УДК 519.213

Авторы.
Машников Валерий Васильевич – к.ф мат. наук, доцент кафедры прикладной физики Саратовского государственного университета.

Аннотация.
Изложены основные понятия статистической физики и главные распределения случайных величин молекулярной физики и термодинамики. Приведены примеры решения практических задач на определение параметров распределений: математического ожидания, наиболее вероятных значений случайных величин, дисперсии и стандартных отклонений.

Пособие предназначено для студентов младших курсов технических специальностей университета.

В.В.Машников

Элементы молекулярной и статистической физики

Методическое пособие для решения задач

.

Кафедра прикладной физики.

Саратов 2009

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

1.*Событие или случай* в теории вероятностей может быть:
-достоверным – обязательно произойдет;
-невозможным – произойти не может;
-случайным – может, как произойти (благоприятное), так и не произойти (не благоприятное).
2. *Вероятностью P(A)* случайного события *A* называют отношение числа благоприятных событий *N* (A) к числу всех событий $N \Rightarrow \infty$.

$$P(A) = \lim \frac{N(A)}{N}. \qquad (1).$$

3. Суммой двух случайных событий A_1, A_2 есть событие *B* (или A_1,или, A_2) $P(B) = P(A_1) + P(A_2)$ *(2).*
–если события не совместимы (не могут произойти одновременно).
4. *Произведением* двух событий A_1, A_2 есть событие *C* (и A_1, *и* A_2)

$$P(C) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2) \qquad (3)$$

– события A_1, A_2 совместимы и независимы; P_2-вероятность события A_2,, при условии, что событие A_1, уже совершилось.
5. *Нормировка.* Если случайная величина принимает только значения A_1, A_2 , то $P(A_1) + P(A_2) = 1$. *(4)*
Следствие. Если вероятность некоторого случайного события P_1,то вероятность того, что это событие не произойдёт $Q_1 = 1 - P_1$. *(5).*
6. *Среднее значение и математическое ожидание.*
Пусть случайная величина u принимает α возможных значений $u_1, u_2 .... u_\alpha$ с вероятностями $P_1, P_2 .... P_\alpha$. При этом u_1 реализовалась N_1; u_2 *соответственно* N_2 *и т.д.* раз. Тогда *среднее значение* случайной величины $\langle u \rangle = \dfrac{N_1 u_1 + ... + N_\alpha u_\alpha}{N} = \sum_{r=1}^{\alpha} P_r u_r$. (6).
Математическое ожидание есть предел, к которому стремится среднее значение $\langle u \rangle$ при $N \Rightarrow \infty$.
Следствия.

1. Если *f(x)* любая функция случайной величины *x*, принимающей дискретные значения $x_1 x_2 .... x_\alpha$ с вероятностью соответственно $P_1 .... P_\alpha$, то $\langle f(x) \rangle = \sum_{i=1}^{\alpha} P_i \cdot f(x_i)$ (7).
2. Если *f(x) и g(x)* любые функции случайной величины *x,* то $\langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle$. Если *C*-константа, то $\langle Cf \rangle = C \langle f \rangle$.
7. *Плотность вероятности. Функция распределения.* Если случайная величина *x* принимает ряд непрерывных значений на отрезке *ab,* а вероятность попадания величины *x* в интервал значений $x, x + dx$ есть $dP = \dfrac{dN}{N}$, то функция $F(x) = \dfrac{dP}{dx} = \dfrac{dN}{Ndx}$ называется плотностью вероятности (вероятность попадания случайной величины в единичный интервал значений).
Следствия
7.1. Среднее значение случайной величины *x* на отрезке *ab:*

$$\langle x \rangle = \int_a^b x \cdot dP(x) = \int_a^b x \cdot F(x) dx.$$

7.2. Зависимость функции плотности вероятности от значений случайной величины есть *функция распределения случайной величины по её значениям.* Она может быть выражена аналитически, графически, в виде таблиц и т.д.
8. *Дисперсия.* Характеризует разброс случайной величины относительно её среднего значения.
Пусть случайная величина *u* принимает ряд значений u_r с вероятностью P_r, а её среднее значение равно $\langle u \rangle$. Отклонение переменной от среднего значения: $\Delta u = u - \langle u \rangle$. Среднее значение квадрата этого отклонения – *ДИСПЕРСИЯ* случайной величины.

$$D(u) = \langle (\Delta u)^2 \rangle = \sum_{r=1}^{\alpha} P_r (\Delta u_r)^2 = \sum_{r=1}^{\alpha} P_r (u_r - \langle u \rangle)^2$$

Чем больше дисперсия, тем больше вероятность получить значения случайной величины заметно отличающейся от среднего (больше разброс). Дисперсия имеет размерность квадрата величины u.

