А.Д. Луньков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТРАХОВАНИЯ

Учебное пособие для студентов дневного отделения механико-математического факультета

УДК 519.25

Луньков А. Д.,

Математические основы страхования: Учеб. пособие для студентов механико-математического факультета, 50 с.

Пособие содержит лекции по курсу «Математические основы страхования» для студентов направления «Прикладная математика и информатика » механико-математического факультета.

УДК 519.25

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Учебное пособие по дисциплине «Математические основы страхования» предназначено для бакалавров, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика» в рамках профиля «Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности». Безусловно, страховые задачи интересны также и специалистам в бизнес-информатике, экономистам, юристам. Дисциплина в значительной мере опирается на теорию вероятностей и математической статистики, а также на методы оптимизации.

Пособие содержит теоретические сведения о моделировании продолжительности жизни, о показателях, связанных с этой продолжительностью и представляющих интерес для страховщиков. Дан обзор аналитических методов, связанных с вероятностным описанием продолжительности жизни как случайной величины. Для различных схем страхования рассмотрены выплаты, сроки страхования и прочие характеристики.

Страхование - важнейший элемент системы общественных (главным образом, экономических отношений), который присущ любой исторически сложившейся форме совместной деятельности людей. Страхование с момента его зарождения постепенно оформилось в эффективный способ возмещения ущерба, нанесенного собственнику материальных ценностей в результате чрезвычайных событий, которые были во все времена, при всех системах устройства человеческого общества. Существуют определенные ограничения страховой защиты. Например, она ограничена тем, что уменьшает последствия только тех проявлений случайных событий, которые могут измеряться в денежных единицах.

В первом разделе приведены основные понятия, методы и модели, которые понадобятся для изучения продолжительности жизни как случайной величины. Эти сведения – теоретическая база для страхования жизни.

Во втором разделе проанализирована основная случайная величина, интересующая страховую компанию – остаточная продолжительность жизни.

В третьем разделе приведены многомерные обобщения понятий и результатов, приведенных в предыдущих разделах. Такие обобщения необходимы при расчетах, связанных с пенсионным страхованием жизни, страхованием здоровья группы лиц.

В четвертом разделе рассмотрены методы генерации случайных величин.

В пятом разделе рассматриваются особенности современного страхования. Анализируется специфика страхования жизни в России, динамика развития данного вида страхования и его перспективы.

В шестом разделе рассмотрены общие сведения о страховых моделях, не связанных с продолжительностью жизни.

1.Некоторые общие сведения о вероятностных характеристиках продолжительности жизни и задачах страхования

Различают актуарную математику в имущественном и личном страховании. Под имущественным страхованием понимается страхование жилья, автомобилей, предприятий, банковских капиталов. Под личным страхованием понимается страхование жизни, здоровья, пенсий и т.д.

Страховыми премиями назовем денежные суммы, которые страхуемые платят страховой компании. Поставим в соответствие им величины $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Аналогично определим страховые выплаты, которые платит компания, в результате наступления страховых случаев - $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$, $\nu \le n$, где v общее число страховых случаев. Страховым случаем считается смерть или продолжающаяся жизнь (дожитие) застрахованного.

Величины страховых выплат должны существенно превышать страховые премии, т. е. $b_j > p_j$, т. к. иначе страхование было бы бессмысленно. Если застрахованный приобрел за p рублей страховой полис, то тем самым он избавил себя от риска финансовых потерь, связанных с неопределенностью страхового случая. Этот риск приняла на себя страховая компания, для которой риск заключается в случайности иска, который может быть ей предъявлен.

Страховые события в страховании жизни относятся к событиям, для которых характерна статистическая устойчивость, т.е. частоты их наступления при большом числе страховых контрактов изменяются в малом диапазоне. Это позволяет применять вероятностные и статистические методы для оценки премий и резервов по большой группе однородных страховых контрактов

Для создания простейшей математической модели, объясняющей численность населения, используется гипотеза «стационарного населения», согласно которой смертность и рождаемость в фиксированном классе населения постоянны и не зависят от времени. В условиях стационарности населения l_x - это число лиц, достигающих ежегодно возраста x; d_x – число лиц, умирающих ежегодно между возрастом x и $(x+1)$; L_x – число лиц, имеющих в данный момент возраст из промежутка $[x, x+1]$ и, согласно гипотезе стационарного населения, это число не меняется со временем.

В страховой математике можно выделить следующие важные проблемы.

1. **Поиск разумного соотношения между премией *p* и выплатой *b***. С этим поиском связаны, например, расчет нетто-премий, брутто-премий, расчет выплат, которые может позволить себе страховая компания и т.д.

2. **Расчет вероятности разорения.** Если обозначить как U капитал компании или ее резерв, а через $S = b_1 + b_2 + \cdots + b_v$ — сумму выплат, где b_j — иск j-го страхуемого к компании, то вероятность разорения равна $P(S>U)$, а вероятность неразорения равна $P(S \le U)$.

3. **Расчет резервов страховой компании.**

Решение указанных проблем проиллюстрируем на примере простейшей модели работы страховой компании, построенной с использованием центральной предельной теоремы.

Рассмотрим следующую идеализированную схему. Пусть в начале года в фирме застраховалось n мужчин возраста x=30 лет. Будем считать, что каждый клиент платит премию p, и, следовательно, фирма получила суммарный доход $p \cdot n$, который и будет составлять ее резерв U. Обозначим через b_i=1 иски, предъявляемые к фирме, если в течение года i-ый клиент умрет.

Предположим, вероятность смерти в возрасте 30 лет = 0.005, т.е. $P(b_i=1) = q_{30} = 0.005$. Отсюда, находим $P(b_i = 0) = p_{30} = 1 - q_{30} = 0.995$.

Вероятность того, что компания не разорится, равна

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i \le U\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i - E\sum_{i=1}^{n} b_i}{\sqrt{D\sum_{i=1}^{n} b_i}} \le \frac{U - E\sum_{i=1}^{n} b_i}{\sqrt{D\sum_{i=1}^{n} b_i}}\right\} \quad (1.1)$$

Учитывая дискретность случайных величин b_i , для любых i=1,…,n имеем

$$Eb_i = 1 \cdot q_{30} + 0 \cdot p_{30} = q_{30} = 0.005,$$

$$Db_i = Eb_i^2 - (Eb_i)^2 = 0.005 - (0.005)^2 \approx 0.004975 .$$

Вероятность того, что компания не разорится, преобразуется к виду

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i \le U\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i - n \cdot 0.005}{\sqrt{n \cdot 0.004975}} \le \frac{U - n \cdot 0.005}{\sqrt{n \cdot 0.004975}}\right\}$$

Пусть число застраховавшихся n = 3000, тогда nEb_{i} = 3000 ·0,005 =15 9, nDb_i = 3071 ·0.004975 ≈ 14,925, т.е. среднее и дисперсия случайной величины S совпадают. Отсюда также можно сделать предположение о том, что случайная величина S распределена по закону Пуассона. На практике обычно иски b_i независимы, потому воспользуемся центральной предельной теоремой, в силу которой

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i - 15}{3,863} < \frac{U - 15}{3,863}\right\} \approx \Phi\left(\frac{U - 15}{3,863}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$— функция распределения стандартного нормального закона.

Предположим, руководство компании устраивает вероятность неразорения 0.95. Тогда, решая относительно $\frac{U-15}{3,863}$ уравнение, получаем $\Phi\left(\frac{U-15}{3,863}\right)$=0.95 .

Имеем $\frac{U-15}{3,863} = x_0$, где x_0=1.645 - 0.95-процентный квантиль стандартного нормального закона. Следовательно, страховая компания в этом случае должна иметь резерв U = 3 · 3.863 + 15 ≈26.589, а плата за страховку (премия) должна составить 0.863 % от иска b =1, так как

$$p = \frac{U}{n} = \frac{26.589}{3000} = 0.00863$$

Если b = 100000 руб., то премия p = 100000 · 0.863% ≈863 руб. в год,.

Рассмотрим одно из основных определений актуарной математики. Пусть X — продолжительность жизни человека, тогда вероятность того, что человек доживет до возраста x лет, обозначается как $s(x)=P(X>x)=1-F(x)$ и называется функцией выживания. В этом определении $F(x) = P(X < x)$ — функция распределения случайной величины X.

Функция выживания имеет простой статистический смысл. Допустим, производится наблюдение за группой из l_0 новорожденных (как правило $l_0 = 100000$) и имеется возможность фиксировать моменты их смерти. Обозначим число живых представителей этой группы в возрасте x через $L(x)$. Тогда $l_x = EL(x) = l_0 \cdot s(x)$. Таким образом, функция выживания $s(x)$ равна средней доле доживших до возраста x из некоторой фиксированной группы новорожденных.

В актуарной математике часто работают не с функцией выживания $s(x)$, а с величиной l_x (зафиксировав начальный размер группы l_0).

Плотностью распределения случайной величины X или кривой смерти называют функцию $f(x) = F'(x) = -s'(x)$. Функция выживания $s(x)$ может быть восстановлена по плотности:

$$\int_x^{\infty} f(u)du = s(x),$$

потому кривая смертей может быть использована в качестве функции, задающей распределение продолжительности жизни.

Еще одной важной функцией является функция интенсивности смертности $\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)}$. Для человека, дожившего до x лет, при малых t величина $\mu_x t$ приближенно равна вероятности смерти в интервале $(x, x+t)$.

Рассмотрим основные вероятностные распределения, используемые для моделирования процессов смертности.

Модель де Муавра (равномерное распределение)

Один из основоположников теории вероятностей А. Муавр предложил считать, что время жизни распределено равномерно на интервале $(0;\omega)$, где параметр ω называется предельным возрастом. Очевидно, для этой модели при $0<x<\omega$ имеем:

$$f(x)=\frac{1}{\omega}, F(x)=\frac{x}{\omega}, s(x)=1-\frac{x}{\omega}, \mu_x=\frac{f(x)}{s(x)}=\frac{1}{\omega-x}.$$

Отметим, что такое распределение не полностью отражает характерные особенности, связанные с продолжительностью жизни человека. Так, например, кривая смертей в рассматриваемой модели является горизонтальной прямой, в то время как эмпирические аналоги плотности распределения для данных по продолжительности жизни не монотонны.

Модель Гомпертца

В этой модели интенсивность смертности задается формулой

$$\mu_x=\frac{f(x)}{s(x)}=Be^{\alpha x},$$

где $\alpha>B>0$- некоторые параметры. Тогда функция выживания

$$s(x)=exp\left[-\int_0^x Be^{\alpha u}du\right]=exp[-B(e^{\alpha x}-1)/\alpha].$$

Соответственно, кривая смертей равна

$$f(x)=\mu_x s(x)=Bexp[\alpha x-B(e^{\alpha u}-1)/\alpha]$$

и имеет максимум в точке $x=(\ln\alpha-\ln B)/\alpha$.

