

*Ю.П. Конценбин  
Е.Н. Волкова*

# ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

# ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ



Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

разъяснения и комментарии  
к лекционному курсу «Магниторазведка»

**САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**имени Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО**

*Геологический факультет*

**Ю.П. Конценбин, Е.Н. Волкова**

# **Интерпретация магнитных аномалий**

**(разъяснения и комментарии к лекционному курсу «Магниторазведка»)**

Учебное пособие для студентов специальности 011200 – геофизика.

**Саратов 2006 г.**

**УДК 550.831.К-64.-1.**

**ISBN 978-5-93888-933-2**

**Конценбин Юрий Петрович, Волкова Елена Николаевна.** Интерпретация данных магнитных аномалий. /Учебное пособие для студентов, обучающихся по специальности 011200 – геофизика./ Саратов: Из-во «Научная книга» - 74 с.

В учебном пособии изложены основы теории и практики интерпретации магнитных аномалий при решении геологических задач, рассмотрены физико-геологические предпосылки применения магниторазведки, способы решения прямой и обратной задач, способы преобразования (трансформации) магнитных аномалий, приведены примеры решения геологических задач при изучении строения земной коры и поисков полезных ископаемых.

Для студентов вузов, обучающихся по геофизической специальности.

**Рецензенты:**

Ю.В. Антонов – профессор, доктор ф.-м. н., Воронежский госуниверситет

**ISBN 978-5-93888-933-2**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>4</b>
<b>1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАГНЕТИЗМА.....</b>	<b>5</b>
<b>2. ПОТЕНЦИАЛ. ЗНАЧЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА.....</b>	<b>15</b>
2.1. Точечный потенциал .....	16
2.2. Производная функции по направлению .....	17
2.3. Потенциал объёмных масс. ....	20
2.4. Потенциал простого слоя .....	20
2.5. Потенциал диполя и двойного слоя.....	21
2.6. Магнитный потенциал.....	25
2.7. Однороднонамагниченная сфера .....	33
<b>3. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛ ПРОСТОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ НАМАГНИЧЕНИИ.....</b>	<b>39</b>
3.1. Магнитные аномалии шара.....	39
3.2. Магнитные аномалии штока.....	42
3.3. Магнитные аномалии вертикальных пластов.....	46
<b>4. СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ СОВРЕМЕННОЙ МАГНИТОРАЗВЕДКИ.....</b>	<b>50</b>
4.1. Высокоточная аэро- и наземная магниторазведка.....	50
4.2. Микромагнитная съёмка. ....	51
4.3. Скважинная магниторазведка.....	53
4.4. Сверхточная магнитометрия.....	54
4.5. Спутниковая магнитометрия.....	55
4.6. Повысотные наблюдения. ....	57
4.7. Режимные наблюдения. ....	57
4.8. Изучение локальных изменений вариаций магнитного поля .....	58
4.9. Математическое моделирование магнитных полей.....	59
<b>5. ПРИМЕНЕНИЕ МАГНИТОРАЗВЕДКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.....</b>	<b>61</b>
5.1. Геологическое картирование. ....	62
5.2. Выделение геосинклиналей и платформ.....	62
5.3. Изучение фундамента. ....	64
5.4. Применение магниторазведки для выявления и прослеживания зон разломов. .....	65
5.5. Прослеживание даек. ....	66
5.6. Поиски месторождений полезных ископаемых.....	67
5.6.1. Поиск и разведка железорудных месторождений.....	67
5.6.2. Поиски месторождений титана.....	69
5.6.3. Поиски хромитов.....	69
5.6.4. Поиски месторождений никеля.....	70
5.6.5. Поиски месторождений бокситов.....	70
5.6.6. Применение магниторазведки при поисках месторождений нефти и газа.....	71
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>72</b>

## Введение

Магниторазведка – один из основных методов разведочной геофизики, основанный на изучении естественного магнитного поля Земли.

Возможность применения измерений геомагнитного поля при решении геологических задач основана на различии магнетизма горных пород. Большая часть их создает невозмущенное поле – так называемое, нормальное магнитное поле. Другая часть пород, обладая повышенным магнетизмом, создаёт собственное магнитное поле, которое принято называть аномальным. По нему можно обнаружить намагниченные тела, определить условия их залегания, выявить полезные ископаемые.

Под интерпретацией данных магниторазведки понимается геологическое истолкование магнитных аномалий, то есть установление связи между ними и массами горных пород, слагающих земную кору. Это истолкование позволяет изучать строение и вещественный состав геологического разреза, а значит, искать полезные ископаемые.

Пособие рассчитано на студентов, ознакомленных с теорией магнетизма, методикой регистрации магнитного поля, первичной обработкой данных полевых наблюдений, вычисления магнитных аномалий и построением графиков и карт распределения элементов геомагнитного поля.

Данное учебное пособие основано на лекциях, читаемых авторами на кафедре геофизики Саратовского госуниверситета, составленных по многочисленным источникам – как известным учебникам, так и периодической литературе, по результатам собственных исследований в области методики геологической интерпретации данных магниторазведки.

## 1. Основные понятия магнетизма.

Известно, что магнитное поле всегда связано с электрическими токами и в магниторазведке широко используются понятия связанные с магнитными массами. Использование этих понятий существенно упрощает решение многих практических задач, таких, как расчет действия постоянного однородного поля на магнит, расчет взаимодействия двух постоянных магнитов, расчет поля, создаваемого телами простейшей формы, однако надо отметить, что магнитных масс или количеств магнетизма как особых субстанций в природе не обнаружено. Но условились считать, что магнитные явления обусловлены наличием магнитных масс которые находятся в полюсах. Чем больше массы полюсов, тем более сильным будет магнит. Магнитную массу северного полюса условились считать положительной и обозначать « $+m$ », массу южного полюса отрицательной и, соответственно, обозначать через « $-m$ ». Действие магнита на любой магнитный предмет, удаленный от магнита на некоторое расстояние, зависит только от величины магнитных масс полюсов. Она в равной степени будет зависеть от размера магнита, то есть, от расстояния между его полюсами « $2L$ ». В связи с этим, за основную характеристику постоянного магнита принято произведение магнитной массы одного из полюсов магнита на расстояние между полюсами.

$$2Lm = M$$

Это произведение называется магнитным моментом постоянного магнита. Магнитный момент – величина, характеризующая вещество как источник магнитного поля. Величина силы взаимодействия двух точечных полюсов или точечных (бесконечно малого объема) магнитных масс была экспериментально установлена Кулоном в 1875 году. Согласно закону Кулона, сила взаимодействия  $f$  таких полюсов прямопропорциональна произведению их магнитных масс  $m_1$  и  $m_2$  и обратно пропорциональна расстоянию между ними, то есть

$$F = \frac{m_1 m_2}{\mu r^2}$$

где  $\mu$  - магнитная проницаемость среды.

Основной характеристикой любого магнитного поля является вектор магнитной индукции  $B$ . Величина и направление этого вектора в некоторой точке устанавливаются законом Ампера и определяются силой  $F$ , действующей на элемент проводника длиной  $L$  с током  $J$ , помещенный в этой точке

$$B = \frac{F}{LJ \sin \alpha}$$

$\alpha$  - угол между направлениями магнитных силовых линий и электрического тока в проводнике.

В магниторазведке в качестве основной силовой характеристики поля используется вектор напряженности поля  $H$ . Вектор  $H$ , в отличие от вектора  $B$  характеризует поле, не искаженное влиянием среды.

Модули векторов  $H$  и  $B$  связаны соотношением:

$$H = \frac{B}{\mu\mu_0} (Cи)$$

$$H = \frac{B}{\mu} (CGC)$$

где  $\mu$  - магнитная проницаемость среды,  $\mu_0$  - коэффициент, зависящий от системы выбора единиц.

