Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского

Авторы: *А.В. Шаталина, А.М. Захаров*

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие для студентов механико-математического, физического, экономического факультетов и факультета компьютерных наук и информационных технологий.
Пособие содержит краткие теоретические сведения, примеры и задачи для самостоятельного решения.

Саратов
Издательство Саратовского университета
2016

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Что такое интеграл?

В переводе с латинского языка интеграл означает «целый». Это одно из наиболее важных и распространенных понятий в высшей математике, которое появилось из-за необходимости находить функции по их производным или измерять объёмы, площади, работу нескольких сил за конкретный промежуток времени, длины дуг и т.д.

Ученые стремятся любые физические явления выражать в виде математических формул. Когда в руках есть определенная формула, то в дальнейшем уже можно с ее помощью посчитать все, что необходимо. А интеграл является одним из главных инструментов работы с любыми функциями.

К примеру, имея формулу круга, можно посредством интеграла вычислить его площадь. Если есть формула шара, то можно вычислить его объем. Посредством интегрирования можно найти работу, энергию, массу, давление, электрический заряд и прочие важные величины.

Тема интегрирования, которая начинается еще в школе, очень широкая и для многих не очень не простая, но при этом она важная и необходимая. Именно поэтому в ней нужно разобраться и понять, если вы хотите хоть что-то знать и понимать в высшей математике.

В соответствии с этими задачами принято выделять определённые и неопределенные интегралы.

Обозначение

Первым символ для обозначения интегрирования придумал Ньютон. Он применял для этого небольшой квадрат. Однако данное обозначение не получило серьезного распространения. Сегодняшнее обозначение неопределенного интеграла было придумано в 1675 году Лейбницем: $\int$

Что касается обозначения определённого интеграла, где указаны пределы интегрирования, то его в 1819 году предложил Жан Батист Фурье.

Виды интегралов

Первообразная функции $f(x)$ - функция $F(x)$, производная которой при любом значении x равняется $f(x)$. Добавляя постоянную к первообразной определенной функции, снова можно получить первообразную этой же функции. Соответственно, имея единственную первообразную $F(x)$ функции $f(x)$, можно получить единое выражение всех первообразных данной функции в виде $F(x) + C$. Подобное выражение первообразных принято называть неопределённым интегралом функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx$$

Одно из главных правил интегрального исчисления определяет, что любая непрерывная функция *f(x)* имеет неопределённый интеграл. Что касается определённого интеграл от функции *f(x)* с верхним пределом *b* и нижним пределом *a*, то его можно определить, например, в качестве разности:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - f(a)$$

где *F(x)* является первообразной функции *f(x)*.

Данное пособие поможет лучше понять теоретических материал, понять ход решения конкретных задач с использованием этого материала, что значительно улучшит понимание данного раздела математического анализа.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Основные понятия и теоремы

Определение 3.1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X, если $F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in X$.

Теорема 3.1. Множество $\{F(x)+C\}$, где $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$ на X, есть множество всех первообразных функции $f(x)$ на X.

Определение 3.2. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на X называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке X и обозначается $\int f(x)dx$.

Теорема 3.2. *(Основные свойства неопределенного интеграла)*

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. Линейность интеграла.

Если существует первообразные функции $f(x)$ и $g(x)$, а α и β - любые вещественные числа, то существует первообразная функция $\alpha f(x) + \beta f(x)$, причем $\int[\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C$.

2. $\int 1dx = x + C$.

3. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$.

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$.

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg + C\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right)$.

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg + C(x = \pi n, n \in Z)$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases} \qquad (-1 < x < 1)$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} actgx + C \\ -arctgx + C \end{cases}$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$.

13. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2} \ln\left| \dfrac{1+x}{1-x} \right| + C$.

14. $\int shxdx = chx + C$.

15. $\int chxdx = shx + C$.

16. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

17. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

Теорема 3.3 *(Метод замены переменной)*. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на промежутке T, а промежуток X - множество ее значений. Пусть функция $y = f(x)$ определена на X и имеет на этом промежутке первообразную $F(x)$. Тогда на промежутке T функция $F(\varphi(t))$ является первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, т.е. справедлива формула замены переменной:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C. \qquad (1)$$

Теорема3.4 *(Метод интегрирования по частям).* Пусть на промежутке X функция $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы и существует $\int v(x)u'(x)dx$ (т. е. функция $v(x)u'(x)$ имеет первообразную на X) Тогда $\int u(x)v'(x)dx$ также существует на X и справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \qquad (2)$$

Метод интегрирования по частям удобно применят в следующих случаях:

1. подынтегральное выражение содержит в виде множителя функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $\ln\varphi(x)$. Рекомендуется в (2) в качестве $u(x)$ выбрать эти функции.

2. подынтегральная функция имеет вид $P(x)\ell^{ax}$, $P(x)\sin ax$, $P(x)\cos ax$, где $P(x)$- многочлен переменной x. Если в качестве $u(x)$ выбрать $P(x)$, то в новом интеграле подынтегральная функция снова принадлежит одному из указанных типов, но степень многочлена уже окажется на единицу меньше. Выбирая этот многочлен снова в качестве $u(x)$, понижаем степень еще на единицу и т. д.

3. подынтегральная функция имеет вид $\ell^{ax}\sin bx$, $\ell^{ax}\cos bx$, $\sin(\ln x)$, $\cos(\ln x)$ и т.п. После двукратного интегрирования по частям получается снова исходный интеграл с некоторым коэффициентом. Полученное равенство является линейным алгебраическим уравнением относительно искомого интеграла.

Примеры решения задач

1. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + C.$

2. $\int \frac{x^2 dx}{1-x^2} = \int \frac{(x^2-1)+1}{1-x^2}dx = \int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)dx = -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$

3. $\int tg^2 x dx = \int\left[\left(1+tg^2 x\right)-1\right]dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = tgx - x + C.$

4. $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$. Положим $1-x^2 = t$; тогда $dx = \frac{1}{2}dt$. Имеем по формуле (1):

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{1/2}}{1/2} = -t^{1/2} = -(1-x^2)^{1/2} + C.$$

5. $I = \int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx.$ Положим $1+\cos^2 x = t$, тогда $-2\cos x \sin x dx = dt$, т. е. $\sin x \cos x dx = -\frac{1}{2}dt.$ По формуле (1):

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{(t-1)dt}{t} = -\frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\ln|t| =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 x\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\cos^2 x\right) + C.$$

6. $I = \int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$. Положим $x = \sin t$, тогда $dx = \cos t dt$. Следовательно, $t = \arcsin x.$ $I = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = tgt + C = tg \arcsin x + C, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$

7. $I=\int arctgx dx.$. Положим $u=arctgx,\quad dv=dx$. Тогда $du=\dfrac{dx}{1+x^2},\quad v=x$.

Следовательно,

$$I=xarctgx-\int\frac{xdx}{1+x^2}=xarctgx-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

8. $I=\int x^2\ell^{-x}dx.$ Положим $u=x^2,\quad dv=\ell^{-x}dx$. Тогда $du=2xdx,\quad v=-\ell^{-x}$.

Значит,

$$I=-x^2\ell^{-x}+2\int x\ell^{-x}dx=-x^2\ell^{-x}+2\left(-x\ell^{-x}+\int\ell^{-x}dx\right)=$$
$$=-x^2\ell^{-x}-2x\ell^{-x}-2\ell^{-x}+C.$$

9. $I=\int\sin(\ln x)dx$. Положим $u=\sin\ln x,\ dv=dx$. Тогда $dx=\dfrac{1}{x}\cos\ln x dx,$

$v=x$. Имеем

$$I=x\sin\ln x-\int\cos\ln x dx=x\sin\ln x-\left(x\cos\ln x+\int\sin\ln x dx\right).$$

Получаем линейное относительно I уравнение

$$I=x(\sin\ln x-\cos\ln x)-I,$$

откуда находим

$$I=\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C.$$

<u>Замечание.</u> С помощью методов замены переменной и интегрирования по частям получаются следующие часто употребляемые формулы:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C \qquad (a\neq 0).$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \qquad (a\neq 0).$

3. $\displaystyle\int\frac{xdx}{a^2\pm x^2}=\pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2\pm x^2\right|+C.$

4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C.$

7. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (a > 0).$

8. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Интегрирование рациональных функций

Рациональная функция имеет вид: $P_n(x)/Q_m(x)$. Здесь $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены степеней n и m относительно переменной x.