Эту информацию можно использовать при нахождении оценок параметров α и B. Так, если из каких-то посылок нам известно, что максимальная смертность наблюдается для возраста x_{max}, а квартиль функции распределения Гомпертца $x_{0.25}$ известен, то система уравнений для нахождения оценок принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{ln\alpha-lnB}{\alpha}=x_{max}, \\ 1-exp\left[-\dfrac{B(e^{\alpha x_{0.25}-1})}{\alpha}\right]=0.25 \end{cases}$$

Безусловно, вместо квартиля может использоваться информация о значении любого другого квантиля.

Для оценки параметров функции Гомпертца можно использовать и метод максимального правдоподобия.

Рассмотрим функцию правдоподобия для распределения Гомпертца.

$$L(x_{1,}x_2\cdots x_n)=\prod_{i=1}^{n}B\exp(\alpha x_i-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x_i}-1))=B^n\exp(\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{B}{\alpha}(\sum e^{\alpha x_i}-n)).$$

При максимизации этой функции, приравняв частные производные по параметрам к нулю, приходим к уравнениям:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n}{\alpha}-\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_ie^{\alpha x_i}}{(\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha x_i}-n)}=0.$$

$$B=\frac{n\alpha}{(\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha x_i}-n)}$$

Первое уравнение нелинейно относительно α. Решив его численно, найдем из второго уравнения параметр B.

В качестве метода решения для нелинейного уравнения можно использовать метод Ньютона.

Критерием остановки является выполнение неравенства $\|f(x^{(k)})\|<\varepsilon$.

В нашем случае $f(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n}{\alpha}-\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_ie^{\alpha x_i}}{(\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha x_i}-n)}$

Возникает вопрос о начальном приближении для α (метод Ньютона весьма чувствителен к выбору точки отсчета). В качестве такого приближения можно взять значение параметра α рассматриваемого далее распределения Мейкхама, полученное с помощью эмпирического метода 4-точечной аппроксимации, применяемого, помимо прочего, именно для задач аппроксимации уровня смертности. Он основан на информации о значениях числа доживших в 4 равноотстоящих временных точках. Естественно, такие точки можно выбрать не единственным образом.

Модель Мэйкхама

Модель Гомпертца – частный случай рассматриваемой здесь модели. Мэйкхам предложил приближать интенсивность смертности более общей функцией вида $\mu_x = A + Be^{\alpha x}$, где параметр A учитывает риски, связанные с несчастными случаями, а слагаемое $Be^{\alpha x}$ учитывает влияния возраста на смертность. Здесь

$$s(x) = exp\left[-\int_0^x (A + Be^{\alpha u})du\right] = exp\,[-Ax - B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha],$$

$$f(x) = -s'(x) = [A + Be^{\alpha x}]exp\,[-Ax - B(e^{\alpha x} - 1)/\alpha]\,.$$

Из рассмотренных моделей закон Мэйкхама представляется наиболее полно описывающим продолжительность жизни человека, так как в нем учитывается тот факт, что для малых возрастов преобладающую роль в смертности играют несчастные случаи, а с увеличением возраста их роль ослабевает.

Рассмотрим вопрос оценивания параметров данного распределения.

Итерационная процедура оценки параметров применяется к функции правдоподобия:

$$L(x_{1,}x_2\cdots x_n) = \prod_{i=1}^{n}(Be^{\alpha x_i} + A)\exp(-Ax_i - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x_i} - 1)) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(Be^{\alpha x_i} + A)\exp(-\sum_{i=1}^{n}Ax_i - \frac{B}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(e^{\alpha x_i} - 1))\,.$$

Логарифмическая функции правдоподобия имеет вид:

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n}\ln(Be^{\alpha x_i} + A) - A\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{B}{\alpha}(\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha x_i} - n)$$

Соответствующие частные производные будут равны:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial A} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{Be^{\alpha x_i} + A} - x_i)\;;$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial B}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{e^{\alpha x_i}}{Be^{\alpha x_i}+A})-\frac{(\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha x_i}-n)}{\alpha};$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}=B\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i e^{\alpha x_i}}{Be^{\alpha x_i}+A})+\frac{B}{\alpha^2}(\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha x_i}-n)-\frac{B}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}x_i e^{\alpha x_i}.$$

Уравнения правдоподобия $\frac{\partial \ln L}{\partial A}=0$, $\frac{\partial \ln L}{\partial B}=0$, $\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}=0$ при подстановке функции L приобретают вид:

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{Be^{\alpha x_i}+A}-x_i)=0;$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{e^{\alpha x_i}}{Be^{\alpha x_i}+A})-\frac{(\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha x_i}-n)}{\alpha}=0;$$

$$B\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i e^{\alpha x_i}}{Be^{\alpha x_i}+A})+\frac{B}{\alpha^2}(\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha x_i}-n)-\frac{B}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}x_i e^{\alpha x_i}=0.$$

Для решения системы уравнений правдоподобия, как и ранее, можно использовать метод Ньютона. Для расчетов необходимы следующие величины:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial A^2}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(Be^{\alpha x_i}+A)^2};\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial A \partial B}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\alpha x_i}}{(Be^{\alpha x_i}+A)^2};$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial A \partial \alpha}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{Bx_i e^{\alpha x_i}}{(Be^{\alpha x_i}+A)^2};\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial B^2}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{(e^{\alpha x_i})^2}{(Be^{\alpha x_i}+A)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial B \partial \alpha}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{Bx_i(e^{\alpha x_i})^2}{(Be^{\alpha x_i}+A)^2}+\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i e^{\alpha x_i}}{Be^{\alpha x_i}+A})-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i e^{\alpha x_i}}{\alpha}+\frac{(\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha x_i}-n)}{\alpha^2};$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{B^2 x_i{}^2(e^{\alpha x_i})^2}{(Be^{\alpha x_i}+A)^2}+\sum_{i=1}^{n}(\frac{Bx_i{}^2 e^{\alpha x_i}}{Be^{\alpha x_i}+A})-\frac{2B}{\alpha^3}(\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha x_i}-n)$$

$$+\frac{2B}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}x_i e^{\alpha x_i}-\frac{B}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2 e^{\alpha x_i}$$

Эти величины образуют матрицу производных, необходимую для итерационной процедуры метода Ньютона.

В качестве итеративного правила для нахождения очередного приближения при решении уравнения $f(x)=0$ метод Ньютона использует следующую формулу:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (f^{'}(x^{(k)})^{-1} f(x^{(k)}) .$$

В качестве x рассматривается вектор, состоящий из трех искомых параметров. Верхний индекс над переменной x указывает на номер итерации.

Критерием остановки, как и ранее, является выполнение неравенства $\left\| f(x^{(k)}) \right\| < \varepsilon.$

В качестве начального приближения снова можно взять значения, полученные с помощью метода 4-точечной аппроксимации.

Модель Вейбулла

Вейбулл в 1939 г. предложил приближать интенсивность смертности μ_x более простой степенной функцией вида kx^n. Соответственно, можно показать, что функция выживания имеет вид $s(x) = \exp(-kx^{n+1}/(n+1))$, а плотность $f(x)$ равна:

$$f(x) = kx^n \exp(-kx^{n+1}/(n+1)) .$$

Найдем максимум этой функции, проведя элементарные выкладки.

$$f'(x) = nkx^{n-1} \exp(-kx^{n+1}/(n+1)) + kx^n(-kx^n)\exp(-kx^{n+1}/(n+1)) = 0.$$

$$nkx^{n-1} = k^2 x^{2n}$$

$$n = kx^{n+1}$$

$$x = \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{(n+1)}} .$$

$$f''(x) = n(n-1)kx^{n-2} \exp(-kx^{n+1}/(n+1)) + nkx^{n-1}(-kx^n)\exp(-kx^{n+1}/(n+1)) +$$

$$+(-2nk^2x^{2n-1})\exp(-kx^{n+1}/(n+1)) + k^3x^{3n}\exp(-kx^{n+1}/(n+1)).$$

$$f''\left(\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{(n+1)}}\right) = (n-1)nk\exp(-n/(n+1)) - 3n^2k \ \exp(-n/(n+1)) + kn^2\exp(-n/(n+1)) =$$

$$= -nk\exp(-n/(n+1)) - n^2k\exp(-n/(n+1)) < 0.$$

Таким образом, максимум смертности по Вейбуллу достигается в $x = (n/k)^{1/(n+1)}$.

Для исследования свойств продолжительности жизни используем следующие теоремы о моментах случайных величин, носящие изначально общий, не относящийся к страховой математике, характер.

Теорема 1.1 (о среднем значении). Пусть непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$ и плотность $f(x)$, причем $F(0)=0$. Функция $z(x)$ неотрицательна, монотонна и дифференцируема, среднее $Ez(x) = \int_0^\infty z(x)f(x)dx < \infty$. Тогда

$$Ez(x) = z(0) + \int_0^\infty z'(t)[1 - F(t)]dt$$

Доказательство. Интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^x z(x)f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^x z(x)\mathrm{d}[1 - F(x)] = -z(t)[1 - F(t)]_0^x + \int_0^x [1 - F(t)]z'(t)\mathrm{d}t.$$

Доказываемое равенство будет справедливо, если $\lim\limits_{t\to\infty} z(t)[1 - F(t)] = 0$.

Рассмотрим два случая:

А. Если неотрицательная функция $z(t)$ не возрастает, то $\lim\limits_{t\to\infty} z(t)[1 - F(t)] \le z(0)\lim\limits_{t\to\infty}[1 - F(t)] = 0$, так как $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 1$.

Б. Если неотрицательная функция $z(t)$ не убывает, то

$$0 \le z(t)[1 - F(t)] = z(t)\int_t^\infty f(s)\mathrm{d}s \le \int_t^\infty z(s)f(s)\mathrm{d}s$$

Но согласно условию доказываемой теоремы несобственный интеграл $\int_0^\infty z(s)f(s)\mathrm{d}s$ сходится, поэтому $\lim\limits_{t\to\infty}\int_t^\infty z(s)f(s)\mathrm{d}s = 0$.

и, следовательно, тем более $\lim\limits_{t\to\infty} z(t)[1-F(t)]=0$.