Если принять условно, что магнитные массы существуют, то напряженность магнитного поля  $H$  в некоторой точке можно определить как силу, с которой поле действует на пробный, положительный, точечный, единичный заряд, мысленно помещенный в эту точку:

$$H = \frac{f}{m_2}$$

Из двух точечных магнитных масс, одну, например,  $m_1$ , можно принять за источник поля, а вторую – за точечный пробный заряд с массой  $m_2$ , тогда учитывая закон Кулона:

$$H = \frac{f}{m_2} = \frac{m_1 m_2}{r^2 m_2} = \frac{m_1}{r^2}$$

напряженность поля точечного источника прямопропорциональна магнитной массе его и обратно пропорциональна квадрату расстояния массы.

Магнитное поле называется однородным, если величина и направление вектора напряженности поля остаются неизменными в каждой точке рассматриваемой области.

Для характеристики магнитного поля в ограниченном пространстве используется представление о магнитном потоке  $\Phi$ . В случае однородного магнитного поля,  $\Phi$  определяется произведением площади  $S$  и величиной проекции напряженности поля на нормаль к данной площади:

$$\Phi = HS \cos(H, n)$$

Для неоднородного поля:

$$\Phi = \int HndS,$$

$$\Delta\Phi = Hn\Delta S$$

Продолжим далее обзор понятий, встречаемых в магниторазведке.

Намагниченность физического тела характеризуется интенсивностью намагничения  $J(I)$ . Намагниченность вещества объясняется согласной ориентировкой магнитных моментов элементарных источников магнитного поля – спиновых и орбитальных магнитных моментов электронов и ядер.

СПИН, или механический момент – собственный момент импульса, количества движения, неотъемлемое свойство электрона, наравне с зарядом и массой. Спиновый магнитный момент существует благодаря спину электрона. Магнетизм атомов порождается тремя причинами:

1. Существованием у электрона спинового магнитного момента;
2. Орбитальным движением  $\bar{e}$  в атоме, создающим орбитальный магнитный момент;
3. Магнитным моментом ядра, который создается спиновыми моментами протонов и нейтронов.

Пирромагнитное соотношение показывает, что орбитальный  $2m\kappa$  момент тесно связан с моментом импульса или спиновый магнитный момент со спином.

$$J = \frac{\text{магн. момент ядра}}{\text{мех. момент ядра}}$$

Под магнитным моментом  $dM$ , элемента объема  $dV$  с центром в точке  $A$  следует понимать геометрическую сумму векторов магнитных моментов элементарных источников, входящих в объем  $dV$ . Для оценки степени намагниченности того или иного вещества, или тела, нельзя использовать магнитный момент элемента его объема, так как названные параметры будут зависеть не только от намагниченности, но и от размеров тела или элементов объема. Параметром, не связанным с размером, и, характеризующим только намагниченность, является магнитный момент, отнесенный к единице объема, или магнитный момент единицы объема. Указанный параметр называют намагниченностью, или интенсивностью намагничения и обозначают через  $J$ . Величина модуля вектора намагниченности определяется отношением:



$$J = \frac{dM}{dV}$$

Намагниченность, как и магнитный момент, является векторной величиной. Если вектор  $J$  сохраняет свою величину и направление во всех точках тела, намагниченность называется однородной. При однородной намагниченности

$$J = \frac{M}{V}$$

где  $J$  может быть индуктивной и остаточной. Намагниченность наведенная, то есть, индуктивная  $J_i$  возникает под действием намагничивающего поля и исчезает после снятия действия поля. Намагниченность остаточная  $J_0$  - это намагниченность, которая сохраняется после снятия действия внешнего поля.

Единица намагниченности не имеет собственного наименования. В системе СИ она выражается в амперах на метр (А/м); в системе СГС – 1ед.СГС=10<sup>3</sup>А/м.

Важную характеристику магнитных свойств дает точка Кюри. При достижении, которой вещество теряет ферромагнитные свойства.

Магнитные свойства пород обусловлены в основном, магнитным моментом электронов, который характеризует круговой ток, возникающий при движении электронов вокруг своей оси. У некоторых веществ  $M$  равен 0, у других отличен от 0.

Когда на вещество действует магнитное поле земли, в некоторых минералах собственные магнитные поля атомов ориентируются по направлению этого поля. Эти минералы называются парамагнитными. К другой группе относятся минералы, в которых действие внешнего поля создает отрицательную магнитную восприимчивость. Такие вещества ослабляют действие магнитного поля, то есть вызывают отрицательные аномалии. Называются они диамагнетиками (Cu, Ag, Au, Hg)

Парамагнитные вещества не намагничены, пока на них не действует поле, так как у них магнитные моменты атомов ориентированы хаотично под действием теплового движения. Диамагнетизм от температуры не зависит.

Среди парамагнетиков очень высоким значением магнитной восприимчивости обладают ферромагнетики. Магнитные моменты всех атомов ферромагнитных пород параллельны в объемах порядка 10<sup>-9</sup>см<sup>3</sup>.

При температуре Кюри ферромагнетики становятся парамагнетиками.

Магнитная восприимчивость горных пород зависит от типа, состава, количества ферромагнитного материала, от размера зерен, структуры, температуры и давления.

У диамагнетиков результирующий магнитный момент  $M$  в отдельных атомах равен 0 и  $J$  возникает за счет Ларморовской процессии электронных орбит в магнитном поле.

У парамагнетиков большое число атомов обладает магнитным моментом, но в отсутствии внешнего поля  $\Sigma M = 0$  вследствие случайности в распределении магнитных моментов отдельных атомов. Внешнее магнитное поле упорядочивает ориентацию отдельных моментов, а тепловое движение нарушает ее.

В ферромагнетиках взаимодействие между атомами несколько сильнее, что магнитный момент атомов (обусловленные главным образом со спиновыми моментами электронов в отдельных областях - доменах) ориентированы параллельно друг другу даже в отсутствии внешнего магнитного поля.

Нулевая  $J$  объясняется компенсацией магнитных моментов отдельных доменов.

Намагниченность ферромагнетиков под действием внешнего магнитного поля обуславливается:

- ростом размеров доменов с близким к полю направлением за счет смещения границ доменов;
- поворот направлений до направлений, намагничивающего поля

Ферромагнетики:

	$\chi$		Температура Кюри
Магнетит	0,3-2	$\text{FeO} \cdot \text{F}_2\text{O}_3$	578
Гематит	$10^{-5}$ - $2 \cdot 10^{-4}$	$\text{FeO} \cdot \text{F}_2\text{O}_3$ ( $\alpha$ -состояние)	675
Кристаллы магнетит	0,3-0,2	$\text{FeO} \cdot \text{F}_2\text{O}_3$ ( $\gamma$ -состояние)	300-325
Титаномагнетит		$\text{TiO}_2$	100-578

Магнитная восприимчивость характеризует способность вещества изменять свой магнитный момент под действием внешнего магнитного поля.

Магнитная восприимчивость равна

$$\chi = \frac{J}{H}$$

где  $J$  - намагниченность,  $H$  - напряженность.

Кроме того,  $\chi$  – представляет собой коэффициент, показывающий, насколько активным источником магнитного поля становится среда в намагничивающем поле.

Величина  $\chi$  называется истиной магнитной восприимчивостью или восприимчивостью материала.

Существует понятие кажущейся восприимчивости  $\chi'$  или восприимчивости формы. Последняя характеризует способность того или иного тела какой – либо формы намагничиваться в определенном направлении под действием внешнего поля.

Очевидно, что если тело ограниченного объема по форме отличается от шара  $\chi'$  при намагничении его в разных направлениях будет неодинаково, то есть значение  $\chi'$  в разных направлениях разное.