Если $n \geq m$, т. е. дробь неправильная, то ее можно представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)} \qquad (k < m)$$

или, как говорят, выделить из нее целую часть $P_{n-m}(x)$. В результате интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию правильной дроби $R_k(x)/Q_m(x)$.

<u>Теорема 3.5.</u> Пусть $P_n(x)/Q_m(x)$ - правильная рациональная дробь $n<m$, а разложение $Q_m(x)$ на произведение неприводимых вещественных множителей имеет вид

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha * \ldots * (x-b)^\beta (x^2 + px + q)^\gamma * \ldots * (x^2 + rx + s)^\delta,$$

где $a,\ldots,b$ - вещественные корни, $x^2 + px + q, \ldots, x^2 + rx + s$ - квадратные трехчлены, не разложимые на вещественные множители. Тогда

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + $$
$$+ \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \ldots + \frac{M_\gamma x + N_\gamma}{(x^2 + px + q)^\gamma} + \frac{K_1x + L_1}{x^2 + rx + s} + \ldots + \frac{K_\delta x + L_\delta}{(x^2 + rx + s)^\delta} \qquad (3)$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, K_i, L_i - вещественные числа.

Дроби, входящие в правую часть (3), называются простейшими, а само равенство (3) называется разложением правильной рациональной дроби $P_n(x)/Q_m(x)$ на сумму простейших дробей с вещественным коэффициентами.

<u>Пример</u> *(Метод неопределенных коэффициентов).*

Разложение правильной дроби $\frac{x}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)}$ на сумму простейших дробей согласно теореме 3.5 имеет вид

$$\frac{x}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители получившихся дробей, приходим к равенству

$$x = A(2x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + Cx(x+1)(2x-1) + D(x+1)(2x-1).$$

Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравнивая коэффициенты, получаем систему уравнений для определения A, B, C, D:

При x^0 $\quad -A+B-D=0$

При x^1 $\quad 2A+B-C+D+1$

При x^2 $\quad -A+B+C+2D=0$

При x^3 $\quad 2A+B+2C=0$

Решив эту систему, найдем коэффициенты A, B, C, D:

$A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{4}{15}$, $C=-\frac{3}{10}$, $D=\frac{1}{10}$.

Тогда

$$\int\frac{xdx}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{4}{15}\int\frac{dx}{2x-1} - \frac{1}{10}\int\frac{3x-1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{15}\ln|2x-1| - \frac{3}{20}\ln(x^3+1) + \frac{1}{10}arctgx + C.$$

Интегрирование иррациональных функций

Через $R(x,y)$ обозначим рациональную функцию двух аргументов x и y.

1. *Интегрирование дробно-линейных иррациональностей*

Интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, $\left(\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}\right)$ сводится к интегралу от рациональной функции подстановкой

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

2. *Подстановки Эйлера*

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ $(a\neq 0)$ рационализируются с помощью подстановок Эйлера:

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$, если $a>0$

$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$, если $c>0$

$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$

3. *Интеграл от дифференциального бинома Ньютона*

Интегралы вида

$\int x^m\left(ax+bx^n\right)^p dx$, где m, n, p - рациональные

числа рационализируются лишь в следующих трех случаях

- пусть p - целое. Полагаем $x=t^N$, N - общий знаменатель дробей n и m.

- пусть $\frac{m+1}{n}$ - целое. Полагаем $a+bx^n=t^N$ N - знаменатель дроби p.

-пусть $\frac{m+1}{n}+p$ - целое. Полагаем $ax^{-n}+b=t^N$, N - знаменатель дроби p.

4. *Другие приемы интегрирования квадратичных иррациональностей*

Если в квадратном трехчлене ax^2+bx+c выделить полный квадрат, т. е. привести его к виду $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$, и положить

$$t=\sqrt{\left|\frac{a}{c-\frac{b^2}{4a}}\right|}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

то интеграл $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ приводится к одному из видов:

$$\int R_1\left(t,\sqrt{1-t^2}\right)dt\,,\quad \int R_2\left(t,\sqrt{t^2-1}\right)dt\,,\quad \int R_3\left(t,\sqrt{1+t^2}\right)dt\,.$$

Сделав в первом из этих интегралов подстановку $t=\sin u$, во втором $\frac{1}{t}=\sin u$, в третьем $t=tgu$, получаем интегралы вида $\int R(\sin u,\cos u)du$. (см. п. 3.6.). Отметим особо два частных случая.

а. Для интеграла вида $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, где $P_n(x)$- многочлен, справедлива формула

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (4)$$

где $Q_{n-1}(x)$- многочлен степени $n-1$, а λ - некоторое число. Для определения коэффициентов $Q_{n-1}(x)$ и числа λ, продифференцируем тождество (4). Приводя затем к общему знаменателю, получим равенство двух многочленов. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим неизвестные коэффициенты. Входящий в правую часть равенства (4) интеграл вычисляется указанным выше способом с помощью одной из тригонометрических подстановок.

б. Интеграл вида $\int\frac{dx}{(x-\beta)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ сводится к предыдущему случаю подстановкой $t=\frac{1}{x-\beta}$.

Примеры

1. $I=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}$ Положим $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, откуда $dx=-\frac{6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}$.

Следовательно $I=3\int\frac{dt}{t^3-1}=-\frac{1}{2}\ln\frac{(1-t)^2}{1+t+t^2}+\sqrt{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$.

2.

$$I=\int\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x-1}}=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}=$$

$$=\int\frac{dx}{\frac{5\sqrt{5}}{4\cdot 2}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2+\frac{3}{5}\right]\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2-1}}.$$ Положим $t=\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$, тогда

$\sqrt{5}dt=2dx$ и, значит, $I=\frac{4}{5}\int\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{5}\right)\sqrt{t^2-1}}$. Положим теперь $\frac{1}{t}=\sin u$, откуда

$-\frac{dt}{t^2}=\cos u du$..

Поэтому

$$I=-\frac{4}{5}\int\frac{\cos udu\sin u}{\left(1+\frac{3}{5}\sin^2 u\right)\cos u}=-\frac{4}{5}\int\frac{\sin udu}{\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cos^2 u}=-\frac{4}{3}\int\frac{d(\cos u)}{\frac{8}{3}-\cos^2 u}=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}\ln\left|\frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}\cos u}{\sqrt{8}-\sqrt{3}\cos u}\right|+C,$$

где $u=\arcsin\frac{\sqrt{5}}{2x+1}$.

Окончательно получаем

$$I=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3\left(x^2+x-1\right)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3\left(x^2+x-1\right)}}\right|+C.$$

3. $I=\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$. Положим $t=\frac{1}{x-1}$, тогда $dx=-\frac{1}{t^2}dt$ и $I=-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$. Далее воспользуемся формулой (4):

$$\int\frac{t^2dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}=(At+B)\sqrt{5t^2+5t+1}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$$

Дифференцируя это тождество, получаем

$$\frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}}=A\sqrt{5t^2+5t+1}+\frac{(At+B)(10t+5)}{2\sqrt{5t^2+5t+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Приводя к общему знаменателю и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, находим $A=\frac{1}{10}$, $B=-\frac{3}{20}$, $\lambda=\frac{11}{40}$. Далее,

$$\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{20}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}}\right|+C.$$

Окончательно,

$$I=-\left(\frac{1}{10}t-\frac{3}{20}\right)\sqrt{5t^2+5t+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}}\right|+C.$$

где $t=\frac{1}{x-1}$, или

$$I=\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|+C$$

Интегрирование тригонометрических функций

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ рационализируется с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = tg\left(x/2\right)$. На практике она часто приводит к громоздким выкладкам:

В ряде случаев более удобно другие подстановки:

а) $t = \cos x$, если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;

б) $t = \sin x$, если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;

в) $t = tgx$, если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

Примеры решения задач.

1. $I = \int \cos^5 x dx$. Имеем случай б). Поэтому положим $t = \sin x$. Тогда $dt = \cos x dx$, $\cos^4 x = \left(1 - \sin^2 x\right)^2 = \left(1 - t^2\right)^2$ и

$$I = \int \left(1 - t^2\right)^2 dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C.$$

где $t = \sin x$.

