{\frac{2(s-1)}{m_r}+t_{m_r}}^{\frac{2s-1}{m_r}-t_{m_r}} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{5^k} \left(h_{m_k}\Big(t + \frac{1}{m_r}\Big) - h_{m_k}(t) \right) \tilde{I}_{m_r}(t)\, dt = H_{0m_r} + H_{4m_r}.$$

Легко видеть, что

$$|H_{4m_r}| \leq \frac{2\|g\|_1}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{5^k} \frac{m_k}{m_r} \right) \sum_{s=1}^{l_r-1} \frac{1}{s} \leq \frac{2C}{\pi} \|g\|_1 \sum_{k=1}^{r-1} \frac{m_k}{5^k m_r} \log_5 m_r \leq$$

$$\leq \frac{2C_1}{\pi} \|g\|_1 \frac{r m_{r-1} \log_5 m_r}{5^r m_r} \leq C_2 \|g\|_1 \frac{r5^{(\frac{1}{\beta}-1)r} m_{r-1}}{m_r}.$$

Так же, как и в (8.41),

$$\frac{r5^{(\frac{1}{\beta}-1)r} m_{r-1}}{m_r} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Следовательно,

$$H_{1m_r} = H_{0m_r} + O(1). \tag{8.42}$$

Покажем, что $H_{0m_r} \to +\infty$ при $r \to \infty$. Очевидно,

$$H_{0m_r} = \sum_{s=2}^{l_r} \left(\int_{\frac{2(s-1)}{m_r}+t_{m_r}}^{\frac{2(s-1)}{m_r}+\frac{1}{4m_r}} + \int_{\frac{2(s-1)}{m_r}+\frac{1}{4m_r}}^{\frac{2(s-1)}{m_r}+\frac{4}{5m_r}} + \int_{\frac{2(s-1)}{m_r}+\frac{4}{5m_r}}^{\frac{2s-1}{m_r}-t_{m_r}} \right).$$

И так как на отрезке

$$\frac{2(s-1)}{m_r} + t_{m_r} \leq t \leq \frac{2(s-1)}{m_r} + \frac{4}{5m_r}$$

функция $\tilde{I}_{m_r}(t) > 0$, а

$$h_{m_r}\Big(t + \frac{1}{m_r}\Big) \geq h_{m_r}(t),$$

то

$$H_{0m_r} \geq \sum_{s=2}^{l_r} \left(\int_{\frac{2(s-1)}{m_r}+\frac{1}{8m_r}}^{\frac{2(s-1)}{m_r}+\frac{1}{4m_r}} + \int_{\frac{2(s-1)}{m_r}+\frac{1}{4m_r}}^{\frac{2s-1}{m_r}-\frac{1}{4m_r}} + \int_{\frac{2s-1}{m_r}-\frac{1}{5m_r}}^{\frac{2s-1}{m_r}-t_{m_r}} \right) = \sum_{s=2}^{l_r} \sum_{j=1}^{3} K_{jm_r}(s). \tag{8.43}$$

Покажем, что $K_{2m_r}(s)+K_{3m_r}(s)>0$. В таком случае эту сумму можно отбросить, оценив H_{0m_r} снизу. Рассмотрим отрезок

$$\frac{2(s-1)}{m_r}+\frac{1}{4m_r}\le t\le\frac{2s-1}{m_r}-\frac{1}{4m_r}.$$

Точно так же, как и при получении оценки (8.33) , можно установить (взяв в качестве M_m число 2)

$$A_{s0}(m_r,t)>\frac{m_r(1-\varepsilon_3)}{2(2s-1)\pi\alpha\ln^{\alpha}4am_r}$$

при $a\ge a_4(\varepsilon_3)$, где $\varepsilon_3>0$ и может быть сделано сколь угодно малым. Кроме того,

$$A_{s1}(m_r,t)<\frac{7m_r}{(2s-1)\pi\ln^{1+\alpha}4am_r}.$$

Таким образом, в силу (8.32) при

$$\frac{2(s-1)}{m_r}+\frac{1}{4m_r}\le t\le\frac{2s-1}{m_r}-\frac{1}{4m_r}$$

будем иметь

$$\tilde I_{m_r}(t)>\frac{m_r}{2(2s-1)\pi\alpha\ln^{\alpha}4am_r}\left((1-\varepsilon_3)-\frac{14\alpha}{\ln 4am_r}\right)>\frac{m_r(1-\varepsilon_4)}{2(2s-1)\pi\alpha\ln^{\alpha}4am_r}\qquad(8.44)$$

при $a>a_5(\varepsilon_4)$, где $\varepsilon_4>0$ и может быть сделано сколь угодно малым.