Связь между  $\chi$  и  $\chi'$  выражается следующей формулой:

$$\chi' = \frac{\chi}{1 + \chi N}$$

где  $N$  – коэффициент размагничивания, измеряется от 0 до  $4\pi$ , которая получается если предположить следующую схему.

Если магнитный потенциал в какой – либо точке  $P$  внутри тела является суммой потенциала  $U_e$  - внешнего намагничивающего поля и потенциала  $U_d$ , создаваемого самим телом,

$$H = \text{grad}(U_e + U_d) = H_e + H_d$$

где  $H_e$  – напряженность однородного намагничивающего поля,

$H_d$  – напряженность внутреннего поля.

$$J_{\text{общ}} = \chi(H_e + H_d),$$

так как  $\chi = \frac{I}{H}; I = \frac{dH}{dV}$ .

Потенциалом поля в некоторой точке  $P(x, y, z)$  называют запас энергии, которую приобретает положительный единичный заряд при перемещении его из бесконечности в данную точку. Величина запаса энергии определяется работой затраченной на преодоление сил поля. Чем больше напряженность поля, тем большая работа будет затрачиваться на перемещение заряда на единицу расстояния и, следовательно, тем быстрее будет нарастать потенциал поля. И наоборот,

напряженность поля будет определяться скоростью изменения потенциала или градиента потенциала.

Величина  $H_d$ , как показывает теория и опыт, для однородного намагничения всегда отрицательна, то есть, противоположна внешнему полюсу и пропорциональна  $J$ , то есть

$$H_d = NJ,$$

где  $H_d$  – напряженность внутреннего размагничивающего поля, уменьшающая  $H_e$ ,

$N$  – коэффициент размагничивания.

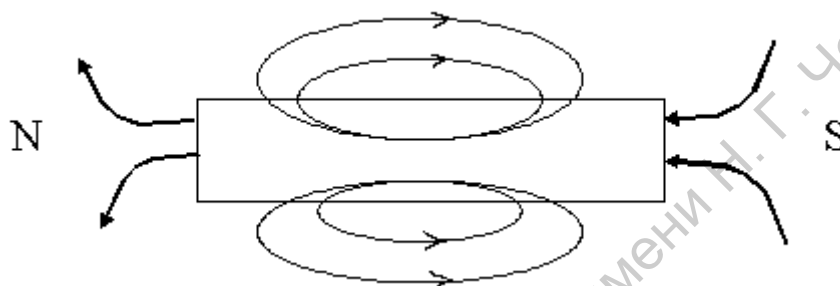


Рис.1.1. К понятию кажущейся магнитной восприимчивости.

Известно, что  $J = \chi H$  подставим  $H = H_e - NJ$ , тогда

$$J_{\text{общ}} = \frac{\chi H_e}{1 + \chi N} = \chi' H_e;$$

$$J = \chi(H_e - NJ) \quad (1)$$

В общем случае  $H_d$  будет различна (то есть имеет разные направления по отношению к  $H_e$ , вследствие чего  $J$  будет различно, то есть тело будет намагничиваться неоднородно).

Уравнение (1) показывает, что  $JH_e$  может быть больше  $\chi H_e$  и приближаться к этому значению при малых  $N$  и  $\chi > 0$ .

Значению  $N$  соответствуют: 0 - бесконечно длинный тонкий стержень,  $4\pi$  - бесконечно тонкая пластина, намагниченная перпендикулярно к её плоскостям,  $4/3\pi$  – для шара,  $2\pi$  – для кругового цилиндра.

Диапазон изменения  $\chi$  очень широк от отрицательных и близких к нулю до очень больших значений, превышающих 12 ед. СГС.

Итак, по значению и характеру намагниченности все минералы можно разделить на 3 группы:

1. Безжелезистые минералы (кварц, калиевые полевые шпаты, плагиоклазы, эпидот, хлорит, апатит, галит, гипс) относящиеся к диамагнетикам или парамагнетикам с низкими  $\chi < 12 \cdot 10^{-5}$  единиц СИ.

2. Железосодержащие силикаты и алюмосиликаты (слюды, оливины, амфиболы, пироксены, гранаты) смешанной парамагнитной природы. В чистом виде  $\chi = 25 \cdot 10^{-5}$  с примесями  $300 \div 400 \cdot 10^{-5}$ .

3. Ферромагнитные минералы, к которым относятся магнетит, титаномагнетит, гематит, ильменит, лимонит, пирротин;  $\chi =$  до 26 единиц СИ.

Горные породы, слагающие земную кору в зависимости от литолого-петрографического состава, отличаются различными физическими свойствами, одними из которых является намагниченность « $J$ » и магнитная восприимчивость « $\chi$ ».

Напомним, магнитная восприимчивость « $\chi$ » характеризует степень намагниченности и зависит от магнитного свойства вещества и от его формы. В общем виде

$$\vec{J} = \chi T$$

где  $\chi$  - магнитная восприимчивость,  $T$  - намагничивающее поле.

Величина  $\vec{J}$  любого вещества, в общем случае, является функцией внешнего магнитного поля  $\vec{T}$ .

Чтобы лучше уяснить сущность магнетизма, напомним процесс намагничивания ферромагнетиков под воздействием внешнего магнитного поля. Как известно из курса физики, этот процесс характеризуется графиком – петлей гистерезиса (рис.1.2). Если приложить постепенно возрастающее внешнее магнитное поле  $T$  к ненамагниченному веществу, то его намагниченность вначале возрастает по кривой  $A$ , пропорционально напряженности приложенного внешнего магнитного поля  $T$ . При дальнейшем увеличении  $T$  произойдет «магнитное насыщение» материала. Уровень насыщения обозначен  $J_{нас}$ . При постепенном уменьшении поля происходит размагничивание ферромагнетика, процесс которого характеризуется кривой  $B$ . Когда внешнее магнитное поле будет снято полностью ( $T=0$ ), ферромагнетик сохранит некоторую намагниченность  $+J_{ост}$ , которая называется остаточной намагниченностью.

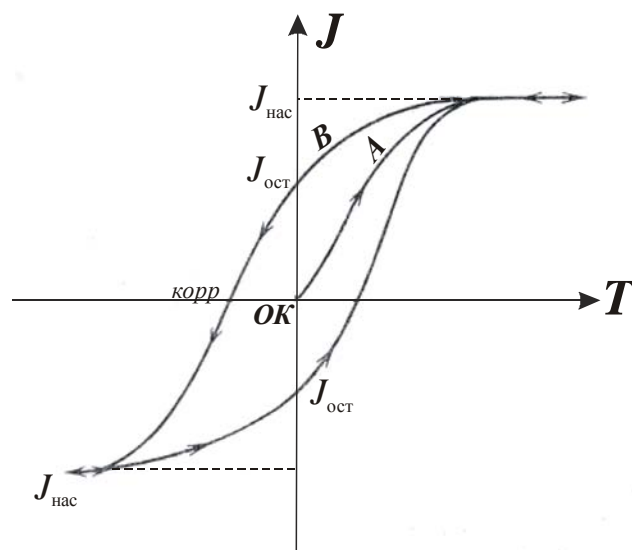


Рис.1.2. Петля гистерезиса.

Если у внешнего магнитного поля поменять знак и увеличивать напряженность поля, то вначале намагниченность уменьшится до нуля, а затем будет возрастать, но уже в отрицательном направлении до магнитного насыщения. Если затем снова уменьшать до нуля внешнее магнитное поле, то ферромагнетик приобретет теперь уже отрицательную остаточную намагниченность  $J_{ост}$ . Величина поля « $T$ », необходимая для полного размагничивания вещества, называется коэрцитивной силой, а вся замкнутая кривая – петлей гистерезиса.

