Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Рыхлов В.С., Курдюмов В.П.

ИЗБРАННЫЕ ЛЕКЦИИ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Учебно-методическое пособие для студентов

Саратов – 2016

Оглавление

Глава 1

Линейные уравнения с переменными коэффициентами

1.1 Уравнение Эйлера

Определение 1.1. *Уравнением Эйлера* n-го порядка называется следующее линейное дифференциальное уравнение

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),$$
$$x \in \big(-\infty, -\frac{b}{a}\big) \cup \big(-\frac{b}{a}, \infty\big), \quad (1.1)$$

где $a_0 \neq 0$ и $a \neq 0$ (если $a = 0$, то уравнение (1.1) будет линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами). В частном случае, когда $a = 1$ и $b = 0$, уравнение Эйлера имеет вид

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x).$$

Покажем, что уравнение (1.1) с помощью замены независимой переменной можно преобразовать к эквивалентному линейному дифференциальному уравнению n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Теорема 1.1. *Функция $y(x)$ является решением уравнения (1.1) в том и только том случае, если функция $z(t) = y\left(\frac{e^t-b}{a}\right)$ при $ax+b>0$ и $z(t) = y\left(\frac{-e^t-b}{a}\right)$ при $ax+b<0$ является решением линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами*

$$b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_n z = g(t), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (1.2)$$

где коэффициенты b_j $(j = 0, \dots, n)$ выражаются однозначно через коэффициенты a_k $(k = 0, \dots, n)$ и параметр a, при этом $b_0 = a_0 a^n$, $g(t) = f\left(\frac{e^t-b}{a}\right)$ в случае $ax+b>0$

и $b_0 = a_0(-a)^n$, $g(t) = f\left(\frac{-e^t-b}{a}\right)$ *в случае* $ax+b<0$ *(точные формулы для остальных коэффициентов не приводятся ввиду их громоздкости).*

Доказательство. Рассмотрим такие значения x, при которых $ax+b>0$, то есть полупрямую $x>-\frac{b}{a}$ при $a>0$ или полупрямую $x<-\frac{b}{a}$ при $a<0$. Случай $ax+b<0$ рассматривается аналогично. Сделаем замену независимой переменной $ax+b=e^t$ или $x=\frac{e^t-b}{a}$, где $t\in(-\infty,\infty)$. Ясно, что $t=\ln(ax+b)$. Обозначим $z(t)=y\left(\frac{e^t-b}{a}\right)$. Тогда, очевидно, имеет место тождество

$$y(x)\equiv z(\ln(ax+b)). \tag{1.3}$$

Пусть $y(x)$ есть решение уравнения (1.1). Найдем уравнение, которому удовлетворяет функция $z(t)$. Для этого установим связь между производными функций $y(x)$ и $z(t)$. Используя формулу дифференцирования сложной функции, последовательно получим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{a}{ax+b}=\frac{dz}{dt}\cdot ae^{-t}; \tag{1.4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\cdot ae^{-t}\right)ae^{-t}=\left(\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\right)a^2e^{-2t}. \tag{1.5}$$

Из (1.4)–(1.5) видно, что выражения первой и второй производной функции $y(x)$ по x являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами производных от функции $z(t)$ по t, умноженными на множители ae^{-t} и a^2e^{-2t} соответственно. Покажем, что этот факт имеет место для производной любого порядка. Воспользуемся методом математической индукции. Допустим, k-я производная имеет вид

$$\frac{d^ky}{dx^k}=\left(\frac{d^kz}{dt^k}+\alpha_1\frac{d^{k-1}z}{dt^{k-1}}+\dots+\alpha_{k-1}\frac{dz}{dt}\right)a^ke^{-kt}, \tag{1.6}$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{k-1}$ — постоянные. Тогда $(k+1)$-я производная представима следующим образом

$$\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^ky}{dx^k}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{d^kz}{dt^k} + \alpha_1\frac{d^{k-1}z}{dt^{k-1}} + \dots + \alpha_{k-1}\frac{dz}{dt}\right)a^ke^{-kt}\right)ae^{-t} =$$

$$= \left(\frac{d^{k+1}z}{dt^{k+1}} + \alpha_1\frac{d^kz}{dt^k} + \dots + \alpha_{k-1}\frac{d^2z}{dt^2}\right)a^{k+1}e^{-(k+1)t} -$$

$$- \left(\frac{d^kz}{dt^k} + \alpha_1\frac{d^{k-1}z}{dt^{k-1}} + \dots + \alpha_{k-1}\frac{dz}{dt}\right)ka^{k+1}e^{-(k+1)t} =$$

$$= \left(\frac{d^{k+1}z}{dt^{k+1}} + (\alpha_1 - k)\frac{d^kz}{dt^k} + (\alpha_2 - k\alpha_1)\frac{d^{k-1}z}{dt^{k-1}} + \dots +\right.$$

$$\left. + (\alpha_{k-1} - k\alpha_{k-2})\frac{d^2z}{dt^2} - k\alpha_{k-1}\frac{dz}{dt}\right)a^{k+1}e^{-(k+1)t},$$

то есть отсюда получаем, что $(k+1)$-я производная также является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами производных от первого до $(k+1)$-го порядков от функции $z(t)$, умноженной на множитель $a^{k+1}e^{-(k+1)t}$. Таким образом, это свойство доказано для любого натурального k.

Подставляя найденные производные (1.4)–(1.5) и (1.6) при $k = 3, \dots, n$ в уравнение (1.1) и приводя подобные члены, относительно функции $z(t)$ получим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами (1.2), в котором, очевидно, старший коэффициент представляется в виде $b_0 = a_0a^n$ и, очевидно, отличен от нуля, остальные коэффициенты b_j $(j = 1, \dots, n)$ выражаются однозначно через коэффициенты a_k $(k = 1, \dots, n)$ и параметр a, а $g(t) = f\left(\frac{e^t - b}{a}\right)$.

Следовательно, если $y(x)$ является решением уравнения (1.1), то функция $z(t)$ — решение уравнения (1.2). Очевидно, что верно и обратное утверждение. $\square$

Замечание 1.1. Из теоремы 1.1 следует, что для нахождения общего решения уравнения (1.1) достаточно найти общее решение уравнения (1.2).

Замечание 1.2. Так как частные решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами, соответствующего неоднородному уравнению (1.2), ищутся в виде $z(t) = e^{\lambda t}$, то ввиду замены (1.4) в случае $ax + b > 0$ частные решения однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (1.1), можно сразу искать в виде

$$y(x) = z(\ln(ax + b)) = e^{\lambda\ln(ax+b)} = (ax + b)^\lambda,$$

а в случае $ax + b < 0$ — в виде $y(x) = (-ax - b)^\lambda$. При этом, если корень λ будет кратным корнем характеристического уравнения, то недостающие частные решения, которые в случае линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами берутся в виде $z(t) = t^m e^{\lambda t}$, $m = \overline{0, k-1}$, где k — кратность корня, в случае $ax + b > 0$ нужно брать в виде

$$y(x) = z(\ln(ax + b)) = e^{\lambda \ln(ax+b)} \ln^m (ax + b)^m = (ax + b)^\lambda \ln^m (ax + b),$$

а в случае $ax + b < 0$ — в виде $y(x) = (-ax - b)^\lambda \ln^m(-ax - b)$.

Пример 1.1. Найти общее решение уравнения Эйлера

$$x^2 y'' + xy' - y = 0, \quad x > 0. \tag{1.7}$$

Решение. Первый способ. Делаем в уравнении замену $x = e^t$. Имеем в данном случае $y(x) = z(\ln x)$ и, следовательно,

$$y'(x) = z'(t)\frac{d\ln x}{dx} = z'(t)\frac{1}{x} = z'(t)e^{-t},$$

$$y''(x) = (y')' = \left(z'(t)\frac{1}{x}\right)'_x = z''(t)\frac{1}{x^2} - z'(t)\frac{1}{x^2} = \big(z''(t) - z'(t)\big)e^{-2t}$$

и уравнение (1.7) в результате такой замены преобразуется к виду

$$z'' - z = 0. \tag{1.8}$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 1 = 0$ есть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ и, следовательно, общее решение уравнения (1.8) будет иметь вид

$$z = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Но так как $e^t = x$, то для общего решения исходного уравнения имеет место формула

$$y = c_1 x + c_2 \frac{1}{x}. \tag{1.9}$$

Второй способ. В соответствии с замечанием 1.2 ищем решение данного уравнения в виде $y = x^\lambda$, где λ — неизвестное число. Находим

$$y' = \lambda x^{\lambda-1}, \quad y'' = \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2}.$$

Подставляя в уравнение (1.7), получим

$$x^2 \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} + x\lambda x^{\lambda-1} - y = 0$$

или

$$x^\lambda\big(\lambda(\lambda - 1) + \lambda - 1\big) = 0.$$

Так как $x^\lambda \not\equiv 0$, то $\lambda(\lambda - 1) + \lambda - 1) = 0$ или $\lambda^2 - 1 = 0$. То есть получили то же самое характеристическое уравнение, что и в первом способе. Корням этого уравнения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$ соответствует фундаментальная система решений $y_1 = x$, $y_2 = x^{-1}$ и общее решение будет иметь тот же вид (1.9). □

1.2 Интегрирование уравнений с помощью степенных рядов

В настоящем разделе изучается линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x), \tag{1.10}$$

у которого коэффициенты $p_j(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ и $f(x)$ разлагаются в степенные ряды в R_0-окрестности некоторой точки x_0, то есть

$$p_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{jk}(x - x_0)^k, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x - x_0)^k$$

при всех x из интервала $x \in (x_0 - R_0, x_0 + R_0)$, где p_{jk}, f_k — коэффициенты разложений. Покажем, что в этом случае решение задачи Коши для уравнения (1.10) с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

также представимо в виде степенного ряда, сходящегося в том же интервале $(x_0 - R_0, x_0 + R_0)$.

Напомним некоторые факты из теории степенных рядов, известных из курса математического анализа.

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k, \tag{1.11}$$

где x_0 – заданная фиксированная точка.

Прежде всего заметим, что замена $t = x - x_0$ сводит изучение свойств ряда (1.11) в окрестности точки $x = x_0$ к исследованию аналогичных свойств ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ в окрестности точки $t_0 = 0$. Поэтому сформулируем известные результаты из теории степенных рядов для случая ряда (1.11) при $x_0 = 0$, то есть для ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{1.12}$$

Возможны три случая:

1) ряд (1.12) сходится только при $x = 0$;

2) ряд (1.12) сходится при $x \in (-R, R)$, где $R > 0$, и расходится при $x \notin [-R, R]$;

3) ряд (1.12) сходится при любых x.

Число R в случае 2) называется радиусом сходимости степенного ряда. В первом случае считается, что $R = 0$, а в третьем случае — $R = \infty$.

Теорема 1.2. *Справедлива следующая формула*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}. \tag{1.13}$$

Теорема 1.3. *Пусть радиус сходимости R ряда (1.12) положителен, тогда при $x \in (-R, R)$ сумма $f(x)$ этого ряда имеет производные любого порядка, которые могут быть получены почленным дифференцированием ряда (1.12). Получающиеся при этом ряды имеют тот же радиус сходимости.*

Теорема 1.4. *Если $f(x)$ — сумма ряда (1.12), то*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Теорема 1.5. *Предположим, что ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ сходятся в интервале $(-h, h)$, $h > 0$. Обозначим через $f(x)$ и $g(x)$ суммы соответствующих рядов. Тогда*

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{1.14}$$

где

$$c_k = \sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m},$$

причем ряд (1.14) сходится в том же интервале.

Теорема 1.6. *Предположим, что при некотором $h > 0$ и любых $x \in (-h, h)$ выполняется равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

тогда $a_k = b_k$ для любых $k = 0, 1, \ldots$.

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение.

Теорема 1.7. *Для того, чтобы радиус сходимости R ряда (1.12) удовлетворял неравенству $R \geq R_0$, где R_0 — некоторое положительное число, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon \in (0, R_0)$ существовало такое число $M_\varepsilon > 0$, что выполняются неравенства*

$$|a_k| \leq \frac{M_\varepsilon}{(R_0 - \varepsilon)^k}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{1.15}$$

Доказательство. Докажем необходимость утверждения теоремы.

Пусть $R \geq R_0$. Из определения верхнего предела и формулы (1.13) следует, что для любого $\varepsilon \in (0, R_0)$ существует натуральное число $k_0 > 0$, такое что при любых $k > k_0$ выполняется неравенство

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{R - \varepsilon},$$

и, следовательно,
$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{R_0 - \varepsilon}.$$
Отсюда имеем
$$|a_k| \leq \frac{1}{(R_0 - \varepsilon)^k} \quad \text{при} \quad k > k_0. \tag{1.16}$$

Выберем M_ε так, чтобы $M_\varepsilon \geq 1$ и
$$|a_k| \leq \frac{M_\varepsilon}{(R_0 - \varepsilon)^k}, \quad k = 0, 1, \ldots, k_0.$$
Но тогда неравенство (1.15) будет выполняться при любых k.

Докажем теперь достаточность утверждения теоремы.

Пусть выполнено условие (1.15). Но тогда
$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{\sqrt[k]{M_\varepsilon}}{R_0 - \varepsilon}.$$
Отсюда следует неравенство
$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{R_0 - \varepsilon} \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{M_\varepsilon}.$$
Так как $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{M_\varepsilon} = 1$, то $\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{M_\varepsilon} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{M_\varepsilon} = 1$ Следовательно,
$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{R_0 - \varepsilon}$$
для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда
$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{R_0 - \varepsilon} = \frac{1}{R_0}.$$
Поэтому из (1.13) заключаем, что
$$\frac{1}{R} \leq \frac{1}{R_0}, \text{ то есть } R \geq R_0.$$

Теорема доказана. □

Для упрощения выкладок ограничимся далее случаем уравнения второго порядка, то есть рассмотрим следующую задачу Коши
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{1.17}$$
$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0', \tag{1.18}$$
где y_0, y_0' — заданные числа. Случай произвольного n исследуется аналогично.

Теорема 1.8. *Пусть*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, \tag{1.19}$$

причем радиусы сходимости этих рядов не меньше $R_0 > 0$. Тогда решение $y(x)$ задачи Коши (1.17)–(1.18) *на интервале $(-R_0, R_0)$ представимо в виде степенного ряда $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что решение задачи Коши (1.17)–(1.17) единственно.

Будем рассуждать по необходимости, то есть предположим, что решение рассматриваемой задачи Коши имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \in (-R_0, R_0). \tag{1.20}$$

Найдем выражение для коэффициентов a_k. На основании теоремы 1.4 заключаем, что

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = y_0'. \tag{1.21}$$

Из теоремы 1.3 следует, что

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

Аналогично,

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k.$$

Отсюда, учитывая теорему 1.5, из формул (1.19), (1.20) получим

$$p(x)y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{k} p_m (k-m+1) a_{k-m+1} \right) x^k,$$

$$q(x)y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{k} q_m a_{k-m} \right) x^k.$$

Подставляя эти формулы в уравнение (1.17), получим при $x \in (-R_0, R_0)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{k} p_k (k-m+1) a_{k-m+1} \right) x^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{k} q_k a_{k-m} \right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k.$$

Отсюда, на основании теоремы 1.6 приходим к выводу, что коэффициенты слева и справа равны, то есть

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}+\sum_{m=0}^{k}p_m(k-m+1)a_{k-m+1}+$$
$$+\sum_{m=0}^{k}q_m a_{k-m}=f_k, \quad k=0,1,\ldots.$$

Следовательно, коэффициенты a_k $(k=2,3,\ldots)$ определяются из рекуррентных формул

$$a_{k+2}=$$
$$=\frac{f_k-\sum_{m=0}^{k}\big((k-m+1)p_m a_{k-m+1}+q_m a_{k-m}\big)}{(k+2)(k+1)},\ k=0,1,\ldots. \quad (1.22)$$

Теперь убедимся, что если коэффициенты a_k, $k=0,1,\ldots$, определяются формулами (1.21)–(1.22), то ряд (1.20) сходится при $x\in(-R_0,R_0)$ и является решением задачи Коши (1.17)–(1.18) на этом интервале.

Воспользуемся теоремой 1.7. Докажем, что для любого $\varepsilon>0$ $\left(\varepsilon<\frac{R_0}{2}\right)$ существует M_ε, такое что для всех $k=0,1,\ldots$ справедливо неравенство

$$|a_k|\le\frac{M_\varepsilon}{(R_0-2\varepsilon)^k}. \quad (1.23)$$

Применим метод математической индукции. Прежде всего заметим, что из теоремы 1.7 следует, что существует M_ε^0, такое что при $k=0,1,\ldots$ выполняются неравенства

$$|p_k|\le\frac{M_\varepsilon^0}{(R_0-\varepsilon)^k},\quad |q_k|\le\frac{M_\varepsilon^0}{(R_0-\varepsilon)^k},\quad |f_k|\le\frac{M_\varepsilon^0}{(R_0-\varepsilon)^k}. \quad (1.24)$$

Следовательно,

$$|a_{k+2}|\le$$
$$\le\frac{1}{(k+2)(k+1)}\left(|f_k|+\sum_{m=0}^{k}|p_m|(k-m+1)|a_{k-m+1}|+\sum_{k=0}^{k}|q_m||a_{k-m}|\right)\le$$
$$\le\frac{1}{k+2}\left(|f_k|+\sum_{m=0}^{k}|p_m||a_{k-m+1}|+\sum_{k=0}^{k}|q_m||a_{k-m}|\right)\le$$
$$\le\frac{1}{k+2}\left(\frac{M_\varepsilon^0}{(R_0-\varepsilon)^k}+\sum_{m=0}^{k}|a_{k-m+1}|\frac{M_\varepsilon^0}{(R_0-\varepsilon)^m}+\sum_{k=0}^{k}|a_{k-m}|\frac{M_\varepsilon^0}{(R_0-\varepsilon)^m}\right). \quad (1.25)$$

Заметим, что для любого фиксированного n_0 неравенства (1.23) при $k=0,1\ldots,n_0$ будут справедливы при соответствующем выборе M_ε. Число n_0 выберем позднее.