2. $I = \int \sin 5x \cos x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 6x)dx = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{12}\cos 6x + C$.

3. $I = \int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$. Применим универсальную подстановку: $t = tg\frac{x}{2}$.

Тогда $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и интеграл I сводится к интегралу от рациональной функции. Однако проще сначала преобразовать подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{a\cos x + b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)}, \text{ где } \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

и положить далее $t = tg\frac{x+\varphi}{2}$. Тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin(x+\varphi) = \frac{2t}{1+t^2}$

и, следовательно, $I = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dt}{t}\bigg|_{t=tg\frac{x+\varphi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|tg\frac{x+\varphi}{2}\right| + C$.

3.6. Задачи для самостоятельной работы

1. $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$

2. $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx$

3. $\int \left(2^x+3^x\right)^2 dx$

4. $\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$

6. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$

7. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}}$

8. $\int x\ell^{-x^2} dx$

9. $\int \frac{\arg tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x}$

10. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$

11. $\int \frac{dx}{\sin x}$

12. $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$

13. $\int \sin^5 x\cos x dx$

14. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$

15. $\int \ln x dx$

16. $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$

17. $\int x^3\ell^{-x^2} dx$

18. $\int x^2 \sin 2x dx$

19. $\int \arcsin x dx$

20. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$

21. $\int \sin x\ln(tgx)dx$

22. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx$

23. $\int \cos(\ln x)dx$

24. $\int \ell^{ax}\sin bx dx$

25. $\int \ell^{2x}\sin^2 x dx$

26. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$

27. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$

28. $\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$ 29. $\int\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$ 30. $\int\frac{dx}{x^3+1}$

31. $\int\frac{dx}{x^4-1}$ 32. $\int\frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$

33. $\int\frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{3})}$ 34. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$ 35. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

36. $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ 37. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ 38. $\int\frac{xdx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$

39. $\int\frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$ 40. $\int\frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ 41. $\int\sin^6 xdx$

42. $\int\sin^2 x\cos^4 xdx$ 43. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$ 44. $\int tg^5 xdx$

45. $\int\frac{dx}{\sqrt{\sin^3\cos^5 x}}$ 46. $\int\frac{dx}{\sqrt{tgx}}$ 47. $\int\cos x\cos 2x\cos 3xdx$

48. $\int\sin^3 2x\cos^2 3xdx$ 49. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$ 50. $\int\frac{\sin^2 xdx}{1+\sin^2 x}$

Контрольная работа №1

Билет 1

1. $J=\int\frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^6}}dx$ Ответ: $J=\frac{1}{12}\sqrt{(2x-5)^3}+\frac{5}{2}\sqrt{2x-5}-\frac{37}{4\sqrt{2x-5}}+c$

2. $J=\int x^3\ln x dx$ Ответ: $J=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+c$

3. $J=\int\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}dx$ Ответ: $J=\ln\left|(x-3)^3(x+4)^5(x-1)^7\right|+c$

4. $J=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$ Ответ: $J=\frac{tg^3x}{3}+\frac{tg^5x}{5}+c$

Билет 2

1. $J=\int\frac{dx}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}$ Ответ: $J=\frac{1}{4\arccos^4 x}+c$

2. $J=\int\arcsin x dx$ Ответ: $J=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$

3. $J=\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$ Ответ: $J=2\ln|x-1|-\ln|x|-\frac{x}{(x-1)^2}+c$

4. $J=\int ctg^6 dx$ Ответ: $J=-ctgx+\frac{1}{3}ctg^3x-\frac{1}{5}ctg^5x-x+c$

Билет 3

1. $J=\int\sqrt[3]{1-3\sin x}\cos dx$ Ответ: $J=\frac{\sqrt[3]{(1+3\sin x)^4}}{4}+c$

2. $J=\int e^{5x}\cos 4x dx$ Ответ: $J=\frac{4}{41}e^{5x}\left(\sin 4x+\frac{5}{4}\cos 4x\right)+c$

3. $J=\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ Ответ: $J=\frac{1}{3}arctgx-\frac{1}{6}arctg\frac{x}{2}+c$

4. $J=\frac{dx}{\cos^4 x\sin^3 x}$ Ответ: $J=\frac{1}{3}tg3x+2tgx-ctgx+c$

Билет 4

1. $J=\int\sqrt[6]{(8-3x)^6 dx}$ Ответ: $J=-\frac{5}{33}(8-3x)^{\frac{4}{5}}+c$

2. $J=\int x3^x dx$ Ответ: $J=\frac{3x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+c$

3. $J=\int\frac{xdx}{dx^2-3x-2}$ Ответ: $J=\frac{1}{5}\ln\left((x-2)^2\sqrt{2x+1}\right)+c$

4. $J=\int\frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$ Ответ: $J=\ln|tgx|-\frac{1}{2\sin^2 x}+c$

Билет 5

1. $J=\int x\,arctgx\,dx$ Ответ: $J=\frac{x^2+1}{2}arctgx-\frac{x}{2}+c$

2. $J=\int\frac{3x-1}{x^2+9}dx$ Ответ: $J=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right)-\frac{1}{3}\ln\left(x^4+1\right)+c$

3. $J=\int\frac{dx}{(x+1)\left(x^2+x\right)}$ Ответ: $J=\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}-\frac{1}{2}arctgx+c$

4. $J=\int\cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$ Ответ: $J=\frac{1}{8}\left(2x+\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin 6x\right)+c$

Билет 6

1. $J=e^{-3x+1}dx$ Ответ: $J=-\frac{e^{1-3x}}{3}+c$

2. $J=\int\arccos x\,dx$ Ответ: $J=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c$

3. $J=\int\frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$ Ответ: $J=\frac{3}{4}\ln|3x-1|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|-\frac{1}{3}\ln x+c$

4. $J=\int\frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$ Ответ: $J=\frac{1}{\cos x-1}+c$

Билет 7

1. $J=\int e^{\sin x}\cos x\,dx$ Ответ: $J=e^{\sin x}+c$

2. $J=\int x^2\ln(1+x)dx$ Ответ: $J=\left(x^3+1\right)\ln\frac{1+x}{3}-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+c$

3. $J=\int\frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}$ Ответ: $J=\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+c$

4. $J=\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$ Ответ: J

$=\frac{4x}{25}-\frac{3}{25}\ln|tgx+2|+\frac{2}{5(tgx+2)}-\frac{3}{25}\ln|\cos x|+c$

Билет 8

1. $J=\int\left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{-2}dx$ Ответ: $J=\frac{1}{2}tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+c$

2. $J=\int \cos \ln x dx$ Ответ: $J=\frac{x}{2}(\cos \ln x+\sin \ln x)+c$

3. $J=\int \frac{32xdx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$ Ответ: $J=\ln|2x-1|-6\ln|2x-3|+51\ln|2x-5|+c$

4. $J=\int \cos^6 xdx$ Ответ: $J=\frac{5x}{16}+\frac{1}{12}\sin 2x\left(\cos^4 x+\frac{5}{4}\cos^2 x+\frac{15}{18}+c\right)$

Билет 9

1. $J=\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}dx$ Ответ: $J=\frac{1}{2}(x^3+3x+1)^{\frac{2}{3}}+c$

2. $J=\int x\cos x dx$ Ответ: $J=x\sin x+\cos x+c$

3. $J=\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$ Ответ: $J=-\frac{1}{x-2}-arctg(x-2)+c$

4. $J=\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ Ответ: $J=\frac{1}{\cos x}-tgx+x+c$

Билет 10

1. $J=\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5+4}}$ Ответ: $J=\frac{x^5+4}{5}+c$

2. $J=\int \ln(x^2+1)dx$ Ответ: $J=x\ln(x^2+1)-2x+2arctgx+c$

3. $J=\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx$ Ответ: $J=-\frac{2x-1}{6(x+1)^2}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+c$

4. $J=\int \frac{dx}{\sin x}$ Ответ: $J=\ln|tgx|+c$

Билет 11

1. $J=\int \frac{xe^{2x}dx}{e^{2x}+a^2}$ Ответ: $J=$

2. $J=\int \frac{xarctgx}{(x^2+1)^2}dx$ Ответ: $J=\frac{x}{4(1+x^2)}+\frac{1}{4}arctgx-\frac{arctgx}{2(1+x^2)}+c$