При лабораторных определениях намагниченности на образцах горных пород было установлено, что многие из них обладают большей интенсивностью намагничения, чем это следовало ожидать с учетом величины современного геомагнитного поля. Горные породы, содержащие ферромагнитные минералы, приобретают естественную намагниченность под воздействием магнитного поля Земли во время остывания расплавов (лавы, интрузий) и превращения их в твердое тело. Приобретенная горной породой намагниченность под воздействием существовавшего в то время магнитного поля Земли называется остаточной намагниченностью горных пород, которая сохраняется неизменной в течение долгой геологической истории развития Земли. На эту намагниченность накладывается другая, создаваемая современным геомагнитным полем. Ее называют индукционной. Таким образом, горная порода характеризуется намагниченностью « $\vec{J}$ », состоящей из двух составляющих – остаточной ( $\vec{J}_{ост}$ ) и индукционной ( $\vec{J}_{инд}$ ):  $\vec{J} = \vec{J}_{ост} + \vec{J}_{инд}$ .

Магнитные свойства горных пород определяются прежде всего содержанием в них ферромагнитных минералов – магнетита, гематита, а также неметаллических ферромагнетиков – титаномагнетита, титаногематита и др.

Итак, из всего вышесказанного следует что у различных горных пород величина магнитной восприимчивости « $\chi$ » различна. Наименьшие значения у осадочных пород, высокие у магматических и метаморфических в зависимости от количества магнитных минералов: больше  $\chi$  у основных и ультраосновных пород. В таблице №1 приведены значения магнитной восприимчивости некоторых горных пород:

Таблица 1.

Значения магнитной восприимчивости горных пород.

Наименование породы	Значение магнитной восприимчивости, ед.СГС ( $10^{-5}$ )
1	2
<b>I. Магматические</b>	
Гранит	0 ÷ 2000
Сиенит	0 ÷ 6500
Андезит	600 ÷ 1500
Габбро	50 ÷ 7500
Базальт	150 ÷ 8000
<b>II. Метаморфические</b>	
Гнейсы	0 ÷ 300
Сланцы	0 ÷ 5000
Филлит	100 ÷ 200
<b>III. Осадочные</b>	
Песчаник	0 ÷ 35
Глина	5 ÷ 70
Известняк	0 ÷ 15
Гипс	-0.5 ÷ +1.0
Каменная соль	-2 ÷ +2
Уголь	0
Нефть	-2

Чаще всего в природе преобладают ферромагнитные и парамагнитные породы. Из полезных ископаемых к наиболее магнитным относятся железные руды, сульфидные и полиметаллические руды. К немагнитным – нефть, каменная соль, золото и другие.

## 2. Потенциал. Значение потенциала.

Теория интерпретации результатов магниторазведки основана на решении двух главнейших задач:

1. Определение магнитного поля, создаваемого намагниченным телом заданной формы, объема и характера намагничения – прямая задача.
2. Определение формы, размеров и положения тела по данным измерений магнитного поля, связанного с намагниченностью – обратная задача.

Определение характера магнитных аномалий может производиться аналитическим способом. Первая задача решается либо непосредственным вычислением магнитного потенциала  $U(P) = \int \frac{In}{r} dS$ , либо путем использования на основании теоремы Пуассона выражения связи между соответствующими элементами гравитационного и магнитного полей.

Вторая задача решается многочисленными способами, среди которых можно выделить метод подбора теоретических кривых и метод анализа и трансформации полей. Реализация этих методов основана на теории потенциала.

Рассмотрим аналитическое выражение некоторых видов потенциалов. Оговорим обозначения, которые будут встречаться в формулах в дальнейшем.

Речь будет идти об области пространства  $T$ , ограниченной замкнутой поверхностью  $S$ . Переменная точка в области  $T$  обозначается через  $M$  ее координаты через  $x, y, z$ . Функции  $U(x, y, z)$  или  $V(x, y, z)$ , или  $U(M)$  [ $V(M)$ ] представляют собой функции координат переменной точки  $M$ . Производная<sup>1</sup>  $\frac{\partial U}{\partial x}$  - производная по координатам точки  $M$ .

По ходу математических выкладок необходимо будет определить  $U$  или  $V$  в некоторой точке  $P$  с координатами  $\xi$  - кси,  $\eta$  - эта,  $\zeta$  - дзэта. Найдя значения  $U$  будет обозначать  $U(P)$ , а производные  $\frac{\partial U}{\partial \xi}$  будут производными по координатам  $P$ .

Через  $r$  обозначим расстояние между перемещенной точкой  $M$  и фиксированной точкой  $P$ .  $r$  - главная переменная теории потенциала.

Имеем:

$$|PM|^2 = r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$



Взяв производные<sup>2</sup> по координатам  $M$ , получим

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2(x - \xi) \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - \xi}{r} \quad (1)$$

Дифференцируя по координатам  $P$  получим

$$2r \frac{\partial r}{\partial \xi} = -(x - \xi) \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial \xi} = -\frac{x - \xi}{r}$$

учитывая (1):

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial \xi} \quad (2)$$

Проекция отрезка  $PM$  на оси координат равны  $x - \xi$ ;  $y - \eta$ ;  $z - \zeta$

Направляющие косинусы имеют значение

$$\frac{x - \xi}{r}; \frac{y - \eta}{r}; \frac{z - \zeta}{r} \quad (3)$$

учитывая (1):  $\cos(PM, x) = \frac{\partial r}{\partial x}$ ;  $\cos(PM, y) = \frac{\partial r}{\partial y}$ ;  $\cos(PM, z) = \frac{\partial r}{\partial z}$ . Радиус вектор точки

$P$ , считая от начала координат обозначим через:  $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ , радиус вектор точки  $M$ :  $\rho'^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , следовательно  $r^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\rho\rho')$ .

### 2.1. Точечный потенциал

Допустим, что в точке  $P$  сосредоточена единица массы  $m_1 = 1$ , тогда, со стороны частицы  $m$ , находящейся в точке  $M$  на точку  $P$  действует сила

$$F = f \frac{m}{r^2} \quad (4)$$

где  $f$  - постоянная гравитации,  $f = 6,66 \times 10^{-8} CGS$ .

Вектор  $\vec{F}$  направленный от  $P$  к  $M$  образует с осями углы, косинусы которых определены выражением (3) Так, что проекции этого вектора на оси  $x, y, z$  учитывая (4) будут:

$$\begin{aligned} F(x) &= F \cos \alpha = \frac{fm(x - \xi)}{r^3} \\ F(y) &= \frac{fm(y - \eta)}{r^3} \\ F(z) &= \frac{fm(z - \zeta)}{r^3} \end{aligned} \quad (5)$$

В векторном написании:  $\vec{F} = fm \frac{\vec{PM}}{|PM|^3}$

Учение о потенциале возникло в тот день, когда было обнаружено, что все три выражения (5) суть производных по координатам полюса  $P$  от одной и той же функции:

$$V(P) = \frac{fm}{r} \quad (6)$$

## 2.2. Производная функции по направлению

Действительно, имея в виду (1) получим:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^2} \frac{(x-\xi)}{r} = \frac{x-\xi}{r^3}, \text{ то есть } F(x).$$

Аналогично для координат  $\eta$  и  $\zeta$ , значит:

$$F(x) = \frac{\partial V}{\partial \xi}; \quad F(y) = \frac{\partial V}{\partial \eta}; \quad F(z) = \frac{\partial V}{\partial \zeta} \quad (7)$$

или сокращенно  $F(P) = \text{grad}_P V$ .