Теорема 1.2 о среднем значении (*дискретный случай*). Пусть Y – дискретная случайная величина, принимающая неотрицательные целые значения, с функцией распределения $F(k)$ и вероятностями $p(k)=\mathbf{P}(Y=k)=F(k)-F(k-1)=\Delta F(k-1)$. $z(k)$ – произвольная неотрицательная и монотонная функция.

Математическое ожидание $\mathbf{E}z(k)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} z(k)p(k)<\infty$. Тогда

$$\mathbf{E}z(k)=z(0)+\sum_{k=0}^{\infty}[1-F(k)]\Delta z(k).$$

Доказательство. Докажем формулу суммирования по частям:

$$\sum_{j=0}^{k-1} f(j)\Delta g(j-1)=f(j)g(j-1)\Big|_{j=0}^{k}+\sum_{j=0}^{k-1} g(j)\Delta f(j),$$

где $f(j)$, $g(j)$ – некоторые функции, а $\Delta f(j)=f(j+1)-f(j)$.

$$\sum_{j=0}^{k-1} f(j)\Delta g(j-1)+\sum_{j=0}^{k-1} f(j+1)g(j)-\sum_{j=0}^{k-1} f(j+1)g(j)=$$

$$=f(0)g(-1)-f(k)g(k-1)+\sum_{j=0}^{k-1} g(j)\Delta f(j)=-f(j)g(j-1)\Big|_{0}^{k}+\sum_{j=0}^{k-1} g(j)\Delta f(j),$$

Суммируя по частям, имеем

$$\sum_{j=0}^{k-1} z(j)p(j)=-\sum_{j=0}^{k-1} z(j)\Delta[1-F(j-1)]=$$

$$=-z(j)[1-F(j-1)]\Big|_{0}^{k}+\sum_{j=0}^{k-1}[1-F(j)]\Delta z(j).$$

Утверждение справедливо, если $\lim\limits_{k\to\infty} z(k)[1-F(k-1)]=0$. Рассмотрим два случая:

А. Если неотрицательная функция $z(k)$ не возрастает, то

$\lim\limits_{k\to\infty} z(k)[1-F(k-1)]\le z(0)\lim\limits_{k\to\infty}[1-F(k-1)]=0$, так как $\lim\limits_{k\to\infty} F(k-1)=1$.

Б. Если неотрицательная функция $z(k)$ не убывает, то

$$0 \le z(k)[1 - F(k-1)] = z(k)\sum_{j=k}^{\infty} p(j) \le \sum_{j=k}^{\infty} z(j)p(j).$$

Но согласно условию доказываемой теоремы ряд $\sum_{k=0}^{\infty} z(k)p(k)$ сходится абсолютно, поэтому $\lim_{k\to\infty}\sum_{j=k}^{\infty} z(j)p(j) = 0$, и, следовательно, $\lim_{k\to\infty} z(k)[1 - F(k-1)] = 0$.

2. Остаточная продолжительность жизни и схемы страхования

2.1. Остаточное время жизни, его распределение

Рассмотрим страхование жизни для конкретного человека. Страховую компанию в стандартной ситуации интересует не общая продолжительность жизни человека X, а остаточное время жизни: $T(x) = X-x$. Будем рассматривать случайную величину $T(x)$ и найдем ее функцию распределения, являющуюся условной функцией распределения величины $X-x$ (условие имеет вид: $X > x$)

$$F_x(t) = P(T(x) \le t) = P(X - x \le t | X > x) = P(X \le x + t | X > x) = \; {}_tq_x =$$

$$= \frac{P(X \le x + t \cap X > x}{P(X > x)} = \frac{P(x < X \le x + t)}{P(X > x)} = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} \qquad (2.1.1)$$

Функцию распределения $F_x(t)$ можно представить так:

$$F_x(t) = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{\frac{l_x}{l_0} - \frac{l_{x+t}}{l_0}}{l_x/l_0} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x},$$

где l_x и l_{x+t}–это количество в исследуемой группе людей возрастов x и $x+t$.

Воспользовавшись (2.1.1), найдем теперь плотность $f_x(t)$ случайной величины $T(x)$:

$$f_x(t) = \frac{d}{dt}Fx(t) = \frac{f(x+t)}{1-F(x)}, \; 0 \le t < \infty.$$

В качестве примеров рассмотрим модели де Муавра и Мэйкхама.

Модель де Муавра. Введем обозначение

$$I_x(a,b] = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (a,b] \\ 0, & \text{если } x \notin (a,b] \end{cases}.$$

Пусть распределение продолжительности жизни описывается законом де Муавра, для которого плотность распределения и функция выживания, соответственно, задаются формулами:

$$f(x) = \frac{I_x(0,\omega)}{\omega}, \qquad s(x) = I_x(-\infty,\omega) - \frac{xI_x(0,\omega)}{\omega}.$$

Так как $0 < X < \omega$, то $0 < T(x) < \omega - x$, и

$$F_x(t) = I_t(0, \omega - x) + I_t[\omega - x, \infty),$$

а для $t \in (0, \omega - x]$,

$$f_x(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\omega - x}\right) = \frac{1}{\omega - x}, \ t \in (0, \omega - x],$$

т.е. остаточное время жизни $T(x)$ тоже равномерно распределено на промежутке $(0, \omega - x)$.

Модель Мэйкхама. Для этого закона $\mu_t = A + Be^{\alpha t}$

$$s(x) = \exp[-\int_0^x \mu_t dt] = \exp\left[-Ax - \frac{B(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha}\right],$$

$$f(x) = -s'(x) = [A + Be^{\alpha x}]exp\left[-Ax - \frac{B(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha}\right],$$

$$f(x+t) = \left[A + Be^{\alpha(x+t)}\right]exp[-A(x+t) - \frac{B\left(e^{\alpha(x+t)} - 1\right)}{\alpha}].$$

Поэтому плотность распределения остаточного времени жизни

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{s(x)}[A + Be^{\alpha x}e^{\alpha t}]exp\left[-At - \frac{Be^{\alpha x}(e^{\alpha t} - 1)}{\alpha}\right],$$

отсюда следует, что остаточное время жизни $T(x)$ также имеет распределение Мэйкхама с параметрами: $A_x = A$, $B_x = Be^{\alpha x}$, $\alpha_x = \alpha$. Такое же утверждение можно получить и для распределения Гомпертца, как для частного случая.

2.2. Величины, связанные с остаточным временем жизни.

В актуарной математике вероятность $P(T(x) \le t)$ и дополнительная вероятность $P(T(x) > t)$, обозначаемые символами ${}_tq_x$ и ${}_tp_x$, в соответствии с (2.1.1), можно найти по формулам:

$${}_tq_x = P(T(x) \le t) = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}, \qquad (2.2.1)$$

$${}_tp_x = P(T(x) > t) = 1 - {}_tq_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}. \qquad (2.2.2)$$

Величина ${}_tq_x$ дает вероятность смерти человека возраста x в промежутке времени $(x, x+t]$, а ${}_tp_x$ — вероятность, что такой человек доживет до возраста $(x+t)$.

При $t = 1$ передние индексы у ${}_tq_x$ и ${}_tp_x$ опускаются, и из общих формул (2.2.1) и (2.2.2) получаем

$$q_x = P(T(x) \le 1) = \frac{s(x)-s(x+1)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \qquad (2.2.3)$$

$$p_x = P(T(x) > 1) = \frac{s(x+1)}{s(x)} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \qquad (2.2.4)$$

Величина q_x равна вероятности смерти индивидуума возраста x лет в течение ближайшего года, а p_x — вероятности того, что он проживет еще по крайней мере один год.

Учитывая формулу (2.2.3), получим

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

Величина q_x является третьей основной характеристикой. Так как

$$l_x = l_0\, s(x),\ d_x \approx l_0 f(x), \text{ то } q_x \approx \frac{f(x)}{s(x)} = \mu_x$$

В действительности в страховом деле приходится рассматривать более сложные случаи. Например, определим вероятность того, что человек возраста x проживет t лет, но умрет на протяжении следующих u лет. Эту вероятность обозначают

$$_{t|u}q_x = P(t < T(x) \le t + u), \qquad (2.2.5)$$

и она может быть выражена или через функцию $_tq_x$, или $_tp_x$, или, принимая во внимание соотношения (2.2.1) и (2.2.2), через основную функцию страховой математики — функцию выживания $s(x)$:

$$_{t|u}q_x = P(t < T(x) \le t + u) = P(T(x) \le t + u) - P(T(x) \le t) = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x\ , \qquad (2.2.6)$$

$$_{t|u}q_x = P(t < T(x) < t + u) = P(T(x) > t) - P(T(x) > t + u) = {}_tp_x - {}_{t+u}p, \qquad (2.2.7)$$

$$_{t|u}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)}\,. \qquad (2.2.8)$$

Для страхователя актуален вопрос, умрет ли человек в течение года, т.е. выполнится ли равенство $u = 1$. Обычно индекс $u = 1$ опускается. Согласно формулам (2.2.6), (2.2.7) и (2.2.8) получим:

$$_{t|}q_{x={t+1}}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x - {}_{t+1}p_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+1)}{s(x)} \qquad (2.2.9)$$

2.3. Среднее остаточное время жизни, его дисперсия. коэффициент асимметрии и эксцесс

Математическое ожидание случайной величины $T(x)$ называется полной ожидаемой продолжительностью жизни или остаточным временем жизни и обозначается

$$^\circ e_x = ET(x).$$

Очевидно, что $ET(0) = EX = {}^\circ e_0$, и средняя продолжительность жизни $^\circ e_0$ больше среднего остаточного времени жизни $^\circ e_x$ для любого $x > 0$.