3. $J=\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^3+2x+3)^2(x+1)}dx$

Ответ: $J=-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{3}}{4}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\ln(x+1)+c$

4. $J=\int \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}dx$ Ответ: $J=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}}+c$

Билет 12

1. $J=\int(2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}dx$ Ответ: $J=\frac{x^2-3x+5}{2}+c$

2. $J=\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx$ Ответ: $J=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{1}{x}\arcsin x+c$

3. $J=\int\frac{2x-1}{(x-1)(x+2)}dx$ Ответ: $J=\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+c$

4. $J=\int\frac{\cos^3 x}{\sin 4x}dx$ Ответ: $J=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+c$

Билет 13

1. $J=\int\frac{dx}{x+4}$ Ответ: $J=\ln|x+4|+c$

2. $J=\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ Ответ: $J=x\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|-\sqrt{1+x^2}+c$

3. $J=\int\frac{xdx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$ Ответ: $J=\frac{1}{8}\ln\frac{|x+3|^6}{|x-5|^5|x+1|}+c$

4. $J=\int\sin 5x\sin 3xdx$ Ответ: $J=-\frac{\sin 8x}{16}+\frac{\sin^2 x}{4}+c$

Билет 14

1. $J=\int\frac{x^3dx}{1-2x^4}$ Ответ: $J=-\frac{1}{8}\ln\left|1-2x^4\right|+c$

2. $J=\int\sqrt{x}\ln^2 xdx$ Ответ: $J=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+c$

3. $J=\int\frac{dx}{(1-x)^2(x-2)}$ Ответ: $J=\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+c$

4. $J=\sin^3 xdx$ Ответ: $J=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+c$

Билет 15

1. $J=\int\frac{dx}{(2x-3)^2}$ Ответ: $J=-\frac{1}{2(2x-3)}+c$

2. $J=\int x^2\sin 2xdx$ Ответ: $J=-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x-\frac{x}{2}\sin 2x+c$

3. $J=\int\frac{x-8}{x^3-4x^2-4x}dx$ Ответ: $J=\frac{3}{x-2}+\ln\frac{(x-2)^2}{x^2}+c$

4. $J=\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ Ответ: $J=tgx+\frac{1}{3}tg^3x+c$

Билет 16

1. $J=\int x^{23}\sqrt{1+x^3}\,dx$ Ответ: $J=\frac{(1+x^3)\sqrt[3]{1+x^3}}{4}+c$

2. $J=\int \sin x \ln|tgx|dx$ Ответ: $J=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|-\cos x \ln tgx+c$

3. $J=\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$ Ответ: $J=-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+c$

4. $J=\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$ Ответ: $J=\frac{3}{5}\left(\cos^{\frac{3}{5}} x\right)+3\left(\cos^{\frac{1}{3}} x\right)+c$

Билет 17

1. $J=\int \frac{mdx}{\sqrt[3]{a+bx}}$ Ответ: $J=\frac{3m\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{2b}+c$

2. $J=\int x^2e^{2x}dx$ Ответ: $J=-\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+c$

3. $J=\int \frac{2x^2-3x+3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$ Ответ: $J=\ln\frac{(x^2+2x+5)^{\frac{3}{2}}}{|x-1|}+\frac{1}{2}arctg\frac{x-1}{2}+c$

4. $J=\int \frac{dx}{5-3\cos x}$ Ответ: $J=\frac{1}{2}arctg\left|2tg\frac{x}{2}\right|+c$

Билет 18

1. $J=\int \frac{(6x-5)dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$ Ответ: $J=\sqrt{3x^2-5x+6}+c$

2. $J=\int arctgx dx$ Ответ: $J=-\frac{x}{2}+\frac{1+x^2}{2}arctgx+c$

3. $J=\int \frac{x^5}{x^3-1}dx$ Ответ: $J=\frac{1}{3}\left(x^3+\ln|x^3-1|\right)+c$

4. $J=\int \frac{dx}{5-3\cos x}$ Ответ: $J=\frac{1}{2}arctg\left|2tg\frac{x}{2}\right|+c$

Билет 18

1. $J=\int \frac{(6x-5)dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$ Ответ: $J=\sqrt{3x^2-5x+6}+c$

2. $J=\int arctgx dx$ Ответ: $J=-\frac{x}{2}+\frac{1+x^2}{2}arctgx$

3. $J=\int \frac{x^5}{x^3-1}dx$ Ответ: $J=\frac{1}{3}\left(x^3+\ln\left|x^3-1\right|\right)+c$

4. $J=\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$ Ответ: $J=arctg\left(2\sin^2 x-1\right)+c$

Билет 19

1. $J=\int \frac{5xdx}{2x+1}$ Ответ: $J=\frac{5}{2}\ln\left|2x+1\right|+c$

2. $J=\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ Ответ: $J=-\frac{1}{x}\left(\ln^2 x+2\ln x+2\right)$

3. $J=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$ Ответ: $J=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+c$

4. $J=\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$ Ответ: $J=x-tg\frac{x}{2}+c$

Билет 20

1. $J=\int x^3\sqrt{1-x}dx$ Ответ: $J=\frac{1-x}{3}+c$

2. $J=\int (\arcsin x)^2 dx$ Ответ: $J=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$

3. $J=\int \frac{x+1}{\left(2x+x^2\right)\sqrt{2x+x^2}}dx$ Ответ: $J=-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}+c$

4. $J=\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}$ Ответ: $J=\sqrt{2}arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)-x+c$

Билет 21

1. $J=\int \frac{x^4dx}{x^5-2}$ Ответ: $J=\frac{1}{5}\ln\left|x^5-2\right|+c$

2. $J=\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ Ответ: $J=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+c$

3. $J=\int \frac{(3x+2)dx}{x(x+1)^3}$ Ответ: $J=\frac{4x+3}{2(x+1)^3}+\ln\frac{x^2}{(x+1)^2}+c$

4. $J=tg5xdx$ Ответ: $J=\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}=\ln\left|\cos x\right|+c$

Билет 22

1. $J = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ Ответ: $J = -\sqrt{1+x^2} + c$

2. $J = \int x\cos^2 x dx$ Ответ: $J = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + c$

3. $J = \int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ Ответ: $J = \frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2} + c$

4. $J = \int \frac{1}{1\sqrt{tgx}}dx$

Ответ: $J = 2\sqrt{2}\ln\frac{tgx+\sqrt{tgx}\sqrt{2}+1}{tgx-\sqrt{2}\sqrt{tgx}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{tgx}\sqrt{2}}{\sqrt{tgx}-1}$

Билет 23

1. $J = x^6\sqrt{x^7-2}dx$ Ответ: $J = \frac{2}{21}(x^7-2)\sqrt{x^7-2} + c$

2. $J = \int x^2 \arccos x dx$ Ответ: $J = -\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{3}\arccos x + c$

3. $J = \int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$ Ответ: $J = \frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3x-1}{\sqrt{5}} + c$

4. $J = \int \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x\cos^5 x}}dx$ Ответ: $J = -2\sqrt{ctgx} + \frac{2}{3}\sqrt{tg^3 x}$

Билет 24

1. $J = \int \frac{x^2dx}{x^3+1}$ Ответ: $J = \frac{1}{3}(x^3+1) + c$

2. $J = \int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$ Ответ: $J = x - \frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + c$

3. $J = \int \frac{7x+1}{6x^{2+x-1}}dx$ Ответ: $J = \frac{2}{3}\ln(3x-1) + \frac{1}{2}\ln|2x+1| + c$

4. $J = \int \sin^3 2x\cos^3 3x dx$

Ответ: $J = -\frac{3}{16}\cos 2x + \frac{3}{64}\cos 4x + \frac{1}{48}\cos 6x - \frac{3}{128}\cos 8x + \frac{1}{192}\cos 12x + c$

Билет 25

1. $J = \int \frac{5dx}{x^3+1}$ Ответ: $J = \frac{1}{3}(x^3+1) + c$

2. $J = \int arctg\sqrt{x}dx$ Ответ: $J = -\sqrt{x} + (1+x)arctg\sqrt{x} + c$

3. $J=\int\frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx$

Ответ: $J=\frac{1}{5}\ln\left|5x^2-x+2\right|-\frac{8}{5\sqrt{39}}arctg\frac{10x-1}{\sqrt{39}}+c$

4. $J=\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

Ответ: $J=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{8}\right)\right|+c$

Определенный интеграл

Основные понятия и теоремы

Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a;b]$ $(a<b)$. Произвольное разбиение сегмента $[a;b]$ точками $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ на n частичных сегментов $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,3,....,n)$ будем обозначать символом T. Положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Выберем на каждом сегменте $[x_{i-1},x_i]$ произвольную точку ξ_i и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I(x_i,\xi_i).$$

Число $I(x_i,\xi_i)$ называется интегральной суммой функции $f(x)$ соответствующей данному разбиению T и данному выбору промежуточных точек ξ_i на сегменте$[x_{i-1},x_i]$. Обозначим через $\Delta = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$ диаметр разбиения T.