Вектор силы, действующий на  $P$ , есть градиент функции  $V^3$ .

$$F(M) = \text{grad}_M V \quad (8)$$

Свяжем проектирование вектора силы на любое направление  $S$  с дифференцированием  $V$  по направлению  $S$ . Допустим, что из  $P$  проведён бесконечно малый вектор  $\vec{ds}$ , образующий с осями углы  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Пусть  $d\xi, d\eta, d\zeta$  проекции вектора на оси, так что

$$\frac{\partial \xi}{\partial S} = \cos \alpha; \quad \frac{\partial \eta}{\partial S} = \cos \beta; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial S} = \cos \gamma \quad (9)$$

Будем теперь проектировать  $\vec{F}$  на направление  $\vec{ds}$ , для чего составим выражение:

$$F_s = F_x \times \cos \alpha + F_y \times \cos \beta + F_z \times \cos \gamma =$$

учитывая (7) и (9) получим

$$= \frac{\partial V}{\partial \xi} \times \frac{d\xi}{dS} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \times \frac{d\eta}{dS} + \frac{\partial V}{\partial \zeta} \times \frac{d\zeta}{dS} = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Имея в виду правило дифференцирования сложных функций многих переменных<sup>4</sup>, естественно назвать правую часть полученного равенства производной от  $V$  по направлению  $ds$   $\frac{\partial V}{\partial S}$ .

Учитывая (4) и учитывая проекцию вектора  $F$  на  $S$  получим

$$F_s(P) = \frac{fm \times \cos(\overrightarrow{PM}, \vec{S})}{r^2} = \frac{\partial V}{\partial S} = fm \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{1}{r} \right)$$

Если ввести в обозначения угол  $\psi$ , образованный направлением  $S$  и направлением  $\overrightarrow{MP}$ , для удобства дальнейших вычислений, тогда

$$\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{S}) = -\cos \psi,$$

тогда предыдущая формула будет выглядеть так:

$$F_s(P) = -fm \frac{\cos \psi}{r^2} = \frac{\partial V}{\partial S} = fm \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (9')$$

Функция  $V$  носит по Гаусу название потенциала, точнее это есть, потенциал точки  $M$  на точку  $P$  (то есть точка  $P$  подвергается действию сил в точке  $M$ ).

Мы видим, что  $V$  совпадает по знаку с той функцией, которую мы называем силовой.

Вспомним, какую функцию мы называем силовой.

Элементарная работа  $\Delta A$  силы  $F$ , совершаемая при перемещении  $\overrightarrow{dr}$  материальной точки под действием силы  $F$ , равна скалярному произведению векторов  $\overrightarrow{F}$  и  $\overrightarrow{dr}$ .

$$\Delta A = (\overrightarrow{F} \overrightarrow{dr}) = \overrightarrow{F} \overrightarrow{ds} \times \cos \alpha$$

или в декартовых координатах:

$$\Delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

где  $r$  радиус-вектор точки,  $x, y, z$  - её декартовы координаты,  $\alpha$  - угол между  $\overrightarrow{F}$  и  $\overrightarrow{dr}$ ,  $ds = |dr|$  -элементарная длина пути точки вдоль траектории,  $F_x, F_y, F_z$  - проекции вектора силы на оси координат.

Работа  $A$  силы  $F$  на конечном участке  $S$  траектории перемещения её точки приложения равна алгебраической сумме элементарных работ этой силы на всех бесконечно малых участках траектории:

$$A = \int_0^s (\overrightarrow{F} \overrightarrow{dr}) = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Силы, действующие на материальную точку или тело, назовём потенциальными, если работа эти сил при перемещении точки зависит только от начального и конечного положений точки в пространстве.

Иными словами, работа потенциальной силы  $F$  вдоль произвольной замкнутой траектории движения тождественно равна нулю:

$$\oint (F dr) = \oint (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \equiv 0$$

Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы подинтегральное выражение было полным дифференциалом<sup>5</sup> некоторой скалярной функции координат  $V(x, y, z)$ , называемой силовой функцией:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = dV$$

$$\text{Учитывая } F_x = \frac{\partial V}{\partial X}; F_y = \frac{\partial V}{\partial Y}; F_z = \frac{\partial V}{\partial Z}.$$

$$\vec{F} = \text{grad}V \quad (\text{сравним с (8)})$$

Потенциальная сила  $F$  равна градиенту силовой функции.

Работа  $A$ , совершаемая стационарной (зависящей только от координат) потенциальной силой равна:

$$A = \int_1^2 (\vec{F} d\vec{r}) = \int_1^2 dV = V_2 - V_1 \quad (10')$$

Вернувшись к теории потенциала, получим, что при перемещении точки  $P_0$  в точку  $P$  сила поля  $F$  производит работу, не зависящую от пути:

$$A = \int_{P_0}^P (F_\xi d\xi + F_\eta d\eta + F_\zeta d\zeta) = V(P) - V(P_0) = fm \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (10'')$$

Учитывая (6) эта работа положительна при  $r < r_0$ , т.к. мы считаем здесь положительной ту работу, которую производят силы поля, развиваемую частицей  $M$  (не против поля). При  $r_0 \rightarrow \infty$ ,  $A = V(P)$

И мы можем сказать, что потенциал в точке  $P$  есть та положительная работа, которую производят силы поля развиваемой частицей  $M$  при приближении единицы массы из  $\infty$  в  $P(\xi, \eta, \zeta)$ .

До сих пор, мы говорили про поля гравитационных сил, но Кулон распространил закон обратных квадратов на область явлений электричества и магнетизма, где две положительные массы отталкиваются друг от друга.

Принято:

а) потенциал массы  $m$  обозначается всегда  $+\frac{m}{2}$  независимо от того  $M$  – масса, заряд или магнитное поле;

б) в случае притяжения, как в тяготении  $\vec{F} = \text{grad}V$ , потенциал равен потенциальной энергии, взятой с обратным знаком;

в) в случае отталкивания, как в электричестве и магнетизме  $\vec{F} = -\text{grad}\Phi$ , потенциал равен силовой функции и совпадает с потенциальной энергией системы.

В заключении необходимо сказать, что точечный потенциал есть конечная и непрерывная функция координат полюса  $P$ .

### 2.3. Потенциал объёмных масс.

Допустим, что внутри объёма  $T$  находится сплошное распределение масс.

Пусть  $dm$  - элемент массы (а не дифференциал),  $r$  - его расстояние до  $P$ .

Полагаем, что  $V(P) = f \int_T \frac{dm}{r}$ , учитывая (6), где интегрирование распространено по всему объёму  $T$ .

С уменьшением элемента объёма  $\delta\tau$ , количество заключенной в нём материи  $\delta m$  стремится к нулю, так что

$$\lim \frac{\delta m}{\delta\tau} = \mu$$

$m$  - если это не только непрерывная<sup>6</sup>, но и дифференцируемая<sup>7</sup> функция координат, то производная её по объёму приобретёт значение плотности.

Тогда можно полагать  $dm = \mu d\tau$  (здесь  $dm$  есть уже дифференциал).

$$V(P) = f \int_T \frac{\mu d\tau}{r} \quad (10)$$

где  $\mu$  есть так называемая объёмная плотность<sup>8</sup> распределения масс внутри  $T$ , а формула (10) – выражение объёмного потенциала.

Главное свойство объёмного потенциала, в том что он никогда не обращается в бесконечность.

### 2.4. Потенциал простого слоя

Допустим, что действующие массы сосредоточены на  $S$  в виде слоя незначительной толщины  $h$ . Пусть  $d\sigma$  - элемент поверхности слоя тогда  $d\tau = hd\sigma$  и, учитывая (10):

$$V(P) = f \int_S \frac{\mu h d\sigma}{r}$$

допустим  $h \rightarrow 0, \mu \rightarrow \infty$ , но при том, что  $\lim_{h \rightarrow 0} \mu h = \mu'$ , где  $\mu'$  есть конечная и непрерывная функция под  $\mu$  на  $S$ . Эта функция – поверхностная плотность распределения масс на  $S$ .