Оценим теперь функцию $\tilde I_{m_r}(t)$ сверху на отрезке

$$\frac{2s-1}{m_r}-\frac{1}{4m_r}\le t\le\frac{2s-1}{m_r}.$$

В силу (8.31) имеем

$$\tilde I_{m_r}(t)=A_{s0}(m_r,t)-\Big(A_{s1}(m_r,t)-A_{s2}(m_r,t)\Big)-\dots-\Big(A_{s,2l_r-1}(m_r,t)-A_{s,2l_r}(m_r,t)\Big)<$$

$$<A_{s0}(m_r,t)\le\int_0^{\frac{2s-1}{m_r}-t}g(\tau)\frac{1}{\pi(\tau+t)}\,d\tau\le\frac{m_r}{\pi\alpha(2s-\frac54)\ln^{\alpha}4am_r}.\qquad(8.45)$$

Рассмотрим теперь $K_{2m_r}(s)+K_{3m_r}(s)$. С учетом (8.44) и (8.45) получим

$$K_{2m_r}(s)+K_{3m_r}(s)>\frac{m_r(1-\varepsilon_4)}{2(2s-1)\pi\alpha5^r\ln^{\alpha}(4am_r)}\int_{\frac{2(s-1)}{m_r}+\frac{1}{4m_r}}^{\frac{2s-1}{m_r}-\frac{1}{4m_r}}\left(h_{m_r}\Big(t+\frac{1}{m_r}\Big)--h_{m_r}(t)\right)dt+$$

$$+\frac{m_r}{\pi\alpha5^r(2s-\frac54)\ln^{\alpha}(4am_r)}\int_{\frac{2s-1}{m_r}-\frac{1}{5m_r}}^{\frac{2s-1}{m_r}}\left(h_{m_r}\Big(t+\frac{1}{m_r}\Big)-h_{m_r}(t)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{8\pi\alpha5^r(2s-1)\ln^{\alpha}(4am_r)}\left((1-\varepsilon_4)-\frac{4(2s-1)}{5(2s-\frac54)}\right)>$$

$$> \frac{1}{8\pi\alpha 5^r(2s-1)\ln^{\alpha}(4am_r)}\left((1-\varepsilon_4)-\frac{48}{55}\right)>0 \tag{8.46}$$

при $\varepsilon_4 < 7/55$.

Следовательно, имея в виду (8.43) и (8.46), получим

$$H_{0m_r} > \sum_{s=2}^{l_2} K_{1m_r}(s) \geq \frac{3}{4\cdot 5^r}\sum_{s=2}^{l_r}\int_{\frac{2(s-1)}{m_r}+\frac{1}{8m_r}}^{\frac{2(s-1)}{m_r}+\frac{1}{4m_r}} \tilde{I}_{m_r}(t)\,dt. \tag{8.47}$$

Рассмотрим на отрезке

$$\frac{2(s-1)}{m_r}+\frac{1}{8m_r} \leq t \leq \frac{2(s-1)}{m_r}+\frac{1}{4m_r}$$

функцию $\tilde{I}_{m_r}(t)$. В силу (8.31) получим

$$\tilde{I}_{m_r}(t) > A_{s0}(m_r,t)-A_{s1}(m_r,t) \geq \frac{m_r}{(2s-1)\pi}\int_0^{\frac{1}{2m_r}} g(\tau)\bigl|\sin m_r\pi(\tau+t)\bigr|\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{\pi(2s-1)(\frac{2s-1}{m_r}-t)\ln^{1+\alpha}\frac{a}{\frac{2s-1}{m_r}-t}} \geq \frac{m_r\sin\frac{\pi}{8}}{(2s-1)\pi\alpha\ln^{\alpha}2am_r}-$$

$$-\frac{4m_r}{3\pi(2s-1)\ln^{1+\alpha}\frac{4am_r}{3}} \geq \frac{m_r}{5\alpha\pi(2s-1)\ln^{\alpha}2am_r} \tag{8.48}$$

при $a \geq a_6$. Будем считать далее, что $a \geq \max_{k=1,6} a_k$ и фиксировано.