<u>Определение 4.1.</u> Число I называется пределом интегральных сумм $I(x_i\xi_i)$ при $\Delta\to 0$, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ такое, что для всякого разбиения T, у которого $\Delta<\delta$, выполняется неравенство $|I(x_i,\xi_i)-I|<\varepsilon$ при любом выборе промежуточных ξ_i точек на $[x_{i-1},x_i]$.

<u>Определение 4.2.</u> Функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на сегменте $[a;b]$, если существует $\lim\limits_{\Delta\to 0} I(x_i,\xi_i)=I$.

При этом число I называются определенным интегралом от функции $f(x)$ по сегменту $[a;b]$ и обозначается так:

$$I=\int_a^b f(x)dx.$$

<u>Теорема 4.1.</u> Непрерывная на сегменте $[a;b]$ функция $f(x)$ интегрируема на нем.

Теорема 4.2. Кусочно-непрерывная функция (т.е. имеющая на сегменте $[a;b]$ конечное число точек разрыва первого рода) интегрируема на этом сегменте.

Теорема 4.3. Монотонная на сегменте $[a;b]$ функция $f(x)$ интегрируема на нем.

Теорема 4.4 *(Свойства определенного интеграла).*

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3.Линейность интеграла. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, α и β - любые вещественные числа, то функция $\alpha f(x)+\beta g(x)$ также интегрируема на $[a;b]$, причем

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx .$$

4. Если $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на, $[a;b]$ причем

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx . \qquad (a<b).$$

5. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то функция $f(x)g(x)$ также интегрируема на $[a;b]$.

6. Если $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[c;d]\subset[a;b]$.

7. Аддитивность интеграла. Если $f(x)$ интегрируема на $[a;c]$ и $[c;d]$, то она интегрируема также на $[a;b]$, причем

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$

При этом точка c может быть произвольно расположена относительно a и b.

8. Если $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ $(a < b)$ и $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

9. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $f(x) \geq g(x)$ $\forall$ $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

10.Если $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \not\equiv 0$ на $[a;b]$, то $\exists$ $K > 0$ такое, что $\int_a^b f(x)dx \geq K$.

<u>Теорема 4.5</u> *(Формула среднего значения)*. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, $g(x) \geq 0$ $(g(x) \leq 0)$ $\forall$ $x \in [a;b]$, $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$. Тогда существует число $\mu \in [m, M]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx . \tag{5}$$

<u>Следствие 1.</u> Если в формуле (5) положить $g(x) = 1$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a), \quad \text{где } \mu \in [m; M]. \tag{6}$$

Число $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется средним значением функции $f(x)$ на сегменте $[a;b]$.

<u>Следствие 2.</u> Если выполнены условия теоремы 4.5 и функция $f(x)$ непрерывна, то $\exists$ $\xi \in [a;b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx . \qquad (7)$$

Следствие 3. Если $f(x)$ непрерывна $[a;b]$, то $\exists \ \xi \in [a;b]$ такое , что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \qquad (8)$$

Теорема 4.6. Непрерывная на сегменте $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную на этом сегменте. Одной из первообразных является функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt .$$

Теорема 4.7. *(Формула Ньютона Лейбница).* Для непрерывных функций справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ - первообразная функция $f(x)$ на $[a;b]$.

Теорема 4.7 *(Метод интегрирование по частям)* Если $f(x)$ и $g(x)$ имеют непрерывные производные на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx .$$

Примеры

1. Применяя подходящую замену переменной, вычислить

$$I = \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx .$$

Положим $x = a\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Такая замена переменной удовлетворяет всем условиям теоремы 4.7. Так как $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$, $dx = a\cos t dt$, то

$$I = a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}$$

2. Вычислить $I = \int_{1/l}^{\pi/2} |\ln x| dx$.

Разбивая интеграл I на сумму интегралов по сегментам $[1/l;1]$ и $[1;l]$ (чтобы освободиться от модуля) и применяя в каждом интеграле формулу, интегрирование по частям, получим

$$I = -\int_{1/l}^{1} \ln x dx + \int_{1}^{l} \ln x dx = -x\ln x \,\Big|_{1/l}^{1} + \int_{1/l}^{1} dx + x\ln x \,\Big|_{1}^{l} - \int_{1}^{l} dx = -\frac{1}{l} + \left(1 - \frac{1}{l}\right) + l - (l-1) = 2\left(1 - \frac{1}{l}\right)$$

Контрольная работа №2

Билет 1

1. $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{0}} \frac{\cos x dx}{6 - 5\sin x - \sin^2 x}$ Ответ: $J = \ln \frac{3}{4}$

2. $J = \int\limits_0^1 x e^{-x} dx$ Ответ: $J = 6 - 2e$

3. $J = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2} dx$ Ответ: $J = 8\ln 3 - 15\ln 2 + \frac{13}{8}$

4. $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$ Ответ: $J = 1$

Билет 2

1. $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$ Ответ: $J = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

2. $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ Ответ: $J = \frac{\pi}{2} - 1$

3. $J = \int\limits_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 5x + 1}} dx$ Ответ: $J = \ln \frac{7 + 2\sqrt{7}}{9}$

4. $J = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$ Ответ: $J = \frac{3}{2}$

Билет 3

1. $J = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ Ответ: $J = 2 - 2\ln 2$

2. $J = \int\limits_0^{\pi} x^3 \sin x dx$ Ответ: $J = \pi^3 - 6\pi$

3. $J = \int\limits_0^1 \frac{(3x + 2)dx}{(x^2 + 4x + 1)^{\frac{5}{2}}}$ Ответ: $J = \frac{19}{27} - \frac{5}{6\sqrt{6}}$

4. $J = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx$ Ответ: $J = 2$

Билет 4

1. $J=\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$ Ответ: $J=0{,}2\ln 112$

2. $J=\int\limits_0^a \sqrt{a^2+x^2}\,dx$ Ответ: $J=\frac{\pi a^3}{4}$

3. $J=\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{x^2+x+11}$ Ответ: $J=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

4. $J=\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ Ответ: $J=200\sqrt{2}$

Билет 5

1. $J=\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\left(1+x^3\right)^2}$ Ответ: $J=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

2. $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$ Ответ: $J=\frac{e^{\pi}-2}{5}$

3. $J=\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$ Ответ: $J=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

4. $J=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$ Ответ: $J=\frac{4}{3}$

Билет 6

1. $J=\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$ Ответ: $J=7+2\ln 2$

2. $J=\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$ Ответ: $J=\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$

3. $J=\int\limits_1^5 \frac{\left(15x^2-4x-81\right)dx}{(x-3)(x+4)(x-1)}$ Ответ: $J=\ln\left|2^3 9^5 4^7\right|$

4. $J=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$ Ответ: $J\approx 0{,}083$

Билет 7

1. $J=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$ Ответ: $J=2-\frac{\pi}{2}$

2. $J=\int\limits_0^{\pi} x\sin x dx$ Ответ: $J=\pi$

3. $J=\int\limits_1^{a} \frac{dx}{x^2+\sqrt{a^2-x^4}}$ Ответ: $J=\frac{\pi}{4}$

4. $J=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx$ Ответ: $J=2$

Билет 8

1. $J=\int\limits_3^{8} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$ Ответ: $J=\frac{32}{3}$

2. $J=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx$ Ответ: $J=\frac{\pi\left(9-4\sqrt{3}\right)}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