Потенциал  $V(P)$  – потенциал простого слоя имеющий реальное значение в электростатике, где заряды лежат бесконечно тонким слоем на поверхности полупроводника  $S$ .

Если предположить, что массы лежат на бесконечно тонкой проволоке  $L$ , пусть  $\mu$  есть масса, приходящаяся на единицу длины  $ds$ , тогда:

$$V(P) = \int_L \frac{\mu h d\sigma}{r} \quad (11)$$

Этот потенциал имеет более реальное значение в области электрических явлений.

### 2.5. Потенциал диполя и двойного слоя

До сих пор мы имели в виду только притяжения гравитирующей материи или действие электрических масс. Рассматриваемые в настоящий момент виды потенциалов обязаны своим происхождением учению о магнетизме. Всякое магнитное тело мы предполагаем поляризованным, в том смысле, что на всякое «количество положительного» магнетизма в частицах тела содержится определенное «количество отрицательного». Поэтому, элементарным магнитным элементом здесь является не точечные масса и заряд, а диполь т.е. бесконечно малая игла, на концах которой сосредоточены равные по величине положительные и отрицательные количества магнетизма, которые мы обозначим через  $\pm e$ . Каждый из этих полюсов действует на  $P$  по закону Кулона и нам необходимо вычислить потенциал такого диполя.

Пусть  $l$  – длина диполя (положительное направление от  $-e$  к  $+e$ ; обозначим через  $r''$ ,  $r$  и  $r'$  расстояния от  $P$  до отрицательного, до середины диполя и до положительного полюсов соответственно;  $\varphi$  - угол между  $\vec{r}$  и  $\vec{l}$ . Имеем

$$(r')^2 = r^2 + \frac{2lr \cos \varphi}{2} + \frac{l^2}{4}$$

$$(r'')^2 = r^2 - \frac{2lr \cos \varphi}{2} + \frac{l^2}{4}$$

Поделив  $(r')^2 / (r'')^3$  и выразив  $(r')^3$  через  $r^2 + lr \cos \varphi + \frac{l^2}{4}$

Аналогично  $r''$  и пренебрегая величинами порядка  $l^2/r^3$  получим:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{l}{2r} \cos \varphi \right) = \frac{1}{r} - \frac{l}{2r^2} \cos \varphi$$

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{l}{2r} \cos \varphi \right) = \frac{1}{r} + \frac{l}{2r^2} \cos \varphi$$

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} = -\frac{l}{r^2} \cos \varphi$$

Согласно формуле  $A = fm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$ , сумма точечных потенциалов<sup>9</sup> диполя

равна:

$$\Phi_w(P) = +e\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right)$$

А, потенциал диполя<sup>10</sup>, учитывая замечание о знаках и магнитном агенте, равен:

$$\Phi(P) = +e\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right) = -\frac{el}{r^2} \cos \varphi$$

Допустим, что при  $l \rightarrow 0$ ,  $\lim el = \mu'$  (или  $\mu''$ ), так называемому магнитному моменту диполя. Тогда учитывая (9') получаем:

$$\Phi(P) = -\frac{\mu'' \cos \varphi}{r^2} = \mu'' \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{r}\right) \quad (12)$$

Формула (12) является основной в теории магнитного потенциала.

Пусть  $l_x, l_y, l_z$  – есть проекции вектора  $\vec{l}$  на оси, пользуясь определением производной по направлению<sup>11</sup>:

$$\Phi(P) = e \left[ l_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r}\right) + l_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r}\right) + l_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r}\right) \right] \quad (13)$$

Введем теперь вектор «магнитный момент»  $\vec{m} = e\vec{l}$ . Направление  $\vec{m}$  совпадает с  $\vec{l}$  и его проекции получаются из проекций вектора  $\vec{l}$ .  $m_x = el_x, m_y = el_y, m_z = el_z$ .

Подставляя проекции  $\vec{m}$  в (13), находим:

$$\Phi(P) = m_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r}\right) + m_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r}\right) + m_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r}\right) \quad (13')$$

Здесь производные<sup>12</sup> взяты по «координатам диполя», за которые можно принимать координаты любого из его бесконечно близких полюсов (т.к.  $l \rightarrow 0$ ).

Учитывая совпадение направлений  $\vec{m}$  и  $\vec{l}$  и формулу (12) можно написать:

$$\Phi(P) = -\frac{m}{r^2} \cos(\vec{m}\vec{r}) \quad (12')$$

Допустим, что ось ОХ направлена по оси диполя, и, что начало координат взято в самом диполе, тогда  $m_x = m, m_y = 0, m_z = 0; \cos(r, x) = -\frac{\xi}{r}$ .

Подставляя в 12<sup>13</sup> получим

$$\Phi(P) = \frac{m\xi}{r^3} \quad (14)$$

Отсюда можно найти значение силы поля в любой точке; по определению вектор силы, который обозначают  $\vec{F}$ , есть взятый со знаком «-» grad потенциала  $\Phi(P)$  по координатам т.  $P$

$F = -grad_P \Phi$  распишем подробно:

$$F_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}; F_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; F_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}.$$

Исходя из формулы (14), дифференцируя ее, получим:

$$F_x = -\frac{m}{r^3} + \frac{3m\xi}{r^5}; F_y = +\frac{3m\xi\eta}{r^5}; F_z = +\frac{3m\xi\zeta}{r^5} \quad (15)$$

Если точка  $P$  находится на продолжении оси диполя с положительной стороны полюса (первое главное положение), то из (15)  $\eta = 0, \zeta = 0, r = \xi = S$  и поэтому  $F_x = -\frac{m}{r^3} + \frac{3m\xi}{r^5} = \frac{2m}{r^3}; F_y = 0, F_z = 0$  и, следовательно, в векториальной форме:

$$F = \frac{2m}{r^3}.$$

Если же точка  $P$  лежит в плоскости, проведенной через диполь перпендикулярно, (что соответствует второму главному положению), то  $\xi = 0$  и из (15) следует:

$$F_x = -\frac{m}{r^3}, F_y = 0, F_z = 0$$

Мы замечаем, что в обоих главных положениях вектор силы действует на точку  $P$  со стороны диполя, направленного параллельно или перпендикулярно оси диполя, и что по величине он обратно пропорционален кубу расстояния точки  $P$  от диполя.

Это положение коренным образом выделяет магнитостатику от гравиметрии и электростатики, где элементарные массы частицы и точечные заряды действуют обратно пропорционально квадратам расстояния.

Отступая от исходного представления о диполе и вводя представление о магнитных массах, необходимо выполнить следующее условие.

Сумма всего магнетизма, заключенного как внутри тела, так и на его поверхности равна нулю:

$$M = \int_T \mu d\tau + \int_S \mu' d\sigma = 0 \quad (16)$$



$d\tau$  - бесконечно малый объём,  $d\sigma$  - бесконечно малая поверхность,  $\mu$  - объёмная плотность,  $\mu'$  - поверхностная плотность,  $M$  - сумма всех объёмных и поверхностных плотностей.

Это условие позволит в дальнейшем доказать оба определения магнитного потенциала, к которым мы можем подойти со стороны представлений как о совокупности диполей, так и о магнитных массах, вполне эквивалентных между собой.