Следовательно, с учетом (8.47) и (8.48) получим

$$H_{0m_r} > \frac{3}{160\alpha\pi 5^r\ln^{\alpha}2am_r}\sum_{s=2}^{l_r}\frac{1}{2s-1} \geq C(\alpha,a)\frac{\log_5 m_r}{\log_5^{\alpha+\beta} m_r},$$

где $C(\alpha,a)>0$. Так как $\alpha+\beta<1$, то отсюда следует, что $H_{om_r}\to+\infty$ при $r\to+\infty$.

Учитывая (8.30), (8.39), (8.40), (8.42), получим утверждение доказываемой леммы. Лемма доказана. □

(8.49) Лемма. 1) *Для любых чисел $\alpha>0$ и $\beta>0$ таких, что $\alpha+\beta<1$, существуют функции $p\in H_\infty^\alpha[0,1]$, $f\in H_1^\beta[0,1]$, число $l_1\in\mathbb{Z}$ и подпоследовательность $\{m_{1k}\}_{k=1}^\infty$ из $\mathbb{N}$ такие, что*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\tilde{S}_{1,m_{1k}+l_1}(f)\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)-\tilde{S}_{0,m_{1k}}(f)\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)\right|=\infty. \tag{8.50}$$

2) *Для любых чисел $r>1$ и $q>1$ таких, что $1/q+1/r>1$, но $1/q+2/r<2$, существуют функции $p\in L_r[0,1]$, $f\in L_q[0,1]$, число $l_2\in\mathbb{Z}$ и подпоследовательность $\{m_{2k}\}_{k=1}^\infty$ из $\mathbb{N}$ такие, что*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\tilde{S}_{1,m_{2k}+l_2}(f)\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)-\tilde{S}_{0,m_{2k}}(f)\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)\right|=\infty.$$

3) *Для любых чисел* $\alpha > 0$ *и* $\beta > 0$ *таких, что* $\alpha + \beta < 1$, *но* $2\alpha + \beta > 1$, *существуют функции* $p \in H_1^\alpha[0,1]$, $f \in H_\infty^\beta[0,1]$, *число* $l_3 \in \mathbb{Z}$ *и подпоследовательность* $\{m_{3k}\}_{k=1}^\infty$ *из* $\mathbb{N}$ *такие, что*

$$\lim_{k\to\infty} \left| \tilde{S}_{1,m_{3k}+l_3}(f)\Big(\frac{1}{2}\Big) - \tilde{S}_{0,m_{3k}}(f)\Big(\frac{1}{2}\Big) \right| = \infty.$$

Доказательство. 1) Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha + \beta < 1$. В силу леммы (8.29) существуют функции $g \in H_1^\beta[0,1]$ и $h \in H_\infty^\beta[0,1]$ и подпоследовательность $\{m_{1k}\}_{k=1}^\infty$ из $\mathbb{N}$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} |\varphi_{m_{1k}}| = \infty. \tag{8.51}$$

Положим $p_1(x) = h(x)$, $f_1(x) = g(x)$. Тогда

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ p_1(4x-2), & x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]; \\ p_1(4-4x), & x \in [\frac{3}{4}, 1]; \end{cases} \tag{8.52}$$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(1-2x), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 0, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{8.53}$$

Очевидно, $p \in H_\infty^\alpha[0,1]$ и $f \in H_1^\beta[0,1]$. В силу (8.1), (8.51), леммы (8.2), пункта 1) леммы (8.16) для построенных функций p и f выполняется (8.50). Таким образом, пункт 1) данной леммы доказан.

2) Пусть $q > 1$, $r > 1$, $1/q + 1/r > 1$, но $1/q + 2/r < 2$. Положим $f_1(x) = x^{-1/q_1}$, $p_1(x) = x^{-1/r_1}$, где $q_1 > q$, $r_1 > r$, но по-прежнему $1/q_1 + 1/r_1 > 1$. Очевидно, $f_1 \in L_q[0,1]$, $p_1 \in L_r[0,1]$. Это же справедливо и для функций f и p, построенных по f_1 и p_1 в соответствии с формулами (8.52), (8.53). Рассмотрим для этих функций последовательность

$$\Phi_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k = \frac{2}{m}\int_0^1 f_1(t)\int_0^1 p_1(\tau)\cos^2\frac{\pi}{4}(\tau+t)\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}m(\tau+t)}{2\sin\frac{\pi}{2}(\tau+t)}\right)^2 d\,\tau\, dt.$$