Так как $T(x)$ является неотрицательной случайной величиной, то, воспользовавшись теоремой о среднем значении, получаем

$$^\circ e_x = ET(x) = \int_0^\infty t dF_x(t) = \int_0^\infty t dP(T(x) \le t) = \int_0^\infty P(T(x) > t) dt = \int_0^\infty {}_t p_x dt.$$

Применив формулу (2.2.2) и преобразовав последний интеграл

$$\int_0^\infty {}_t p_x dt = \frac{1}{s(x)} \int_0^\infty s(x+t) dt = \frac{1}{s(x)} \int_0^\infty s(u) du,$$

приходим к равенству

$$^\circ e_x = \frac{1}{s(x)} \int_0^\infty s(u) u. \qquad (2.3.1)$$

Рассуждая аналогично, для второго начального момента остаточной продолжительности жизни $T(x)$ получим:

$$E[T(x)]^2 = 2\int_0^\infty tP(T(x) > t) dt = 2\int_0^\infty t \, {}_t p_x dt = \frac{2}{s(x)} \int_0^\infty ts(x+t) dt,$$

$$DT(x) = \frac{2}{s(x)} \int_0^\infty ts(x+t) dt - ({}^\circ e_x)^2.$$

Для нахождения коэффициента асимметрии и эксцесса необходимо определить $E[T(x)]^3$ *и* $E[T(x)]^4$

$$E[T(x)]^3 = 3\int_0^{\infty} t^2 P(T(x) > t)dt = 3\int_0^{\infty} t^2\ {}_tp_x dt = \frac{3}{s(x)}\int_0^{\infty} t^2 s(x+t)dt,$$

$$E[T(x)]^4 = \frac{4}{s(x)}\int_0^{\infty} t^3 s(x+t)dt.$$

Найдем среднее $°e_x$, дисперсию $DT(x)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(T(x)) = \sqrt{DT(x)}$ остаточного времени жизни $T(x)$ в модели де Муавра. Для этой модели

$$P(T(x) > t) = \ {}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{1-(x+t)/\omega}{1-x/\omega}, \quad 0 \le t \le \omega - x.$$

Таким образом,

$$°e_x = \int_0^{\omega-x} \frac{\omega - x - t}{\omega - x} dt = -\frac{1}{\omega - x}\int_{\omega-x}^{0} udu = \frac{\omega - x}{2},\ 0 \le t \le \omega - x. \quad (2.3.2)$$

Формулу (2.3.2) можно вывести из (2.3.1):

$$°e_x = \frac{\omega}{\omega - x}\int_x^{\omega} \frac{\omega - t}{\omega} dt = -\frac{1}{\omega - x}\int_{\omega-x}^{0} udu = \frac{\omega - x}{2}.$$

Согласно свойствам распределения имеем: $DT(x) = \frac{(\omega-x)^2}{12}$.

2.4. Модели страхования. Частичная остаточная продолжительность жизни

Рассмотрим непосредственно модели страхования жизни, предназначенные для уменьшения финансовых последствий такого случайного события, как безвременная смерть. Из-за долгосрочного характера этого вида страхования вплоть до момента выплаты есть значительный элемент неопределенности. Эта неопределенность имеет две причины: неизвестен доход и неизвестна продолжительность инвестиционного периода.

Будем считать, что время выплаты страхового пособия и его размер зависят только от промежутка времени, прошедшего с момента выдачи страхового полиса до смерти страхователя. В случае долгосрочного страхования сумма s спустя t лет превратится в $se^{\delta t}$, где δ - процентная ставка. Если мы имеем сумму $s(t)=s$ в момент t, то в момент $t+\Delta t$ мы будем иметь сумму $s(t+\Delta t) = s(1+\delta\Delta t + o(\Delta t)) \approx se^{\delta t}$. Отсюда следует, что δ - относительная скорость роста вклада.

$$\delta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Можно рассмотреть и более общий случай, когда процентная ставка меняется с течением времени: $\delta = \delta\ (t)$. В этом случае

$$s(t) = s(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} \delta_u du\right\}.$$

Следует отметить, что годовая процентная ставка i больше, чем δ. Например, если $\delta = 15\%$, то за год вклад увеличится на i = $e^{\delta} - 1 \approx 16\%$.

Введем функции - величину страхового пособия b_t и дисконтирующий множитель $v_t = e^{-\sigma t}$; t – промежуток времени с момента выдачи страхового полиса до смерти. Рассматривается дисконтирование от момента выплаты к моменту заключения страхового договора. В смешанном страховании, рассматриваемом позже, t должно быть не меньше длины интервала времени от заключения договора до момента выплаты.

При такой функции дисконтирования будем, если не оговорено иное, предполагать, что соответствующая интенсивность начисления процента является детерминированной. Это означает, что модель не предусматривает вероятностного распределения для интенсивности начисления процента.

Определим z_t - функцию текущего значения приведенной стоимости обязательств страховой компании по выплатам с помощью равенства

$$z_t = b_t v_t.$$

Время, прошедшее с момента заключения договора до момента смерти страхователя, является остаточной продолжительностью жизни страхователя. Приведенная стоимость обязательств на момент заключения договора страховой выплаты является случайной величиной z_T. В качестве основы для страховой модели примем соотношение

$$Z = b_T v_T.$$

Страхование на случай смерти на срок *n* лет предполагает, что страховая выплата осуществляется только в случае, если страхователь умрет в течение *n* лет с момента заключения договора страхования.

Так выглядит формула для среднего значения приведенных к моменту заключения договора выплат (это среднее носит название современной актуарной стоимости выплат):

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = E(Z) = E(z_T) = \int_0^\infty z_t f_T(t)dt = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_x(t)dt.$$

Здесь и далее, для других схем страхования, в обозначении для современной актуарной стоимости будет присутствовать символ *A*. Заметим, что *j*-ый момент распределения *Z* может быть найден так:

$$E[Z^j] = \int_0^n (v^t)^j {}_t p_x \mu_x(t)dt = \int_0^n e^{-(\delta j)t} {}_t p_x \mu_x(t)dt$$

Бессрочное страхование на случай смерти предполагает выплату по смерти страхователя, в какой бы момент в будущем она бы не произошла. Если страховую выплату в момент смерти (x) принимать за единицу, то

$$b_t = 1 \qquad t \ge 0$$

$$v_t = v^t \qquad t \ge 0$$

$$Z = v^T \qquad T \ge 0.$$

Современная актуарная стоимость имеет вид $\bar{A}_x = E[Z] = \int_0^\infty v^t {}_t p_x \mu_x(t)dt.$

Для лица, заключившего контракт в возрасте x и пребывающего на данный момент в возрасте $x + h$, соответствующее выражение имеет вид

$$\bar{A}_{[x]+h} = \int_0^\infty v^t \, {}_t p_{[x]+h} \mu_x(h+t)\,dt .$$

Страхование на дожитие на срок *n* лет предполагает выплату по истечении *n* лет в том и только в том случае, когда страхователь будет жив по прошествии *n* лет с момента заключения страхового договора.

$$A^{1}{}_{x:n\urcorner} = E[Z] = v^n E[Y] = v^n \, {}_n p_x$$

Смешанное страхование на срок *n* лет предполагает выплату либо по смерти страхователя, либо по дожитии им до истечения *n*-летнего срока, в зависимости от того, что случится раньше.

$$\bar{A}_{x:n\urcorner} = \bar{A}^{1}{}_{x:n\urcorner} + A^{1}{}_{x:n\urcorner} .$$

Рассмотрим эту схему подробнее. Момент страховой выплаты равен, таким образом, $\min(T(x),n)$ и называется частичной продолжительностью жизни, а соответствующее математическое ожидание — частичной средней продолжительностью жизни и обозначается ${}^{\circ}e_{x:n\urcorner}$:

${}^{\circ}e_{x:n\urcorner} = E\min(T(x),n)$.

Чтобы применить теорему о среднем значении, необходимо найти вероятность

$P(\min(T(x),n) > t)$.

Так как для $t < n$ событие $\{\min(T(x), n) > t\}$ равносильно событию $\{T(x) > t\}$, справедливо равенство

$$P(\min(T(x),n) > t) = \begin{cases} 1, \text{если } 0 \le t < n \\ 0, \text{ если } t \ge n. \end{cases}$$

Используя формулу (2.2.2), получаем:

$$ {}^{\circ}e_{x:n\urcorner} = \int_0^n {}_t p_x dt = \frac{1}{s(x)} \int_0^n s(x+t)dt = \frac{1}{s(x)} \int_0^{x+n} s(u)du.$$

Для дисперсии частичной продолжительности жизни имеем:

$$D\big(\min(T(x), n)\big) = 2\int_0^n t\ {}_tp_x dt - (°e_{x:n\rceil})^2 = \frac{2}{s(x)}\int_0^n ts(x+t)dt - (°e_{x:n\rceil})^2.$$

Найдем среднее и дисперсию частичной продолжительности жизни в модели де Муавра.

Отметим, что $x + n < \omega$, поэтому среднее в этой модели рассчитывается так:

$$°e_{x:n\rceil} = \frac{1}{s(x)}\int_0^{x+n} s(u)du = \frac{1}{1-\frac{x}{\omega}}\int_0^{x+n}(1-\frac{u}{\omega})du = \frac{1}{\omega - x}\int_0^{x+n}(\omega - u)du =$$

$$= \frac{2n(\omega-x)-n^2}{2(\omega-x)} = n - \frac{n^2}{2(\omega-x)}. \qquad (2.4.1)$$

Из формулы (2.4.1) следует, что $°e_{x:n\rceil}<n$;

1. если $n = \omega$ и $x = 0$, то $°e_{0:\omega\rceil}=°e_x = \omega/2$;
2. если $x = \omega - n$, то $°e_{(\omega-n):n\rceil} = n/2$.

Также нетрудно получить выражение для дисперсии:

$$D(\min(T(x),n))= \frac{n^3}{3(\omega-x)} - \frac{n^4}{4(\omega-x)^2}\ . \qquad (2.4.2)$$

Из формулы (2.4.2) следует, что при $n = \omega$ и $x = 0$

$$D(\min(T(x),\omega)) = \frac{\omega^2}{12}\ .$$

Таким образом, получаем формулу для дисперсии равномерного закона распределения на интервале $(0, \omega)$.

Заметим, что распределение частичной продолжительности жизни нельзя назвать в чистом виде ни дискретным, ни непрерывным. Оно относится к смешанным распределениям.

Страхование, отсроченное на *m* лет, предполагает выплату сразу после смерти страхователя только в том случае, если он умрет не раньше, чем через *m* лет после заключения страхового договора.

При этом виде страхования выплата некоторого фиксированного страхового пособия производится в момент смерти застрахованного, но только если она произошла по истечении *m*-летнего срока с момента заключения договора. Таким образом, для отсроченного полного страхования на m-летний период с единичной выплатой в момент смерти:

$$b_1=\begin{cases}1 & t>m\\ 0 & t\le m\end{cases}$$

$$v_t=v^t \qquad t>0$$

$$Z=\begin{cases}v^T & T>m\\ 0 & T\le m\end{cases}.$$

Современная актуарная стоимость обозначается ${}_{m|}\bar{A}_x$

$${}_{m|}\bar{A}_x=\int_m^\infty v^t\,{}_tp_x\mu_x(t)dt$$

Рассмотрим пример, связанный с полным страхованием жизни, отсроченным на 5-летний период с выплатой в момент смерти человека возраста (x). Интенсивность смертности постоянна и равняется $\mu=0{,}04$, процентная ставка $\delta=0{,}10$. Для современного значения страховой выплаты вычислим математическое ожидание.