Основное уравнение (16) обнаруживает еще одно важное обстоятельство: объёмная плотность магнитных масс  $\mu$  и их поверхностная плотность  $\mu'$  могут быть связаны друг с другом через посредство одного и того же вектора  $\vec{I}$ , заданного для всех точек объема  $T$  и его поверхности  $S$ . В самом деле, пусть  $\vec{I}$  - любой вектор, проекции которого на оси  $I_x, I_y, I_z$  (непрерывны вместе с их первыми производными во всем объеме  $T$  и на поверхности  $S$ )<sup>14</sup>. Имеем тогда:

$$\frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{\partial I_z}{\partial z} = \text{div} \vec{I}$$

По дивергенции-теореме Гаусса-Остроградского

$$\int_T \left( \frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{\partial I_z}{\partial z} \right) d\tau = \int_S I \cos(\vec{I}, \vec{n}) d\sigma$$

$$\int \text{div} \vec{I} d\tau = \int \vec{I}_n d\sigma$$

Отсюда следует, что если положить

$$\mu = -\text{div} \vec{I}, \quad \mu' = I_n \quad (17)$$

то уравнение (16) удовлетворится само по себе, и мы получаем возможность выразить  $\mu$  и  $\mu'$  через один и тот же вектор  $\vec{I}$ , подчиненного, в сущности, только указанному условию непрерывности внутри  $T$  и на поверхности  $S$ .

Но, разумеется, больший интерес представляет собой обратная задача: если допустить, что  $\mu$  и  $\mu'$  заданы во всех точках объема  $T$  и поверхности  $S$ , можно ли определить вектор  $\vec{I}$  из условия (17) и если да, то будет ли это определение однозначно? В векторном анализе показано, что в виду условия (16), первая задача всегда допускает решение. Причем всякий удовлетворяющий ему вектор  $\vec{I}$  может быть подчинен еще некоторому дополнительному условию; если же этого условия не выводить, то уравнение (17) допускает бесконечное множество решений  $\vec{I}$ .

Условились вектор  $I$ , удовлетворяющий (17), называть вектором намагничения, соответствующим данному распределению  $\mu$  и  $\mu'$ .

Между вектором магнитного момента  $\vec{m}$  и  $\vec{I}$  существует зависимость:

$$m = \int Id\tau \mu'' \quad (18)$$

Перейдя к проекциям, получим  $m = \int Id\tau$ , где  $\vec{I}$  - (интенсивность намагничения) приобретает значение удельной величины или плотности магнитного момента в данном объеме.

В дифференциальной форме это запишем:

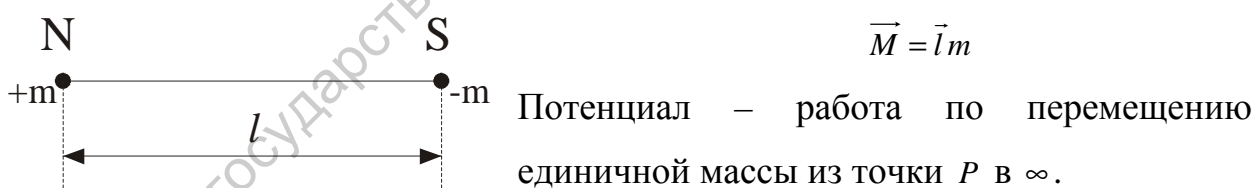
$$I = \frac{dm}{d\tau} \quad (19)$$

## 2.6. Магнитный потенциал

Переходим к вычислению потенциала магнитных масс. Существуют несколько подходов к вычислению магнитных потенциалов диполя, сферы и шара. Рассмотрим некоторые из них.

В лекциях по магниторазведке Воронежского государственного университета профессор Ю.В.Антонов предлагает такую схему вычисления потенциала.

Для упрощения многих задач рассмотрим схематический магнит с бесконечно малым расстоянием между полюсами – магнитный диполь или элементарный магнит. Магнитный момент – пара сил, действующих на магнит

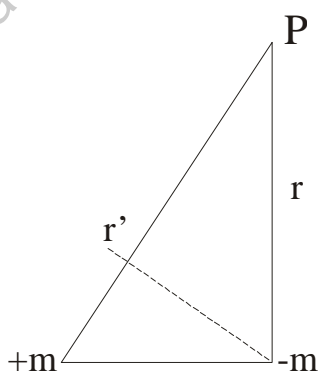


Найдем потенциал этих масс для произвольной точки  $P$ ,  $\vec{l}$  - вектор направленный от отрицательного заряда к положительному. В точку  $P$  поместим единичную положительную магнитную массу.

Действие зарядов на единичную массу:

$$U(P) = \frac{m}{r'} - \frac{m}{r} = m \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right)$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \delta$$



Выразим  $r'$  через  $l$  и  $r$ :

$$r' = r + l \cos(\alpha, \beta, \gamma)$$

Разложим функцию  $\left(\frac{1}{r'}\right)$  в ряд Тейлора:

$$f(x_0 + \gamma) = f(x_0) + \left(\frac{f'(x_0)}{1!}\right) \times \Delta x + \dots + \underbrace{\frac{f^{(n)}}{n!} \Delta x}_{\text{отбрасываем}}$$

$m$  – величина постоянная;  $\frac{1}{r}$  изменяется на расстояние  $l$  по сравнению с  $\frac{1}{r'}$ ;

$l - \Delta x, \Delta y, \Delta z$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + l \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r}\right) + l \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r}\right) + l \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r}\right)$$

Подставим:

$$U(P) = m \left( l \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r}\right) + l \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r}\right) + l \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r}\right) \right)$$

$$M_x = m \times l \cos \alpha; M_y = m \times l \cos \beta; M_z = m \times l \cos \gamma$$

$M_x, M_y, M_z$  - проекция  $\vec{M}$  на оси,  $\vec{M} = \vec{l} m$

$$U(P) = M_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r}\right) + M_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r}\right) + M_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r}\right)$$

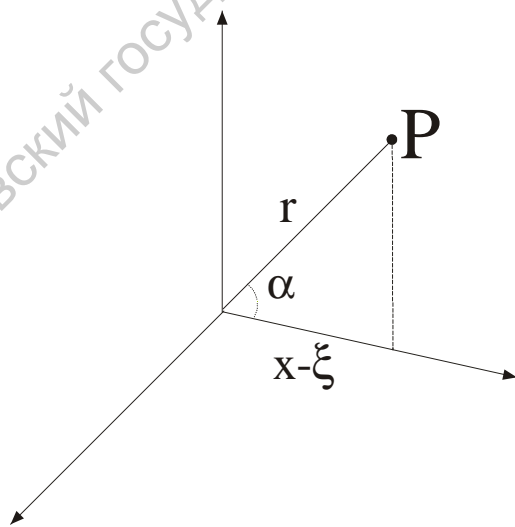
$M$  - векторная величина, вектор  $M$  совпадает по направлению с направлением  $\vec{l}$  (от отрицательного заряда к положительному).

Найдем выражение магнитного потенциала диполя, расположенного в

точке  $P$  с координатами  $(\zeta, \eta, \xi)$ .

Координаты точки наблюдения -

$(x, y, z)$ .



$$r \cos \alpha = x - \xi$$

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot r^{-3/2} \cdot 2(x - \xi) = -\frac{1}{r^3} (x - \xi) = -\frac{x - \xi}{r^3}$$

Аналогично:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{y-\eta}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{z-\zeta}{r^3}$$

$$U(P) = - \left( M_x \left( \frac{x-\xi}{r^3} \right) + M_y \left( \frac{y-\eta}{r^3} \right) + M_z \left( \frac{z-\zeta}{r^3} \right) \right)$$

$$\frac{x-\xi}{r^3} = \frac{\cos(x,r)}{r^2}; \quad \frac{y-\eta}{r^3} = \frac{\cos(y,r)}{r^2}; \quad \frac{z-\zeta}{r^3} = \frac{\cos(z,r)}{r^2};$$

$$U(P) = -\frac{1}{r^2} \underbrace{\left( M_x \cos(r,x) + M_y \cos(r,y) + M_z \cos(r,z) \right)}_{\text{Проекция } M \text{ на направление } \vec{r}}$$

$$M_r = M \cos(\vec{M}, \vec{r})$$

$$U(P) = -\frac{M}{r^2} \cos(\vec{M}, \vec{r})$$

Направление магнитного момента совпадает с направлением  $\vec{l}$

$$U(P) = -\frac{M}{r^2} \cos(\vec{l}, \vec{r})$$

Если величину  $\frac{1}{r}$  продифференцировать по  $l$ , получим

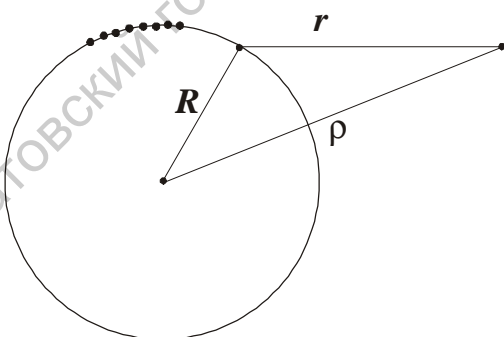
$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial l} = -\frac{1}{r^2} \cos(l,r)$$

$$\cos(l,r) = -\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{r} \right) r^2$$

$U(P) = M \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{r} \right)$  - новая формула потенциала диполя.