Итак, предположим, что неравенства (1.23) выполняются при всех $k = 0, 1, \ldots, n+1$ $(n+1 \geq n_0)$ и докажем, что

$$|a_{n+2}| \leq \frac{M_\varepsilon}{(R_0 - 2\varepsilon)^{n+2}}. \tag{1.26}$$

Из (1.25) следует, что

$$\begin{aligned} |a_{n+2}| \leq \frac{1}{n+2} \Bigg(& \frac{M_\varepsilon^0}{(R_0-\varepsilon)^n} + \\ & + \sum_{m=0}^{k} \frac{M_\varepsilon}{(R_0-2\varepsilon)^{n-m+1}} \cdot \frac{M_\varepsilon^0}{(R_0-\varepsilon)^m} + \sum_{k=0}^{k} \frac{M_\varepsilon}{(R_0-2\varepsilon)^{n-m}} \cdot \frac{M_\varepsilon^0}{(R_0-\varepsilon)^m} \Bigg) = \\ = \frac{M_\varepsilon}{(R_0-2\varepsilon)^{n+2}} \cdot \frac{1}{n+2} \Bigg(& \frac{M_\varepsilon^0}{M_\varepsilon} \cdot \frac{(R_0-2\varepsilon)^{n+2}}{(R_0-\varepsilon)^n} + M_\varepsilon^0 (R_0-2\varepsilon) \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R_0-2\varepsilon}{R_0-\varepsilon} \right)^m + \\ & + M_\varepsilon^0 (R_0-2\varepsilon)^2 \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R_0-2\varepsilon}{R_0-\varepsilon} \right)^m \Bigg). \end{aligned}$$

Не теряя общности, можно считать, что $\frac{M_\varepsilon^0}{M_\varepsilon} \leq 1$. Обозначим $\frac{R_0-2\varepsilon}{R_0-\varepsilon} = q$. Тогда, очевидно, $0 < q < 1$. Поэтому,

$$\sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R_0-2\varepsilon}{R_0-\varepsilon} \right)^m = \sum_{m=0}^{n} q^m \leq \sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{1}{1-q}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |a_{n+2}| \leq \frac{M_\varepsilon}{(R_0-2\varepsilon)^{n+2}} \cdot \frac{1}{n+2} \times \\ \times \left((R_0-2\varepsilon)^2 + \left(M_\varepsilon^0 (R_0-2\varepsilon) + M_\varepsilon^0 (R_0-2\varepsilon)^2 \right) \frac{1}{1-q} \right) = \\ = \frac{M_\varepsilon}{(R_0-2\varepsilon)^{n+2}} \cdot \frac{1}{n+2} \cdot Q_\varepsilon, \end{aligned} \tag{1.27}$$

где Q_ε — константа, равная выражению в больших круглых скобках.

Выберем n_0 настолько большим, чтобы при $n > n_0$ выполнялось неравенство $\frac{Q_\varepsilon}{n+2} \leq 1$. Тогда из (1.27) получаем (1.26).

Таким образом, на основании метода математической индукции получаем справедливость оценки (1.23) для всех $k = 0, 1, \ldots$.

Итак, ряд (1.20), в котором коэффициенты a_k определяются формулами (1.21)–(1.22), имеет радиус сходимости $R \geq R_0$. Отсюда, учитывая рассуждения, которые использовались при получении (1.21)–(1.22), приходим к выводу, что верно и обратное утверждение: если коэффициенты a_k, $k = 0, 1, \ldots$, определяются формулами (1.21)–(1.22), то функция $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ является решением задачи Коши (1.17)–(1.18) на интервале $(-R_0, R_0)$.

Теорема доказана. □

Замечание 1.3. Формулы (1.21)–(1.22) дают практический способ нахождения решения задачи Коши (1.17)–(1.18) в виде степенного ряда и могут быть, в частности, использованы для нахождения приближенного решения этой задачи. Для этого достаточно найти частичную сумму $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ достаточно большого порядка n.

Замечание 1.4. Если воспользоваться теоремой 1.4, то можно вычислять коэффициенты a_k непосредственно, минуя формулы (1.21)–(1.22). В самом деле, пусть $y(x)$ есть решение задачи (1.17)–(1.18). Тогда имеем $a_0 = y_0$, $a_1 = y_0'$. Подставим $y(x)$ в уравнение (1.17) и запишем полученное тождество в виде

$$y''(x) \equiv f(x) - p(x)y'(x) - q(x)y(x). \tag{1.28}$$

Отсюда найдем

$$a_2 = \frac{1}{2!}y''(0) = \frac{1}{2}\big(f(0) - p(0)y'(0) - q(0)y(0)\big) = \frac{1}{2}(f_0 - p_0y_0' - q_0y_0).$$

Дифференцируя тождество (1.28) и полагая $x = 0$, получим

$$a_3 = \frac{1}{3!}y'''(0) = \frac{1}{6}\big(f'(0) - p'(0)y'(0) - p(0)y''(0) - q'(0)y(0) - q(0)y'(0)\big) = \\ = \frac{1}{6}(f_1 - p_1y_0' - 2p_0a_2 - q_1y_0 - q_0y_0').$$

Продолжая дифференцирование тождества (1.28) и полагая $x = 0$, можно последовательно найти все коэффициенты a_k.

Пример 1.2 (Уравнение Эйри). Методом степенных рядов найти решение уравнения

$$y'' - xy = 0, \tag{1.29}$$

которое называется *уравнением Эйри.*

Решение. В данном случае $p(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv x$, $f(x) \equiv 0$ и можно взять $R_0 = \infty$, то есть искать решение в виде ряда $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, сходящегося на всей вещественной оси. Подставляя ряд для решения и его второй производной в уравнение (1.29), получим тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} \equiv 0$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-1} x^{k} \equiv 0,$$

где полагается $a_{-1} = 0$. Тогда имеют место следующие рекуррентные соотношения

$$a_{k+2} = \frac{a_{k-1}}{(k+2)(k+1)}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

В частности, при $k=0$ имеем $a_2=0$, при $k=1$ будет $a_3=\frac{a_0}{2\cdot 3}$, при $k=2$ получим $a_4=\frac{a_1}{3\cdot 4}$, а при $k=3$ будем иметь $a_5=\frac{a_2}{4\cdot 5}=0$ и т. д. Таким образом, получим следующие формулы для коэффициентов a_k:

$$a_{3l}=\frac{a_{3l-3}}{3l(3l-1)}=\frac{a_{3l-6}}{3l(3l-1)(3l-3)(3l-4)}=\dots=$$
$$=\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3l-1)3l},$$

$$a_{3l+1}=\frac{a_{3l-2}}{(3l+1)3l}=\frac{a_{3l-5}}{(3l+1)3l(3l-2)(3l-3)}=\dots=$$
$$=\frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 3l(3l+1)},$$

$$a_{3l+2}=\frac{a_{3l-1}}{(3l+2)(3l+1)}=\frac{a_{3l-4}}{(3l+2)(3l+1)(3l-1)(3l-2)}=\dots=$$
$$=\frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3l+1)(3l+2)}=0.$$

Если ввести функции

$$Ai(x)=1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\dots+\frac{x^{3l}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3l-1)3l}+\dots,$$

и

$$Bi(x)=x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\dots+\frac{x^{3l+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 3l(3l+1)}+\dots,$$

которые называются *функциями Эйри*, то получим следующее представление для общего решения уравнения (1.29)

$$y(x)=a_0Ai(x)+a_1Bi(x),$$

где a_0 и a_1 есть произвольные постоянные. □

Если точка $x=x_0$ является особой точкой уравнения (1.10), то она, вообще говоря, будет и особой точкой решений этого уравнения. В этом случае не всегда удается найти решение дифференциального уравнения в виде степенного ряда по степеням $(x-x_0)$. Тогда можно попытаться найти его в виде так называемого *обобщенного степенного ряда.*

Определение 1.2. *Обобщенным степенным рядом* по степеням $(x-x_0)$ называется ряд вида

$$(x-x_0)^\rho\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k, \tag{1.30}$$

где показатель ρ есть некоторое постоянное число, а ряд $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$ есть сходящийся степенной ряд по степеням $(x-x_0)$, причем коэффициент a_0 отличен от нуля.

Отметим, что в случае, если ρ есть натуральное число или ноль, то ряд (1.30) есть обычный степенной ряд по степеням $(x-x_0)$.

В следующем разделе для уравнения второго порядка будет рассмотрен случай использования обобщенных степенных рядов для нахождения решений.

Глава 2

Элементы теории линейных уравнений второго порядка

В данном разделе будем рассматривать линейное однородное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами на интервале (a, b), где $-\infty \le a < b \le \infty$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{2.1}$$

Предполагаем, что коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на (a, b). Согласно теореме Пикара, это гарантирует существование и единственность для любых начальных данных $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, где $x_0 \in (a, b)$, дважды непрерывно дифференцируемого решения, определенного во всем интервале (a, b).

При изучении свойств решений такого уравнения и для нахождения его решений часто бывает полезно предварительное приведение его к некоторому более простому виду.

2.1 Приведение уравнений к более простым

Покажем, что уравнение (2.1) всегда можно преобразовать к эквивалентному виду, не содержащему первой производной. Это можно сделать разными способами. Рассмотрим два два из них.

2.1.1 Использование замены искомой функции

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если функция $q(x)$ непрерывна, а $p(x)$ непрерывно дифференцируема на (a, b), то однородная линейная замена искомой функции*

$$y = w(x)z, \tag{2.2}$$

где $w(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx\right)$, *приводит уравнение* (2.1) *к эквивалентному виду*

$$z'' + Q(x)z = 0, \tag{2.3}$$

где функция $Q(x)$ *непрерывна на* (a, b) *и выражается формулой*

$$Q(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x). \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть функция $y(x)$ есть решение уравнения (2.1). Подставляя (2.2) в (2.1), получим, что функция $z(x)$ является решением уравнения

$$w''(x)z + 2w'(x)z' + w(x)z'' + p(x)\big(w'(x)z + w(x)z'\big) + q(x)w(x)z = 0$$

или, разделив на отличный от нуля множитель $w(x)$,

$$z'' + \left(\frac{2w'(x)}{w(x)} + p(x)\right)z' + \left(\frac{w''(x)}{w(x)} + p(x)\frac{w'(x)}{w(x)} + q(x)\right)z = 0. \tag{2.5}$$

Так как в силу определения функции $w(x)$

$$w'(x) = -\frac{1}{2}p(x)w(x), \quad w''(x) = -\frac{1}{2}p'(x)w(x) + \frac{1}{4}p^2(x)w'(x),$$

то уравнение (2.5) имеет вид (2.3), где функция $Q(x)$ определяется формулой (2.4).

И наоборот, если функция $z(x)$ является решением уравнения (2.3), где функция $Q(x)$ определяется формулой (2.4), то легко показать, что функция $y(x) \equiv \frac{z(x)}{w(x)}$ является решением уравнения (2.1).

Теорема доказана. □

Определение 2.1. *Уравнением Бесселя с индексом* ν называется уравнение вида

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{2.6}$$

или в эквивалентной форме

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0. \tag{2.7}$$

Функции, удовлетворяющие этому уравнению, называются *цилиндрическими функциями.*

Пример 2.1. Привести уравнение (2.7) к уравнению, не содержащему члена с первой производной при $x > 0$.

Решение. В данном случае $p(x) \equiv \frac{1}{x}$, $q(x) \equiv 1 - \frac{\nu^2}{x^2}$, так что

$$Q(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}.$$

Таким образом, уравнение Бесселя при $x > 0$ подстановкой

$$y = z \exp\left(-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx\right) = \frac{z}{\sqrt{x}}$$

приводится к виду

$$z'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right) z = 0.$$

В частности, если $\nu = \pm\frac{1}{2}$, то соответствующее уравнение Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0 \tag{2.8}$$

приводится той же подстановкой к уравнению

$$z'' + z = 0.$$

Так как система функций $z_1 = \sin x$, $z_2 = \cos x$ — фундаментальная система решений этого уравнения, то уравнение (2.8) будет иметь в интервале $(0, \infty)$ фундаментальную систему решений

$$y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad y_2 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}. \tag{2.9}$$

Первое решение не имеет особенностей и представимо обобщенным степенным рядом

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right), \tag{2.10}$$

а второе решение имеет ту особенность, что оно стремится к ∞ при $x \to 0$, и представимо обобщенным степенным рядом

$$y_2 = x^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right). \tag{2.11}$$

Умножая решения (2.9) на множитель $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, получим функции

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, \tag{2.12}$$

которые называются *функциями Бесселя первого рода порядка* $\frac{1}{2}$ *и* $-\frac{1}{2}$, соответственно.

Таким образом, общее решение уравнения (2.8) в интервале $0 < x < \infty$ имеет вид

$$y(x) = c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

□

2.1.2 Использование замены независимой переменной

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на интервале (a, b), то замена независимой переменной*

$$t = t(x) = \int v(x)\,dx, \tag{2.13}$$

где $v(x) = e^{-\int p(x)\,dx}$, приводит уравнение (2.1) к эквивалентному виду

$$u'' + R(t)u = 0, \quad t \in \bigl(t(a), t(b)\bigr), \tag{2.14}$$

где $u(t) \equiv y(x)$, функция $R(t)$ непрерывна и выражается формулой

$$R(t) = q(x(t))v^{-2}(x(t)), \tag{2.15}$$

и $x(t)$ — обратная функция к $t(x)$.

Доказательство. Так как $v(x) > 0$ при всех x, то функция $t(x) = \int v(x)\,dx$ возрастающая и, следовательно, существует обратная к ней функция $x(t)$. Пусть функция $y(x)$ есть решение уравнения (2.1). Положим $y(x) \equiv u(t)$ и выразим производные функции $y(x)$ через производные функции $u(t)$:

$$y' = u'v(x), \quad y'' = u''(v(x))^2 - u'v(x)p(x).$$

Подставив эти производные в уравнение (2.1) и разделив на отличный от нуля множитель $(v(x))^2$, легко получим, что функция $u(t)$ является решением уравнения

$$u'' + q(x)v^{-2}(x)u = 0,$$

а это и есть уравнение (2.14), если учесть замену $x = x(t)$.

Наоборот, считая функцию $u(t)$ решением уравнения (2.14) и делая замену $x = x(t)$ в этом уравнении, легко получим, что функция $y(x) \equiv u(t)$ будет решением уравнения (2.1).

Теорема полностью доказана. □

Пример 2.2. Привести уравнение

$$y'' + \frac{1}{2x}\,y' - \frac{1}{x}\,y = 0$$

к уравнению, не содержащему члена с первой производной при $x > 0$ и найти общее решение.

Решение. В данном случае $p(x) \equiv \frac{1}{2x}$, так что замена переменной (2.13) примет вид

$$t = \int e^{-\int \frac{1}{2x}\,dx}\,dx = 2\sqrt{x}.$$

Тогда будем иметь

$$y' = u'\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y'' = u''\frac{1}{x} - u'\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

Поэтому рассматриваемое уравнение приведется к виду

$$u'' - u = 0.$$

Интегрируя это уравнение и возвращаясь к переменной x, получим общее решение исходного уравнения при $x > 0$

$$y = c_1 e^{2\sqrt{x}} + c_2 e^{-2\sqrt{x}}.$$

Заметим, что все решения не имеют особенностей в особой точке $x = 0$, а именно, имеют конечные пределы при $x \to 0$. □

2.2 Нахождение общего решения, если известно частное решение

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на интервале (a, b). Если $y_1(x)$ есть ненулевое частное решение уравнения (2.1) на интервале (a, b), то общее решение этого уравнения на этом интервале имеет вид*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \tag{2.16}$$

где

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx. \tag{2.17}$$

Доказательство. Обозначим недостающее решение уравнения (2.1) через y_2. Воспользуемся формулой Остроградского-Лиувилля:

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi}$$

или

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = c e^{-\int p(x)\,dx},$$

где c — произвольная константа. Отсюда получим

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = c e^{-\int p(x)\,dx}$$

или

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{c}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Таким образом,

$$\frac{y_2}{y_1} = c\int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx + \tilde{c}$$

или

$$y_2 = y_1\left(c\int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx + \tilde{c}\right)$$

Полагая $c = 1$ и $\tilde{c} = 0$, получим решение y_2, определяемое формулой (2.17). Очевидно, решения y_1 и y_2 линейно независимы. Это можно легко установить, подсчитав вронскиан от этих функций.

Теорема доказана. □

Замечание 2.1. Из доказанной теоремы следует, что для интегрирования однородного линейного уравнения второго порядка достаточно найти только одно ненулевое частное его решение.

Пример 2.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' - \frac{2}{x}\,y' + \frac{2}{x^2}\,y = 0$$

Решение. Это, очевидно, уравнение Эйлера. Точка $x = 0$ — особая точка. Очевидно, $y_1 = x$ — частное решение этого уравнения. Следовательно, по теореме 2.16 в соответствии с формулой (2.17) второе линейно независимое решение выражается по формуле

$$y_2 = x\int \frac{e^{\int \frac{2}{x}\,dx}}{x^2}\,dx = x^2$$

(произвольную постоянную интегрирования опускаем) в каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Таким образом, общее решение рассматриваемого уравнения в каждом таком интервале имеет вид

$$y = c_1 x + c_2 x^2.$$

□

2.3 Интегрирование уравнений с помощью обобщенных степенных рядов

Если $x = x_0$ есть особая точка уравнения (2.1), то как уже было показано на примере уравнения Бесселя (2.8) с индексом $\nu = \pm\frac{1}{2}$, в общем случае решение такого уравнения не будет представимо обычным степенным рядом в окрестности точки $x = x_0$. Но из формул (2.10)–(2.11) видно, что решение такого уравнения можно попытаться искать в виде обобщенного степенного ряда.

Для простоты построим решения в виде обобщенного степенного ряда не для произвольного уравнения (2.1), а для уравнения Бесселя с индексом ν при $x > 0$

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0. \tag{2.18}$$

Для того, чтобы доказать основную теорему этого раздела, вспомним некоторые факты из анализа и дадим некоторые определения.