3. $J=\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{\left(2x^{2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}$ Ответ: $J=arctg\frac{1}{2}$

4. $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin 2x dx$ Ответ: $J=\frac{2}{7}$

Билет 9

1. $J=\int\limits_0^{1} \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$ Ответ: $J=\frac{5}{3}-9\ln 2$

2. $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$ Ответ: $J=\frac{e^{\pi}-2}{5}$

3. $J=\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^2}$ Ответ: $J=\frac{7}{12}$

4. $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$ Ответ: $J=\frac{5+\sqrt{243}}{5}$

Билет 10

1. $J=\int\limits_0^{1} \frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$ Ответ: $J=\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$

2. $J=\int\limits_6^{2\pi} x^2\cos x dx$ Ответ: $J=4\pi$

3. $J=\int_0^1 \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$ Ответ: $J=\frac{1}{4}$

4. $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} ctg^6 dx$ Ответ: $J=\sqrt{3}-1+\frac{\sqrt{243}}{5}-\frac{\pi}{3}$

Билет 11

1. $J=\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$ Ответ: $J=8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$

2. $J=\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$ Ответ: $J=2\left|1-\frac{1}{e}\right|$

3. $J=\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{adx}{(x-a)(x-2a)}$ Ответ: $J=\ln\frac{3}{2}$

4. $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x} dx$ Ответ: $J=\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$

Билет 12

1. $J=\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\left(1+x^2\right)^3}$ Ответ: $J=\frac{\pi}{32}$

2. $J=\int_0^1 \arccos x dx$ Ответ: $J=1$

3. $J=\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$ Ответ: $J=0{,}2\ln\frac{4}{3}$

4. $J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x \sin 6x} dx$ Ответ: $J=\ln\sqrt{3}-\frac{2}{3}$

Билет 13

1. $J=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}\,dx}{x^2}$ Ответ: $J=\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$

2. $J=\int_0^{\sqrt{3}} x arctgx dx$ Ответ: $J=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $J=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$ Ответ: $J=arctg\frac{1}{7}$

4. $J=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2+\cos x)(3+\cos x)}dx$ Ответ: $J=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$

Билет 14

1. $J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x dx$ Ответ: J=1-e

2. $J=\int_2^5 x\ln(1+x)dx$ Ответ: J = 126 ln 2 – 18,5

3. $J=\int_1^{21}\frac{xdx}{x-x^3}$ Ответ: $J=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$

4. $J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}dx$ Ответ: $J=\frac{1}{2}$

Билет 15

1. $J=\int_0^1\sqrt[6]{(8-3x)^5}dx$ Ответ: $J=\frac{5}{33}-\sqrt[5]{5^4}$

2. $J=\int_1^3\cos\ln xdx$ Ответ: $J=\frac{3}{2}(\cos\ln 3+\sin\ln 3)$

3. $J=\int_2^3\frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$ Ответ: $J=\ln\sqrt{\frac{7}{8}}-\ln\sqrt{\frac{2}{3}}$

4. $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 xdx$ Ответ: $J=\frac{5\pi}{12}-\frac{249\sqrt{3}}{288}$

Билет 16

1. $J=\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}dx$ Ответ: $J=\frac{9\sqrt[3]{9}}{4}-\frac{1}{4}$

2. $J=\int_5^{2\pi}\sin x\ln|tgx|dx$ Ответ: $J=\frac{1}{2}\ln\sqrt{3}-\ln\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. $J=\int_0^1\frac{x^2dx}{(x+4)^2(x+2)^2}$ Ответ: $J=-\frac{111}{15}+\ln\frac{25}{9}+\ln 4$

4. $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}}dx$ Ответ: $J=\frac{12}{5}$

Билет 17

1. $J=\int\limits_2^3 \frac{(2x-1)dx}{(x-1)(x+2)}$ Ответ: $J=\ln\frac{8}{3}-\ln\frac{1}{2}$

2. $J=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^3 x dx$ Ответ: $J=\frac{2}{3}$

3. $J=\int\limits_{-1}^{0}(2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}dx$ Ответ: $J=$ -2

4. $J=\int x\cos x$ Ответ: $J=2$

Билет 18

1. $J=\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}dx$ Ответ: $J=\frac{33}{2}$

2. $J=\int\limits_0^1 x^2 e^{-2x}dx$ Ответ: $J=-\frac{5e^2+1}{4}$

3. $J=\int\limits_2^4 \frac{(x+1)dx}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}$ Ответ: $J=\frac{1}{\sqrt{24}}-\frac{1}{\sqrt{8}}$

4. $J=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}dx$ Ответ: $J=2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}+\frac{8\sqrt{3}}{3}$

Билет 19

1. $J=\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2dx}{x^3+1}$ Ответ: $J=\frac{4}{3}$

2. $J=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ Ответ: $J=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

3. $J=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$ Ответ: $J=\frac{1}{32}(\pi+\frac{7\sqrt{3}}{2}-8)$

4. $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ Ответ: $J=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln tg\frac{\pi}{8}$

Билет 20

1. $J=\int\limits_{2,5}^{5} \frac{(\sqrt{25-x^2})}{x^4}dx$ Ответ: $J=\frac{\pi}{3}$

2. $J=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$ Ответ: $J=2(1-\frac{1}{e})$

3. $J=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$ Ответ: $J=\ln\frac{\sqrt{3}}{3}-\ln\sqrt{3}$

4. $J=\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$ Ответ: $J=\frac{1}{8}(\ln\frac{729}{325}-\ln\frac{4}{243})$

Билет 21

1. $J=\int\limits_{6}^{2}(e^x-1)^4e^xdx$ Ответ: $J=0{,}2(e^x-1)^5$

2. $J=\int\limits_{0}^{\ln 2}xe^{-x}dx$ Ответ: $J=\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$

3. $J=\int\limits_{0}^{1}\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^3+2x+3)^2(x+1)}dx$ Ответ: $J=\frac{17}{12}-\frac{53}{4}arctg\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}arctg\sqrt{2}-\ln 2$

4. $J=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}tgxdx$ Ответ: $J=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$

Билет 22

1. $J=\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1+x}dx$ Ответ: $J=\frac{2(\sqrt{8}-1)}{3}$

2. $J=\int\limits_{0}^{\pi}x\sin xdx$ Ответ: $J=-\pi$

3. $J=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ Ответ: $J=\frac{5\sqrt{3}}{18}$

4. $J=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}ctgxdx$ Ответ: $J=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln\frac{1}{2}$

Билет 23

1. $J=\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx$ Ответ: $J=\frac{8}{15}$

2. $J=\int\limits_{0}^{2\pi}x^2\cos xdx$ Ответ: $J=4\pi$

3. $J=\int\limits_{3}^{4}\frac{32x\,dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$ Ответ: $J=\ln 7-7\ln 5+11\ln 3$

4. $J=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}x\cos x\,tgx\,dx$ Ответ: $J=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

Билет 24

1. $J=\int\limits_{4}^{9}\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}dx$ Ответ: $J=7\frac{2}{3}$

2. $J=\int\limits_{0}^{1}\arccos x\,dx$ Ответ: $J=1$

3. $J=\int\limits_{5}^{7}\frac{x-8}{x^3-4x^2}dx$ Ответ: $J=-\frac{1}{12}+\ln\frac{5}{6}-\ln\frac{3}{4}$

4. $J=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{0}\cos(2x+\frac{\pi}{6})dx$ Ответ: $J=0$

Билет 25

1. $J=\int\limits_{0}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ Ответ: $J=\frac{\pi}{16}$

2. $J=\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}x\,arctgx\,dx$ Ответ: $J=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $J=\int\limits_{3}^{5}\frac{2x-1}{(x-1)(x+2)}dx$ Ответ: $J=\ln\frac{27}{4}-\ln\frac{1}{2}$

4. $J=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,ctgx\,dx$ Ответ: $J=-2$

Контрольная работа №3

Билет 1

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными уравнениями $y=x^2$, $x+y=4$.

Ответ: S= $4\frac{1}{2}$.

2. Найти длину дуги кривой $y=\sqrt{x^3}, 0 \le x \le 4$.