9.Стандартное отклонение. Линейной мерой разброса случайной величины относительно среднего значения является корень квадратный из дисперсии:

$$\Delta u = \sqrt{\left\langle (\Delta u)^2 \right\rangle}\,.$$

Примечание. Стандартное отклонение иногда называют *среднеквадратичной флуктуацией,* а отношение величины стандартного отклонения к среднему значению случайной величины относительным отклонением или *относительной флуктуацией.*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ.

[1] Е.И. БАБАДЖАН И ДР.
«Сборник качественных вопросов и задач по общей физике». М.Наука1990.
[2] И.Е.ИРОДОВ. Задачи по общей физике.М.Наука.1988г.
[3] Ф. Рейф. БКФ том V, Статистическая физика. М.Наука 1977.
4 Р.Л.Стратонович, М.С.Поляков. «Элементы молекулярной физики, термодинамики и статистической физики». Изд. МГУ,1981.
5 В.Л.Гинзбург и др. «Сборник задач по общему курсу физики», Изд. «Наука», М.1976.

Задача №1. Какова вероятность того, что при бросании игральной кости
выпадет: а) цифра 6; б) либо 1, либо 6; в) нечётная цифра?

РЕШЕНИЕ.

а). Выпадение любой цифры событие равновероятное. Число возможных исходов бросания – шесть. По условию нормировки

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1 = 6P \Rightarrow P_6 = 1/6.$$

б). Здесь ожидается событие В, равное сумме двух не совместимых событий.

По формуле (2) имеем: $P(B) = P_1 + P_6 = 1/6 + 1/6 = 1/3$.

в) .Ожидаемых событий три: либо 1, либо 3, либо 5. Тогда Р $= 3/6 = 1/2$.

Задача №2. Два танка одновременно и независимо друг от друга стреляют в одну цель. Вероятности попадания соответственно P_1=0,9 и P_2 =0,8. Найти вероятность поражения цели.

РЕШЕНИЕ.

Цель будет поражена, если в неё попадет хотя бы один снаряд.

Промах первого танка имеет вероятность (5) $Q_1=1-P_1=1-0{,}9=0{,}1$.Второго– Q=0,2. После первого залпа возможны исходы: **уу** (успех, успех); **ун**; **ну**; **нн .**

1.1.Три исхода благоприятны: **либо** и первый и второй; **либо** первый успех и второй неуспех; **либо** первый неуспех и второй успех. Таким образом, имеем произведения вероятностей в трех слагаемых:

$P = P_1P_2 + P_1Q_2 + Q_1P_2$ =0,9·0,8+0,9·0,2+0,1·0,8=0.98.

1.2. Неблагоприятное событие реализуется одним способом **нн,** тогда поражение цели имеет вероятность $P = 1 - Q_1Q_2 = 1 - 0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}98$.

Задача №3.Произведено N выстрелов по мишени. Какова вероятность попадания n раз, если вероятность промаха Q=0,8?

РЕШЕНИЕ.

Пусть N=4, найдём исходы событий для n=0;1;2;3;4.Заметим ,что $P = 1 - Q$

n=0 реализуется одним способом: **н н н н.**

$$P_0 = \mathbf{Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4 = Q^4 \cdot P^0}$$

n=1-реализуется четырьмя способами: **уннн; нунн; ннун; нннy.**

$$P_1 = P^{1\cdot} \cdot Q^3.$$

n=2 реализуется шестью способами: **уунн; унун;унну; нуун; нуну; нну**у.

Нетрудно заметить, что это соответствует числу сочетаний из N по n.

$C_N^n = \dfrac{N!}{n!(N-n)!} \Rightarrow C_4^2 = \dfrac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1} = 6$. Вероятность реализации этого случая $P_2 = 6\cdot P^2\cdot Q^2$

n=3 Вероятность попадания три раза**:** $P_3 = C_4^3 \cdot P^3 Q^1$**.**

n=4. Вероятность попадания четыре раза: $P = C_4^4 \cdot P^4 \cdot Q^0$

В общем случае вероятность реализации **n** событий из **N:**

$$P = C_N^n P^n Q^{N-n}$$

Вычислим: P_0=0,41; P_1=0,402; P_2=0,1536; P_3=0,0256; P_4=0,0016.

Задача №4.(2.36). Величина может принимать два значения x_1 *и* x_2 При этом вероятность принять $x_1 \Rightarrow \quad P$. Найти среднее значение $\langle x^3 \rangle$.

РЕШЕНИЕ. Вероятность принимать x_2 по условию нормировки (4): $P(x_2) = 1 - P$. Усреднению подлежит функция случайной величины, следовательно $\langle x^3 \rangle = \langle f(x) \rangle = \sum_{i=1}^{2} P_i \cdot f(x) = P \cdot x_1^3 + (1-P) \cdot x_2^3.$

Задача №5.. В сосуде объёмом V_0 находится N молекул идеального газа. Найти вероятность того, что в объёме V_1 окажется *m* молекул газа.