Напомним, что в курсе математического анализа изучалась Гамма-функция Эйлера, которая выражается несобственным интегралом

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt,$$

сходящимся для всех действительных значений $x > 0$. Для Гамма-функции справедливо основное функциональное уравнение

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{2.19}$$

Так как, очевидно,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1,$$

то из (2.19) следует, что для натурального n справедливо равенство

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

в частности, $0! = \Gamma(1) = 1$.

Равенство (2.19) позволяет определить значение $\Gamma(x)$ и для $x < 0$. В самом деле, если $x < 0$, но $1 + x > 0$, то можно найти

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1). \tag{2.20}$$

Аналогично, применяя соотношение (2.20) несколько раз, можно получить значения Гамма-функции для любого значения x, исключая $x = 0$, а следовательно, и $x = -1, -2, \ldots$. В этих точках $\Gamma(x)$ обращается в бесконечность.

Справедлива формула дополнения

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{2.21}$$

Определение 2.2. *Функцией Бесселя первого рода ν-го порядка* для любого вещественного ν называется функция

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}. \tag{2.22}$$

Пользуясь признаком Даламбера, легко проверить, что ряд (2.22) сходится на всей числовой прямой.

Замечание 2.2. Так как справедливо равенство (2.21), то из уравнения (2.19) получим

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$
$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}{2^{k+1}}\sqrt{\pi},$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^{k}}\sqrt{\pi}.$$

Поэтому из формулы (2.22) найдем

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{k+1}}{k!\,1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k} =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)} =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{k}}{k!\,1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k} =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Таким образом, получаем решения, определяемые формулами (2.12).

Определение 2.3. *Функцией Бесселя второго рода ν-го порядка* или *функцией Вебера ν-го порядка* для любого нецелого вещественного ν называется функция

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{2.23}$$

В случае целых вещественных значений ν функция Y_ν определяется формулой

$$Y_\nu(x) = \lim_{\mu\to\nu} \frac{J_\mu(x)\cos\mu\pi - J_{-\mu}(x)}{\sin\mu\pi}. \tag{2.24}$$

Замечание 2.3. Отметим, что при целых вещественных ν выражение (2.23) становится неопределенным. Тем не менее с помощью правила Лопиталя можно показать, что при любом ν предел (2.24) существует.

Итак, ищем общее решение уравнения Бесселя (2.18) при $x > 0$. Для этого достаточно найти два линейно независимых частных решения. Попробуем найти частное решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_0 \neq 0, \tag{2.25}$$

где ρ — некоторое вещественное число, которое требуется найти вместе с коэффициентами a_k.

Итак, предположим, что функция $y(x)$, определяемая рядом (2.25), сходящимся в интервале $(0, +\infty)$, есть решение уравнения (2.18). Ряд (2.25) удобнее записать в виде

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\rho+k}.$$

Отсюда последовательно находим

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho+k) a_k x^{\rho+k-1} = x^{\rho-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\rho+k) a_k x^k,$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho+k)(\rho+k-1) a_k x^{\rho+k-2} = x^{\rho-2} \sum_{k=0}^{\infty} (\rho+k)(\rho+k-1) a_k x^k,$$

Подставим эти выражения в уравнение (2.18). Будем иметь, разделив полученное тождество на $x^{\rho-2}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\rho+k)(\rho+k-1) a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (\rho+k) a_k x^k +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \equiv 0$$

или, сделав замену индекса суммирования в третьем слагаемом,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)(\rho+k-1)a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)a_k x^k +$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^k - \nu^2\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k \equiv 0.$$

Следовательно, коэффициенты при соответствующих степенях x должны равняться нулю.

Для коэффициента при x^0 получаем равенство

$$\rho(\rho-1)a_0 + \rho a_0 - \nu^2 a_0 = 0$$

или с учетом того, что $a_0 \neq 0$,

$$\left(\rho^2-\nu^2\right)=0. \tag{2.26}$$

Это уравнение называется *определяющим уравнением.*

Для коэффициента при x^1 получаем равенство

$$(\rho+1)\rho a_1 + (\rho+1)a_1 - \nu^2 a_1 = 0$$

или

$$\left((\rho+1)^2-\nu^2\right)a_1 = 0. \tag{2.27}$$

Для коэффициента при x^k при $k \geq 2$ получаем равенство

$$(\rho+k)(\rho+k-1)a_k + (\rho+k)a_k + a_{k-2} - \nu^2 a_k = 0$$

или

$$\left((\rho+k)^2-\nu^2\right)a_k = -a_{k-2}. \tag{2.28}$$

Из определяющего уравнения (2.26) получим, что $\rho = \pm\nu$. Полагаем сначала $\rho = \nu > 0$ (так как ν входит в уравнение (2.18) в квадрате, то, не нарушая общности, можно всегда считать $\nu > 0$). Тогда из соотношений (2.27)–(2.28) последовательно находим все коэффициенты:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 0,\\
&a_2 = -\frac{a_0}{(\nu+2)^2-\nu^2} = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)},\\
&a_3 = 0,\\
&a_4 = -\frac{a_2}{(\nu+4)^2-\nu^2} = \frac{a_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2)\cdot 1\cdot 2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{2k-1} = 0,\\
&a_{2k} = (-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}k!(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Итак, если функция $y(x)$, определяемая рядом (2.25), есть решение уравнения (2.18), то формально ее можно записать в виде ряда

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+\nu}}{2^{2k} k! (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)}. \tag{2.29}$$

Пользуясь признаком Даламбера, легко проверить, что ряд (2.29) сходится на полуоси $0 < x < +\infty$. Следовательно, этот ряд на самом деле дает частное решение уравнения (2.18).

Если положить

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

и принять во внимание, что в силу соотношения (2.19) будет

$$(\nu+k)(\nu+k-1)\dots(\nu+1)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+k+1),$$

то ряд (2.29) можно переписать в виде функции Бесселя первого рода ν-го порядка, то есть получаем одно решение уравнения (2.18) в виде

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}. \tag{2.30}$$

Отыскание второго частного решения уравнения Бесселя требует уже некоторых сведений о числе ν.

Пусть ν — нецелое число. Учитывая, что в уравнение (2.18) параметр ν входит в квадрате, то при замене ν на $-\nu$ в формуле (2.30) получим опять решение уравнения (2.18), имеющее вид

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}. \tag{2.31}$$

Отметим, что если ν равно натуральному числу, то решение теряет силу, так как начиная с некоторого номера один из множителей в знаменателе членов разложения (2.31) будет равен нулю.

Легко убедиться в том, что функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ при нецелом ν линейно независимы. Достаточно заметить, что $\lim_{x\to+0} J_\nu(x) = 0$ $(\nu > 0)$, тогда как $\lim_{x\to+0} J_{-\nu}(x) = \infty$, что легко видно из (2.31). Отсюда вытекает, что эти две функции не могут быть линейно зависимыми. Поэтому, для нецелого значения параметра ν общее решение уравнения Бесселя (2.18) можно записать в виде

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x). \tag{2.32}$$

Иногда вместо $J_{-\nu}(x)$ берут другое частное решение, а именно, функцию Бесселя второго рода ν-го порядка или, по-другому, функцию Вебера $Y_\nu(x)$ ν-го порядка, введенную в определении 2.3 формулой (2.23), которая представляет собой линейную комбинацию функций (2.30) и (2.31). Это можно сделать, так как в рассматриваемом случае ν — нецелое число и эта функция имеет смысл. Общее решение уравнения Бесселя (2.18) тогда можно записать в виде

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x). \tag{2.33}$$

Пусть теперь ν — натуральное число. Тогда в ряде (2.31) первые ν членов исчезают, так как в их знаменателях стоят значения Гамма-функции для целых отрицательных значений аргумента и для нуля, которые равны бесконечности. Следовательно будем иметь

$$J_{-\nu} = \sum_{k=\nu}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{\nu+k} \frac{1}{k!\Gamma(\nu+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} =$$
$$= (-1)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(\nu+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} = (-1)^\nu J_\nu.$$

Отсюда следует линейная зависимость J_ν и $J_{-\nu}$ при натуральных ν и в этом случае формула (2.32) уже не дает общего решения уравнения Бесселя (2.18). Здесь можно поступить по-разному. Зная одно частное решение J_ν, можно построить второе частное решение по формуле (2.17). А можно воспользоваться функцией Бесселя второго рода ν-го порядка (2.24). Таким образом, и в этом случае функция (2.33) будет давать общее решение уравнения Бесселя (2.18).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.4. *Общее решение уравнения Бесселя* (2.18) *при* $x > 0$ *в случае нецелого значения параметра* ν *дается равенством* (2.32), *где функции* J_ν *и* $J_{-\nu}$ *определяются формулами* (2.30) *и* (2.31), *соответственно, или равенством* (2.33), *где функция* Y_ν *определяется формулой* (2.23). *В случае же натурального значения параметра* ν *общее решение уравнения Бесселя при* $x > 0$ *определяется формулой* (2.33), *где функция* J_ν *по-прежнему определяется формулой* (2.30), *а функция* Y_ν *— формулой* (2.24).

2.4 Колеблемость решений

В данном разделе исследуются нули нетривиальных решений уравнения (2.1). *Нулями* решения $y = y(x)$ называются вещественные корни уравнения $y(x) = 0$.

2.4.1 Колеблющиеся и неколеблющиеся решения

Определение 2.4. Решение $y = y(x)$ уравнения (2.1) называется *колеблющимся* в интервале (a, b), если оно имеет внутри этого интервала не менее двух нулей. В противном случае оно называется *неколеблющимся* в (a, b).

Пример 2.4. Определить характер решений уравнений

$$y'' - k^2 y = 0, \quad y'' + k^2 y = 0, \quad k \neq 0. \tag{2.34}$$

Решение. Общее решение первого из уравнений (2.34) есть

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}, \tag{2.35}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, а второго уравнения —

$$\begin{aligned} y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx = \\ = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos kx + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin kx \right) = \\ = A \sin(kx + \varphi), \end{aligned} \tag{2.36}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, а

$$\begin{gathered} A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \\ \sin\varphi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{gathered} \tag{2.37}$$

(очевидно, что из равенств (2.37) угол φ определяется однозначно).

Из формулы (2.35) видно, что решения первого уравнения (2.34) имеет не более одного нуля в любом интервале (a, b). То есть решения этого уравнения неколеблющиеся в любом интервале (a, b). А из формулы (2.36) следует, что всякое решение второго уравнения (2.34) есть синусоида с периодом $T = \frac{2\pi}{k}$, которая имеет по крайней мере два нуля во всяком интервале (a, b), для которого $b - a > \frac{2\pi}{k}$. Таким образом, если $b - a > \frac{2\pi}{k}$, то решения второго уравнения (2.34) колеблющиеся, а если $b - a \leq \frac{2\pi}{k}$, то решения неколеблющиеся. □

Теорема 2.5. *Существует бесчисленное множество решений уравнения* (2.1), *пересекающих ось Ox в любой заданной точке $x_0 \in (a, b)$, и не существует нетривиальных решений, касающихся оси Ox в интервале (a, b).*

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.1) с начальными условиями

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = y_0',$$

где y_0' — любое заданное число, отличное от нуля. Тогда по теореме Пикара существует единственное решение этой задачи. А так как $y(x_0) = 0$ и y_0' — любое отличное от нуля число, то первое утверждение теоремы доказано.

Если же решение $y(x)$ касается оси Ox в точке $x_0 \in (a, b)$, то имеем

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0.$$

Тогда по теореме Пикара получим, что $y(x) \equiv 0$, то есть $y(x)$ является тривиальным решением. Тем самым теорема доказана. □

Поэтому решение уравнения (2.1) либо пересекает ось Ox, либо не имеет с ней ни одной общей точки. Отсюда следует, что нетривиальное решение уравнения (2.1) при переходе через нуль обязательно меняет знак. Поэтому, чем больше нулей имеет решение, тем чаще оно меняет знак или, по-другому, колеблется.

Определение 2.5. Нуль x_0 функции $f(x)$ называется *изолированным*, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, внутри которой нет ни одного нуля функции $f(x)$.

Теорема 2.6. *Все нули нетривиального решения* $y = y(x)$ *уравнения* (2.1), *лежащие внутри интервала* (a, b), *изолированы.*

Доказательство. Предположим противное, то есть, что точка x_0 есть точка сгущения нулей решения $y(x)$. Тогда существует последовательность нулей $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходящаяся к x_0. Покажем, что $y'(x_0) = 0$. Имеем

$$y'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h}.$$

Так как $y'(x_0)$ существует, то для ее вычисления достаточно устремить h к нулю по какой-либо конкретной последовательности $\{h_n\}$. Положим $h_n = x_n - x_0$. Тогда так как $y(x_n) = y(x_0) = 0$ (n=1,2,...), то

$$y'(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} \frac{y(x_n) - y(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$

Следовательно имеем

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad x_0 \in (a, b).$$

Тогда по теореме Пикара получим, что решение $y(x)$ является тривиальным, что противоречит предположению теоремы. Тем самым теорема доказана. □

Из доказанной теоремы следует, что нетривиальное решение уравнения (2.1) не может иметь бесконечного числа нулей ни на каком замкнутом интервале $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Как показано в теореме 2.2 пункта 2.1.2, уравнение (2.1) в предположении, что коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны в интервале (a, b), при помощи замены независимой переменной (2.13) приводится к эквивалентному уравнению (2.14), где $R(t)$ — непрерывная функция в интервале $\big(t(a), t(b)\big)$. При этом очевидно, что $t(x)$ — строго возрастающая функция и, поэтому, существует обратная строго возрастающая функция $x = x(t)$. Поэтому, если характер колеблемости решения нетривиального решения $u = u(t)$ уравнения (2.14) установлен, то без труда устанавливается характер колеблемости соответствующего нетривиального решения уравнения (2.1), так как любое такое решение $y = y(x)$ получается из решения $u = u(t)$ по формуле

$$y(x) \equiv y(x(t)) \equiv u(t).$$

Если же $q(x)$ — непрерывная, а $p(x)$ — непрерывно дифференцируемая функции на интервале (a, b), то, как показано в теореме 2.1 пункта 2.1.1, уравнение (2.1) при помощи замены искомой функции (2.2) приводится к эквивалентному уравнению (2.3), где функция $Q(x)$ — непрерывная функция в интервале (a, b), а множитель $w(x)$ не обращается в нуль внутри интервала (a, b). Так что нули функции y и z совпадают.

Следовательно, при изучении колебательного характера решений уравнения (2.1) с переменными коэффициентами достаточно ограничиться, не нарушая общности, рассмотрением уравнения

$$y'' + q(x)y = 0, \quad x \in (a, b), \tag{2.38}$$

где $q(x)$ — непрерывная функция на (a, b).

Установленная в примере 2.4 зависимость характера колеблемости решения от знака коэффициента q, когда q есть постоянная функция, распространяется и случай, когда q есть функция от x.

Теорема 2.7. *Если $q(x) \leq 0$ при $x \in (a, b)$, то всякое нетривиальное решение уравнения* (2.38) *будет неколеблющимся в* (a, b).

Доказательство. Предположим противное — пусть $q(x) \leq 0$ при $x \in (a, b)$ и, тем не менее, существует нетривиальное решение $y = y(x)$, колеблющееся в интервале (a, b). Это означает, что существую два значения x_1 и x_2 из этого интервала такие, что $a < x_1 < x_2 < b$ и

$$y(x_1) = y(x_2) = 0.$$

На основании теоремы 2.6 можно считать, что между точками x_1 и x_2 решение $y(x)$ не обращается в нуль, то есть x_1 и x_2 — соседние нули функции $y = y(x)$. Не умаляя общности, можно считать, что $y(x) > 0$ в интервале (x_1, x_2). Тогда в силу теоремы 2.5

$$y'(x_1) > 0, \quad y'(x_2) < 0. \tag{2.39}$$

Но переписав уравнение (2.38) в виде

$$y'' = -q(x)y,$$

и учтя условие теоремы и предыдущие замечания, можно сделать вывод, что при $x_1 \le x \le x_2$

$$y''(x) \equiv -q(x)y(x) \ge 0.$$

Следовательно функция $y'(x)$ является неубывающей в интервале $[x_1, x_2]$, что противоречит неравенствам (2.39).

Таким образом предположение о существовании нетривиального решения $y = y(x)$, колеблющегося в интервале (a, b), неверно. Тем самым теорема доказана. $\square$

Пример 2.5. Все решения уравнения Эйри

$$y'' - xy = 0$$

неколеблющиеся на всей положительной полуоси Ox, ибо $q(x) \equiv -x < 0$ при $0 < x < +\infty$.

Замечание 2.4. Доказанный в теореме 2.7 признак неколеблемости решений уравнения (2.38) является лишь достаточным. Это подтверждает следующий пример.

Пример 2.6. Исследовать колебательный характер решений уравнения Эйлера

$$y'' + \frac{a^2}{x^2}\,y = 0 \quad (a \ne 0,\ x > 0). \tag{2.40}$$

Решение. Отметим, что здесь

$$q(x) \equiv \frac{a^2}{x^2} > 0.$$

Найдем общее решение уравнения (2.40). Полагая $x = e^t$, придем к уравнению с постоянными коэффициентами

$$z'' - z' + a^2 z = 0$$

относительно функции $z(t) \equiv y(e^t) \equiv y(x)$. Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda + a^2$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}.$$

Отсюда видно, что колебательный характер решений рассматриваемого уравнения зависит соотношения между a^2 и $\frac{1}{4}$.

При $a^2 < \frac{1}{4}$ имеем следующие решения

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a^2}}, \quad y_2 = x^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a^2}}.$$

Эти решения являются неколеблющимися ни в каком интервале положительной полуоси.

Если $a^2 = \frac{1}{4}$, то

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}}, \quad y_2 = x^{\frac{1}{2}} \ln x.$$

Эти решения тоже неколеблющиеся.

При $a^2 > \frac{1}{4}$ имеем

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \cos\left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} \ln x\right), \quad y_2 = x^{\frac{1}{2}} \sin\left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} \ln x\right).$$

Ясно, что эти решения имеют бесчисленное множество нулей в интервале $(0, +\infty)$.