Ответ: L= $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$

3.Найти объем тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, J=\frac{c}{a}x, Z=0$

Ответ: $V=\frac{2}{3}\text{abc}$

4. Найти площадь поверхности, образованной вращением следующих кривых $y=x\sqrt{\frac{x}{a}}$, $0 \le x \le a$, вокруг оси OX.

Ответ: S = $\frac{4\pi a^3}{243}(21\sqrt{13}+2e\frac{3+\sqrt{13}}{2})$.

Билет 2

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=9x, y=3x$.

Ответ: S = $\frac{1}{2}$

2. Фигура, ограниченная одной дугой синусоиды $y=\sin x$ и осью OX, вращается вокруг оси OX. Найти объем тела вращения.

Ответ: V = $\frac{\pi^2}{2}$

3. Найти площадь поверхности, полученной вращением параболы $y^2=4ax$, вокруг оси OX от начала O до точки с абсциссой x =3a.

Ответ: S = $\frac{56\pi a^2}{3}$.

4. Вычислить статический момент прямоугольника с основанием *a* и высотой h относительно его основания.

Ответ: $a=\frac{h^2}{2}$

Билет 3

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3, y = 2x, y = x$

Ответ: S $= \frac{3}{2}$

2. Фигура, ограниченная кривой $y = e^x$ и прямыми $y = 0, x = 1$, вращается вокруг оси OX. Найти V тела вращения.

Ответ: $V = \frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$

3. Найти площадь поверхности образованной вращением кубической параболы $3y - x^3 = 0$ вокруг оси абсцисс (от $x_1 = 0$ до $x_2 = a$)

Ответ: S = $\frac{\pi}{9}(\sqrt{(1+a^4)^3} - 1)$

4. Найти моменты инерции однородной эллиптической пластины с площадями a и b относительно ее главных осей (e=1).

Ответ: $M_2^{(x)} = a\frac{\pi ab^3}{4}, M_2^{(y)} = \frac{\pi ba^3}{4}$

Билет 4

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в прямоугольных координатах $y = 2x - x^2, x + y = 0$.

Ответ: S = $4\frac{1}{2}$

2. Найти объем чердака, основание которого есть прямоугольник со сторонами a и b, вернее ребро равно c, а высота h.

Ответ: $V = \frac{bh}{6}(2a + c)$

3. Определить центр тяжести однородного полушара радиуса a.

Ответ: $(0,0,\frac{3}{8}a)$

4. Найти длину дуги кривой $y = \cos^4 t, y = \sin^4 t$

Ответ: L = $1 - \frac{\ln(1+\sqrt{r})}{\sqrt{2}}$

Билет 5

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах $r = \frac{P}{1-\cos\varphi}, \varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: S = $\frac{P^2}{6}(3-4\sqrt{2})$

2. Найти длину дуги кривой $y = e^x, 0 \le x \le x_0$.

Ответ: L = $x_0 - \sqrt{2} + \sqrt{1+e^{2x_0}} - \ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}$

3. Найти объем параболы вращения, основание которой *a*, высота *h*.

Ответ: V = $\frac{1}{2}SH$

4. Скорость тела задается $V = \sqrt{1+t}$ м/сек. Найти путь, пройденный телом за первые 10сек после начала движения.

Ответ: S = 23,7м

Билет 6

1. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Ответ: $V = \frac{4}{3}\pi abc$

2. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $y = a\cos\frac{\pi x}{2b}, |x| \le b$ вокруг оси OX.

Ответ: $S = 2a\sqrt{a^2\pi^2 + 4b^2} + \frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi a + \sqrt{a^2\pi^2 + 4b^2}}{2b}$

3. Найти статический момент и момент инерции дуги полуокружности радиуса *a* относительно диаметра, проходящего через концы этой дуги. Ответ: $M_1 = 2a^2, M_2 = \frac{\pi a^3}{2}$

4. Стержень *ПВ,* длина которого l_1, масса $м_1$, притягивает точку с массой *m*, которая лежит на его продолжении на расстоянии *a* от ближайшего конца стержня *B*. Найти силу взаимодействия стержня и точки.

Ответ: $\dfrac{\kappa m\text{м}}{\text{a}(\text{a}+1)}$

Билет 7

1. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой

$y = tgx, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$, вокруг оси OX.

Ответ: $S = \pi(1\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \ln\dfrac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями, полученными при вращении линии $y = 2x - x^2, y = 0$.

Ответ: $V = \dfrac{16\pi}{15}$

3. Найти длину дуги кривой $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y, 1 \le y \le e$.

Ответ: $L = \dfrac{e^2+1}{4}$

4. Найти площадь, ограниченную замкнутой кривой $r = \dfrac{2at}{1+t^2}, \varphi = \dfrac{\pi t}{1+t}$.

Ответ: $S = \pi(1 - \dfrac{\pi}{4})a^2$

Билет 8

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в прямоугольных координатах $y = 2^x, y = 2, x = 0$.

Ответ: $S = 2 - \dfrac{1}{\ln 2} \approx 0{,}56$

2. Найти длину дуги кривой $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y, 1 \le y \le e$.

Ответ: $L = \dfrac{e^2+1}{4}$

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{z^2} = 1, 0 \triangleleft z \triangleleft a$.

Ответ: $\dfrac{\pi a^3}{2}$

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении линии $x^2+xy+y^2=a^2$ вокруг оси ОХ.

Ответ: $\frac{8\pi a^3}{3}$

Билет 9

1. Найти площадь фигуры заключенной между кривой $y=x^3$ и осью ОУ.

Ответ: 12

2. Криволинейная трапеция, ограниченная линией $y=xl^x$ и прямыми x=1 и y=0, вращается вокруг оси абсцисс. Найти V получаемого тела.

Ответ: $V=\frac{\pi}{4}(e^2-1)$

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс, ограниченного линией $x^4+y^4=a^2x^2$

Ответ: $V=\frac{2}{3}\pi a^3$

4. Капля с начальной массой *M* падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя ежесекундно массу *m*. Какова работа силы тяжести за время от начала движения до полного испарения капли (сопротивлением воздуха пренебречь).

Ответ: $\frac{g^2M^3}{6M^2}$

Билет 10

1. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении линии $y=e^x\sqrt{\sin x}, 0\le x\triangleleft+\infty$, вокруг оси ОХ.

Ответ: $\frac{\pi}{S(1-e^{-2\pi})}$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x+y+z^2=1, x=0, y=0, z=0$.

Ответ: $\frac{4}{15}$

3. Найти длину дуги кривой $y=\ln\cos x, 0\le x\le a\triangleleft\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\ln tg(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})$

4. Стержень АВ вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси oo' с угловой скоростью w. Поперечное сечение стержня S, длина l, из которого он изготовлен $\rho = 7{,}8 г/см^3$. Найти кинетическую энергию стержня.

Ответ: $1{,}3Sl^3 м^2$

Билет 11

1. Найти длину дуги кривой $y^2 = \frac{x^2}{2a-x}, 0 \le x \le \frac{5}{3}a$

Ответ: $4a(1+\sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$

2. Найти объем обелиска, в основании прямоугольник со сторонами *A,B,a,b,* а высота *h.*

Ответ: $\frac{h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)B]$

3. Найти момент инерции однородного шара радиуса R и массы *M* относительно его диаметра. Ответ: $\mu = \frac{2}{5}MR^2$

4. Определить координаты центра тяжести тела, образованного вращением площади $0 \le x \le a, y^2 \le 2px$ вокруг оси OX.

Ответ: $x_0 = 2/3\,a, y_0 = 0$

Билет 12

1. Найти длину дуги кривой $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t$

Ответ: $1+\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$

2. Найти объем усеченного конуса, в основаниях которого эллипсы с полуосями *A,B,a,b*, а высота *h.*

Ответ: $\pi\frac{h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)B]$

3. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $x^2+(y-b)^2=a^2, b\geq a$ вокруг оси OX.

Ответ: $4\pi^2 ab$

4. Однородный шар радиуса R и плотностью ∂ вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью w. Определить кинетическую энергию шара. Ответ: $\frac{4}{5}\pi\partial w^2 R^5$

Билет 13

1. Цилиндр диаметром 12 см и длиной 80 см заполнен паром под давлением 10 кг/см^2. Какую работу надо совершить, чтобы уменьшить объем пара в 2 раза, считая, что температура пара остается постоянной.