РЕШЕНИЕ. Молекулы идеального газа находятся в непрерывном и хаотичном движении. Хаотичность – равновероятное нахождение любой молекулы в заданном объёме. При концентрации *n* общее число молекул

$N = n \cdot V_0$, а число молекул в объёме V_1 соответственно $N_1 = n \cdot V_1$. По определению вероятность нахождения одной (любой) молекулы в объёме V_1 равна $P_1 = \frac{N_1}{N_0} = \frac{nV_1}{nV_0} = \frac{V_1}{V_0}$. Задача сводится к нахождению вероятности события, при котором и 1 и 2 и ..m-я молекулы попали в V_1, а остальные $N - m$ не попали. Вероятность «непопадания» для любой одной молекулы $Q_1 = (1 - P_1)$ Так как молекулы не «пронумерованы», то эти события могут реализоваться C_N^m способами. Тогда искомая вероятность

$$P = C_N^m \cdot P_1^m \cdot Q_1^{N-m} = \frac{N!}{m!(N-m)!} (\frac{V_1}{V_0})^m (1 - \frac{V_1}{V_0})^{N-m}.$$

СЛЕДСТВИЯ.

5.1. Молекулы «пронумерованы», тогда:

а) вероятность, что молекула с номером k (*любым*) окажется в V_1:

$P_k = {}^{V_1}\!/_{V_0}$. Остальные молекулы всё равно где.

б) вероятность, что m молекул с *определёнными* номерами окажется в V_1:

$P = (\frac{V_1}{V_0})^m$. Это событие реализуется единственным способом.

в) вероятность, что в V_1 окажутся только *m* пронумерованных молекул.

$P = (\frac{V_1}{V_0})^m (1 - \frac{V_1}{V_0})^{N-m}$. Реализуется одном способом.

№6. Вычислить среднее число молекул, дисперсию, среднеквадратичную и относительную флуктуации числа молекул в объёме V_1, если в объёме V_0 их находится *N*. При необходимости принять $N >> 1$; $V_1 << V_0$; $m << N$.

РЕШЕНИЕ. 1). По определению среднего:

$\langle m \rangle = \sum_{k=1}^{N} P_k \cdot k = = \sum_{k=1}^{N} k \frac{N!}{k!(N-k)!} (\frac{V_1}{V_0})^k (1 - \frac{V_1}{V_0})^{N-k}$. Примем условия малости объёма V_1 и большого числа частиц N так, что ($N - k \approx N$) и введём параметр $a = \frac{NV_1}{V_0} = N p_1$. Тогда

$$P_k = \frac{a^k}{k!} (1 - \frac{a}{N})^{N-k} \cdot \frac{N!}{N^k (N-k)!} \approx \frac{a^k}{k!} (1 - \frac{a}{N})^{N-k} \cdot = \frac{a^k}{k!} \left[(1 - \frac{a}{N})^{-\frac{N}{a}} \right]^{-a}$$

Так как $\lim_{x \to \infty} (1 - {}^{1}\!/_{x})^{-x} = e \Rightarrow P_k = \frac{a^k}{k!} \exp(-a)$.. **Это распределение Пуассона**. Тогда $\langle m \rangle = \sum_{k=1}^{N} P_k \cdot k = a \sum_{k=2}^{N} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} e^{-a} = a = N \frac{V_1}{V_0}$, так как сумма является вероятностью попадания частицы в объём V_0 (т.е =1). Среднее значение при $N \to \infty$ это математическое ожидание случайной величины.

2) Найдём средне квадратичную функцию $\langle m^2 \rangle = \sum_{k=1}^{N} k^2 P_k$

Заменим $k^2 = k(k-1+1)$. Тогда

$$\left\langle m^2 \right\rangle = \sum_{k=1}^{N} \frac{a^k e^{-a}}{k!} k(k-1) + \sum \frac{a^k e^{-a}}{k!} k = a^2 \sum_{k=3}^{N} \frac{a^{k-2} e^{-a}}{(k-2)!} + a \sum_{k=2}^{N} \frac{a^{k-1} e^{-a}}{(k-1)!} = a^2 + a$$

3). Найдём дисперсию, стандартное отклонение, флуктуацию.

3.1. $D(m) = \left\langle (\Delta m)^2 \right\rangle = \sum_{k=1}^{N} P_k (k - \langle m \rangle)^2 = \sum_k \frac{a^k e^{-a}}{k!}(k^2 + a^2 - 2ka) =$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a^k e^{-a} k^2}{k!} + \sum_{k=1}^{N} \frac{a^k e^{-a}}{k!} a^2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{a^k e^{-a}}{k!} (-2ka) = a^2 + a + a^2 - 2a \sum_{k=1}^{N} \frac{a^k e^{-a}}{k!} k = a.$$

3.2. $D(m) = \left\langle (m - \langle m \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle (m)^2 \right\rangle - (\langle m \rangle)^2 = a^2 + a - a^2 = a$.