Таким образом, рассматриваемое уравнение Эйлера либо имеет неколеблющиеся решения при $a^2 \leq \frac{1}{4}$, либо его решения имеют бесчисленное множество нулей при $a^2 > \frac{1}{4}$ в интервале $(0, +\infty)$. □

2.4.2 Теорема Штурма

Сравним колебательный характер двух линейно независимых решений y_1 и y_2 одного и того же однородного уравнения (2.1) второго порядка с непрерывными в интервале (a, b) коэффициентами.

Лемма 2.1. *Никакие два линейно независимых решения y_1 и y_2 одного и того же уравнения* (2.1) *не могут иметь общих нулей в интервале (a, b).*

Доказательство. Предположим противное, то есть существует такая точка $x_0 \in (a, b)$, что

$$y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0.$$

Тогда для вронскиана этих решений в точке x_0 получим

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0,$$

что противоречит линейной независимости решений y_1 и y_2. Лемма доказана. □

Если одно из решений y_1 является колеблющимся, то что можно сказать о нулях другого решения y_2, линейно независимого от y_1?

Теорема 2.8 (Штурма). *Нули двух линейно независимых решений уравнения* (2.1), *коэффициенты которого непрерывны в интервале (a, b), взаимно разделяют друг друга.*

Доказательство. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые решения уравнения (2.1). Предположим, что функция $y_1(x)$ имеет два нуля x_1 и x_2 внутри (a, b). Так как по теореме 2.6 все нули нетривиального решения изолированы, то можно считать, эти нули соседние и $y_1(x) \neq 0$ для $x_1 < x < x_2$. Докажем, что существует точка $\bar{x}$ ($x_1 < \bar{x} < x_2$), в которой $y_2(\bar{x}) = 0$.

Предположим противное, то есть что $y_2(x) \neq 0$ для $x_1 < x < x_2$. Не нарушая общности, можно считать, что $y_2(x) > 0$ для $x_1 < x < x_2$. По лемме 2.1

$$y_2(x_1) \neq 0, \quad y_2(x_2) \neq 0.$$

Из формулы Остроградского-Лиувилля следует, что вронскиан $W(x) \neq 0$ на $[x_1, x_2]$. Для определенности можно считать $W(x) > 0$ в этом интервале. Очевидно

$$W(x) \equiv y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \equiv -\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)' y_2^2(x).$$

Отсюда получим

$$-\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)' \equiv \frac{W(x)}{y_2^2(x)}.$$

Интегрируя это тождество на интервале $[x_1, x_2]$, найдем

$$-\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)\Bigg|_{x=x_1}^{x=x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{W(x)}{y_2^2(x)}\,dx.$$

Здесь левая часть равна нулю, а правая положительна, что невозможно. Следовательно, наше предположение неверно. Итак, существует точка $\bar{x}$, $x_1 < \bar{x} < x_2$, в которой $y_2(\bar{x}) = 0$.

При этом существует только одна такая точка, ибо в противном случае, меняя ролями y_1 и y_2, мы нашли бы точку $\bar{\bar{x}}$, $x_1 < \bar{\bar{x}} < x_2$, в которой $y_1(\bar{\bar{x}}) = 0$, а это противоречит тому, что x_1 и x_2 — соседние нули решения $y_1(x)$.

Тем самым теорема полностью доказана. □

Следствие 2.1. *Если хотя бы одно нетривиальное решение $y_1(x)$ уравнения (2.1) имеет в интервале (a, b) более двух нулей, то любое решение $y_2(x)$, линейно независимое от решения $y_1(x)$, является колеблющимся.*

2.4.3 Теорема сравнения

В предыдущем пункте исследовался колебательный характер решений одного и того же дифференциального уравнения. Сравним теперь колеблемость решений двух различных дифференциальных уравнений.

Теорема 2.9 (сравнения). *Если в уравнениях*

$$y_1'' + q_1(x)y_1 = 0, \quad y_2'' + q_2(x)y_2 = 0 \tag{2.41}$$

функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ непрерывны в интервале (a, b) и $q_2(x) \geq q_1(x)$ при $a < x < b$, то между каждыми двумя последовательными нулями любого решения $y_1 = y_1(x)$ первого уравнения лежит хотя бы один нуль любого решения $y_2 = y_2(x)$ второго уравнения, если в интервале между этими нулями существует точка, в которой $q_2(x) > q_1(x)$.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — соседние нули решения $y_1(x)$. Необходимо доказать, что существует такая точка $\bar{x}$, $x_1 < \bar{x} < x_2$, для которой $y_2(\bar{x}) = 0$.

Предположим противное, то есть $y_2(x) \neq 0$ для $x_1 < x < x_2$. Не нарушая общности, можно считать, что $y_1(x) > 0$ и $y_2(x) > 0$ для $x_1 < x < x_2$, причем на концах этого интервала

$$y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0, \quad y_2(x_1) \geq 0, \; y_2(x_2) \geq 0. \tag{2.42}$$

Справедливы тождества

$$y_1''(x) + q_1(x)y_1(x) \equiv 0,$$
$$y_2''(x) + q_2(x)y_2(x) \equiv 0.$$

Умножая первое тождество на y_2 а второе — на y_1 и вычитая второе из первого, получим

$$y_1''(x)y_2(x) - y_1(x)y_2''(x) \equiv \big(q_2(x) - q_1(x)\big)y_1(x)y_2(x)$$

или

$$\big(y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)\big)' \equiv \big(q_2(x) - q_1(x)\big)y_1(x)y_2(x).$$

Интегрируя это тождество от x_1 до x_2 и учитывая (2.42), будем иметь

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \big(q_2(x) - q_1(x)\big)y_1(x)y_2(x)\,dx.$$

Тогда на основании предположения, сделанного в начале доказательства, по теореме 2.5 будем иметь

$$y_1'(x_1) > 0, \quad y_1'(x_2) < 0$$

и в силу (2.42) левая часть последнего равенства неположительна, в то время как правая положительна. Полученное противоречие и доказывает теорему. □

Сравнивая колебательный характер решений уравнений (2.41), говорят, что решения второго уравнения являются более колеблющимися, чем решения первого.

Замечание 2.5. Если x_1 является общим нулем двух каких-либо частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнений (2.41) и если в интервале между x_1 и следующим за ним нулем x_2 решения $y_1(x)$ существуют точка, где $q_2(x) > q_1(x)$, а в остальных точках этого интервала $q_2(x) \geq q_1(x)$, то ближайший справа к x_1 нуль $\bar{x}$ решения $y_2(x)$ расположен левее, чем x_2.

Обычно при использовании теоремы сравнения в качестве одного из уравнений (2.41) берут уравнение с постоянным коэффициентом $q(x) = k^2$, то есть уравнение

$$y'' + k^2 y = 0 \tag{2.43}$$

Пример 2.7. Оценить расстояние между последовательными нулями колеблющихся решений уравнения
$$y'' + q(x)y = 0, \tag{2.44}$$
где $q(x)$ непрерывна и положительна на интервале $[a, b]$, причем $q(x) \not\equiv 0$.

Решение. Обозначим через M и m наибольшее и наименьшее значение функции $q(x)$ на интервале $[a, b]$. Очевидно,
$$0 < m \leq q(x) \leq M.$$

Так как расстояние между соседними нулями решений уравнения (2.43) равно $\frac{\pi}{k}$, то применяя теорему сравнения последовательно к следующим парам уравнений
$$y_1'' + my_1 = 0, \quad y_2'' + q(x)y_2 = 0$$

и
$$y_1'' + q(x)y_1 = 0, \quad y_2'' + My_2 = 0,$$

получим, что расстояние между соседними нулями решений уравнения (2.44) не больше, чем $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$, и не менее, чем $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$, то есть нули этих решений расположены не реже и не чаще, чем нули некоторых синусоид. □

Замечание 2.6. Пусть коэффициент $q(x)$ в уравнении (2.44)непрерывен в полубесконечном интервале $(a, +\infty)$ и положителен в нем, причем нижняя граница $q(x)$ тоже положительна. Тогда расстояние между соседними нулями любого решения не меньше, чем у некоторой синусоиды, и, следовательно, каждое решение имеет бесчисленное множество нулей в интервале $(a, +\infty)$.

Пример 2.8. Показать, что уравнение Бесселя (2.7) имеет в интервале $(0, +\infty)$ бесчисленное множество нулей. Найти оценку расстояния между соседними нулями.

Решение. Приведем уравнение Бесселя (2.7) к виду, не содержащему члена с первой производной. Воспользуемся решением примера 2.4. Там получено, что замена $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$ приводит уравнение (2.7) при $x > 0$ к виду
$$z'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right) z = 0. \tag{2.45}$$

Очевидно, что в данном случае коэффициент
$$q(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}$$

удовлетворяет указанным в замечании 2.6 условиям в некотором интервале $(a, +\infty)$, где $a > 0$. Поэтому любое решение уравнения (2.45), а вместе с ним и исходного уравнения Бесселя (2.7), имеет в интервале $(0, +\infty)$ бесчисленное множество нулей.

Выясним, как расположены эти нули. Для этого сравним колебательный характер решений уравнения (2.45) с колебательным характером решений уравнения

$$u'' + u = 0. \tag{2.46}$$

Ясно, что колебательный характер существенно зависит от значения параметра ν. Если $\nu^2 < \frac{1}{4}$, то коэффициент при z в уравнении (2.45) будет больше 1, то есть больше коэффициента при u в уравнении (2.46). При $\nu^2 > \frac{1}{4}$ будет противоположное неравенство. Следовательно, по теореме сравнения при $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$ расстояние d между соседними нулями функции Бесселя $J_\nu(x)$ будет меньше π, а при $\nu > \frac{1}{2}$ или $\nu < -\frac{1}{2}$ это расстояние будет больше π.

При $\nu = \pm\frac{1}{2}$ расстояние d между соседними нулями в точности равно π. Этот факт очевиден, так как соответствующие функции Бесселя имеют вид (2.12).

Далее, так как при $x \to +\infty$ коэффициент при z в уравнении (2.45) стремится к 1, то расстояние между соседними нулями любой функции Бесселя стремится к π, когда x неограниченно возрастает, то есть колебательный характер функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ приближается к колебательному характеру функций $\sin x$ и $\cos x$, являющихся решением предельного уравнения

$$y'' + y = 0.$$

□

Глава 3

Теория устойчивости

В этой главе рассматривается нормальная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{cases} \tag{3.1}$$

или в векторной форме

$$Y' = F(x, Y). \tag{3.2}$$

Систему (3.2) по аналогии с одномерным случаем будем также называть уравнением. Предположим, что при любых начальных условиях

$$Y(x_0) = Y_0, \tag{3.3}$$

где $x_0 > a$, a — или заданное вещественное число или $-\infty$, задача Коши (3.2)–(3.3) имеет единственное решение, определенное на полуоси $(a, +\infty)$.

3.1 Определение нормы матрицы и ее свойства

В дальнейшем будет использоваться понятие нормы матрицы. Дадим определение.

Определение 3.1. Пусть $A = (a_{jk})$ — матрица размерности $n \times m$. *Нормой* матрицы A называется число

$$\|A\| = \max_{1 \le j \le n} \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|. \tag{3.4}$$

В дальнейшем n-мерный вектор $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ будет интерпретироваться как $n \times 1$ матрица. Тогда из определения 3.1 получим

$$\|b\| = \max_{1 \le j \le n} |b_j|. \tag{3.5}$$

Замечание 3.1. Отметим, что иногда норма матрицы определяется и другими способами, например,

$$\|A\| = \max_{1\le k\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|.$$

или

$$\|A\| = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Формула (3.4) выбрана для определенности. При другом определении нормы матрицы все дальнейшие результаты останутся в силе.

Отметим следующие свойства нормы матрицы.

Теорема 3.1. *Справедливы следующие утверждения:*

а) $\|A\| \ge 0$, *причем* $\|A\| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $A = 0$ *(справа стоит нулевая матрица той же размерности, что и размерность* A*);*

б) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$, *где* $\alpha \in \mathbb{C}$*;*

в) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$, *где* A *и* B *— любые матрицы, одинаковой размерности;*

г) $\|A - B\| \ge \big|\|A\| - \|B\|\big|$, *где* A *и* B *— любые матрицы одинаковой размерности;*

д) $|a_{jk}| \le \|A\|$ *для любых* $j = 1, \ldots, n$ *и* $k = 1, \ldots, m$, *где* $A = (a_{jk})$*;*

е) $\|A \cdot B\| \le \|A\|\|B\|$, *где* A *и* B *— любые матрицы, допускающие умножение;*

ж) *если элементы матрицы* A *зависят от* x, *то есть* $A = A(x) = (a_{jk}(x))$, *причем* $a_{jk}(x)$ *— непрерывные функции на* $[\alpha, \beta]$ *(в таком случае будем говорить, что матрица* $A(x)$ *непрерывна на* $[\alpha, \beta]$*), то при* $\alpha \le \beta$ *имеем*

$$\left\|\int_{\alpha}^{\beta} A(x)\,dx\right\| \le \int_{\alpha}^{\beta} \|A(x)\|\,dx$$

(интеграл слева понимается как матрица, элементами которой являются числа $\int_{\alpha}^{\beta} a_{jk}(x)\,dx$*).*

Доказательство. Докажем лишь свойства в), е) и ж). Остальные свойства доказываются аналогично.

Докажем в). Пусть $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ — матрицы одинаковой размерности $n \times m$. Тогда

$$\|A + B\| = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{m} |a_{jk} + b_{jk}| \le \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{m} \big(|a_{jk}| + |b_{jk}|\big) =$$

$$= \max_{1\le j\le n} \left(\sum_{k=1}^{m} |a_{jk}| + \sum_{k=1}^{m} |b_{jk}|\right) \le \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}| + \max_{1\le j\le m} \sum_{k=1}^{m} |b_{jk}| = \|A\| + \|B\|.$$

То есть свойство в) доказано.

Докажем свойство е). Пусть $A = (a_{jl})$ — $n \times r$ матрица, а $B = (a_{lk})$ — $r \times m$ матрица. Тогда $C = A \cdot B = (c_{jk})$ будет $n \times m$ матрицей. Из определения произведения матриц имеем

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^{r} a_{jl} b_{lk}.$$

Поэтому

$$\|C\| = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{m} |c_{jk}| = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{l=1}^{r} |a_{jl} b_{lk} \right| \le \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{r} |a_{jl}||b_{lk}| =$$
$$= \max_{1\le j\le n} \sum_{l=1}^{r} |a_{jl}| \sum_{k=1}^{m} |b_{lk}| \le \max_{1\le j\le n} \sum_{l=1}^{r} |a_{jl}| \max_{1\le l\le r} \sum_{k=1}^{m} |b_{lk}| \le \|A\| \cdot \|B\|.$$

Таким образом, свойство е) доказано.

Наконец, докажем свойство ж). Используя хорошо известные свойства интеграла, получим

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} A(x)\,dx \right\| = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{\alpha}^{\beta} a_{jk}(x)\,dx \right| \le \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{m} \int_{\alpha}^{\beta} |a_{jk}(x)|\,dx =$$
$$= \max_{1\le j\le n} \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}(x)|\,dx \le \int_{\alpha}^{\beta} \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}(x)|\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \|A(x)\|\,dx.$$

Тем самым и свойство ж) также доказано.

Теорема доказана. □

3.2 Основные понятия теории устойчивости

Дадим определение устойчивости решения дифференциального уравнения (3.2).

Определение 3.2. Решение $\hat{Y}(x)$ $(a < x < +\infty)$ уравнения (3.2) называется *устойчивым по Ляпунову* (или, короче, *устойчивым*) при $x \to +\infty$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 > a$ существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ такое, что для всякого решения $Y(x)$ уравнения (3.2), для которого $\|Y(x_0) - \hat{Y}(x_0)\| < \delta$, при $x \ge x_0$ выполняется неравенство $\|Y(x) - \hat{Y}(x)\| < \varepsilon$.

Иными словами, решение называется устойчивым, если малому изменению начальных условий соответствует малое изменение решения.

Дадим геометрическую интерпретацию понятия устойчивости решения в простейшем случае $n = 1$. Для этого рассмотрим скалярное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

и пусть $y = \hat{y}(x)$ — решение этого уравнения, определенное на полуоси $(a, +\infty)$, удовлетворяющее начальному условию

$$\hat{y}(x_0) = y_0,$$

где $x_0 > a$. Построим график этого решения (см. рисунок) и построим графики функций $\hat{y}(x) + \varepsilon$ и $\hat{y}(x) - \varepsilon$ при $x > a$ (на рисунке графики этих функций изображены пунктирными линиями). Тем самым мы построили криволинейную полуполосу шириной 2ε вдоль решения $y = \hat{y}(x)$. Отметим на плоскости точки $M(x_0, y_0 - \delta)$ и $N(x_0, y_0 + \delta)$ и проведем отрезок MN длины 2δ. Тогда устойчивость решения $y = \hat{y}(x)$ означает, что график всякого решения $y(x)$, пересекающего отрезок MN лежит в построенной полуполосе при $x \geq x_0$.

Свойство устойчивости решения является очень важным в прикладных задачах, так как при изучении различных процессов начальные условия определяются путем измерений и, следовательно, всегда имеется определенная погрешность. Поэтому, важно быть уверенным, что малые погрешности не очень сильно искажают точное решение.

Замечание 3.2. Если $F(x, 0) \equiv 0$, то уравнение (3.2) имеет тривиальное решение $Z_0(x) \equiv 0$ $(a < x < +\infty)$. В этом случае тривиальное решение будет устойчивым при $x \to +\infty$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 > a$ существует положительное $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ такое, что для всякого решения $Y(x)$ уравнения (3.2), для которого $\|Y(x_0)\| < \delta$, при $x \geq x_0$ выполняется неравенство $\|Y(x)\| < \varepsilon$.