Для произвольных μ и δ

$${}_{5|}\bar{A}_x=\int_5^\infty e^{-\delta t}e^{-\mu t}\mu dt=\frac{\mu}{\mu+\delta}e^{-5(\mu+\delta)}.$$

Таким образом, для $\mu=0{,}04$ и $\delta=0{,}10$ ${}_{5|}\bar{A}_x=\frac{2}{7}e^{-0{,}7}=0{,}1419$.

Во всех рассмотренных выше примерах величина страховой выплаты была фиксирована и не зависела от момента выплаты. Существуют многочисленные виды страхования, когда страховое пособие может меняться. Рассматриваются простейшие из них – страхование жизни с непрерывно увеличивающимся или уменьшающимся страховым пособием.

Полное страхование жизни с ежегодным возрастанием, обеспечивающее сумму 1 в момент смерти в течение первого года, сумму 2 в момент смерти в течение второго года и так далее, можно охарактеризовать следующими функциями:

$$b_t=\lfloor t+1\rfloor \qquad t\geq 0$$

$$v_t=v^t \qquad t\geq 0$$

$$Z=\lfloor T+1\rfloor v^T \qquad T\geq 0,$$

где $\lfloor\ \rfloor$ обозначает целую часть функции.

Современная актуарная стоимость для такого вида страхования равна

$$(I\bar{A})_x=E[Z]=\int_0^\infty \lfloor t+1\rfloor v^t\,{}_tp_x\mu_x(t)dt. \quad (2.4.3)$$

Возрастание размера страхового пособия может происходить чаще или реже, чем раз в год. Для полного страхования с m- разовым возрастанием в течение года размер страхового пособия будет $1/m$, если смерть наступила в течение первой m-й части первого года действия страхового полиса и $2/m$, если это случилось во второй m-й части. Таким образом, страховая выплата на протяжении срока действия страховки будет увеличиваться m раз в год на $1/m$.

Функции для такого вида полного страхования жизни имеют следующий вид:

$$b_t=\frac{\lfloor tm+1\rfloor}{m} \qquad t\geq 0,$$

$$v_t=v^t \qquad t\geq 0,$$

$$Z=\frac{v^t\lfloor Tm+1\rfloor}{m} \qquad T\geq 0.$$

Актуарная современная стоимость имеет вид:

$$(I^{(m)}\bar{A})_x=E[Z]=\int_0^\infty \frac{\lfloor tm+1\rfloor}{m} v^t\,{}_tp_x\mu_x(t)dt. \quad (2.4.4)$$

В предельном случае при $m\to\infty$ при полном страховании жизни с m-разовым возрастанием в течение года страховая выплата будет равняться t, где t - время смерти. Тогда получим:

$$b_t = t \qquad t \ge 0,$$

$$v_t = v^t \qquad t \ge 0,$$

$$Z = Tv^T \qquad T \ge 0.$$

В этом случае актуарная современная стоимость обозначается $(\bar{I}\,\bar{A})_x$. Этот вид страхования, как можно установить, некоторым образом связан с полным страхованием жизни, отсроченным на *m* лет.

По определению

$$(\bar{I}\,\bar{A})_x = \int_0^{\infty} t v^t\, {}_t p_x \mu_x(t)dt. \quad (24.5)$$

Представив *t* в подынтегральном выражении как интеграл единицы от 0 до *t*, получаем

$$(\bar{I}\,\bar{A})_x = \int_0^{\infty} \left(\int_0^t ds \right) v^t\, {}_t p_x \mu_x(t)dt. \quad (2.4.6)$$

Если поменять порядок интегрирования и для каждого значения *s* проинтегрировать по *t* от *s* до *x*, то получаем:

$$(\bar{I}\,\bar{A})_x = \int_0^{\infty}\int_s^{\infty} v^t\, {}_t p_x \mu_x(t)dtds = \int_0^{\infty} {}_{s|}\bar{A}_x ds. \ (2.4.7)$$

Помимо ежегодного возрастания размера выплат в течение *n* лет страхования известно и **ежегодное убывание** в течение такого же периода, при котором предоставляется выплата в размере *n*, если смерть наступила в течение первого года, *n*-1, если в течение второго и т.д. Таким образом, к концу *n*-летнего срока страховка исчерпывается.

$$b_t = \begin{cases} n - \lfloor t \rfloor & t \le n \\ 0 & t > n \end{cases}$$

$$v_t = v^t \qquad t > 0,$$

$$Z = \begin{cases} v^T (n - \lfloor T \rfloor) & T \le n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

Среднее значение для этого вида страхования:

$$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}=\int_0^n v^t(n-\lfloor t\rfloor)_t p_x \mu_x(t)dt \quad (2.4.8)$$

Это страхование является дополнительным к *n*-летнему страхованию с ежегодным возрастанием в следующем смысле: сумма их страховых выплат равна n+1 для n-летнего периода.

2.5. Округленное остаточное время жизни, его распределение, среднее и дисперсия

В реальной жизни договоры страхования жизни, как правило, заключаются на целое число лет, к тому же человек обычно считает свой возраст в целых годах, поэтому в актуарной математике вводится функция $K(x)=[T(x)]$ (целая часть T) – содержательно это число полных оставшихся лет жизни индивида или округленную продолжительностью предстоящей жизни.

Если $T(x)$ = 11 лет 9 месяцев = 11.75 лет, то $K(x)$ = 11 лет. Таким образом, случайная величина $K(x)$ является дискретной случайной величиной, принимающей целые значения. Исчерпывающей характеристикой такой случайной величины является набор вероятностей $P(K(x) = k)$, где $k=0,1,2,\ldots$

Очевидно, $P(K(x) = k) = P(k \le T(x) < k + 1)$. Так как $T(x)$ непрерывная случайная величина, то

$$P(T(x) = k) = P(T(x) = k + 1) = 0,$$

и поэтому

$$P(K(x) = k) = P(k < T(\mathrm{x}) \le k + 1) = \frac{\mathrm{s(x+k)-s(x+k+1)}}{\mathrm{s(z)}} = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x$$

Найдем распределение округленного времени жизни $K(0) = [X]$, учитывая, что $X= T(0)$:

$$P(K(0) = k) = \frac{\mathrm{s(k)-s(k+1)}}{\mathrm{s(0)}} = \mathrm{s}(k) - s(k+1) = \frac{\mathrm{l_k-l_{k+1}}}{\mathrm{l_0}} = \frac{\mathrm{d_k}}{\mathrm{l_0}}.$$

Но так как $d_x \approx l_0 f(x)$, то

$$P(K(0) = k) \approx f(k), \qquad (2.5.1)$$

Отсюда видно, что кривая смертей тесно связана с распределением округленного времени жизни.

Математическое ожидание случайной величины $K(x)$ называется средней округленной остаточной продолжительностью жизни и обозначается

$$e_x = EK(x),$$

Согласно определению математического ожидания для дискретной случайной величины $e_x = \sum_{k=1}^{\infty} kP(K(x) = k)$.

$$P(K(x) = k) = \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)}$$

и $\sum_{k=1}^{\infty} k[s(x+k) - s(x+k+1)] = 1 \cdot s(x+1) + 2 \cdot s(x+2) + \cdots - 1 \cdot s(x+2) - 2 \cdot s(x+3) - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} s(x+k)$, то $e_x = \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} s(x+k)$.

Аналогично находится второй начальный момент:

$$E[K(x)]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(K(x) = k) = \frac{1}{s(x)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} k^2 s(x+k) - \sum_{k=0}^{\infty} k^2 s(x+k+1) \right\} =$$

$$= \frac{1}{s(x)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} k^2 s(x+k) - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 s(x+k+1) + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) s(x+k+1) + \right\} =$$

$$= \frac{1}{s(x)} \sum_{k=0}^{\infty} (2k-1) s(x+k) = \frac{2}{s(x)} \sum_{k=0}^{\infty} k s(x+k) - e_x$$

так как

$$\sum_{k=0}^{\propto} k^2 s(x+k) - \sum_{k=0}^{\propto} (k+1)^2 s(x+k+1) + \sum_{k=0}^{\propto} (2k+1) s(x+k+1) =$$

$$= 1^2 s(x+1) + 2^2 s(x+2) + 3^2 s(x+3) + \cdots - 1^2 s(x+1) - 2^2 s(x+2) -$$

$$-3^2 s(x+3) - \cdots + 1 s(x+1) + 3 s(x+2) + 5 s(x+3) + \cdots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\propto} (2k-1) s(x+k)$$

Теперь получаем дисперсию

$$DK(x) = E[K(x)]^2 - \mathrm{e}_{\mathrm{x}}^2 = \frac{2}{s(x)}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} ks(x+k) - \mathrm{e}_{\mathrm{x}} - \mathrm{e}_{\mathrm{x}}^2$$

Все числовые характеристики округленного времени жизни выражаются через функции выживания, поэтому, в силу равенства $l_x = l_0 \cdot s(x)$ их также можно находить и по данным таблиц продолжительности жизни (ТПЖ). В частности,

$$e_x = \frac{1}{l_x}\sum_{k=1}^{\infty} l_{x+k}\ , \quad e_0 = \frac{1}{l_0}\sum_{k=1}^{\infty} l_k$$

$$E[K(\mathrm{x})]^2 = \frac{2}{l_x}\sum_{k=1}^{\infty} k l_{x+k} - e_x\,, \quad E[K(0)]^2 = \frac{1}{l_0}\sum_{k=1}^{\infty} k l_k - e_0$$

2.6. Дифференциальные уравнения для страхования с выплатой в момент смерти

В случае страхования с выплатами, производимыми в момент смерти, можно вывести описывающие схему дифференциальные уравнения.