Математическое ожидание равно дисперсии случайной величины, распределённой по закону Пуассона.

4.Теперь легко найти стандартное отклонение (среднеквадратичную флуктуацию) $\Delta m = \sqrt{D(m)} = \sqrt{a} = \sqrt{\frac{V_1}{V_0} N}$.

5. Относительная флуктуация:

$$\frac{\Delta m}{\langle m \rangle} = \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{V_0}}{\sqrt{N V_1}}.$$

Задачи на распределение Пуассона.

[1] 2.22–2.28; 2.40-2.43. [2]. 2.164 – 2.168 [3] 2.4—2.20.

1.Идеальный газ находится в большом объёме при *T=300 K* и давлении *P=1 атм*. Оценить среднеквадратичное отклонение числа молекул от среднего значения и относительную флуктуацию числа молекул в малом объёме *V=1* см^3.Ответ:

$$\Delta u = \left[\frac{PV}{kT}\right]^{\frac{1}{2}} = 0{,}5 \cdot 10^{10}; \ \Delta u / \langle m \rangle = \left[kT / PV \right]^{\frac{1}{2}}$$

2.Испускание электронов нитью накала в вакууме происходит случайным образом, причём за 1 сек. среднее число испущенных электронов равно *v*. Определить средний заряд $\langle Q \rangle$, испущенный нитью за время τ, дисперсию заряда σ_Q^2. Считать, что за малое время $\Delta t = \frac{\tau}{N}$ нить может испустить, или не испустить, лишь один электрон. *N*- число малых интервалов времени.

Ответ: $\langle Q \rangle = \left\langle \Delta u^2(Q) \right\rangle = e v \tau.$

Распределение Гаусса. (Нормальный закон распределения).

Выше было показано, что биноминальное распределение при больших *N* переходит в распределение Пуассона. Случайные величины, зависящие от большого числа (тоже случайных) факторов, оказывается распределённой по нормальному закону или закону Гаусса.

$f(x,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$, где x случайная величина, зависящая от множества независимых факторов. При этом влияние каждого фактора не значительно по сравнению с влиянием всей суммы; σ - параметр распределения (стандартное отклонение). Математически закон Гаусса представляет собой асимптотическую форму биноминального закона распределения для случая очень больших N

По нормальному закону распределяются проекции скорости молекул в газе, ошибки измерений и т.д.

Задача №1.Фукция распределения случайной величины *x* на интервале $\infty, -\infty$ имеет вид распределения Гаусса. Найти математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение величины *x*.

Решение.

Математическое ожидание по определению:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,\sigma) dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x,\sigma) dx + \int_{0}^{\infty} x f(x,\sigma) dx = -\int_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} = 0 \text{ т.к}$$

подинтыгральное выражение нечётно.

Дисперсия: $\left\langle \Delta x^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,\sigma) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$. Обозначим

$$y^2 = \frac{x^2}{2\sigma^2} \Rightarrow x^2 = 2\sigma^2 y^2 \Rightarrow x = y\sigma\sqrt{2} \Rightarrow dx = \sigma\sqrt{2} dy \Rightarrow$$

$\left\langle \Delta x^2 \right\rangle = \frac{2\sigma^2 \sqrt{2}\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} 2\int_0^\infty y^2 e^{-y^2} dy$. Учтено, что подинтыгральная функция чётная. Последний интеграл равен $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$. Тогда

$\left\langle \Delta x^2 \right\rangle = \sigma^2$. Стандартное отклонение: $\Delta x = \sigma$. **Распределение Больцмана**.

Часто в прикладных науках интересуются не зависимостью плотности вероятности случайной величины от её значения, а зависимостью между конкретными параметрами состояния системы. Так скорость молекулы газа вследствие соударений является случайной величиной. В то же время среднее значение скорости определяет температуру, импульс, давление газа.

Рассмотрим поведение молекул газа в силовом поле.

Задача №2.16,[2].

Считая, что температура, молярная масса и ускорение свободного падения постоянны, найти зависимость давления атмосферного воздуха от высоты. На поверхности Земли давление P_0.

Решение. Выделим в атмосфере столб воздуха с площадью основания *S*. На высоте z от поверхности Земли возьмем б. малый элемент *Sdz*, масса которого $dm = \rho(z) S dz$. Здесь $\rho(z)$ плотность воздуха на высоте *z*. Давление этого элемента на нижнюю часть столба

$dp = \frac{dm \cdot g}{S} = \frac{-\rho(z) S dz g}{S} = -\rho(z) g dz$.(1)С другой стороны

$p = nkT = \frac{\rho(z) kT}{m_0} \Rightarrow dp = d\rho \frac{kT}{m_0}$.(2). Приравнивая (1) и

(2): $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{m_0 g}{kT}$, *интегрируя от* 0 *до* $h \Rightarrow \rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \Rightarrow$.