Определение 3.3. Решение $\hat{Y}(x)$ $(a < x < +\infty)$ уравнения (3.2) называется *неустойчивым по Ляпунову* (или, короче, *неустойчивым*) при $x \to +\infty$, если для некоторых $\varepsilon_0 > 0$ и $x_0 > a$ и любого $\delta > 0$ существует решение $Y_\delta(x)$ уравнения (3.2) и число $x_1 = x_1(\delta) > x_0$ такие, что $\|Y_\delta(x_0) - \hat{Y}(x_0)\| < \delta$ и $\|Y_\delta(x_1) - \hat{Y}(x_1)\| \geq \varepsilon_0$.

Определение 3.4. Решение $\hat{Y}(x)$ $(a < x < +\infty)$ уравнения (3.2) называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову* (или, короче, *асимптотически устойчивым*), если

1) это решение устойчиво по Ляпунову;

2) для любого $x_0 > a$ существует положительное $h = h(x_0)$, такое, что все решения $Y(x)$ уравнения (3.2), удовлетворяющие условию $\|Y(x_0) - \hat{Y}(x_0)\| < h$, обладают свойством $\|Y(x) - \hat{Y}(x)\| \to 0$ при $x \to +\infty$.

Замечание 3.3. В частности, тривиальное решение $Z_0(x) \equiv 0$ $(a < x < +\infty)$ уравнения (3.2) будет асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и для любого $x_0 > a$ существует положительное $h = h(x_0)$ такое, что все решения $Y(x)$ уравнения (3.2), удовлетворяющие условию $\|Y(x_0)\| < h$, обладают свойством $\|Y(x)\| \to 0$ при $x \to +\infty$.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих введенные понятия.

Пример 3.1. Исследовать устойчивость тривиального решения системы

$$Y' = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} Y \tag{3.6}$$

при $x > 0$.

Решение. Собственные значения матрицы системы есть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$. Воспользовавшись методом Эйлера для нахождения общего решения, получим общее решение при $x \in (-\infty, +\infty)$ и, в частности, при $x > 0$ в виде

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4x} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть x_0 — произвольное положительное число. В соответствии с замечанием 3.2 для доказательства устойчивости тривиального решения нужно рассмотреть произвольное решение $Y(x)$ системы (3.6) и подобрать положительное число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ такое, что если $\|Y(x_0)\| < \delta$, то $\|Y(x)\| < \varepsilon$ при всех $x \geq x_0$.

Имеет место равенство

$$\|Y(x_0)\| = \max\{|2c_1 + 2e^{-4x_0}c_2|, |c_1 - e^{-4x_0}c_2|\}. \tag{3.8}$$

Возьмем произвольные $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и рассмотрим следующую систему относительно c_1 и c_2:

$$\begin{cases} 2c_1 + 2e^{-4x_0}c_2 = \delta_1, \\ c_1 - e^{-4x_0}c_2 = \delta_2. \end{cases}$$

Если константы c_1 и c_2 являются решениями этой системы, то из (3.8) следует, что

$$\|Y(x_0)\| = \max\{\delta_1, \delta_2\}. \tag{3.9}$$

Определитель системы есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2e^{-4x_0} \\ 1 & -e^{-4x_0} \end{vmatrix} = -4e^{-4x_0} \neq 0.$$

По формулам Крамера найдем

$$c_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \delta_1 & 2e^{-4x_0} \\ \delta_2 & -e^{-4x_0} \end{vmatrix} = \frac{\delta_1}{4} + \frac{\delta_2}{2}, \; c_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2 & \delta_1 \\ 1 & \delta_2 \end{vmatrix} = \frac{\delta_1}{4} e^{4x_0} - \frac{\delta_2}{2} e^{4x_0}.$$

Следовательно, при $x \geq x_0 > 0$ будем иметь

$$
\begin{gathered}
\|Y(x)\| = \max\left\{|2c_1 + 2e^{-4x}c_2|, |c_1 - e^{-4x}c_2|\right\} \leq \\
\leq \max\left\{2|c_1| + 2e^{-4x}|c_2|, |c_1| + e^{-4x}|c_2|\right\} = \\
= \max\left\{\frac{\delta_1}{2} + \delta_2 + 2e^{-4(x-x_0)}\left|\frac{\delta_1}{4} - \frac{\delta_2}{2}\right|, \frac{\delta_1}{4} + \frac{\delta_2}{2} + e^{-4(x-x_0)}\left|\frac{\delta_1}{4} - \frac{\delta_2}{2}\right|\right\} \leq \\
\leq \max\left\{\frac{\delta_1}{2} + \delta_2 + 2\left(\frac{\delta_1}{4} + \frac{\delta_2}{2}\right), \frac{\delta_1}{4} + \frac{\delta_2}{2} + \left(\frac{\delta_1}{4} + \frac{\delta_2}{2}\right)\right\} = \\
= \max\left\{\delta_1 + 2\delta_2, \left(\frac{\delta_1}{2} + \delta_2\right)\right\} = \delta_1 + 2\delta_2. \qquad (3.10)
\end{gathered}
$$

Если выбрать $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \frac{\varepsilon}{3}$ и взять $\delta_1 < \delta$, $\delta_2 < \delta$, то из (3.9) получим $\|Y(x_0)\| < \delta$, а из (3.2) будем иметь при всех $x \geq x_0$

$$\|Y(x)\| < \delta + 2\delta = 3\delta = \varepsilon.$$

Тем самым показано, что тривиальное решение системы (3.6) устойчиво по Ляпунову.

Покажем теперь, что тривиальное решение системы (3.6) не является асимптотически устойчивым. Для этого воспользуемся замечанием 3.3 и рассмотрим семейство решений системы (3.6) вида

$$\tilde{Y}(x) = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (3.11)$$

которое, очевидно, получается из общего решения (3.7) при $c_2 = 0$. Это семейство обладает тем свойством, что существует $x_0 > a$ (x_0 можно взять любым, так как решения (3.11) вообще от x не зависят) такое, что для любого числа $h > 0$ в этом семействе всегда можно найти (за счет выбора константы c_1) такое решение, что выполняется неравенство

$$\|\tilde{Y}(x_0)\| = \max\{|2c_1|, |c_1|\} = 2|c_1| < h$$

(это можно сделать, взяв, например, $c_1 = \frac{h}{4}$). Но при этом, очевидно,

$$\|\tilde{Y}(x)\| = \max\{|2c_1|, |c_1|\} = 2|c_1| = \frac{h}{2} \not\to 0.$$

Это означает, что тривиальное решение системы (3.6) не является асимптотически устойчивым. □

Пример 3.2. Исследовать устойчивость тривиального решения системы

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y \qquad (3.12)$$

при $x > 0$.

Решение. Собственные значения матрицы системы есть $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Воспользовавшись методом Эйлера для нахождения решения, получим общее решение при $x \in (-\infty, +\infty)$ и, в частности, при $x > 0$ вида

$$Y(x) = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что тривиальное решение системы (3.12) неустойчиво. В самом деле, при любых $x_0 > 0$ и $\delta > 0$ среди решений, удовлетворяющих условию $\|Y(x_0)\| < \delta$, будут решения вида

$$\tilde{Y}(x) = c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

с $c_2 \neq 0$, которые, очевидно, получаются из общего решения при $c_1 = 0$. Но совершенно ясно, что $\|\tilde{Y}(x)\| \to +\infty$ при $x \to +\infty$. А это и означает, что тривиальное решение системы (3.12) неустойчиво. $\square$

3.3 Случай линейной неоднородной системы

Остановимся на случае линейной дифференциальной системы

$$Y' = A(x)Y + F(x), \tag{3.13}$$

где $A(x)$, $F(x)$ — матрицы-функции размерностей $n \times n$ и $n \times 1$, соответственно, непрерывные на оси $(a, +\infty)$. Как отмечалось ранее, у таких систем имеется единственное решение задачи Коши с начальным условием

$$Y(x_0) = Y_0,$$

где $x_0 > a$, определенное на всем $(a, +\infty)$.

Определение 3.5. Линейная неоднородная система (3.13) называется *устойчивой*, если все ее решения устойчивы при $x \to +\infty$. В противном случае система (3.13) называется *неустойчивой*.

Наряду с системой (3.13) будем рассматривать соответствующую однородную систему

$$Z' = A(x)Z. \tag{3.14}$$

Теорема 3.2. *Для устойчивости линейной неоднородной системы* (3.13) *при любой функции $F(x)$ необходимо и достаточно, чтобы было устойчиво тривиальное решение соответствующей однородной системы* (3.14).

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть неоднородная система (3.13) устойчива и $\hat{Y}(x)$ — некоторое ее решение при фиксированной функции $F(x)$. По определению 3.5 это решение устойчиво и, следовательно, для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 > a$ найдется положительное число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ такое, что для всякого решения $Y(x)$ системы (3.13), для которого $\|Y(x_0) - \hat{Y}(x_0)\| < \delta$, выполняется неравенство $\|Y(x) - \hat{Y}(x)\| < \varepsilon$ при всех $x \geq x_0$.

Обозначим $Z(x) = Y(x) - \hat{Y}(x)$. Очевидно, вектор $Z(x)$ является решением однородной системы (3.14) с начальным условием $Z(x_0) = Y(x_0) - \hat{Y}(x_0)$. Причем, если $Y(x)$ — любое решение системы (3.13), то $Z(x)$ — любое решение однородной системы (3.14). Таким образом, из предыдущего получим, что, как только $\|Z(x_0)\| < \delta$, будет выполняться неравенство $\|Z(x)\| < \varepsilon$ при всех $x \geq x_0$. А это означает, что тривиальное решение однородной системы (3.14) устойчиво.

Докажем теперь достаточность. Пусть тривиальное решение системы (3.14) устойчиво при $x \to +\infty$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 > a$ найдется положительное число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ такое, что для всякого решения $Z(x)$ однородной системы (3.14), как только $\|Z(x_0)\| < \delta$, будет выполняться неравенство $\|Z(x)\| < \varepsilon$ при всех $x \geq x_0$. Следовательно, если $\hat{Y}(x)$ — некоторое решение неоднородной системы (3.13) при фиксированной функции $F(x)$ и $Y(x)$ — произвольное решение этой же системы, то разность $Y(x) - \hat{Y}(x)$ есть произвольное решение однородной системы и, следовательно, из предыдущего получим, что если $\|Y(x_0) - \hat{Y}(x_0)\| < \delta$, то $\|Y(x) - \hat{Y}(x)\| < \varepsilon$ для всех $x \geq x_0$. А это означает, что решение $\hat{Y}(x)$ устойчиво. Так как $\hat{Y}(x)$ — любое решение системы (3.13) при любой функции $F(x)$, то по определению 3.5 система (3.13) устойчива при любой функции $F(x)$.

Тем самым теорема доказана. □

При доказательстве необходимости условий теоремы попутно доказан следующий факт.

Следствие 3.1. *Устойчивость тривиального решения однородной системы* (3.14) *вытекает из устойчивости хотя бы одного решения неоднородной системы* (3.13) *при некоторой $F(x)$, в частности, при $F(x) \equiv 0$.*

Очевидны также следующие следствия из теоремы.

Следствие 3.2. *Линейная неоднородная система* (3.13) *устойчива, если устойчиво хотя бы одно решение этой системы, и неустойчива, если неустойчиво хотя бы одно ее решение.*

Следствие 3.3. *Линейная неоднородная система* (3.13) *устойчива тогда и только тогда, когда устойчива соответствующая однородная система.*

Определение 3.6. Линейная неоднородная система (3.13) называется *асимптотически устойчивой*, если все ее решения асимптотически устойчивы при $x \to +\infty$.

Теорема 3.3. *Для асимптотической устойчивости линейной неоднородной системы* (3.13) *при любой функции* $F(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы было асимптотически устойчиво тривиальное решение соответствующей однородной системы* (3.14).

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть неоднородная система (3.13) при любой функции $F(x)$ асимптотически устойчива и $\hat{Y}(x)$ — некоторое ее решение при некоторой фиксированной функции $F(x)$. По определению 3.6 это означает, что решение $\hat{Y}(x)$ асимптотически устойчиво и, следовательно, устойчиво и для любого $x_0 > a$ найдется положительное число $h = h(x_0)$ такое, что все решения $Y(x)$ системы (3.13), удовлетворяющие условию $\|Y(x_0) - \hat{Y}(x_0)\| < h$, обладают свойством $\|Y(x) - \hat{Y}(x)\| \to 0$ при $x \to +\infty$.

Тогда по теореме 3.2 отсюда получим, что тривиальное решение однородной системы (3.14) устойчиво и для любого $x_0 > a$ существует положительное число $h = h(x_0)$ такое, что все решения $Z(x) = Y(x) - \hat{Y}(x)$ системы (3.14), удовлетворяющие условию $\|Z(x_0)\| < h$, обладают свойством $\|Z(x)\| \to 0$ при $x \to +\infty$. А это и означает, что тривиальное решение однородной системы (3.14) асимптотически устойчиво.

Докажем теперь достаточность. Пусть тривиальное решение однородной системы (3.14) асимптотически устойчиво при $x \to +\infty$. По определению 3.4 это означает, что это решение устойчиво (тогда по теореме 3.2 отсюда получаем, что неоднородная система (3.14) устойчива при любой функции $F(x)$) и для любого $x_0 > a$ найдется положительное число $h = h(x_0)$ такое, что все решения $Z(x)$ системы (3.14), удовлетворяющие условию $\|Z(x_0)\| < h$, обладают свойством $\|Z(x)\| \to 0$ при $x \to +\infty$.

Рассмотрим любую функцию $F(x)$ и систему (3.13), в которой справа стоит эта функция. Пусть $\hat{Y}(x)$ — некоторое фиксированное решение этой системы, а $Y(x)$ — произвольное решение этой же системы. Тогда разность $Y(x) - \hat{Y}(x)$ есть произвольное решение однородной системы (3.14) и, следовательно, по-предположению, асимптотически устойчиво. Отсюда следует, что если $\|Y(x_0) - \hat{Y}(x_0)\| < h$, то $\|Y(x) - \hat{Y}(x)\| \to 0$ при $x \to +\infty$. А это означает, что решение $\hat{Y}(x)$ асимптотически устойчиво. А так как $\hat{Y}(x)$ — любое решение системы (3.13) при любой функции $F(x)$, то по определению 3.6 система (3.13) асимптотически устойчива при любой функции $F(x)$.

Тем самым теорема доказана. □

Следствие 3.4. *Линейная неоднородная система* (3.13) *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда асимптотически устойчива соответствующая однородная система.*

В дальнейшем потребуется следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть* $x_0 > a$ *— любое число. Если решение* $Y(x)$ *системы* (3.13) *и, в частности, системы* (3.14) *ограничено на полуоси* $[x_1, +\infty)$, *где* $x_1 > x_0$, *то это решение ограничено и на полуоси* $[x_0, +\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное число $x_0 > a$ и пусть решение системы $Y(x)$ системы (3.13) ограничено на полуоси $[x_1, +\infty)$, где $x_1 > x_0$. Но так как функция $Y(x)$ — непрерывная на полуоси $(a, +\infty)$, то, в частности, она непрерывна на замкнутом отрезке $[x_0, x_1]$. Следовательно, функция $Y(x)$ ограничена на этом отрезке. Таким образом, функция $Y(x)$ ограничена на полуоси $[x_0, +\infty)$. Лемма доказана. □

3.4 Случай линейной однородной системы

Рассмотрим линейную однородную систему (3.14).

Теорема 3.4. *Система* (3.14) *устойчива тогда и только тогда, когда каждое ее решение $Z(x)$ ограничено на некоторой полуоси $[x_0, +\infty)$, где $x_0 > a$. То есть для любого решения $Z(x)$ системы* (3.14) *существуют такие числа $x_0 > a$ и $C > 0$, что для всех $x \geq x_0$ будет $\|Z(x)\| \leq C$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть система (3.14) устойчива. Это значит, что все решения этой системы и, в частности, тривиальное решение устойчивы. Следовательно, для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 > a$ найдется положительное число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ такое, что для всякого решения $Z(x)$ системы (3.14), для которого $\|Z(x_0)\| < \delta$, выполняется неравенство $\|Z(x)\| < \varepsilon$ при всех $x \geq x_0$. Предположим противное, то есть что у системы (3.14) существует неограниченное решение $\hat{Z}(x)$ на полуоси $[x_0, +\infty)$ при некотором $x_0 > a$. Это означает, что существует последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ вещественных чисел такая, что $x_k \to +\infty$ и

$$\|\hat{Z}(x_k)\| > k. \tag{3.15}$$

Выберем $k_0 \in \mathbb{N}$ настолько большим, чтобы

$$\frac{1}{k_0}\|\hat{Z}(x_0)\| < \delta.$$

Тогда, так как тривиальное решение системы (3.14) устойчиво, то для решения $\frac{1}{k_0}\hat{Z}(x)$ должно выполняться неравенство $\|\frac{1}{k_0}\hat{Z}(x)\| < \varepsilon$ при $x \geq x_0$. И, в частности, $\|\frac{1}{k_0}\hat{Z}(x_k)\| < \varepsilon$ при всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$. Но, по построению, будем иметь

$$\left\|\frac{1}{k_0}\hat{Z}(x_k)\right\| > \frac{k}{k_0} \to +\infty, \quad k \to +\infty.$$

Получили противоречие. Таким образом, у системы (3.14) не может быть неограниченного решения, то есть все решения ограничены.