Очевидно,

$$\Phi_m \geq \frac{2}{m}\int_0^{1/2m} f_1(t)\int_0^{1/2m} p_1(\tau)\cos^2\frac{\pi}{4}(\tau+t)\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}m(\tau+t)}{2\sin\frac{\pi}{2}(\tau+t)}\right)^2 d\tau\, dt \geq$$

$$\geq \frac{2m}{\pi^2}\int_0^{1/2m}\frac{dt}{t^{\frac{1}{q_1}}}\int_0^{1/2m}\frac{d\tau}{\tau^{\frac{1}{r_1}}} = \frac{(2m)^{(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{r_1})-1}}{\pi^2(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{1}{r_1})} \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty,$$

так как $1/q_1 + 1/r_1 > 1$. Следовательно, последовательность $\{\varphi_k\}$ не может быть сходящейся и вообще ограниченной, то есть существует подпоследовательность $\{m_{2k}\}_{k=1}^\infty$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} |\varphi_{m_{2k}}| = \infty.$$

Заканчивается доказательство этого пункта точно так же, как и доказательство пункта 1) данной леммы.

3) Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$, но $2\alpha + \beta > 1$. В этом случае доказательство аналогично доказательству пункта 1) леммы, только сейчас полагаем $p_1 = g \in H_1^{\alpha}[0,1]$, $f_1 = h \in H_\infty^{\beta}[0,1]$ и пользуемся пунктом 2) леммы (8.6). Следовательно, лемма (8.49) доказана. $\square$

Лемма (8.49) вместе с теоремой равносходимости Тамаркина [6] завершает доказательство теоремы (7.1).

§9. Локальная теорема равносходимости

Теорему (7.1) можно усилить, а именно, справедлива следующая теорема.

(9.1) Теорема. *Если L есть к.д. оператор с регулярными краевыми условиями, $p_{kj} \in L_1[0,1]$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,k-1}$, $f \in L_1[0,1]$ и выполняется одно из условий для $k = \overline{1,n}$ и некоторого отрезка $[a,b] \subset [0,1]$*

1) $p_{k,k-1} \in H_\infty^{\alpha}[a,b]$, $f \in H_1^{\beta}[a,b]$, $\alpha + \beta > 1$;

2) $p_{k,k-1} \in L_r[a,b]$, $f \in L_q[a,b]$, $1/q + 1/r < 1$;

3) $p_{k,k-1} \in H_1^{\alpha}[a,b]$, $f \in H_\infty^{\beta}[a,b]$, $\alpha + \beta > 1$,

то существует целое число l такое, что для любого $\delta \in \big(0, |b-a|/2\big)$

$$\lim_{m\to\infty} \|S_{2m+l}(f) - \sigma_m(f)\|_{C[a+\delta,b-\delta]}, \tag{9.2}$$

где $S_{2m+l}(f)$ и $\sigma_m(f)$ имеют тот же смысл, что и в теореме (7.1).

Доказательство. Рассмотрим $\delta_1 \in (0, |b-a|/2)$ такое, что $\delta_1 < \delta$. Пусть $\tilde p_{k,k-1} = p_{k,k-1}(x)$, $\tilde f(x) = f(x)$ при $x \in [a+\delta_1, b-\delta_1]$, а на всем отрезке $[0,1]$ пусть $\tilde p_{k,k-1}$ и $\tilde f$ будут из того же класса функций, что и $p_{k,k-1}$ и f на $[a,b]$. Наряду с оператором L рассмотрим еще два оператора — L_1 и L_2. Оператор L_1 получается из оператора L в результате замены коэффициентов $p_{k,k-1}$ на $\tilde p_{k,k-1}$, а оператор L_2 также получается из оператора L, если положить $p_{k,k-1} = 0$, $k = \overline{1,n}$. Все объекты, относящиеся к этим операторам, будем обозначать теми же буквами, что и в случае оператора L, но с соответствующими индексами.

Справедливо равенство

$$R(\lambda)f - R_2(\lambda)f = \big(R(\lambda)f - R_1(\lambda)f\big) + \big(R_1(\lambda) - R_2(\lambda)\big)(f - \tilde f) +$$

$$+\big(R_1(\lambda)\tilde f - R_2(\lambda)\tilde f\big) = A_1(x,\lambda) + A_2(x,\lambda) + A_3(x,\lambda). \tag{9.3}$$

В силу теоремы (7.1)

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m} A_3(x,\lambda)\,d\lambda = o(1) \tag{9.4}$$

при $k\to\infty$ равномерно по x на всяком компакте внутри отрезка $[0,1]$.