$n(h) = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \Rightarrow P(h) = P_0 \exp(-\frac{m_0 gh}{kT})$.

Задача 2.21 [2].Цилиндр, закрытый с одного конца, вращают в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через открытый конец. Найти давление воздуха как функцию расстояния r от оси.P_0, T, m_0- давление, температура, m_0 масса молекулы воздуха.

Решение. Плотность воздуха растет с ростом r ,так как на молекулы действует центробежная сила инерции. На выделенный элемент столба воздуха dr действует сила $dF = \rho(r) \cdot S \cdot dr \cdot \omega^2 \cdot r \Rightarrow$

$dp = \rho(r) \omega^2 r\, dr$. С другой стороны $dp = \frac{d\rho(r) kT}{m_0}$ Приравнивая оба выражения:

$\frac{d\rho}{\rho} = \omega^2 \frac{m_0}{kT} r dr \Rightarrow \rho(r) = \rho_0 \exp(\frac{m_0 r^2 \omega^2}{2kT})$ $P(r) = P_0 \exp(\frac{J\omega^2}{2kT})$.

Нетрудно заметить, что mgh и $\frac{J\omega^2}{2}$ есть энергия молекулы в силовом поле, зависящая от расстояния - $\mathrm{E}(r)$.

Общий вид распределения частиц по плотности в силовом поле с энергией $\mathrm{E}(r)$ будет иметь вид:

$n(r) = n_0 \exp(-\frac{\mathrm{E}(r)}{kT})$—**распределение Больцмана**.

Задача.. Оценить радиус r мелких шарообразных частичек веществ, взвешенных в жидкости, если при увеличении высоты на h=13·10^{-3} мм концентрация частичек уменьшается в $\alpha = 2$ раза. Температура жидкости Т=300 К; плотность $\rho_1 = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3; плотность вещества частичек $\rho_2 = 1{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Указание. Сила тяжести и сила Архимеда образуют силовое поле. $F = mg - \rho_1 Vg = (\rho_2 - \rho_1) Vg \Rightarrow \mathrm{E}(h) = (\rho_2 - \rho_1) Vgh$

Ответ: $r = \left[\frac{3kT\, \ell n(\alpha)}{4\pi(\rho_2 - \rho_1) gh} \right]^{1/3} = 2{,}6 \cdot 10^{-7}$ м

Распределение Максвелла.

Задача. 2.120, [2]. Потенциальная энергия молекул газа в некотором центральном поле зависит от расстояния r до центра поля как $U(r) = ar^2$, где a - положительная постоянная. Температура газа *T*, концентрация молекул в центре поля– n_0. Найти распределение плотности вероятности (функцию распределения).

Решение. Искомая функция имеет вид: $F(r)=\frac{dN}{Ndr}$ Где dN – число молекул в объёме $dV=4\pi r^2 dr$; N – число молекул во всем объёме поля.

$N=\int_0^\infty dN$. Воспользуемся распределением Больцмана:

$$dN=n(r)dV=n_0\exp(-ar^2/kT)4\pi r^2dr\Rightarrow N=4\pi n_0\int_0^\infty e^{-\frac{ar^2}{kT}}r^2dr$$

Произведём замену переменных, чтобы свести интеграл к табличному: $\int_0^\infty y^2e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$. $\quad y^2=\frac{a}{kT}r^2\Rightarrow r^2=\frac{kT}{a}y^2\Rightarrow$

$$dr=\sqrt{\frac{kT}{a}}dy\Rightarrow N=4\pi n_0(\frac{kT}{a})^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty y^2e^{-y^2}dy=4\pi n_0(\frac{kT}{a})^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

$$\underline{F(r)=\frac{dN}{Ndr}=4\pi r^2(\frac{a}{\pi kT})^{\frac{3}{2}}\exp(-\frac{ar^2}{kT})}.$$

Найдём наиболее вероятное значение $r_н$. Это соответствует

$$F(r)=\max.\ \Rightarrow\frac{dF}{d(r^2)}=0=4\pi(\frac{a}{\pi kT})^{\frac{3}{2}}\left[1-\frac{a}{kT}r^2\right]\Rightarrow r_н=\sqrt{\frac{kT}{a}}.$$

Следствия.

*1.*Введём новую переменную

$$R=r/r_н\Rightarrow dR=dr/r_н\Rightarrow dr=r_нdR;\quad r^2=R^2r_н^2$$

$$f(R)=\frac{dN}{N}=4\pi(\frac{a}{kT})^{\frac{3}{2}}\frac{R^2r_н^2}{(\sqrt{\pi})^3}e^{-R^2}r_нdR=\frac{4}{\sqrt{\pi}}R^2e^{-R^2}dR.$$ Здесь учтено, что

$(\frac{a}{kT})^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{r_н^3}$. Это распределение более компактно, а вероятность попадания в интервалы значений $(R,R+dR)$ *и* $(r,r+dr)$ одинакова.