Докажем теперь достаточность. Пусть каждое решение системы (3.14) ограничено на полуоси $[x_0, +\infty)$ при некотором $x_0 > a$. В силу леммы 3.1 можно взять одно и то же произвольное, но фиксированное x_0 для всех решений. Обозначим через $T_{x_0}(x)$ матрицант системы, то есть матрицу, столбцами которой являются решения $Z_k(x) = \big(z_{1k}, \dots, z_{nk}\big)^T$, причем $Z_k(x_0) = \big(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\big)^T$, где 1 стоит на k-м месте. В силу предположения теоремы решения $Z_k(x)$ ограничены на полуоси $[x_0, +\infty)$ и, следовательно, по пункту д) теоремы 3.1 все компоненты $z_{jk}(x)$ этих решений также ограничены на этой полуоси. Следовательно, существует константа $M(x_0) > 0$ такая, что $\|T_{x_0}(x)\| \leq M(x_0)$. Так как любое решение системы (3.14) выражается по формуле

$$Z(x) = T_{x_0}(x)Z(x_0),$$

то на основании пункта е) теоремы 3.1 получим

$$\|Z(x)\| \leq \|T_{x_0}(x)\| \cdot \|Z(x_0)\| \leq M(x_0)\|Z(x_0)\|. \tag{3.16}$$

Отсюда следует, что для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $x_0 > a$ можно взять $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \frac{\varepsilon}{M(x_0)}$ и тогда для всякого решения $Z(x)$ однородной системы (3.14), для которого $\|Z(x_0)\| < \delta$, в силу (3.16) будет выполняться неравенство

$$\|Z(x)\| < M(x_0) \cdot \frac{\varepsilon}{M(x_0)} = \varepsilon.$$

А это и означает, что тривиальное решение однородной системы (3.14) устойчиво. Следовательно, по теореме 3.2 и сама система устойчива.

Теорема доказана. □

Теорема 3.5. *Линейная однородная система* (3.14) *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все ее решения* $Z(x)$ *стремятся к нулю при* $x \to +\infty$ *(или, что эквивалентно,* $\|Z(x)\| \to 0$ *при* $x \to +\infty$*).*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть система (3.14) асимптотически устойчива. Следовательно, по определению 3.6 все ее решения (в том числе и тривиальное) асимптотически устойчивы. Таким образом, для любого $x_0 > a$ можно выбрать число $h > 0$ так, что любое решение $Z(x)$ системы (3.14), для которого $\|Z(x_0)\| < h$, обладает свойством $\|Z(x)\| \to 0$ при $x \to +\infty$. Возьмем произвольное нетривиальное решение $\hat{Z}(x)$. Ясно, что для него $\hat{Z}(x_0) \neq 0$ (иначе имели бы тривиальное решение). Положим $\tilde{Z}(x) = \frac{1}{m}\hat{Z}(x)$, где $m \in \mathbb{N}$ и настолько велико, что

$$\|\tilde{Z}(x_0)\| = \frac{1}{m}\|\hat{Z}(x_0)\| < h.$$

Тогда $\|\tilde{Z}(x)\| \to 0$ при $x \to +\infty$, то есть $\|\hat{Z}(x)\| \to 0$ или, что эквивалентно, $\hat{Z}(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Докажем теперь достаточность. Пусть все решения системы (3.14) стремятся к нулю при $x \to +\infty$. Тогда для каждого решения $Z(x)$, определенного при $x \geq x_0$, где x_0 — некоторое фиксированное число ($x_0 > a$), существует число $x_1 > x_0$ такое, что $\|Z(x)\| < 1$ при всех $x \geq x_1$. Следовательно, в силу леммы 3.1 любое решение системы (3.14) ограничено на полуоси $[x_0, +\infty)$. Таким образом, на основании теоремы 3.4 система (3.14) устойчива, то есть все ее решения и, в частности, тривиальное решение устойчивы. А так как все решения системы, по-предположению, стремятся к нулю, то отсюда получаем, что тривиальное решение системы (3.14) асимптотически устойчиво. На основании этого из теоремы 3.3 следует, что система (3.14) асимптотически устойчива.

Теорема доказана. □

3.5 Случай линейной однородной системы с постоянной матрицей

Пусть теперь матрица $A(x)$ постоянна, то есть $A(x) \equiv A$. Таким образом, исследуется устойчивость системы

$$Z' = AZ. \tag{3.17}$$

Вместе с системой будем рассматривать начальное условие

$$Z(x_0) = Z_0 \quad (x_0 > a). \tag{3.18}$$

Как было установлено в предыдущих разделах, решение задачи Коши (3.17)–(3.18) дается формулой

$$Z(x) = \sum_{\nu=1}^{m} e^{\lambda_\nu (x-x_0)} \left(\sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \frac{(x-x_0)^j}{j!} (A - \lambda_\nu E)^j \right) P(\nu, 1) Z_0. \tag{3.19}$$

Теорема 3.6. *Линейная однородная система* (3.17) *с постоянной матрицей A устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения λ_ν матрицы A имеют неположительные вещественные части, то есть* $\operatorname{Re}\lambda_\nu \leq 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, *причем, если для некоторого $\nu = \nu_0$ будет* $\operatorname{Re}\lambda_{\nu_0} = 0$, *то должно быть*

$$(A - \lambda_{\nu_0} E) P(\nu_0, 1) = 0. \tag{3.20}$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть система (3.17) с постоянной матрицей A устойчива. Покажем, что тогда $\operatorname{Re}\lambda_\nu \leq 0$ при $\nu = 1, 2, \ldots, m$. В самом деле, предположим противное, то есть имеется собственное значение $\lambda_{k_0} = \alpha + i\beta$, у которого $\alpha > 0$. Тогда, как известно, у системы (3.17) есть решение

$$Z(x) = e^{\lambda_{k_0} x} Z_{k_0},$$

где Z_{k_0} — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_{k_0}. Следовательно, на основании пункта б) теоремы 3.1 с учетом того, что $|e^{i\beta x}| = |\cos\beta x +$

$i\sin\beta x| = 1$, получим

$$\|Z(x)\| = \|e^{\lambda_{k_0}x}Z_{k_0}\| = \|e^{(\alpha+i\beta)x}Z_{k_0}\| = |e^{(\alpha+i\beta)x}|\|Z_{k_0}\| = e^{\alpha x}\|Z_{k_0}\| \to +\infty,$$

при $x \to +\infty$. Таким образом, у системы (3.17) существует неограниченное решение. Тогда по теореме 3.4 эта система неустойчива. Получили противоречие. Итак, $\operatorname{Re}\lambda_\nu \leq 0$ при $\nu = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть теперь $\operatorname{Re}\lambda_{\nu_0} = 0$, то есть $\lambda_{\nu_0} = i\beta$. Предположим, что

$$(A - i\beta E)P(\nu_0, 1) \neq 0. \tag{3.21}$$

Выделим в общем решении (3.19) группу слагаемых, соответствующих собственному значению $\lambda_{\nu_0} = i\beta$

$$Z(x) = e^{i\beta(x-x_0)}\sum_{j=0}^{k_{\nu_0}-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}(A-i\beta E)^jP(\nu_0,1)Z_0. \tag{3.22}$$

Проверим, что функция $Z(x)$ при любом векторе Z_0 является решением системы (3.17).

Имеем

$$Z'(x) = e^{i\beta(x-x_0)}\sum_{j=1}^{k_{\nu_0}-1}\frac{(x-x_0)^{j-1}}{(j-1)!}(A-i\beta E)^jP(\nu_0,1)Z_0+$$
$$+\,i\beta e^{i\beta(x-x_0)}\sum_{j=0}^{k_{\nu_0}-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}(A-i\beta E)^jP(\nu_0,1)Z_0 =$$
$$= e^{i\beta(x-x_0)}(A-i\beta E)\sum_{j=0}^{k_{\nu_0}-2}\frac{(x-x_0)^j}{j!}(A-i\beta E)^jP(\nu_0,1)Z_0+$$
$$+\,i\beta e^{i\beta(x-x_0)}\sum_{j=0}^{k_{\nu_0}-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}(A-i\beta E)^jP(\nu_0,1)Z_0.$$

Добавим к первой сумме полученного выражения равное нулю слагаемое

$$e^{i\beta(x-x_0)}\frac{(x-x_0)^{k_{\nu_0}-1}}{(k_{\nu_0}-1)!}(A-i\beta E)^{k_{\nu_0}}P(\nu_0,1)Z_0.$$

Тогда

$$Z'(x) = e^{i\beta(x-x_0)}(A-i\beta E)\sum_{j=0}^{k_{\nu_0}-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}(A-i\beta E)^jP(\nu_0,1)Z_0+$$
$$+\,i\beta e^{i\beta(x-x_0)}\sum_{j=0}^{k_{\nu_0}-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}(A-i\beta E)^jP(\nu_0,1)Z_0 =$$
$$= Ae^{i\beta(x-x_0)}\sum_{j=0}^{k_{\nu_0}-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}(A-i\beta E)^jP(\nu_0,1)Z_0 = AZ.$$

То есть функция $Z(x)$ при любом векторе Z_0 есть решение системы (3.17).

Подберем теперь вектор Z_0 так, чтобы

$$(A - i\beta E)P(\nu_0, 1)Z_0 \neq 0. \tag{3.23}$$

Это можно сделать, так как мы предположили, что выполняется соотношение (3.21). Учитывая, что $|e^{i\beta(x-x_0)}| = 1$, из (3.22) получим

$$\|Z(x)\| = \| \sum_{j=0}^{k_{\nu_0}-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!}(A - i\beta E)^j P(\nu_0, 1)Z_0\| = \| \sum_{j=0}^{k_{\nu_0}-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!}\hat{Z}_j\|, \tag{3.24}$$

где

$$\hat{Z}_j = (A - i\beta E)^j P(\nu_0, 1)Z_0, \quad j = 0, 1, \ldots, k_{\nu_0} - 1.$$

Обозначим через j_0 наибольший индекс, для которого $\hat{Z}_{j_0} \neq 0$, а при $j > j_0$ будет $\hat{Z}_j = 0$. В силу (3.23), очевидно, всегда будет $j_0 \geq 1$. Тогда из (3.24) на основании пунктов б)–г) теоремы 3.1 получим

$$\begin{aligned}\|Z(x)\| = \left\|\sum_{j=0}^{j_0} \frac{(x-x_0)^j}{j!}\hat{Z}_j\right\| = \left\|\frac{(x-x_0)^{j_0}}{j_0!}\hat{Z}_{j_0} + \sum_{j=0}^{j_0-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!}\hat{Z}_j\right\| \geq \\ \geq \left\|\frac{(x-x_0)^{j_0}}{j_0!}\hat{Z}_{j_0}\right\| - \left\|\sum_{j=0}^{j_0-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!}\hat{Z}_j\right\| \geq \\ \geq \frac{(x-x_0)^{j_0}}{j_0!}\|\hat{Z}_{j_0}\| - \sum_{j=0}^{j_0-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!}\|\hat{Z}_j\| \to +\infty\end{aligned}$$

при $x \to +\infty$. Следовательно, у системы (3.17) существует неограниченное решение, что противоречит ее устойчивости. Таким образом, предположение (3.21) неверно и необходимость утверждения теоремы доказана.

Докажем теперь достаточность. Пусть $\operatorname{Re}\lambda_\nu \leq 0$ при $\nu = 1, 2, \ldots, m$, а если $\operatorname{Re}\lambda_{\nu_0} = 0$, то выполняется условие (3.20). Тогда общее решение (3.19) системы (3.17) можно представить в виде

$$\begin{aligned}Z(x) = {\sum}' e^{\lambda_\nu(x-x_0)} \left(\sum_{j=0}^{k_\nu-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!}(A - \lambda_\nu E)^j\right) P(\nu, 1)Z_0 + \\ + {\sum}'' e^{\lambda_\nu(x-x_0)} P(\nu, 1)Z_0 = Z_1(x) + Z_2(x),\end{aligned} \tag{3.25}$$

где в $Z_1(x)$ собраны слагаемые, соответствующие тем ν, для которых $\operatorname{Re}\lambda_\nu < 0$, а в $Z_2(x)$ — остальные слагаемые, то есть слагаемые, соответствующие тем ν, для которых $\operatorname{Re}\lambda_\nu = 0$.

Если представить $\lambda_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$, то для первой группы слагаемых имеем $\alpha_\nu < 0$ и при любом $j = 0, 1, \ldots, k_\nu - 1$ получим

$$(x-x_0)^j e^{\lambda_\nu(x-x_0)} = (x-x_0)^j e^{\alpha_\nu(x-x_0)}\big(\cos\beta_\nu(x-x_0) + i\sin\beta_\nu(x-x_0)\big) \to 0$$

при $x \to +\infty$. Следовательно, $\|Z_1(x)\| \to 0$ при $x \to +\infty$ и тогда, очевидно,

$$\|Z_1(x)\| \leq C \tag{3.26}$$

при некоторой константе $C > 0$ и всех $x \geq x_0$.

Так как в $Z_2(x)$ имеем $\operatorname{Re}\lambda_\nu = 0$, то слагаемые в $Z_2(x)$, очевидно, ограничены, и, следовательно,

$$\|Z_2(x)\| \leq C \tag{3.27}$$

при некоторой константе $C > 0$ и всех $x \geq x_0$.

Из (3.25)–(3.27) получим, что при некоторой константе $C > 0$ и при всех $x \geq x_0$ будет $\|Z(x)\| \leq C$. То есть все решения системы (3.17) ограничены. Тогда на основании теоремы 3.4 эта система устойчива. Достаточность доказана.

Теорема полностью доказана. □

Теорема 3.7. *Линейная однородная система* (3.17) *с постоянной матрицей A асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения λ_ν матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то есть* $\operatorname{Re}\lambda_\nu < 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть система (3.17) асимптотически устойчива. Следовательно она устойчива. Тогда по предыдущей теореме $\operatorname{Re}\lambda_\nu \leq 0$. Предположим противное, то есть имеется λ_{ν_0}, у которого $\operatorname{Re}\lambda_{\nu_0} = 0$, то есть $\lambda_{\nu_0} = i\beta$. Тогда среди решений системы (3.17) имеется решение

$$Z(x) = e^{i\beta(x-x_0)}Z_0,$$

где Z_0 — ненулевой вектор. Следовательно,

$$\|Z(x)\| = |e^{i\beta(x-x_0)}|\|Z_0\| = \|Z_0\| \neq 0$$

и, таким образом, $Z(x) \not\to 0$ при $x \to +\infty$. На основании теоремы 3.5 отсюда следует, что система (3.17) не является асимптотически устойчивой. Получили противоречие.

Докажем теперь достаточность. Пусть $\operatorname{Re}\lambda_\nu < 0$ при $\nu = 1, \ldots, m$. Тогда из формулы (3.19) для общего решения системы (3.17) следует, что все решения $Z(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Следовательно, по теореме 3.5 система (3.17) является асимптотически устойчивой.

Теорема доказана. □

Таким образом, вопрос об устойчивости линейной однородной системы (3.17) свелся к установлению знака вещественных частей собственных значений матрицы A.

3.6 Критерий Михайлова

Определение 3.7. Полином

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (n \geq 1)$$

степени называется *полиномом Гурвица*, если все его корни $z_1, z_2, \dots, z_n$ имеют отрицательные вещественные части, то есть $\operatorname{Re} z_j < 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Найдем необходимые и достаточные условия того, что многочлен $f(z)$ с вещественными коэффициентами является полиномом Гурвица. Не нарушая общности, можно считать, что $a_0 \neq 0$.

Определение 3.8. Кривая $w = f(i\omega)$, где $0 \leq \omega \leq +\infty$, $i = \sqrt{-1}$, называется *годографом Михайлова* функции $f(z)$.

Лемма 3.2. *Пусть $f(z)$ не имеет корней, лежащих на мнимой оси. Тогда угол поворота вектора $f(i\omega)$ против хода часовой стрелки при $0 \leq \omega \leq +\infty$ равен*

$$\Phi = \frac{\pi}{2}(n - 2m), \tag{3.28}$$

где m — число корней полинома $f(z)$ с положительной вещественной частью ($0 \leq m \leq n$) с учетом их кратностей. И, обратно, если угол поворота вектора $f(i\omega)$ при $0 \leq \omega \leq +\infty$ выражается формулой (3.28), *то в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ расположено ровно m корней полинома $f(z)$ с учетом кратности.*

Доказательство. Обозначим через $\alpha_j \pm i\beta_j$, $j = 1, 2, \dots, p$, комплексно-сопряженные корни полинома $f(z)$ ($\beta_j > 0$, $\alpha_j \neq 0$) и пусть γ_k, $k = 1, 2, \dots, q$, вещественные корни полинома $f(z)$ ($\gamma_j \neq 0$), где каждый корень считается столько раз, какова его кратность, то есть $2p + q = n$.

Представим $f(z)$ следующим образом

$$f(z) = a_0 \prod_{j=1}^{p} (z - \alpha_j + i\beta_j)(z - \alpha_j - i\beta_j) \prod_{k=1}^{q} (z - \gamma_k).$$

Тогда

$$f(i\omega) = a_0 \prod_{j=1}^{p} (i\omega - \alpha_j + i\beta_j)(i\omega - \alpha_j - i\beta_j) \prod_{k=1}^{q} (i\omega - \gamma_k). \tag{3.29}$$

Очевидно, что интересующий нас угол поворота вектора $f(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$, очевидно, равен

$$\Phi = \Delta_\Gamma \operatorname{Arg} f(i\omega),$$

где Δ_Γ обозначает приращение соответствующей функции вдоль годографа Михайлова Γ при изменении параметра ω от 0 до $+\infty$. Здесь под $\operatorname{Arg} z$ понимается некоторая непрерывная ветвь многозначной функции $\arg z + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ и $\arg z$ — главное значение аргумента: $-\pi < \arg z \le \pi$.

Так как все множители произведения (3.29) ненулевые, то пользуясь тем фактом, что аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей, получим

$$\Phi = \Delta_\Gamma \operatorname{Arg} a_0 + \\ + \sum_{j=1}^{p} \Delta_\Gamma \big(\operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j + i\beta_j) + \operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)\big) + \\ + \sum_{k=1}^{q} \operatorname{Arg}(i\omega - \gamma_k). \quad (3.30)$$

Для определенности будем считать, что при $\omega = 0$ аргументы всех слагаемых формулы (3.30) равны их главным значениям.