Рассмотрим теперь $A_1(x,\lambda)$. Аналогично формуле (7.18) при $k=1$ можно получить

$$A_1(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\hat{R}_{1,1j}(\lambda)\big(\tilde{p}_{j,j-1}-p_{j,j-1}\big)D_{j-1}R(\lambda)f. \tag{9.5}$$

Отсюда в силу определения $\tilde{p}_{j,j-1}$ получим

$$A_1(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\Bigg(\int_0^1\int_0^{a+\delta_1}\hat{G}_{1,1j}(x,\tau,\lambda)\big(\tilde{p}_{j,j-1}(\tau)-p_{j,j-1}(\tau)\big)G^{[j-1]}_{\tau^{j-1}}(\tau,t,\lambda)\,d\tau f(t)\,dt+$$

$$+\int_0^1\int_{b-\delta_1}^{1}\hat{G}_{1,1j}(x,\tau,\lambda)\big(\tilde{p}_{j,j-1}(\tau)-p_{j,j-1}(\tau)\big)G^{[j-1]}_{\tau^{j-1}}(\tau,t,\lambda)\,d\tau f(t)\,dt\Bigg). \tag{9.6}$$

В силу леммы (7.10), асимптотики (4.8), того, что $x\in[a+\delta,b-\delta]$ и $\delta_1<\delta$, из (9.6) получим

$$\|A_1(\cdot,\lambda)\|_{C[a+\delta,b-\delta]}=O\left(\frac{1}{|\rho|^{n-1}}\left(\left|e^{\rho_\nu(\delta-\delta_1)}\right|+\left|e^{\rho_{\nu+1}(\delta_1-\delta)}\right|\right)\|f\|_1\right).$$

Эта оценка позволяет легко получить

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}A_1(\cdot,\lambda)\,d\lambda\right\|_{C[a+\delta,b-\delta]}=O(\|f\|_1). \tag{9.7}$$

Если $h\in D_L$, то, очевидно, $h\in AC[0,1]$ и в силу теоремы (7.1), того, что обычный тригонометрический ряд Фурье функции $h\in AC[0,1]$ сходится равномерно к h внутри отрезка $[0,1]$ ([42, с. 121]), а также в силу теоремы (4.20) получим, как и при завершении доказательства леммы (7.52),

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}\Big(R(\lambda)h-R_1(\lambda)h\Big)\,d\lambda\right\|_{C[a+\delta,b-\delta]}=0. \tag{9.8}$$

Пользуясь (9.7) и (9.8), следствием (4.24), теоремой Банаха-Штейнгауза, получим

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}A_1(\cdot,\lambda)\,d\lambda\right\|_{C[a+\delta,b-\delta]}=0. \tag{9.9}$$

Наконец, рассмотрим $A_2(x,\lambda)$. Аналогично формуле (9.5) можно получить

$$A_2(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\hat{R}_{2,1j}(\lambda)\tilde{p}_{j,j-1}D_{1,j-1}R_1(\lambda)(f-\tilde{f}).$$

Отсюда в силу определения $\tilde{f}$ получим

$$A_2(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\Bigg(\int_0^{a+\delta_1}\int_0^1\hat{G}_{2,1j}(x,\tau,\lambda)\tilde{p}_{j,j-1}(\tau)D_{1,j-1}G_1(\tau,t,\lambda)\,d\tau\big(f(t)-\tilde{f}(t)\big)\,dt+$$

$$+\int_{b-\delta_1}^{1}\int_{0}^{1}\hat{G}_{2,1j}(x,\tau,\lambda)\tilde{p}_{j,j-1}(\tau)D_{1,j-1}G_1(\tau,t,\lambda)\,d\tau\big(f(t)-\tilde{f}(t)\big)\,dt\Bigg). \tag{9.10}$$

В силу леммы (7.10), асимптотики (4.8), того, что $x \in [a+\delta, b-\delta]$ и $\delta_1 < \delta$, из (9.10) получим

$$\|A_2(\cdot,\lambda)\|_{C[a+\delta,b-\delta]} = O\Bigg(\frac{1}{|\rho|^{n-1}}\Big(\big|e^{\rho_\nu(\delta-\delta_1)}\big| + \big|e^{\rho_{\nu+1}(\delta_1-\delta)}\big|\Big)\|f-\tilde{f}\|_1\Bigg).$$