*2.*Найдём распределение по энергиям.

$U(r)=ar^2\Rightarrow dU=2radr;\ r^2=\frac{U}{a};\ r=\sqrt{\frac{U}{a}};\quad dr=\frac{dU}{2\sqrt{a}\sqrt{U}}$. Подставим

$$\frac{dN}{N}=F(U)dU=4\pi\frac{U}{a}(\frac{a}{\pi kT})^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{U}{kT}}\frac{dU}{2\sqrt{a}\sqrt{U}}=2\pi(\frac{1}{\pi kT})^{\frac{3}{2}}U^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{U}{kT}}dU.$$

Наиболее вероятное значение энергии:

$$U_н\Rightarrow\frac{dF(U)}{dU}=0=\frac{U^{-\frac{1}{2}}}{2}-\frac{1}{kT}U^{\frac{1}{2}}\quad.\Rightarrow U_н=\frac{1}{2}kT.$$ Можно упростить, введя $\mathrm{E}=\frac{U}{kT}\Rightarrow F(E)dE=\frac{2}{\sqrt{\pi}}E^{\frac{1}{2}}\exp(-E)dE$

По этим функциям легко находить средние значения различных величин, -дисперсию, стандартное отклонение и т.д.

3. Если перейти в пространство скоростей v_x, v_y, v_z и предположить, что каждая молекула газа имеет свой вектор скорости, то распределение точек концов этих векторов будет соответствовать распределению молекул по скоростям.

Энергия, зависящая от координат этого пространства, есть кинетическая энергия молекулы газа: $E(v)=\frac{mv^2}{2}$. Концентрацию точек концов векторов найдём формально по распределению Больцмана:

$n(v)=n(0)\exp(-\frac{E}{kT})$. Элементарный объём пространства скоростей: $dV=4\pi v^2dv$. Нахождение функции распределения молекул газа по скоростям математически сводится к замене в предыдущей задаче переменных: $a=\frac{m}{2};\quad r=v;\quad U=ar^2=\frac{mv^2}{2}=E$ Подставляя новые переменные в полученные выше распределения, получим:

$$F(v)=\frac{dN}{Ndv}=4\pi v^2(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}\exp(-\frac{mv^2}{2kT}).$$

Это **распределение молекул газа по скоростям Максвелла.**

Распределение молекул по компонентам скоростей.
Функция $F(v)$ определяет вероятность попадания скорости молекулы в единичный интервал значений, найдём вероятность попадания в единичный объём пространства скоростей:

$f(v)=\dfrac{dN}{N4\pi v^2 dv}=\dfrac{F(v)}{4\pi v^2}$. В качестве элементарного объёма возьмем не шаровой слой, а куб со сторонами $dv_x dv_y dv_z = dV$. Скорости молекул $v^2 = v_x^2+v_y^2+v_z^2$. Вероятность попадания скорости молекулы в интервалы

$v_x,\ v_x+dv_x;\ v_y,\ v_y+dv_y;\ v_z,\ v_z+dv_z$; будет равна:

$f(v)dV=\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp[-\dfrac{m}{kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)]dv_x dv_y dv_z$. Поскольку значения компонент скорости случайные и независимые события, то искомая вероятность есть произведение трёх равновероятных событий:

$f(v)=\varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)$, где функция $\varphi(v_x)=\left[\dfrac{m}{2\pi kT}\right]^{1/2}\exp(-\dfrac{m}{2kT}v_x^2)$ – вероятность попадания скорости в единичный интервал значений v_x при любых значениях v_y и v_z.

Численные оценки распределения Максвелла.
2.93. [2]. Найти относительное число молекул газа, скорости которых отличаются не более, чем на 1% от наиболее вероятной.
Решение. Воспользуемся распределением Максвелла в переменных

$u=\dfrac{v}{v_н}$ (смотри следствие 1, Задача. 2.120, [2].)

$$f(u)=\frac{dN}{N}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}u^2e^{-u^2}du.\Rightarrow\frac{\Delta N}{N}=\int_{u-\Delta u}^{u}f(u)+\int_{u}^{u+\Delta u}f(u)=$$

$=2\dfrac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-1}\Delta u$, так как $\Delta u \lll u$.(0,01<<1) $\dfrac{\Delta N}{N}=1{,}67\%$.
Примечание