Очевидно,

$$\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} a_0 = 0. \quad (3.31)$$

Обозначим далее

$$\operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j + i\beta_j)\big|_{\omega=0} = \arg(-\alpha_j + i\beta_j) = \varphi_j \quad (0 < \varphi_j < \pi).$$

Тогда

$$\operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)\big|_{\omega=0} = \arg(-\alpha_j - i\beta_j) = \arg\overline{(-\alpha_j + i\beta_j)} = -\varphi_j.$$

Поэтому

$$\big(\operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j + i\beta_j) + \operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)\big)\big|_{\omega=0} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (3.32)$$

Так как $\beta_j > 0$, то из геометрических соображений ясно, что при изменении ω от 0 до $+\infty$ значение $\operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j + i\beta_j)$ при $\alpha_j < 0$ будет монотонно возрастать от $\arg(-\alpha_j + i\beta_j)$ до $\frac{\pi}{2}$, а при $\alpha_j > 0$ — монотонно убывать от $\arg(-\alpha_j + i\beta_j)$ до $\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим теперь поведение $\operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$. Из геометрических соображений ясно, что значение $\operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)$ при $\alpha_j < 0$ будет монотонно возрастать от $\arg(-\alpha_j - i\beta_j)$ до $\frac{\pi}{2}$, а при $\alpha_j > 0$ — монотонно убывать от $\arg(-\alpha_j - i\beta_j)$ до $-\frac{3\pi}{2}$.

Следовательно, при $\alpha_j < 0$ будет

$$\big(\operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j + i\beta_j) + \operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)\big)\big|_{\omega=+\infty} = \pi,$$

а при $\alpha_j > 0$ будет

$$\big(\operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j + i\beta_j) + \operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)\big)\big|_{\omega=+\infty} = -\pi,$$

Поэтому, с учетом (3.32) отсюда получим для $j = 1, 2, \ldots, p$

$$\Delta_\Gamma\bigl(\operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j + i\beta_j) + \operatorname{Arg}(i\omega - \alpha_j - i\beta_j)\bigr) = \begin{cases} \pi, & \text{если } \alpha_j < 0, \\ -\pi, & \text{если } \alpha_j > 0. \end{cases} \tag{3.33}$$

Пусть теперь $z_k = \gamma_k$ — ненулевой действительный корень. Тогда, очевидно,

$$\operatorname{Arg}(i\omega - \gamma_k)\big|_{\omega=0} = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma_k < 0, \\ \pi, & \text{если } \gamma_k > 0, \end{cases}$$

$$\operatorname{Arg}(i\omega - \gamma_k)\big|_{\omega=+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\Delta_\Gamma \operatorname{Arg}(i\omega - \gamma_k) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } \gamma_k < 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } \gamma_k > 0, \end{cases} \tag{3.34}$$

Из формул (3.33)–(3.34) видно, что каждый корень с отрицательной вещественной частью дает вклад $\frac{\pi}{2}$ в значение Φ, а с положительной вещественной частью — вклад $-\frac{\pi}{2}$.

Пусть теперь m — число корней полинома $f(z)$ с положительной вещественной частью. Так как, по предположению, корни $f(z)$ не лежат на мнимой оси, тогда $(n-m)$ есть число корней с отрицательной вещественной частью. Учитывая предыдущий вывод, а также (3.30)–(3.31), получим

$$\Phi = (n-m)\frac{\pi}{2} + m\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (n-2m)\frac{\pi}{2}.$$

Обратно, пусть для полинома $f(z)$ со сделанными в лемме предположениями выполняется соотношение (3.28). Обозначим через $\tilde{m}$ число корней этого полинома с положительной вещественной частью. Тогда по доказанному выше будем иметь

$$\Phi = (n - 2\tilde{m})\frac{\pi}{2}. \tag{3.35}$$

Тогда из (3.28) и (3.35) следует, что $m = \tilde{m}$. То есть в этом случае полином $f(z)$ имеет в точности m корней с положительными вещественными частями.

Лемма доказана. □

На основании этой леммы легко получаем следующую теорему.

Теорема 3.8 (Критерий Михайлова)**.** *Для того, чтобы многочлен $f(z)$ степени n, не имеющий корней на мнимой оси, был полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы угол поворота против хода часовой стрелки вектора $f(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ был равен*

$$\Phi = \frac{\pi}{2}n.$$

3.7 Устойчивость линейной системы с почти постоянной матрицей

Перейдем теперь к построению теории устойчивости так называемых линейных систем с почти постоянными матрицами, то есть систем вида

$$Y' = \big(A + B(x)\big)Y, \tag{3.36}$$

где A — постоянная квадратная матрица, а $B(x)$ — непрерывная матрица при $x > a$ той же размерности. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A и $\alpha = \max_\nu \operatorname{Re} \lambda_\nu$.

Лемма 3.3. *Система* (3.36) *эквивалентна интегральному уравнению*

$$Y(x) = e^{A(x-x_0)}Y(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-\xi)}B(\xi)Y(\xi)\,d\xi, \tag{3.37}$$

где x_0 — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $x_0 > a$.

Доказательство. Пусть вектор-функция $Y(x)$ есть решение системы (3.36), то есть

$$Y'(x) \equiv AY(x) + B(x)Y(x). \tag{3.38}$$

Сделаем замену

$$Y(x) \equiv e^{Ax}Z(x). \tag{3.39}$$

Дифференцируя, получим

$$Y'(x) \equiv Ae^{Ax}Z(x) + e^{Ax}Z'(x). \tag{3.40}$$

Подставив (3.39)–(3.40) в (3.38), будем иметь

$$Ae^{Ax}Z(x) + e^{Ax}Z'(x) \equiv Ae^{Ax}Z(x) + B(x)e^{Ax}Z(x).$$

Отсюда найдем

$$e^{Ax}Z'(x) \equiv B(x)e^{Ax}Z(x)$$

или

$$Z'(x) \equiv e^{-Ax}B(x)e^{Ax}Z(x).$$

Интегрируя это тождество, получим

$$Z(x) \equiv Z(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-A\xi}B(\xi)e^{A\xi}Z(\xi)\,d\xi.$$

Умножая это тождество на e^{Ax}, будем иметь

$$e^{Ax}Z(x) \equiv e^{A(x-x_0)}e^{Ax_0}Z(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-\xi)}B(\xi)e^{A\xi}Z(\xi)\,d\xi.$$

Учитывая формулу (3.39), отсюда получим

$$Y(x) \equiv e^{A(x-x_0)}Y(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-\xi)}B(\xi)Y(\xi)\,d\xi, \tag{3.41}$$

то есть функция $Y(x)$ есть решение интегрального уравнения (3.37).

Обратно, пусть $Y(x)$ — решение интегрального уравнения (3.37). Тогда имеет место тождество (3.41). Дифференцируя это тождество, получим

$$Y'(x) \equiv Ae^{A(x-x_0)}Y(x_0) + \int_{x_0}^{x} Ae^{A(x-\xi)}B(\xi)Y(\xi)\,d\xi + B(x)Y(x) \equiv$$
$$\equiv A\left(e^{A(x-x_0)}Y(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-\xi)}B(\xi)Y(\xi)\,d\xi\right) + B(x)Y(x) \equiv$$
$$\equiv AY(x) + B(x)Y(x).$$

Следовательно, функция $Y(x)$ является решением системы (3.36).

Лемма доказана. □

Теорема 3.9. *Пусть система*

$$Y' = AY \tag{3.42}$$

устойчива по Ляпунову. Тогда система (3.36) *также устойчива при $x \to +\infty$, если при некотором x_0 ($x_0 > a$) выполняется условие*

$$\int_{x_0}^{x} \|B(\xi)\|\,d\xi < +\infty. \tag{3.43}$$

Доказательство. Пусть функция $Y(x)$ есть произвольное решение системы (3.36). Тогда по лемме 3.3 функция $Y(x)$ является решением интегрального уравнения (3.37).

Так как система (3.42) является устойчивой, то по теореме 3.4 все ее решения ограничены на некоторой полуоси. В силу леммы 3.1 все решения ограничены на полуоси $x \geq 0$. В частности, существует константа $K > 0$, что при всех $x \geq 0$ будем иметь

$$\|e^{Ax}\| \leq K.$$

С учетом этого из (3.37) найдем при всех $x \geq x_0$

$$\|Y(x)\| \leq K\|Y(x_0)\| + K\int_{x_0}^{x} \|B(\xi)\|\cdot\|Y(\xi)\|\,d\xi.$$

Воспользовавшись теперь сначала неравенством Гронуолла-Беллмана и затем условием (3.43), получим

$$\|Y(x)\| \leq K\|Y(x_0)\|e^{K\int_{x_0}^{x}\|B(\xi)\|\,d\xi} \leq K\|Y(x_0)\|e^{K\int_{x_0}^{\infty}\|B(\xi)\|\,d\xi} \leq C$$

при некоторой константе $C > 0$.

Таким образом, все решения системы (3.36) ограничены на некоторой полуоси $x \geq x_0$. Следовательно, по теореме 3.4 эта система устойчива. Теорема доказана. □

Прежде, чем доказывать теорему об условиях асимптотической устойчивости системы (3.36), докажем следующие леммы.

Лемма 3.4. *Для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такую константу $C = C(\varepsilon)$, что при всех $x \geq 0$ справедлива оценка*

$$\|e^{Ax}\| \leq C(\varepsilon)e^{(\alpha+\varepsilon)x}. \tag{3.44}$$

Доказательство. Ранее было установлено, что

$$e^{Ax} = \sum_{\nu=1}^{m} e^{\lambda_\nu x} \left(\sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \frac{x^j}{j!}(A - \lambda_\nu E)^j \right) P(\nu, 1).$$

Следовательно,

$$\|e^{Ax}\| \leq \sum_{\nu=1}^{m} e^{\operatorname{Re}\lambda_\nu x} \left(\sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \frac{x^j}{j!} a_{\nu j} \right) b_\nu \leq e^{\alpha x} P(x), \tag{3.45}$$

где $a_{\nu j}$, b_ν — некоторые константы, а $P(x)$ — некоторый многочлен степени не выше $k = \max_\nu (k_\nu - 1)$.

При любом $\varepsilon > 0$, очевидно, имеем

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{e^{\varepsilon x}} = 0,$$

то есть существует число $x_1 = x_1(\varepsilon) > 0$ такое, что будет

$$|P(x)| < \varepsilon e^{\varepsilon x}, \quad x \geq x_1. \tag{3.46}$$

А так как $P(x)$ — непрерывная функция при любом x, то, следовательно, на отрезке $[0, x_1]$ эта функция ограничена некоторой константой $M = M(\varepsilon) > 0$, то есть

$$|P(x)| \leq M(\varepsilon) \leq M(\varepsilon)e^{\varepsilon x}, \quad x \in [0, x_1]. \tag{3.47}$$

Таким образом, из (3.45)–(3.47) получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C = C(\varepsilon) = \max\{\varepsilon, M(\varepsilon)\}$ такая, что при всех $x \geq 0$ будет выполняться неравенство (3.44). Лемма доказана. □

Лемма 3.5. *Если матрица $B(x)$ такова, что $\|B(x)\| \to 0$ при $x \to +\infty$, то для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $x_0 > a$ существует число $x_1 = x_1(\varepsilon, x_0) > x_0$ такое, что при $x \geq x_1$ справедлива оценка*

$$\int_{x_0}^{x} \|B(\xi)\|\, d\xi < \varepsilon(x - x_0). \tag{3.48}$$

Доказательство. Так как при любом $x_0 > a$ и при достаточно больших $x \geq x_0$ имеет место неравенство

$$x_0 < \ln x < x,$$

то справедлива оценка

$$\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}\|B(\xi)\|\,d\xi \le \frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^{\ln x}\|B(\xi)\|\,d\xi + \int_{\ln x}^{x}\|B(\xi)\|\right) =$$
$$= \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{\ln x}\|B(\xi)\|\,d\xi + \frac{1}{x-x_0}\int_{\ln x}^{x}\|B(\xi)\|\,d\xi = I_1(x)+I_2(x). \quad (3.49)$$

По условию $\|B(x)\| \to 0$ при $x\to+\infty$. Тогда для любых $\varepsilon>0$ и $x_0>a$ найдется число $x_2=x_2(\varepsilon,x_0)>0$ такое, что при $x\ge x_2$ будем иметь

$$\|B(x)\| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (3.50)$$

Но так как

$$\frac{x-\ln x}{x-x_0}\to 1$$

при $x\to+\infty$, то найдется такое число $x_3=x_3(\varepsilon,x_0)>x_2$, что при $x\ge x_3$ будет

$$\frac{x-\ln x}{x-x_0}<2$$

и, следовательно,

$$I_2(x) < \frac{\varepsilon}{4}\cdot 2 < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.51)$$

Учитывая неравенство (3.50) при $x\ge x_2$ и непрерывность функции $\|B(x)\|$ на замкнутом интервале $[x_0,x_2]$, получим, что существует константа $B>0$ такая, что при $x\ge x_0$

$$\|B(x)\|\le B.$$

А так как

$$\frac{\ln x - x_0}{x-x_0}\to 0$$

при $x\to+\infty$, то найдется число $x_4=x_4(\varepsilon,x_0)>0$ такое, что при всех $x\ge x_4$ будет

$$\frac{\ln x - x_0}{x-x_0}<\frac{\varepsilon}{2B}$$

и, следовательно,

$$I_1(x)\le B\cdot\frac{\ln x-x_0}{x-x_0} < B\cdot\frac{\varepsilon}{2B}=\frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.52)$$

Таким образом, из (3.49), (3.51), (3.52) получим, что для любых чисел $\varepsilon>0$ и $x_0>a$ найдется число $x_1=x_1(\varepsilon,x_0)=\max\{x_3(\varepsilon,x_0),x_4(\varepsilon,x_0)\}$ такое, что при всех $x\ge x_1$ будет

$$\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}\|B(\xi)\|\,d\xi<\varepsilon,$$

что эквивалентно неравенству (3.48). Лемма доказана. □

Теорема 3.10. *Если однородная система* (3.42) *асимптотически устойчива при* $x \to +\infty$ *и*

$$\|B(x)\| \to 0, \quad x \to +\infty, \tag{3.53}$$

то возмущенная система (3.36) *также является асимптотически устойчивой при* $x \to +\infty$.

Доказательство. Из асимптотической устойчивости системы (3.42) в силу теоремы 3.7 следует, что все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то есть $\alpha < 0$. Выберем число $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы имело место неравенство

$$\alpha + 2\varepsilon < 0. \tag{3.54}$$

По лемме 3.3 любое решение системы (3.36) является решением интегрального уравнения (3.37). Производя оценку по норме, при $x \geq x_0$ найдем

$$\|Y(x)\| \leq \left\|e^{A(x-x_0)}\right\| \|Y(x_0)\| + \int_{x_0}^{x} \left\|e^{A(x-\xi)}\right\| \|B(\xi)\| \|Y(\xi)\| \, d\xi.$$

Воспользовавшись леммой 3.4, отсюда получим

$$\|Y(x)\| \leq C(\varepsilon) e^{(\alpha+\varepsilon)(x-x_0)} \|Y(x_0)\| + C(\varepsilon) \int_{x_0}^{x} e^{(\alpha+\varepsilon)(x-\xi)} \|B(\xi)\| \|Y(\xi)\| \, d\xi,$$

или

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)x} \|Y(x)\| \leq C(\varepsilon) e^{-(\alpha+\varepsilon)x_0} \|Y(x_0)\| + C(\varepsilon) \int_{x_0}^{x} \|B(\xi)\| e^{-(\alpha+\varepsilon)\xi} \|Y(\xi)\| \, d\xi.$$

Отсюда, применяя неравенство Гронуолла-Беллмана, будем иметь

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)x} \|Y(x)\| \leq C(\varepsilon) \|Y(x_0)\| e^{-(\alpha+\varepsilon)x_0} e^{C(\varepsilon) \int_{x_0}^{x} \|B(\xi)\| \, d\xi}.$$

Следовательно,

$$\|Y(x)\| \leq C(\varepsilon) \|Y(x_0)\| e^{(\alpha+\varepsilon)(x-x_0) + C(\varepsilon) \int_{x_0}^{x} \|B(\xi)\| \, d\xi}. \tag{3.55}$$

Воспользовавшись теперь леммой 3.5, в которой берем в качестве ε число $\frac{\varepsilon}{C(\varepsilon)}$, получим при $x \to +\infty$

$$\|Y(x)\| \leq C(\varepsilon) \|Y(x_0)\| e^{(\alpha+2\varepsilon)(x-x_0)}.$$

С учетом (3.54) отсюда получим, что для любого решения $Y(x)$ системы (3.36) справедливо равенство

$$\lim_{x \to +\infty} \|Y(x)\| = 0.$$

Тогда по теореме 3.5 система (3.36) является асимптотически устойчивой. Теорема доказана. □

3.8 Метод Ляпунова

Рассмотрим нелинейную систему

$$Y' = F(x, Y), \tag{3.56}$$

где $Y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, $F(x, Y) = \big(f_1(x, Y), \ldots, f_n(x, Y)\big)^T$. Будем предполагать, что вектор-функция $F(x, Y)$ определена в области

$$G = \{(x, Y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \mid a < x < +\infty, Y \in D\},$$

где $D \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область в n-мерном пространстве, a — или заданное вещественное число или $-\infty$. Пусть, кроме того, $F(x, Y)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$ вместе со своими частными производными по $y_1, \ldots, y_n$. Тогда ясно, что для каждой точки $(x_0, Y_0) \in G$ выполнены условия локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Будем считать, что решение задачи Коши для системы (3.56) с начальным условием $Y(x_0) = Y_0$ имеет единственное решение, определенное на полуоси $(a, +\infty)$ (бесконечно продолжимо вправо). Будем рассматривать только вещественные решения системы (3.56).

Обозначим через Ω_h область

$$\Omega_h = \{(x, Z) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \mid a < x < +\infty,\ Z \in K_h\},$$

а через K_h шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса h, то есть множество вида

$$K_h = \{Z \in \mathbb{R}^n \mid \|Z\| < h\}.$$

Покажем, что вопрос об устойчивости любого решения $Y_0(x)$ системы (3.56) может быть сведен к устойчивости тривиального решения $Z_0(x) \equiv 0$ системы вида

$$Z' = \Phi(x, Z), \tag{3.57}$$

где $\Phi(x, Z) = \big(\varphi_1(x, Z), \ldots, \varphi_n(x, Z)\big)^T$ в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ удовлетворяет аналогичным условиям, причем $\Phi(x, 0) \equiv 0$, то есть система (3.57) имеет тривиальное решение $Z_0(x) \equiv 0$.