Пользуясь этой оценкой, как и при рассмотрении $A_1(x,\lambda)$, легко получим

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m} A_2(\cdot,\lambda)\,d\lambda\right\|_{C[a+\delta,b-\delta]} = 0. \tag{9.11}$$

Из (9.3), (9.4), (9.9), (9.11) на основании теоремы (7.1) вытекает утверждение (9.2). Теорема (9.1), таким образом, доказана. □

Литература

[1] Рыхлов В. С. *Разложения по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных и интегральных операторов: Дис. ... канд. физ.-матем. наук*, Саратовский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, 1981. – 129 с.

[2] Birkhoff G. D. Boundary value and expansion problem of ordinary linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc*, 1908, vol. 9, pp. 373–395.

[3] Birkhoff G. D. Note on the expansion problems of ordinary linear differential equations, *Rend. Circ. mat. Palermo*, 1913, vol. 36, pp. 115–126.

[4] Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы*, М.: Наука, 1969. – 528 с.

[5] Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1908, vol. 9, p. 219–231.

[6] Tamarkine J. D. Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires et sur la généralisation de la série de Fourier, it Rend. Circ. mat. Palermo, 1912, vol. 34, pp. 345–382.

[7] Stone M. H. A comparison of the series of Fourier and Birkhoff, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1926, vol. 28, pp. 695–761.

[8] Hobson E. W. On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by a series of normal functions, *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2, 1908, vol. 6, p. 349–395.

[9] Stekloff V. A. Solution générale du problème de développement d'une fonction arbitraire en séries suivant les fonctions fondamentales de Sturm–Liouville, *Rend. Accad. Lincei*, 1910, vol. 19, p. 490–496.

[10] Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, I, *Math. Ann.*, 1910, Bd. 69, S. 331–371.

[11] Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, II, *Math. Ann.*, 1911, Bd. 71, S. 38–53.

[12] Тамаркин Я. Д. *О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*, Петроград, 1917. – 308 с.

[13] Tamarkin J.D. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions, *Math. Ztshr.*, 1928, Bd. 27, S. 1–54.

[14] Birkhoff G. D., Langer R. E. The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order, *Proc. Amer. Acad. Arts and Sci.*, 1923, vol. 58, p. 51–128.

[15] Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям интегральных операторов, *Функциональный анализ*, Ульяновск, 1980, вып. 14, с. 187–189.

[16] Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов, *Матем. сборник*, 1981, т. 114 (156), № 3, с. 378–405.

[17] Poincaré H. Sur les équations de la physique mathématique, *Rend.Circ. mat. Palermo*, 1894, vol. 8, p. 57–156.

[18] Ильин В. А. О равномерной расходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье, *Докл. АН СССР*, 1975, т. 223, № 3, с. 548–551.

[19] Ильин В. А. О равносходимости разложений в тригонометрический ряд Фурье и по собственным функциям пучка М. В. Келдыша обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов, *Докл. АН СССР*, 1975, т. 225, № 3, с. 497–499.

[20] Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений, I, *Дифференц. уравнения*, 1980, т. 16, № 5, с. 771–794.

[21] Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений, II, *Дифференц. уравнения*, 1980, т. 16, № 6, с. 980–1009.

[22] Кесельман Г. М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов, *Изв. вузов. Матем.*, 1964, № 2, с. 82–93.

[23] Михайлов В. П. О базисах Рисса в $L_2[0, 1]$, *Докл. АН СССР*, 1962, т. 144, № 5, с. 981–984.

[24] Гельфанд И. М. Замечание к работе Н. К. Бари, *Учен. зап. МГУ*, 1951, т. 4, вып. 148, с. 224–225.

[25] Бари Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, *Учен. зап. МГУ*, 1951, т. 4, вып. 148, с. 68–107.

[26] Ломоносов М. И. О разложении по собственным функциям оператора $-\frac{d}{dy}[p(y)\frac{d}{dy}U] + q(y)U = \lambda U$, *Докл. АН СССР*, 1955, т. 105, № 3, с. 412–415.

[27] Ломоносов М. И. Об уравнении $-\frac{d}{dy}[p(y)\frac{d}{dy}U] + q(y)U = \lambda U$, *Зап. матем. отд. физ.-матем.фак-та и Харьков.матем. об-ва*, 1960, т. 26, с. 267–316.