Получим представление для $\overline{A}_x$, используя формулу полного математического ожидания

$$\overline{A}_x = E[v^T] = E[v^T \mid T \le h]P(T \le h) + E[v^T \mid T > h]P(T > h). \quad (2.6.1)$$

$$P(T \le h) = {}_h q_x\ , \quad P(T > h) = {}_h p_x\,, \quad (2.6.2).$$

Условная плотность распределения T при $T \le h$ имеет вид:

$$f_T(t \mid T \le h) = \begin{cases} \dfrac{f_T(t)}{F_T(t)} = \dfrac{{}_t p_x \mu(x+t)}{{}_h q_x}, 0 \le t \le h \\ 0, t > h \end{cases}$$

Таким образом,

$$E[v^T \mid T \le h] = \int_0^h v^t\, \frac{{}_t p_x \mu(x+t)}{{}_h q_x} dt. \quad (2.6.3)$$

$$E[v^T \mid T > h] = v^h E[v^{T-h} \mid (T-h) > 0] = v^h \overline{A}_{x+h}. \quad (2.6.4)$$

Подстановка (2.6.1), (2.6.2) и (2.6.3) в (2.6.1) дает

$$\overline{A}_x = \int_0^h v^t \frac{{}_t p_x \mu(x+t)}{{}_h q_x} dt \, {}_h q_x + v^h \overline{A}_{x+h} \, {}_h p_x. \quad (2.6.5)$$

Умножим обе части равенства на -1, прибавим $\overline{A}_{x+h}$, разделим на h, и получим

$$\frac{\overline{A}_{x+h} - \overline{A}_x}{h} = \frac{-1}{h} \int_0^h v^t \, {}_t p_x \mu(x+t) dt + \overline{A}_{x+h} \frac{1 - v^h \, {}_h p_x}{h}. \quad (2.6.6)$$

Далее

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h v^t \, {}_t p_x \mu(x+t) dt = \frac{d}{ds} \int_0^s v^t \, {}_t p_x \mu(x+t) dt \,|_{s=0} = \mu(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - v^h \, {}_h p_x}{h} = -\frac{d}{dt}(v^t \, {}_t p_x)\,|_{t=0} = \mu(x) + \delta.$$

Переходя к пределу при $h \to 0$ в (2.6.6), получаем

$$\frac{d}{dx} \overline{A}_x = -\mu(x) + \overline{A}_x[\delta + \mu(x)] = \delta \overline{A}_x - \mu(x)(1 - \overline{A}_x).$$

В качестве начального условия в таком уравнении можно рассматривать

$$\overline{A}_0 = E[e^{-\delta X}] = \int_0^\infty e^{-\delta t} f(t) dt.$$

3. Коллективное страхование жизни

3.1. Страхование жизни нескольких лиц. Статус совместной жизни

Одной из особенностей страхования жизни является страхование нескольких лиц. Рассмотрим случай коллективного страхования жизни, для которого полезной абстракцией является понятие статуса. Пусть m индивидуумов с возрастами (x_1, $x_2, \ldots,$ x_m) желают заключить страховой договор. Предстоящее время жизни k-го индивидуума обозначим через $T(x_k) = X - x_k$.

Совокупности m чисел $T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_m)$ поставим в соответствие статус U, которому соответствует своя продолжительность жизни $T(U)$. Двумя самыми распространенными статусами являются статус совместной жизни и статус выживания последнего.

Статус совместной жизни обозначается $U{=}x_1{:}x_2{:}\ldots{:}x_m$ или $(x_1{:}x_2{:}\ldots{:}x_m)$ и считается разрушенным, если наступила смерть, хотя бы одного из индивидуумов, т.е.

$$T(U) = \min\{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_m)\}.$$

Очевидно, что

$$P\{T(U) > t\} = P\{\min(T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_m)) > t\} =$$
$$= P\{T(x_1) > t, T(x_2) > t, \ldots, T(x_m) > t\},$$

и в предположении независимости смертей

$$P\{T(U) > t\} = \prod_{i=1}^{m} {}_t p_{x_i} \qquad (3.1.1)$$

Теперь легко вывести другие вероятностные характеристики продолжительности жизни для Т(U), например

$${}_t q_{x_1:x_2:\ldots:x_m} = 1 - {}_t p_{x_1:x_2:\ldots:x_m} = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - {}_t q_{x_i}).$$

Для плотности распределения времени разрушения рассматриваемого статуса справедливы следующие соотношения:

$$f_{x_1:x_2:\ldots:x_m}(t) = -\frac{d}{dt} P\{T(U) > t\} =$$

$$= -\frac{d}{dt}\prod_{i=1}^{m} {}_t p_{x_i} \;-\; \frac{d}{dt}\prod_{i=1}^{m}\frac{s(x_i+t)}{s(x_i)} \quad (3.1.2)$$

В предположении независимости смертей найдем плотность распределения статуса совместной жизни двух индивидуумов $U{:}=x_1{:}x_2$

1) в общем случае;

2) для модели де Муавра.

Так как m=2, а $T(U)=\min(T(x_1), T(x_2))$, то для плотности распределения статуса в соответствии с (3.1.2) имеем:

$$f x_1{:}x_2\,(\mathrm{t}) = \frac{d}{dt}\{-P\{min(T(x_1),\, T(x_2)) > t\}\} =$$

$$= \left\{-\frac{s(x_1+t)}{s(x_1)}\frac{s(x_2+t)}{s(x_2)}\right\}_t' =$$

$$= \frac{f(x_1+t)}{s(x_1)}\;\frac{s(x_2+t)}{s(x_2)} + \frac{f(x_2+t)}{s(x_2)}\;\frac{s(x_1+t)}{s(x_1)} =$$

$$= f_{x_1}(\mathrm{t})\; s_{x_2}(\mathrm{t}) + f_{x_2}(\mathrm{t})\; s_{x_{21}}(\mathrm{t}) < f_{x_1}(\mathrm{t}) + f_{x_2}(\mathrm{t}),$$

где $s_x(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)}$.

Это неравенство говорит о возможности снижения страховой компанией размера премии участнику коллективного страхования по сравнению со случаем индивидуального страхования.

Для модели де Муавра $f_x(t)$ задается формулой (3.1.2), функция выживания

$$s_x(t)=I_t(-\infty, \omega - x) - \frac{tI_t(0,\omega-x)}{\omega-x},$$

поэтому

$$f_{x_1:x_2}(t)=\frac{I_t(0,\omega-x_1)}{\omega-x_1}\left[I_t(-\infty,\omega-x_2) - \frac{tI_t(-\infty,\omega-x_2)}{\omega-x_2}\right]+$$

$$+\frac{I_t(0,\omega-x_2)}{\omega-x_2}\left[I_t(-\infty,\omega-x_1) - \frac{tI_t(-\infty,\omega-x_1)}{\omega-x_1}\right]=$$

$$=\left[\frac{\omega-x_2-t}{(\omega-x_1)(\omega-x_2)} + \frac{\omega-x_1-t}{(\omega-x_1)(\omega-x_2)}\right] I_t(1,\min(\omega-x_1,\omega-x_2)). \quad (3.1.3)$$

Перейдем теперь к функции интенсивности разрушения состояния совместной жизни. Функция интенсивности остаточного времени жизни

$$T(x) = X - x$$

$$\mu_x(t) = \frac{f_x(t)}{s_x(t)} = \frac{f(x+t)}{s(x+t)} = \mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln s(x+t) =$$

$$= -\frac{d}{dt}[\ln s(x+t) - \ln s(x)] = -\frac{d}{dt}\ln\frac{s(x+t)}{s(x)} = -\frac{d}{dt}\ln {}_tp_x,$$

т.е.

$$\mu_x(t) = \mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln {}_tp_x, \qquad (3.1.4)$$

Принимая во внимание (3.1.4), получаем

$$\mu_{x_1:x_2:\ldots:x_m}(t) = -\frac{d}{dt}\ln {}_tp_{x_1:x_2:\ldots:x_m} = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{m} \ln {}_tp_{x_i} = \sum_{i=1}^{m}\mu_{x_i}(t)$$

и, следовательно,

$$\mu_{x_1:x_2:\ldots:x_m}(t) = \sum_{i=1}^{m}\mu_{x_i}(t) \qquad (3.1.5)$$

3.2. Упрощения для моделей Гомпертца и Мэйкхама

Предположим, что продолжительность жизни всех членов рассматриваемой группы распределена по закону Гомпертца с одной и той же парой параметров, тогда

$$\mu_{x_i}(t) = \mu_{x_{i+t}} = Be^{\alpha(x_1+t)} = Br^{x_1+t}, \qquad (3.2.1)$$

где $r = e^{\alpha}$, $t \geq 0$, $i = 1,\ldots, m$.

Равенство (3.1.5) с учетом (3.2.1) позволяет составить уравнение

$$r^{x_1} + r^{x_2} + \cdots + r^{x_m} = r^{x_\omega},$$

решив которое относительно ω, получаем

$$\omega = \frac{1}{\alpha}\ln\{r^{x_1} + r^{x_2} + \cdots + r^{x_m}\} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\ln\{e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_2} + \cdots + e^{\alpha x_m}\}. \quad (3.2.2)$$

Таким образом, функцию интенсивности разрушения состояния совместной жизни можно представить в виде

$$\mu_{x_1:x_2:\ldots:x_m}(t) = \mu_\omega(t), \qquad t \geq 0,$$

откуда видно, что интенсивность разрушения состояния совместной жизни также подчиняется закону Гомпертца для некоторого условного индивидуума с начальным возрастом ω, вычисляемым по формуле (3.2.2) и, естественно, выражаемым через начальные возрасты $x_1, x_2, \dots, x_m$ всех участников коллективного страхования. Это позволяет упростить все расчеты, касающиеся состояния совместной жизни, и проводить их в терминах одного индивидуума возрастом ω.

Определенные упрощения возникают также, когда продолжительность жизни всех рассматриваемых индивидуумов подчиняется закону Мэйкхама с одним и тем же набором параметров.

$$\mu_{x_i}(t) = \mu_{x_i+t} = A + Be^{\alpha(x_i+t)} = A + B\,r^{x_i+t},$$
$$t \geq 0,\ i = 1, \dots, m,\ r = e^{\alpha}.$$

Рассмотрев равенство

$$A + Br^{x_i+t} + \cdots + A + B\,r^{x_m+t} = m\,(A + Br^{\omega+t})$$

и рассуждая, как и в случае закона Гомпертца, приходим к уравнению $r^{x_1} + r^{x_2} + \cdots + r^{x_m} = m r^{\omega}$, решение которого имеет вид:

$$\omega = \frac{1}{\alpha}[\ln\{r^{x_1} + r^{x_2} + \cdots + r^{x_m}\} - \ln m] =$$
$$= \frac{1}{\alpha}[ln\{e^{\alpha x_1} + e^{\alpha x_2} + \cdots + e^{\alpha x_m}\} - \ln m]. \quad (3.2.3)$$

Таким образом, для закона Гомпертца

$\mu_{x_1:x_2:\dots:x_m}(t) = m\,\mu_{\omega}(t) = \mu_{\omega:\omega:\dots:\omega}(t)$,

и, следовательно, m лиц возраста $x_1, x_2, \dots, x_m$ могут быть заменены лицами одинакового начального возраста ω, который вычисляется по формуле (3.2.3).