В самом деле, пусть $Y_0(x) = \big(y_1^0(x), \ldots, y_n^0(x)\big)^T$ $(x > a)$ — решение системы (3.56), устойчивость которого требуется исследовать, причем существует некоторое положительное число H такое, что H-окрестность этого решения G_H целиком принадлежит области G, то есть

$$G_H = \{(x, Y(x)) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \mid a < x < +\infty, \|Y(x) - Y_0(x)\| < H\} \subset G.$$

И пусть $Y(x)$ — произвольное решение системы (3.56), принадлежащее области G_H. Положим

$$Z(x) = Y(x) - Y_0(x).$$

По построению $\|Z(x)\| < H$ при всех $x > a$ и

$$\frac{dZ(x)}{dx} \equiv \frac{dY(x)}{dx} - \frac{dY_0(x)}{dx} \equiv F(x, Y(x)) - F(x, Y_0(x)) \equiv$$
$$\equiv F(x, Y_0(x) + Z(x)) - F(x, Y_0(x)).$$

Обозначая правую часть через $\Phi(x, Z(x))$, получим

$$\frac{dZ(x)}{dx} \equiv \Phi(x, Z(x)),$$

то есть $Z(x)$ является решением системы (3.57). Очевидно, верно и обратное утверждение. При этом $\Omega = \Omega_H$.

Система (3.57) называется *приведенной системой.* Именно ее мы и будем далее исследовать на устойчивость тривиального решения.

Таким образом, исследование устойчивости некоторого решения $Y_0(x)$ системы (3.56) сводится к исследованию устойчивости тривиального решения $Z_0(x) \equiv 0$ системы (3.57).

3.8.1 Основные определения

Определение 3.9. Непрерывная вещественная скалярная в области Ω_h функция $V(x, Z)$ называется знакоположительной (знакоотрицательной), если $V(x, Z) \geq 0$ $(V(x, Z) \leq 0)$ при всех $(x, Z) \in \Omega_h$.

Определение 3.10. Непрерывная вещественная скалярная в области Ω_h функция $V(x, Z)$ называется положительно (отрицательно) определенной, если существует вещественная скалярная непрерывная в шаре K_h функция $W(Z)$ такая, что

$$V(x, Z) \geq W(Z) > 0 \text{ при } \|Z\| \neq 0, \quad V(x, 0) = W(0) = 0 \tag{3.58}$$
$$\big(V(x, Z) \leq -W(Z) < 0 \text{ при } \|Z\| \neq 0, \quad V(x, 0) = W(0) = 0\big).$$

Положительно или отрицательно определенная функция называется *знакоопределенной.*

В частности, $V(Z)$ есть положительно (отрицательно) определенная функция, если $V(Z) > 0$ $(V(Z) < 0)$ при $\|Z\| \neq 0$ и $V(0) = 0$.

Пример 3.3. Исследовать на знакоопределенность в $\mathbb{R}^2$ функции

$$V(x, Z) = z_1^2 + z_2^2 - 2\alpha z_1 z_2 \cos x,$$

где $Z = (z_1, z_2)^T$.

Решение. Очевидна следующая цепочка неравенств

$$V(x,Z) \geq z_1^2 + z_2^2 - 2|\alpha||z_1||z_2| \geq z_1^2 + z_2^2 - 2|\alpha|\frac{z_1^2 + z_2^2}{2} = (1-|\alpha|)(z_1^2 + z_2^2).$$

Отсюда следует, что при $|\alpha| = 1$ функция $V(x,Z)$ знакоположительна. Если же $|\alpha| < 1$, то эта функция положительно определенная, так как в качестве функции $W(Z)$ можно взять функцию $W(Z) = (1-|\alpha|)(z_1^2 + z_2^2)$. □

Дадим геометрическую интерпретацию положительной определенности функции. Напомним, что поверхностью уровня функции $F(Z)$ называется множество точек в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих уравнению $F(Z) = c$, где c — константа. Предположим для простоты, что поверхностями уровня функции $W(Z)$ являются семейства непрерывных замкнутых поверхностей, окружающих начало координат и монотонно расширяющихся с ростом c. Тогда ясно, что в силу (3.58) при любом фиксированном x поверхность уровня функции $V(x,Z)$, то есть поверхность $V(x,Z) = c$ будет целиком расположена внутри поверхности уровня $W(Z) = c$.

Рассмотрим приведенную систему (3.57) и пусть функция $V(x,Z)$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным в области Ω_h, где $h < H$.

Определение 3.11. Функция

$$\dot{V}(x,Z) = \frac{\partial V}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial z_k}\varphi_k(x,Z) \tag{3.59}$$

называется *производной по x функции $V(x,Z)$ силу системы* (3.57) в области Ω_h.

Если $Z(x)$ есть решение системы (3.57), то $\dot{V}(x,Z(x))$ представляет собой полную производную по x от сложной функции $V(x,Z(x))$, то есть

$$\dot{V}(x,Z(x)) = \frac{d}{dx}V(x,Z(x)).$$

Определение 3.12. Говорят, что функция $V(x,Z)$ имеет *бесконечно малый высший предел* при $Z \to 0$ (или, что эквивалентно, при $\|Z\| \to 0$), если при некотором x_0 имеем

$$V(x,Z) \overset{x}{\rightrightarrows} 0 \tag{3.60}$$

на $[x_0,+\infty)$ при $Z \to 0$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|V(x,Z)| < \varepsilon$$

при $\|Z\| < \delta$ и $x \in [x_0,+\infty)$.

3.8.2 Теоремы Ляпунова

Теорема 3.11 (Первая теорема Ляпунова)**.** *Пусть для приведенной системы* (3.57) *существует положительно определенная скалярная функция* $V(x, Z)$ $((x, Z) \in \Omega_h,\ h \leq H)$, *имеющая в* Ω_h *непрерывные частные производные по всем переменным. Тогда если ее производная по* x *в силу этой системы знакоотрицательна, то тривиальное решение системы* (3.57) *устойчиво по Ляпунову при* $x \to +\infty$.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что существует непрерывная скалярная положительно определенная функция $W(Z)$ такая, что выполняются условия (3.58).

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ сферу радиуса ε, где $0 < \varepsilon \leq h$,

$$S_\varepsilon = \{Z \in \mathbb{R}^n \mid \|Z\| = \varepsilon\}.$$

Это ограниченное замкнутое множество. Так как функция $W(Z)$ непрерывна и положительно на S_ε, то в силу теоремы Вейерштрасса нижняя грань этой функции достигается в некоторой точке $Z_\varepsilon \in S_\varepsilon$ и, следовательно,

$$\inf_{Z \in S_\varepsilon} W(Z) = W(Z_\epsilon) = \alpha_\varepsilon > 0. \tag{3.61}$$

Рассмотрим произвольную точку $x_0 > a$. Функция $V(x_0, Z)$ непрерывна по Z, причем $V(x_0, 0) = 0$. Следовательно, существует окрестность $\|Z\| < \delta < \varepsilon$ такая, что в этой окрестности

$$0 \leq V(x_0, Z) < \alpha_\varepsilon. \tag{3.62}$$

Рассмотрим любое нетривиальное решение $Z = Z(x)$ системы (3.57), начальное условие которого удовлетворяет неравенству $\|Z(x_0)\| < \delta$. Докажем, что траектория этого решения целиком остается внутри сферы S_ε, то есть при всех $x \geq x_0$

$$\|Z(x)\| < \varepsilon. \tag{3.63}$$

В самом деле, при $x = x_0$ имеем

$$\|Z(x_0)\| < \delta < \varepsilon.$$

Предположим противное, то есть неравенство (3.63) выполняется не для всех $x \geq x_0$. Пусть $x_1 > x_0$ — первая точка выхода решения $Z(x)$ на границу S_ε, то есть $\|Z(x)\| < \varepsilon$ при $x_0 \leq x < x_1$ и $\|Z(x_1)\| = \varepsilon$. Изучим поведение функции $v(x) = V(x, Z(x))$ вдоль решения $Z(x)$. Так как в силу условия теоремы

$$\frac{dv(x)}{dx} = \dot{V}(x, Z(x)) \leq 0,$$

то функция $v(x)$ не возрастающая. Следовательно, учитывая формулы (3.62)–(3.61), получим

$$\alpha_\varepsilon > V(x_0, Z(x_0)) \geq V(x_1, Z(x_1)) \geq W(Z(x_1)) \geq \alpha_\varepsilon,$$

что невозможно.

Таким образом, решение $Z = Z(x)$ при любом конечном $x \geq x_0$ остается внутри сферы S_ε и, так как $\varepsilon < h \leq H$, это решение определено при всех $x \geq x_0$ (бесконечно продолжимо вправо), причем

$$\|Z(x)\| < \varepsilon, \quad x \geq x_0,$$

если только $\|Z(x_0)\| < \delta$. А это означает по замечанию 3.2, что тривиальное решение $Z_0(x) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову при $x \to +\infty$. Теорема доказана. □

Теорема 3.12 (Вторая теорема Ляпунова)**.** *Пусть для приведенной системы* (3.57) *существует положительно определенная скалярная функция* $V(x, Z)$ $((x, Z) \in \Omega_h,\ h \leq H)$*, имеющая в* Ω_h *непрерывные частные производные по всем переменным и допускающая бесконечно малый высший предел при* $Z \to 0$*. Тогда если ее производная по* x *в силу этой системы отрицательно определена, то тривиальное решение системы* (3.57) *асимптотически устойчиво по Ляпунову при* $x \to +\infty$*.*

Доказательство. Так как условия теоремы являются усилением условий предыдущей теоремы, то тривиальное решение $Z_0(x) \equiv 0$ приведенной системы (3.57) устойчиво по Ляпунову.

Согласно определению асимптотической устойчивости тривиального решения (см. замечание 3.3) остается доказать, что для любого числа $x_0 > a$ найдется такое $h > 0$ достаточно малое, что для любого нетривиального решения $Z(x)$, как только $\|Z(x_0)\| < h$, справедливо равенство

$$\lim_{x \to +\infty} Z(x) = 0. \tag{3.64}$$

Пусть x_0 $(x_0 > a)$ — любое число и $Z(x)$ — любое нетривиальное решение приведенной системы такое, что $\|Z(x)\| \leq h$ при $x \geq x_0$ (это можно всегда предполагать в силу устойчивости тривиального решения). Рассмотрим функцию $v(x) = V(x, Z(x))$, для которой на основании предположений теоремы имеем $v(x) > 0$. Кроме того, так как по условию теоремы

$$\frac{dv(x)}{dx} = \dot{V}(x, Z(x)) < 0,$$

то функция $v(x)$ — монотонно убывающая. А так как она ограничена снизу, то имеет конечный предел

$$\lim_{x \to +\infty} v(x) = \alpha \geq 0. \tag{3.65}$$

Покажем, что число α не может быть положительным. Действительно, предположим противное, то есть предположим, что $\alpha > 0$. Тогда рассматриваемое нетривиальное решение $Z(x)$ удовлетворяет при некотором $\beta > 0$ неравенству

$$\|Z(x)\| \geq \beta > 0 \tag{3.66}$$

при всех $x \geq x_0$. В самом деле, если бы это было не так, то нашлась бы последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, стремящаяся к $+\infty$ при $k \to \infty$, такая, что $\lim_{k\to\infty} Z(x_k) = 0$ (если бы $x_k \to x^* < +\infty$, то тогда $\lim_{k\to\infty} Z(x_k) = Z(x^*) = 0$, откуда в силу теоремы единственности решения задачи Коши получили бы, что $Z(x) \equiv 0$, что противоречило бы предположению о нетривиальности этого решения). На основании того, что существует бесконечно малый высший предел функции $V(x, Z)$ при $Z \to 0$, имели бы тогда

$$0 < \alpha = \lim_{k\to\infty} v(x_k) = \lim_{k\to\infty} V(x_k, Z(x_k)) = 0.$$

То есть получили бы противоречие. Следовательно, в случае $\alpha > 0$ имеет место неравенство (3.66) и, кроме того, по-построению выполняется неравенство $\|Z(x)\| < h$.

Пусть $W_1(Z)$ — непрерывная положительно определенная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\dot{V}(x, Z) \leq -W_1(Z). \tag{3.67}$$

Такая функция существует, так как согласно условию теоремы, функция $\dot{V}(x, Z)$ — отрицательно определенная функция.

Обозначим

$$\gamma = \inf_{\beta \leq \|Z\| \leq h} W_1(Z) > 0. \tag{3.68}$$

Тогда, подставляя в неравенство (3.67) решение $Z = Z(x)$ и интегрируя полученное неравенство по x в пределах от x_0 до x, получим

$$v(x) = v(x_0) + \int_{x_0}^{x} \dot{V}(\xi, Z(\xi))\, d\xi \leq v(x_0) - \int_{x_0}^{x} W_1(Z(\xi))\, d\xi,$$

или, так как в силу (3.68) будет $-W_1(Z) \leq -\gamma$ при $\beta \leq \|Z\| \leq h$, то

$$v(x) \leq v(x_0) - \int_{x_0}^{x} \gamma\, d\xi = v(x_0) - \gamma(x - x_0).$$

Отсюда получаем, что при x достаточно большом

$$v(x) = V(x, Z(x)) < 0,$$

что противоречит положительности функции $v(x)$.

Итак,

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty} V(x, Z(x)) = 0. \tag{3.69}$$

Покажем теперь, что $Z(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Так как по условию $V(x, Z)$ — положительно определенная функция, то существует такая положительно определенная функция $W(Z)$, что выполняются соотношения (3.58). Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно мало и

$$\theta = \inf_{\varepsilon \le \|Z\| \le h} W(Z) > 0. \tag{3.70}$$

Из формулы (3.69) следует, что существует такое число $\tilde{x} > x_0$, что

$$V(\tilde{x}, Z(\tilde{x})) < \theta.$$

Отсюда в силу монотонного убывания функции $V(x, Z(x))(\equiv v(x))$ получаем

$$V(x, Z(x)) < \theta \tag{3.71}$$

при всех $x > \tilde{x}$ и, следовательно,

$$\|Z(x)\| < \varepsilon \tag{3.72}$$

при всех $x > \tilde{x}$. В самом деле, если бы для некоторого $x_1 > \tilde{x}$ выполнялось противоположное неравенство

$$\|Z(x_1)\| \ge \varepsilon,$$

то с учетом формул (3.71), (3.58), (3.70) мы имели бы

$$\theta > V(x_1, Z(x_1)) \ge W(Z(x_1)) \ge \theta,$$

что, очевидно, невозможно.

Итак, на основании неравенства (3.72) имеем (3.64). Что и требовалось доказать. Теорема доказана. □

3.8.3 Устойчивость квазилинейных систем

Рассмотрим действительную дифференциальную систему

$$Z' = AZ + \Psi(x, Z), \tag{3.73}$$

где A — постоянная матрица, $\Psi(x, Z)$ — непрерывная вектор-функция в области Ω_H, причем $\Psi(x, Z) = o(\|Z\|)$ равномерно по x, то есть

$$\frac{\Psi(x, Z)}{\|Z\|} \overset{x}{\rightrightarrows} 0$$

при $Z \to 0$.

Система (3.73) называется *квазилинейной*. Очевидно, у этой системы существует тривиальное решение $Z_0(x) \equiv 0$.

Приведем без доказательства теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости системы (3.73).

Теорема 3.13 (Ляпунова). *Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то есть*

$$\operatorname{Re}\lambda_k < 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

то тривиальное решение $Z_0(x) \equiv 0$ квазилинейной системы (3.73) *асимптотически устойчиво по Ляпунову при $x \to +\infty$.*

Что касается неустойчивости системы (3.73), то справедлива следующая теорема, которую приведем также без доказательства.

Теорема 3.14 (О неустойчивости). *Если хотя бы одно собственное значение матрицы A имеет положительную вещественную часть, то тривиальное решение $Z_0(x) \equiv 0$ квазилинейной системы* (3.73) *неустойчиво по Ляпунову при $x \to +\infty$.*

Из теоремы Ляпунова, в частности, вытекает достаточное условие устойчивости состояния равновесия для нелинейной автономной системы

$$\frac{dY}{dx} = F(Y), \tag{3.74}$$

где $F(Y) = (f_1(Y), f_2(Y), \dots, f_n(Y))^T$ определена и имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в области D.

Напомним, что матрицей Якоби вектор-функции $F(Y)$ называется матрица

$$F'(Y) = \left(\frac{\partial f_j(Y)}{\partial y_k}\right)_{j,k=1}^{n}.$$

Если для постоянного вектора $Y_0 \in D$ имеем

$$F(Y_0) = 0,$$

то решение $Y(x) \equiv Y_0$ системы (3.74) называется положением равновесия этой системы.

Теорема 3.15. *Предположим, что компоненты вектор-функции $F(Y)$ дважды непрерывно дифференцируемы в области D. Тогда если все собственные значения постоянной матрицы Якоби $F'(Y_0)$ имеют отрицательные вещественные части, то состояние равновесия $Y(x) \equiv Y_0$ нелинейной автономной системы* (3.74) *асимптотически устойчиво по Ляпунову при $x \to +\infty$.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что если положить $Y = Y_0 + Z$, то для функции $F(Y)$ справедлива следующая формула Тейлора

$$F(Y) = F(Y_0) + F'(Y_0)Z + o(\|Z\|),$$

где $Y - Y_0 \in K_H$. Принимая Z за новую искомую вектор-функцию и обозначая $A = F'(Y_0)$, будем иметь

$$\frac{dZ}{dx} = AZ + \Psi(Z), \tag{3.75}$$

где $\Psi(Z) = o(\|Z\|)$ при $Z \in K_H$, то есть получаем частный случай квазилинейной системы (3.73). Для системы (3.75), очевидно, выполнены все условия теоремы 3.13. Из этой теоремы получаем справедливость доказываемой теоремы. Теорема доказана. $\square$