[28] Шин Д. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве, *Докл. АН СССР*, 1938, т. 18, № 8, с. 523–526.

[29] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы: Спектральные операторы*, М.: Мир, 1974. – 664 с.

[30] Walsh J. L A closed set of normal orthogonal functions, *Amer. J. Math.*, 1923, vol. 55, p. 5–24.

[31] Kaczmarz S., Steinhaus H. Le systeme orthogonal de M. Rademacher, *Studia math.*, 1930, t. 2, s. 231–247.

[32] Paley R. E. A. C. A remarkable series of orthogonal functions, *Proc. London Math. Soc.*, 1932, vol. 32, pp. 241–279.

[33] Fine N. J On the Walsh Functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1949, vol. 65, no. 3, pp. 372–414.

[34] Хармут Х. *Теория секвентного анализа*, М.: Мир, 1980. – 576 с.

[35] Gibbs J. E. Some properties of functions on the nonnegative integers less than 2^n, *DES Rept. / Nat. Phys. Lab.*, 1969, no. 3.

[36] Gibbs J. E., Milliard M. J. Walsh fuctions as solutions of a logical differential equation, *DES Rept. / Nat. Phys. Lab.*, 1969, no. 1.

[37] Gibbs J. E., Ireland B. Some generalizations of the logical derivative, *DES Rept. / Nat. Phys. Lab.*, 1971, no. 8.

[38] Butzer P. L., Wagner H. J. Walsh-Fourier series and the concept of a derivative, *Appl. Anal.*, 1973, vol. 3, pp. 29–46.

[39] Butzer P. L., Wagner H. J. On dyadic analysis based on the pointwise pointwise dyadic derivative, *Anal. Math.*, 1975, t. 1, no. 3, pp. 171–196.

[40] Хрыптун В. Г. Разложение в равномерно сходящиеся ряды по собственным функциям, В кн.: *Обратные задачи для дифференциальных уравнений*, Новосибирск, 1972, с. 132–140.

[41] Ульянов П. Л Вложение некоторых классов функций H_p^ω, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1968, т. 32, № 3, с. 649–686.

[42] Бари Н. К. *Тригонометрические ряды*, М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

[43] Рубинштейн А. И. О равенстве Парсеваля, *Изв. вузов. Математика*, 1978, № 6, с. 102–108.

[44] Рисс Ф., Сёкефельви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу*, М.: Мир, 1979. – 592 с.

[45] Натансон И. П. *Теория функций вещественного переменного*, М.: Наука, 1974. – 480 с.

[46] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. *Выпуклые функции и пространства Орлича*, М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.

[47] Тиман А. Ф. *Теория приближения функций действительного переменного*, М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

[48] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*, т. 1, М.: Мир, 1965. – 616 с.

[49] Рогозинский В. В.,Харди Г. Х. *Ряды Фурье*, М.: Физматгиз, 1959. – 156 с.

[50] Morgenthaler G. V. On Walsh-Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1957, vol. 84, p. 472–507.

[51] Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, М.: Физматгиз, 1963. – 1108 с.

[52] Рыхлов В. С. Разложение по собственным функциям одного класса квазидифференциальных операторов, *Дифференциальные уравнения и тория функций*, Саратов: Изд-во СГУ, 1977, вып. 1, с. 151–169.

[53] Рыхлов В. С. Теоремы равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-ой производной, *Дифференциальные уравнения и теория функций*, Саратов: Изд-во СГУ, 1981, вып. 2, с. 57–75.

[54] Рыхлов В. С. Равносходимость с рядом Уолша–Фурье, *Дифференциальные уравнения и теория функций*, Саратов: Изд-во СГУ, 1980, вып. 3, с. 28–31.

[55] Рыхлов В. С. Теорема равносходимости для одного класса дифференциальных операторов, *Всесюз. симпозиум по теории аппроксимации функций в комплексной области:(Тез.докл.)*, Уфа, 1980, с. 120–121.

[56] Рыхлов В. С. Равносходимость для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-ой производной, *Функциональный анализ*, Ульяновск, 1980, вып. 14, с. 113–115.

[57] 56. Рыхлов В. С. Разложение по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных операторов, *Исследования по математике, физике и их приложениям: Тез.докл.*, Уфа, 1981, с. 36–38.