3.3. Статус выживания последнего

Статус выживания последнего обозначается $U := \overline{x_1 : x_2 : \dots : x_m}$ или $(\overline{x_1 : x_2 : \dots : x_m})$ и считается разрушенным, если все представители коллектива умерли, т.е.

$$T(U) = \max(T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_m)).$$

Очевидно, по определению

$$q_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = P\{T(U) \le t\} = P\{max((T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_m)) \le t\} =$$
$$= P\{T(x_1) \le t,\ T(x_2) \le t,\ \ldots,\ T(x_m) \le t\},$$

и в предположении независимости смертей

$$ {}_tq_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = \prod_{i=1}^{m} {}_tq_{x_i}\ , \quad {}_tp_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - {}_tp_{x_i}) \ .$$

Плотность распределения времени разрушения статуса выживания последнего индивидуума равна

$$f_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}(\mathrm{t}) = \frac{d}{dt} P\{T(U) \le t\} = \frac{d}{dt} \prod_{i=1}^{m}(1 - {}_tp_{x_i})$$

Приведем пример использования характеристик ТПЖ при вычислении вероятностей, связанных с рассмотренными статусами

В предположении независимости дат смертей рассчитаем ${}^{\circ}e_{\overline{x_1:x_2}}$ для модели де Муавра. Воспользовавшись формулой (3.3.1), имеем

$$\int_0^{\infty} t f_{\overline{x_1:x_2}}(t)dt = \int_0^{\min(\omega-x_1,\omega-x_2)} t\frac{dt}{(\omega - x_1, \omega - x_2)} + \int_{\min(\omega-x_1,\omega-x_2)}^{\max(\omega-x_1,\omega-x_2)} t\frac{dt}{(\omega - x_1, \omega - x_2)} =$$
$$= \frac{2min^3(\omega-x_1,\omega-x_2)}{3(\omega-x_1,\omega-x_2)} + \frac{max^3(\omega-x_1,\omega-x_2)-min^3(\omega-x_1,\omega-x_2)}{2max\ \ (\omega-x_1,\omega-x_2)} =$$
$$= \frac{2min^2(\omega-x_1,\omega-x_2)}{3max(\omega-x_1,\omega-x_2)} + \frac{max^2(\omega-x_1,\omega-x_2)-min^2(\omega-x_1,\omega-x_2)}{2max\ \ (\omega-x_1,\omega-x_2)} =$$
$$= \frac{min^2(\omega-x_1,\omega-x_2)-3max^2(\omega-x_1,\omega-x_2)}{6max\ \ (\omega-x_1,\omega-x_2)}.$$

В предложении независимости смертей найдем ${}^{\circ}e_{x:x}$ для модели де Муавра.

Воспользуемся формулой (3.1.3), получим

$${}^{\circ}e_{x:x} = 2\int_0^{\omega-x} t\frac{\omega - x - t}{(\omega - x)^2}dt = \frac{\omega - x}{3}$$

3.4. Статусы *k* выживших. смешанные статусы

Статус выживания k последних из застрахованных лиц обозначается

$$U := \frac{k}{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} \qquad (3.4.1)$$

и является активным до тех пор, пока живы по крайней мере k из m индивидуумов $(x_1),(x_2),\ldots,(x_m)$, т.е. он считается разрушенным при наступлении $(m — k + 1)$-й смерти. По определению

$$\left(\frac{m}{x_1:x_2:\ldots:x_m}\right)=(x_1:x_2:\ldots:x_m),$$

$$\left(\frac{1}{x_1:x_2:\ldots:x_m}\right)=(\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}),$$

и, следовательно, состояние совместной жизни (k=m) и состояние выживания последнего (k = 1) являются частными случаями статуса (3.4.2).

Точный статус выживания k последних обозначается

$$U:=\frac{[k]}{x_1:x_2:\ldots:x_m} \qquad (3.4.2)$$

и определен, если живы в точности k из m индивидуумов $(x_1),(x_2),\ldots,(x_m)$, т.е. в него входят в момент $(m–k)$-й смерти и выходят в момент $(m–k+1)$-й смерти. Этот статус находит широкое применение при расчете аннуитетов (последовательностей платежей с ограниченным сроком длительности).

Итак, через общий статус k выживших определены статусы для группы индивидуумов. Отметим, что новые статусы можно также комбинировать из рассмотренных в данной главе базовых статусов.

Смешанным статусом назовем состояние, в основе которого лежит комбинация статусов, причем хотя бы один из них задан для более чем одного индивидуума.

В качестве примера опишем следующие смешанные статусы:

(1) $(\overline{x_1 : x_2}:\overline{x_3 : x_4})$; (2) $\left(\overline{\overline{x_1 : x_2} : (x_3 : x_4)}\right)$; (3) $(x_1 : x_2 : \overline{x_3 : x_4})$.

(1) Это состояние сохраняется, если жив по крайней мере один из (x_1) и (x_2) и по крайней мере один из (x_3) и (x_4). Моментом разрушения статуса $(\overline{x_1 : x_2}:\overline{x_3 : x_4})$; является

$$T(U) = \min\{\max\{T(x_1),\ T(x_2)\},\ \max\{T(x_3),\ T(x_4)\}\}.$$

(2) Такое состояние сохраняется, если живы, по крайней мере, двое из четырех, а именно (x_3) и (x_4), или когда только один жив, и это либо (x_1), либо (x_2). Моментом разрушения статуса $\left(\overline{\overline{x_1 : x_2} : (x_3 : x_4)}\right)$ является

$$T(U) = \max\{\max\{T(x_1),\ T(x_2)\}, \min\{T(x_3),\ T(x_4)\}\}.$$

(3) Состояние сохраняется, если живы (x_1) и (x_2) и ещё один человек жив, причём это либо (x_3), либо (x_4). Моментом разрушения статуса ($x_1 : x_2 : \overline{x_3 : x_4}$) является

$$T(U) = \min\{T(x_1), T(x_2), \max\{T(x_3), T(x_4)\}\}.$$

4. Генерация непрерывных случайных величин

Методы генерации вероятностных распределений используются для разных целей, в том числе и для моделирования процесса смертности.

Непрерывная случайная величина ξ характеризуется плотностью $p_\xi(x)$ или функцией распределения $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(x)dx$.

4.1. Метод обратной функции

Пусть $\xi=\varphi(\alpha)$. Разрешим уравнение относительно α: $\alpha=\varphi^{-1}(\xi)$. Предположим, что φ возрастает. Тогда

$$F_\xi(x) = p\{\xi < x\} = p\{\varphi(\alpha) < x\} = p\{\alpha < \varphi^{-1}(x)\} = \varphi^{-1}(x)$$

$$\varphi(x)=F_\xi^{-1}(x)$$

$$\xi=F_\xi^{-1}(x)$$

Т.к. α равномерно распределена на отрезке [0,1], то и (1-α) равномерно распределена на нём же, следовательно:

$$\xi = F_\xi^{-1}(1-\alpha)$$

Например, для экспоненциального распределения функция распределения имеет вид:

$$F_\xi(x) = \int_0^x p_\xi(u)du = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u}du = -e^{-\lambda u}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda u} \Rightarrow$$

$$\alpha=1-e^{-\lambda u} \Rightarrow e^{-\lambda u} = 1-\alpha \Rightarrow -\lambda\xi = ln(1-\alpha) \Rightarrow \xi=-\frac{ln\,\alpha}{\lambda} \Leftrightarrow \xi=-\frac{ln\,\alpha}{\lambda}$$

Пусть s – значение случайной величины, равномерно распределенной на [0,1]. Моделируем распределение Гомпертца.

$$1-s = \exp\left[-B(e^{\alpha x}-1)/\alpha\right]$$

$$\ln(1-s) = -B(e^{\alpha x}-1)/\alpha$$

$$e^{\alpha x}-1 = \frac{\alpha\ln(1-s)}{B}$$

$$x = \ln\left(\frac{\alpha \ln(1-s)}{B} + 1\right)/\alpha$$

Полученное x - значение случайной величины, подчинённой закону Гомпертца.

Метод обратной функции применяется не очень часто, т.к. найти F^{-1} порой достаточно трудно.

4.2. Метод исключения

Пусть некоторая функция $g(x)$ удовлетворяет условиям:

1. $g(x) \geq 0$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \mu(G) < +\infty$

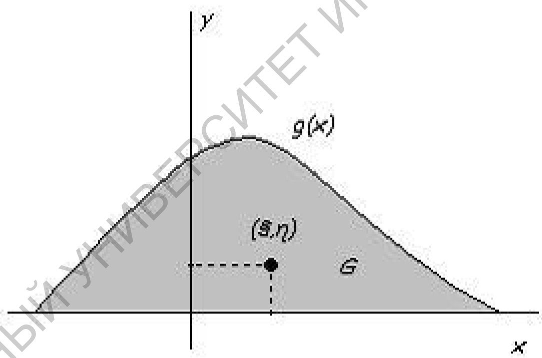

Рис. 1

График функции $g(x)$

Теорема. Пусть некоторая двумерная случайная величина (ξ, η) имеет равномерную плотность распределения на множестве G.Тогда случайная величина ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x) = \frac{1}{\mu(G)} g(x)$

Доказательство:

$$F_\xi(x) = p\{\xi < x\} = \int\limits_{-\infty}^{x} d\xi \int\limits_{0}^{g(\xi)} p_{\xi\eta}(\xi,\eta)d\eta = \frac{1}{\mu(G)} \int\limits_{-\infty}^{x} d\xi \int\limits_{0}^{g(x)} d\eta = \frac{1}{\mu(G)} \int\limits_{-\infty}^{x} g(\xi)d\xi \Rightarrow$$

$$p_\xi(x) = F'_\xi(x) = \frac{1}{\mu(G)} g(x)$$

Таким образом, если требуется моделировать случайную величину с плотностью $p_\xi(x)$, то принимаем $g(x) \equiv p_\xi(x)$, тогда $\mu(G)=1$, т.е. достаточно генерировать двумерный случайный вектор (ξ,η), равномерно распределенный в области G, и тогда ξ будет иметь распределение $p_\xi(x)$.

Генерируем равномерное распределение в области под кривой (область G). Для этого достаточно генерировать равномерное распределение в некоторой области G_1:$G \subseteq G_1$ и рассматривать только те точки, которые принадлежат G — они будут равномерно распределены в этой области. Например, если, $a \le \xi \le b$, $max_x\, p_\xi(x) = M$, то рассматриваем область $G_1=[a,b][0,M]$, и $\xi = a+\alpha_1(b-a)$, $\eta = \alpha_2 M$. Далее применяем метод исключения, т.е. результатом моделирования считаем только те значения ξ, для которых $\eta \le p_\xi(x)$, остальные игнорируем:

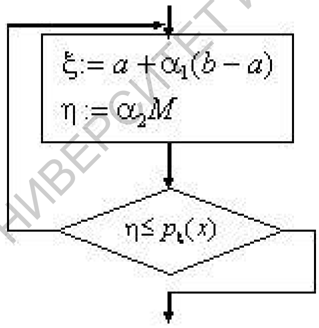

Рис. 2

Элемент блок-схемы, иллюстрирующий метод исключения

5. Страхование жизни в России

Для того чтобы граждане имели возможность удовлетворять свои социальные потребности, не осуществляемые с помощью выплат и льгот по специальному страхованию, реализуются механизмы личного страхования, взносы по которому уплачиваются за счет семейных доходов.