. Для одного газа при одной температуре $v_н : \langle v\rangle : v_{кв.}$ = 1,41: 1,60: 1.73.
Задача 2.99.[2}.
При какой температуре газа число молекул со скоростями $v, v+dv$ максимально. Масса молекулы m.
Решение. В задаче требуется найти максимум функции распределения по параметру T Обозначим $t=1/T$; $a=mv^2/2k$, тогда

$$F(t)=4\pi v^2(\frac{m}{2\pi k})^{3/2}t^{3/2}e^{-at}\Rightarrow\frac{dF}{dt}=0=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}}a\Rightarrow t=\frac{3}{2a}\Rightarrow T=\frac{mv^2}{3k}.$$

Рекомендуемые задачи для самостоятельного решения:
[1}2.64—2.69; 2.73; 2.74. а
[2] 2.85.–2.106.
[3] 6.7; 6.14;
Задачи, рекомендуемые для контрольной работы.
Функция распределения случайной величины ***x***, заданной на промежутке
$(0,\infty)$, имеет вид:
Вариант 1. $F(x)=A\exp(-ax^2)$; Вариант 2. $F(x)=A\exp(-ax\ )$;
Вариант 3. $F(x)=Ax^2\exp(-ax^2)$; Вариант 4. $F(x)=Ax^{\frac{1}{2}}\exp(-ax\ )$.
Вариант 5. $F(x)=Ax^3\exp(-ax^2)$; Вариант 6. $F(x)=Ax\exp(-ax^2)$;
Вариант 7. $F(x)=Ax\exp(-ax\ )$.
Здесь a – известная постоянная. *НАЙТИ:*
а) наиболее вероятное значение $x_н$; б) среднее значение $\langle x\rangle$;
в) значение параметра a, при котором вероятность попадания x в интервал значений $x, x+dx$ максимальна.
Примечание: При решении задач следует воспользоваться табличными интегралами:

$$\int x^n e^{ax}dx=\frac{x^n e^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx;\Rightarrow$$

$$\int_0^\infty ye^{-y}dy = 1; \quad \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}}e^{-y}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad \int_0^\infty y^{\frac{3}{2}}e^{-y}dy = \frac{3\sqrt{\pi}}{4};$$

$$\int_0^\infty y^2 e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Задачи.

1. Идеальный газ находится в сосуде достаточно большого объёма при температуре $t = 27^0 C$ и давлении $P = 1$ атм. Оценить среднеквадратичное отклонение σ_m числа молекул от среднего значения $\langle m \rangle$ в малом объёме $V = 1\text{см}^3$; относительную флуктуацию числа молекул газа в этом объёме т.е. $\sigma_m / \langle m \rangle$. Ответ:

$$\sigma_m = \{\frac{PV}{kT}\}^{1/2} = 0{,}5 \cdot 10^{10}; \quad \sigma_m / \langle m \rangle = \left[PV/(kT) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

2. Испускание электронов нитью накала в вакуумной трубке происходит очень редко, случайным образом, причём среднее число электронов, испущенных за одну секунду, равно $v\left[\frac{1}{c}\right]$. Поделив время наблюдения τ на большое число N столь малых интервалов времени, чтобы вероятность испускания нитью электрона за это время была много меньше единицы, определить средний полный заряд $\langle Q \rangle$, испущенный нитью за это время τ ,
дисперсию заряда σ_Q^2. (Считать, что N интервалов представляют собой статистическую систему независимых идентичных элементов.)

Ответ: $\langle Q \rangle = \sigma_Q^2 = ev\tau.$

3. Сэмуэль Пепайс предложил И.Ньютону следующую задачу: Какое из событий более вероятно: 1) появление одной шестёрки при бросании 6 костей; 2) появление хотя бы двух шестёрок при бросании 12 костей; 3) появление не менее трёх шестёрок при бросании 18 костей?

Ответ: $P_n = C_N^n p^n q^{N-n} = C_N^n \left(1/6\right)^n \left(1 - 1/6\right)^{N-n}$.

4. В закрытом сосуде объёма V находится N молекул идеального газа. Определить среднее число молекул и его флуктуации в объёме ν , являющегося малой частью объёма газа.

Ответ: $\langle n \rangle = N \nu / V$; $\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle$.

.Б-5. Определить величину объёма, в котором средняя квадратичная флуктуация числа частиц идеального газа составляет $\alpha = 10^{-6}$ от среднего числа частиц в том же объёме V . Определить среднее число частиц $\langle n \rangle$ в этом объёме. Газ находится при нормальных условиях.

Ответ: $P = 1/(N\alpha^2) = 3{,}7 \cdot 10^{-8}$ см . $\langle n \rangle = 1/\alpha^2 = 10^{12}$ где N -число молекул в единице объёма. (N=$2{,}7 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$).

Б-6. Сосуд с N молекулами идеального газа разделяют перегородкой на две части с объёмами V_1 и V_2 . Найти вероятность того, что в первой части будет N_1 , а во второй N_2 молекул.