Ответ: 1740 кг/м

2. Определить координаты центра тяжести области $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$.

Ответ: $\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}$

3. Найти момент инерции $J_x=M_2^{(x)}, J_y=M_2^{(y)}$, относительно осей OX и OY параболического сегмента, ограниченного кривыми $ay=2ax-x^2, a\rhd 0$ и y=0.

Ответ: $J_x=\frac{8}{35}a^4, J_y=\frac{8}{5}a^4, x=a$

4. Найти площадь поверхности, образованной кривой $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ вокруг прямой y=x.

Ответ: $\frac{3\pi}{5}a^2(4\sqrt{2}-1)$

Билет 14

1. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении линии $x=a\sin^3 t, y=\cos^2 t, 0\leq t\leq 2\pi$ вокруг оси OY.

Ответ: $\frac{32}{105}\pi a^2 b$

2. Найти статический момент и момент инерции дуги полуокружности радиуса a относительно диаметра, проходящего через концы этой дуги. Ответ: $M_1 = 2a^2, M_2 = \frac{\pi a^3}{2}$

3. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривых $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ вокруг оси OX.

Ответ: $\frac{12}{5}\pi a^2$

4. Определить массу стержня длины l=10м, если линейная плотность стержня меняется по закону $\delta = 6 + 0{,}3x$ кг/м, где x - расстояние от одного из концов стержня.

Ответ: 75кг

Билет 15

1. Какую работу надо совершить, чтобы тело массы m поднять с поверхности земли, радиус которой R на высоту h.

Ответ: $A_h = mg\frac{Rh}{R+h}$

2. Определить координаты центра тяжести полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$

Ответ: $(0{,}0,\frac{a}{2})$

3. Фигура, ограниченная параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = \frac{p}{2}$, вращается вокруг прямой y=p. Найти объем и поверхность тела вращения.

Ответ: $V = \frac{4\pi}{3}p^2, p = 2\pi p^2[2 + \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$

4. Найти длину дуги кривой $y = a\ln\frac{a^2}{a^2 - x^2}, 0 \leq x \leq b \leq a$

Ответ: $a\ln\frac{a+b}{a-b} - b$

Билет 16

1. Найти площадь, ограниченную лепестком кривой $\Phi = \sin(\pi r), 0 \leq r \leq 1$.

Ответ: $\frac{1}{\pi}$

2. Найти длину дуги кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (астероида)

Ответ: 6^{a}

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax$.

Ответ: $\frac{2}{3}a^3(\pi - \frac{4}{3})$

4. Найти статический момент и момент инерции однородной прямоугольной пластины с основанием *b*и высотой *h* относительно основания (*e*=1).

Ответ: $M_1 = \frac{bh^2}{6}$

Билет 17

1. Найти площадь поверхности вращения вокруг кривой оси $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $2\pi a^2\sqrt{2}$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении вокруг оси OX.

Ответ: $\frac{U}{15}\pi ab^2$

3. Найти длину дуги кривой $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi$.

Ответ: 8*a*

4. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиусом *a,* диаметр которого находится на поверхности воды.

Ответ: $\frac{2}{3}a^2$

Билет 18

1. Найти статические моменты и координаты центра тяжести криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y^2 = \int_2^2 (x) = 2px$ и прямыми $y = \int (x) = 0, x = 1$.

Ответ: $M_x = \frac{p}{x}, M_y = \frac{2\sqrt{2}p}{5}, x_0 = \frac{3}{4}, y_0 = \frac{3}{8}\sqrt{2p}$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = a^2, z = \sqrt{3y}, z = 0, y \geq 0$.

Ответ: $V = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Ответ: $S = \frac{3}{8}\pi a^2$

4. Определить, с какой силой притягивается круглая пластина радиуса a и постоянной поверхностной плотности δ_0 материальную точку p массы m, находящуюся на перпендикуляре к плоскости пластины, проходящем через ее центр Q, на кратчайшем расстоянии PQ, равному b.

Ответ: $2\pi Rm\delta_0(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}})$, R-постоянная тяготения.

Билет 19

1. Найти моменты инерции $J_x = M_2^{(x)}$ и $J_y = M_2^{(y)}$ относительно осей OX и OY параболического сегмента, ограниченного кривыми $ay = 2ax - x^2, a \triangleright 0, y = 0$.

Ответ: $J_x = \frac{8}{35}a^4, J_y = \frac{8}{5}a^4$

2. С какой силой притягивает материальная бесконечная прямая с постоянной линейной плотностью ρ_0 материальную точку массы m, находящуюся на расстоянии a от этой прямой.

Ответ: проекциями силы притяжения на координатной оси x=0, $M_м = -\frac{2Rm\rho_0}{a}$

где R-постоянная тяготения

3. Найти объем параболоида вращения, основание которого S а высота H.

Ответ: $\frac{1}{2}SH$

4. Найти длину дуги $r = a\sin^3\frac{\phi}{3}$. Ответ: $\frac{3\pi a}{2}$

Билет 20

1. Найти длину кривой $r = y + \cos t, \text{ф} = \text{t - tg}\frac{\text{t}}{2}, 0 \le t \le T \triangleleft T_0$

Ответ: Т

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в прямоугольных координатах $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$. Ответ: $\pi a^2\sqrt{2}$

3. Найти объем тела, образованного вращением площади, заданной в полярных координатах, вокруг OX

Ответ: $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz = a^2$

Ответ: $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}a^3$

Билет 21

1. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $z^2 = b(a - x), x^2 + y^2 = ax$

Ответ: $\frac{16}{15}a^2$

2. Найти объем тела, образованного вращением площади, ограниченной линиями $\phi = \pi r^3, \phi = \pi$ вокруг полярной оси

Ответ: $\frac{2}{3}\pi$

3. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $r = a(1 + cos\varphi)$ вокруг полярной оси

Ответ: $\frac{32}{5}\pi a^2$

4. Найти площадь, ограниченную кривой, заданной параметрически $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$.

Ответ: $\frac{8}{15}$

Билет 22

1. Найти площадь, ограниченную кривой, заданной параметрически $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi$ (циклоида и y=0). Ответ: $2\pi a^2$

2. Найти длину дуги кривой $x = aJ\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}, 0 \le b \le y \le a$

Ответ: $x = aJ\frac{a}{b}$

3. Найти объем тел, ограниченных поверхностью $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, z=\pm c$

Ответ: $\frac{8\pi abc}{3}$

4. Найти объем тела, образованного вращением площади $a \le r \le a\sqrt{2\sin^2\varphi}$ вокруг полярной оси

Ответ: $\frac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}$

Билет 23

1. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении линии $x^2+(y-b)^2=a^2, 0 \triangleleft a \le b$ вокруг OX.

Ответ: $2\pi^2 a^2 b$

2. Тело образованно вращением вокруг OX фигуры, ограниченной параболой $ay = a^2 - x^2$ и осью OX. Найти отношение поверхности тела вращения к поверхности равновеликого шара.

Ответ: $\frac{5}{128^3\sqrt{10}}[14\sqrt{5}+17y_n(2+\sqrt{5})] \approx 1{,}013$

3. Найти статический момент и момент инерции однородной треугольной пластинки с основанием b и высотой h относительно основания (p=1). Ответ: $M_1 = \frac{bh^2}{6}, M_2 = \frac{bh^3}{12}$

4. Найти статический момент дуги параболы $y^2 = 2px, 0 \le x \le \frac{p}{2}$ относительно прямой $x = \frac{p}{2}$. Ответ: $\frac{p^2}{8}[\sqrt{2}+5y_n(1+\sqrt{2})]$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа - М.: ФИЗМАТЛИТ, Т.1. -2009 - 399 с. ISBN 978-5-9221-0183-7. -**ISBN**978-5-9221-0184-4.–**Экз.** ОХФ (1), ОХФ-ЧЗ-4 (2), ОУОЕН (27)

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу – М.: АСТ: Астрель, 2007, 2009. **Экз.** ОУОЕН (143). **Экз.** ОУОЕН (11)

3. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа [Электронный ресурс]: учеб. пособие - Москва: Лань, 2008. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=41

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1-3. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003 - 2006.

5. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, в 2-х кн. Издательство Московского университета, 2000.