Личное страхование в последние годы получило в России большую популярность. Оно постоянно совершенствуется, улучшаются условия действующих видов страхования, вводятся новые его виды в целях более полного удовлетворения потребностей населения в страховой защите.

При страховании на дожитие важное значение имеют актуарные расчёты, основанные на анализе таблиц смертности и вычислении функции дожития. Сравнение страховых таблиц смертности с общепопуляционными по западным странам показывает, что смертность среди страхователей, то есть выборочная смертность, почти по всем странам отличается от общепопуляционной в меньшую сторону. Существуют также определенные закономерности того, как "страховые" показатели смертности изменяются с возрастом застрахованного.

В российских условиях использование исходных данных о смертности в разрезе пола, возраста, других факторов усложняется тем, что нужны данные отдельные по различным группам людей. В качестве основы для построения таблиц смертности берутся демографические данные о смертности, отдельно для мужчин и женщин. Относительную поправку к вероятности смерти в течение года среди людей определенного пола, возраста, семейного положения, социального статуса и т.д., по сравнению со всем населением, порой предполагают той же, что и для некоторых других стран. Ассоциации страховщиков во многих странах имеют необходимую статистику, представленную в открытых источниках. Но для российских страховщиков составление таких же страховых таблиц смертности намного сложнее, ведь у них нет наблюдений за такой длительный период, как у крупных страховщиков в странах ЕС или в США. Опыт западных стран по составлению страховой статистики позволяет выявить определенные закономерности в том, как соотносятся выборочная страховая и общепопуляционная смертности.

Можно выделить группы факторов, которые влияют на показатели смертности среди застрахованных по программам страхования жизни. К факторам, снижающим смертность среди страхователей, относится, например, то, что приобретают такие страховые полисы в основном люди с достатком выше среднего, у них больше возможностей для того, чтобы вести здоровый образ жизни, получать более квалифицированную медицинскую помощь. С другой стороны, существуют факторы, которые увеличивают смертность среди застрахованных, и главный среди них - асимметрия информации (неблагоприятный отбор и недобросовестное поведение).

Можно утверждать, что неравенство по доходам является в первую очередь тем фактором, от значения которого зависит соотношение между "страховой" и общепопуляционной смертностью. Кроме того, важным показателем выступает и уровень доходов на душу населения.

В России страхование жизни — один из самых быстрорастущих сегментов страхования. За 2010—2013 гг. прирост страховых премий при сравнении квартальных показателей каждого года к предыдущему составляет около 50%. Так, например, по итогам 2013 года совокупные показатели сбора возросли на 57,7%, что превосходит темпы роста рынка за аналогичный период прошлого года. В денежном эквиваленте сумма сбора составила 84,9 млрд. рублей. Сбор премий по иному личному страхованию уменьшился на 21,6% и составил 18,7 млрд. рублей. Общий размер страховых выплат в 2013 году снизился по сравнению с 2012 годом на 7,6% и составил 12, 5 млрд. руб. При этом выплаты по иным формам страхования увеличились на 55,4% до 3,1 млрд. рублей. Существенное воздействие на показатели сбора премии оказывают крупные страховые компании. Например, поступления группы компаний «Альфа-страхование» составила 10 756 098 тыс. руб. У группы компаний «Росгосстрах» этот показатель незначительно ниже и составляет 7

853 871 тыс. руб. Наибольшие выплаты, а именно 2 670 343 тыс. руб. приходятся на группу компаний «СОГАЗ».

В 2014 году в связи с замедлением роста потребительского кредитования, как и предсказывали аналитики, темпы прироста взносов по страхованию жизни сократились. Для предотвращения дальнейшего сокращения этих темпов в "Стратегии развития страховой деятельности в РФ до 2020 года" предусмотрены некоторые меры. Эти меры касаются, в частности, выравнивания налогообложения по продуктам страхования жизни с продуктами НПФ по корпоративным пенсиям, а также включения страховщиков в пенсионную систему РФ.

В дальнейшем на рост взносов окажет влияние реализация и других задекларированных мер, в частности введение налоговых льгот для физических лиц.

6. Некоторые сведения о страховании, не связанном с жизнью клиента

Рассмотрим статическую модель страхования. Портфель полисов, проданных страховщиком клиентам, рассматривается как сформированный единовременно и с единым сроком действия договоров: в течение этого периода страхования не появится новых клиентов, и в начале периода каждый из рассматриваемой группы клиентов оплатил свой полис. В статической модели процесс оплаты исков клиентов сводятся к вычитанию суммарного ущерба из суммы собранных взносов.

Суммарный ущерб клиентов обозначим через $X = X_1 + \ldots + X_n$, где n представляет численность группы клиентов, $X_i, i = 1, \ldots, n$ - независимые неотрицательные случайные величины ущербов (рисков) отдельных клиентов в денежном выражении. Обозначим через $\mathrm{F}(\mathrm{x})$ и $\mathrm{F}_\mathrm{i}(\mathrm{x})$ соответственно функции распределения случайных величин X и X_i. Группа клиентов называется однородной, если все X_i одинаково распределены:

$$\mathrm{F}_1(\mathrm{x}) = \ldots = F_n(x).$$

Заплатив страховой взнос d_i,то есть цену полиса, i-й клиент получает от компании обязательство погасить всю величину возможного ущерба, компания же имеет в начале периода полученный от клиентов суммарный взнос $D = \sum_1^n d_i$, а также собственный капитал или резерв S и с другой стороны, принятый риск X. Тогда ее остаточный капитал к концу периода есть случайная величина $Y = S + D - X$.

Способы выбора страховых взносов.

Пусть величина D представляет собой функционал, заданный на множестве функций распределения, имеющий действительные значения

$$D = \pi(F, \lambda), \lambda \geq 0$$

Остановимся на следующих частных случаях функционала $\pi(F, \lambda)$:

Принцип ожидаемого значения:

$D = (1+\alpha)EX, \lambda \geq 0$

Величину λ азывают коэффициентом нагрузки, она характеризует то, насколько страховой взнос должен превышать среднее значения выплат.

Принцип вариации:

$D = EX + \lambda DX, \lambda > 0$

Величина λ играет роль весового коэффициента для дисперсии - чем больше λ, тем в большей степени взнос зависит от величины разброса значений выплат.

Принцип стандартного отклонения:

$D = EX + \lambda\sqrt{DX}, \lambda > 0$

Величина λ играет роль весового коэффициента для дисперсии.

Принцип нулевой полезности:

$u'(y) > 0, u''(y) \leq 0.$

$u(y)$- функция полезности страхователя. Страховой взнос выбирается так, чтобы средняя полезность до и после страхования была одна и та же.

Обобщенный принцип нулевой полезности:

Предположим, что S является случайной величиной. Страховой взнос D определяется как решение уравнения:

$Eu(S + D - X) = Eu(S)$

Этот принцип рассматривается как неклассический, поскольку D в общем случае зависит от совместного распределения случайных величин X и S.

В теории страхования принято разделять взнос D на две величины: пусть $M = EX < \infty$, тогда положим $D = M + L$. Константу M называют рисковой премией, а L - нагрузкой; часто L измеряется в процентах от M, в этом случае величина $L = \alpha M$ задается коэффициентом нагрузки α. Индивидуальные взносы разделяется на рисковые премии и нагрузки $d_i = M_i + L_i$, где $M_i = EX_i$.

Один из важных показателей, характеризующий финансовую устойчивость страховой компании - это вероятность неразорения или надежность компании. На практике при разорении - исчерпании покрытия страховщик может перебросить часть средств, занятых в других проектах, либо срочно взять кредит. Рисковая ситуация, определяющая финансовое положение компании, характеризуется тройной $(S, D, F(x))$, где $S+D$ образуют страховое покрытие, имеющееся у страховщика, $F(x)$- распределение суммарного риска.

Оперируя начальным капиталом, уровнем нагрузки, числом клиентов, схемами страхования, страховщик принимает выгодное для себя решения, исходя из некоторой задачи максимизации, поставленной перед ним. Вводится такое понятие, как функция полезности. Очевидно, функция полезности для исходного значения капитала ожидается меньшей, чем среднее значение той же функции для капитала, имеющегося на момент завершения всех страховых действий, предусмотренных договором. Это ожидание – одно из основных предположений страховых оптимизационных задач.

Возможны различные модификации страховых схем и оптимизационных задач. Страховые задачи могут рассматриваться и с точки зрения клиента. Ущерб может возмещаться клиенту не полностью. В страховой схеме может участвовать и третье лицо – перестраховщик. Подробное изучение таких вопросов выходит за рамки пособия.

Список литературы

1. Бауэрс Н. , Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Д. Актуарная математика. пер. с англ. под ред. В.К. Малиновского/ М.: Янус-К, 2001, 658 с.
2. Гербер Х. Математика страхования жизни/ М.: Мир, 1995, 160с.
3. Голубин А.Ю. Математические модели в теории страхования: построение и оптимизация/ М: Анкил,2003., 160с.
4. Израйлевич В.Л., Чернявский И.Я., Деев В.Л. Стохастическое моделирование/ Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, 1989, 40 с.
5. Касимов Ю.Ф. Начала актуарной математики (для страхования жизни и пенсионных схем)/ Зеленоград, НТФ НИТ, 1994, 183 с.
6. Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска / М.: Физматлит, 2011, 591 с.
7. Кошкин Г.М. Основы актуарной математики: учебное пособие/ Томск, 2002, 116 с.
8. Луньков А.Д., Харламов А.В. Построение вероятностных моделей продолжительности жизни/ Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, материалы международной научно-практической конференции «Математическое моделирование в управлении рисками», 2012, с.74-77.
9. Томас М. Математика рискового страхования/пер. с нем. Е.А. Курносова. М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 2005, 432 с.
10. Фалин Г.И. Введение в актуарную математику/ М.: Изд-во МГУ, 1994, 140 с.
11. Фалин Г.И., Фалин А.И. Теория риска для актуариев в задачах/ М.: Мир, 2004, 240 с.