Ответ: $P_1 = \frac{N!}{N_1! N_2!} p^{N_1} q^{N_2}$ – вероятность того, что в объёме V_1 находятся N_1 всё равно каких молекул, а остальные - вне того объёма. Здесь $p = V_1/V$; $q = (1-p) = V_2/V$.

Б-7. Зависимость концентрации молекул газа от координат $n(r)$ задана распределением Больцмана. Найти распределение вероятностей $d\,f\,(r)$ для координат молекул. Объём газа V.

Ответ : $df(r) = \frac{dN}{N} = \frac{n(r)\,dxdydz}{\int_V n(r)dxdydz} = \frac{\exp(-u(r)/kT)dxdydz}{\int_V \exp(-u(r)/kT)dxdydz}$.

Б-8.Найти массу идеального газа с молярной массой μ , находящегося в высоком вертикальном сосуде с площадью основания S и высотой h. Температура газа T, ускорение свободного падения g- постоянны.

Давление на нижнее основание сосуда p_0.

Ответ: $m = \int\limits_0^h \rho_0 \exp(-\mu g z / RT)\, S\, dz = \frac{p_0 S}{g}\left[1 - \exp(-\mu g h / RT)\right]$.

Б-9.Найти высоту, на которой находится центр тяжести идеального газа с молярной массой μ, находящегося в высоком цилиндрическом сосуде в однородном поле тяжести напряжённостью g. Температура газа T.

$$\text{Ответ: } h_c = \frac{\int\limits_0^{h=\infty} z \cdot dm}{m} = \frac{\int\limits_0^{\infty} \rho \cdot S\, z\, dz}{\int\limits_0^{\infty} \rho(z) S dz} = \frac{RT}{\mu g}.$$

Б-10. Найти давление как функцию высоты и распределение концентрации молекул атмосферы Земли, если температура зависит от высоты по закону $T(h) = T_0(1 - \alpha h)$. Полагать μ, n_0, g - известными.

Решение.

$$P(h) = \frac{\rho(h) R T(h)}{\mu}; \rho(h) = \frac{P(h)\mu}{RT(h)}; \; dP(h) = -\rho(h) g dz; \frac{dP}{P} = -\frac{\mu g dz}{RT_0(1-\alpha z)}$$

$P(z) = P_0 \left|1 - \alpha h\right|^{\frac{\mu g}{\alpha R T_0}}$ Ответ: $n(h) = n_0 \left|1 - \alpha h\right|^{\frac{\mu g}{\alpha R T_0} - 1}$

Б-11. Оценить радиус r мелких шарообразных частичек веществ, взвешенных в жидкости, если при увеличении высоты на h=13·10^{-3} мм концентрация частичек уменьшается в $\alpha = 2$ раза. Температура жидкости Т=300 К; плотность $\rho_1 = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3; плотность вещества частичек $\rho_2 = 1{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Указание. Сила тяжести и сила Архимеда образуют силовое поле.

$F = mg - \rho_1 V g = (\rho_2 - \rho_1) V g \Rightarrow \mathrm{E}(h) = (\rho_2 - \rho_1) V g h$

$$\text{Ответ: } r = \left[\frac{3kT\, \ell n(\alpha)}{4\pi(\rho_2 - \rho_1) g h}\right]^{1/3} = 2{,}6 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

М-12.Получить функцию распределения Максвелла в безразмерном виде $f(u)$, где $u = v / v_{\text{âåð.}}$. Ответ: $f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2)\, du$

М-13. Найти распределение вероятностей $df(r,v)$ для координат и компонент скоростей молекул идеального газа, находящегося в сосуде объёмом V при температуре T, масса молекулы - m. Силовых полей нет.

Решение. Искомая вероятность есть вероятность попадания молекулы в элементарный объём $dxdydz$ (иметь заданные координаты) и вероятность попадания в элементарный объём $dv_x dv_y dv_z$ (иметь заданные значения компонент скорости) т.е. имеем произведение известных вероятностей:

$$df(r,v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z \frac{dxdydz}{V}.$$

М-14. Найти распределение вероятностей $df(r,v)$ для координат и компонент скоростей молекул идеального газа, находящегося в сосуде объёмом V при температуре T, масса молекулы - m. Газ находится во внешнем силовом поле, в котором потенциальная энергия молекул равна $u(r)$.

Решение. Имеем произведение вероятностей: $df(r,v) = df(v) \cdot df(r)$. Последняя найдена в задаче Б-7.

$$df(r,v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z \frac{\exp(-u(r)/kT) dxdydz}{\int\limits_V \exp(-u(r)/kT) dxdydz}.$$

Полученное соотношение можно преобразовать в распределение Максвелла-Больцмана.

Задачи на статистический и информационный смысл энтропии

[1] Е.И. БАБАДЖАН И ДР.
«Сборник качественных вопросов и задач по общей физике».
М.Наука1990.

№ 2.194-2.196 ; 2.204-; 2.205; 2.209