Теперь рассмотрим сферу.

Любое намагниченное тело можно рассматривать как систему бесконечно большого числа магнитных диполей. Намагниченность тела



можно рассматривать как совокупность магнитных моментов.

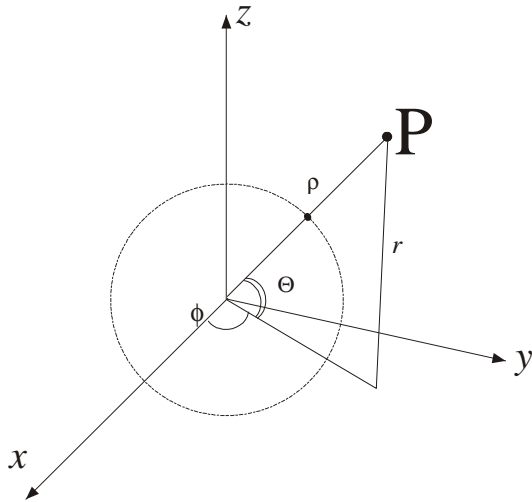
$M$  - магнитный момент диполя можно рассмотреть как  $\mu \cdot dS$ ;

$\mu$  - магнитный момент единицы поверхности;

$dS$  - элемент сферической поверхности.

$$U_s = \int_s \mu_s \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{r} \right) dS = \mu_s \frac{\partial}{\partial l} \int_s \frac{1}{r} dS$$

Перейдем к сферической системе координат с началом в центре сферического слоя с радиусом  $R$ . Толщину слоя примем бесконечно малой. Полярная ось проходит через  $P$ .



$$ds = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$U_s = \frac{\partial}{\partial l} \mu_s \int_s \frac{1}{r} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\varphi = [0; 2\pi]$$

$$\theta = [0; \pi]$$

$$U_s = \frac{\partial}{\partial l} \mu_s \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{r} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{\partial}{\partial l} \mu_s 2\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{r} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

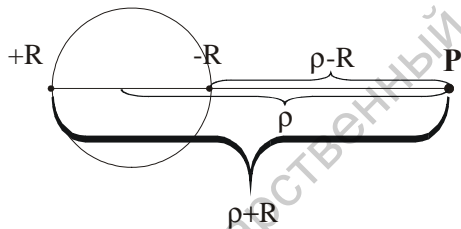
Рассмотрим  $r$ :

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \theta \quad (\text{правило треугольника})$$

$$2r dr = 0 + 0 + 2\rho R \sin \theta d\theta$$

$$r = \frac{\rho R \sin \theta d\theta}{dr}$$

Теперь подставим это в формулу:



$$\max = \rho + R$$

$$\min = \rho - R$$

$$U_s = \frac{\partial}{\partial l} \mu_s 2\pi \int_0^{\pi} \frac{R^2 \sin \theta d\theta}{\rho R \sin \theta d\theta} dr = \frac{\partial}{\partial l} \mu_s 2\pi \int_0^{\pi} \frac{R}{\rho} dr = \frac{\partial}{\partial l} \frac{2\mu_s \pi R}{\rho} \int_{\rho-R}^{\rho+R} dr =$$

$$= \frac{\partial}{\partial l} \frac{2\pi \mu_s R}{\rho} (\rho + R - \rho + R) = \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{\rho} \right) 4\pi R^2 \mu$$

$m = 4\pi R^2 \mu$  - полный магнитный момент сферы;

$U_{сф} = m \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{\rho}$  - потенциал сферического слоя.

Ниже рассмотрим наш подход.

Мы предлагаем Вам подойти к этому вопросу с двух различных точек зрения. Прежде всего, придерживаясь представления о массах, распространенных внутри этого объема с плотностью  $\mu$  и на поверхности  $S$  с плотностью  $\mu'$ . В этом случае,

применяя формулу для объемного потенциала и потенциала простого слоя, действующих по закону обратных квадратов, приходим к основной формуле:

$$\Phi(P) = \int_T \frac{\mu}{r} d\tau + \int_S \frac{\mu'}{r} d\sigma \quad (20)$$

Заметим, что эта формула приобретает определенный смысл, если выполняется условие (16).

Выражая  $\mu$  и  $\mu'$  через вектор  $\vec{I}$  по (17) приходим к первой группе формул для магнитного потенциала

$$\Phi(P) = - \int_T \frac{\text{div} \vec{I}}{r} d\tau + \int_S \frac{I_n}{r} d\sigma \quad (21)$$

С другой стороны, мы можем исходить не от плотности  $\mu$  и  $\mu'$ , а от диполей.

Потенциал единичного диполя выражается формулами 12, 13 и 13'. Если считать, что весь объем  $T$  заполнен подобными диполями, то мы перейдем к интегральным выражениям для потенциала, заменяя  $\mu''$  на  $Id\tau$ , согласно (18) или проекции  $m_x$  на  $I_x d\tau$  и т.д.. Тогда,

$$\Phi(P) = \int_T \left[ I_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) + I_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) + I_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\tau = \int_T \left( J \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\tau \quad (22)$$

$$\Phi(P) = - \int_T J \frac{\cos(\vec{I}, r)}{r^2} d\tau \quad (23)$$

Согласно (12), т.к. направление  $l$  совпадает с  $\vec{I}$  в элементе  $d\tau$ .

$$\Phi(P) = \int_T J \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau \quad (24)$$

Согласно (12) производная от  $\frac{1}{r}$  берётся по направлению вектора намагничения в элементе  $d\tau$ .

Докажем теперь, что обе группы формул для потенциала, которые получились на основе двух различных представлений о магнитных явлениях (т.е. о сплошных действительных массах, распространенных с плотностями  $\mu$  и  $\mu'$ , и о диполях), эквивалентны между собой.

Для этого достаточно провести преобразование формулы (20) или (21) к виду (22).

С этой целью воспользуемся формулой

$$\int_S U \cos(n, x) d\sigma = \int_T \frac{\partial U}{\partial x} d\tau \quad (25)$$

вытекающей из формулы, открытой Остроградским и являющейся частным случаем формулы Грина<sup>15</sup>.

Положим в ней  $U = \frac{l}{r} J_x$ . Это даёт:

$$\int_S \frac{1}{r} I_x \cos(n, x) d\sigma = \int_T \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} I_x \right) d\tau = \int_T I_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau + \int_T \frac{1}{r} \left( \frac{\partial I_x}{\partial x} \right) d\tau$$

Учитывая  $I_x \cos(n, x) + I_y \cos(n, y) + I_z \cos(n, z) = I_n$ , и составив такое выражение для всех трёх координат, получим:

$$I_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) + I_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) + I_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) = + \int_T \frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{I} d\tau \quad (26)$$

где  $\operatorname{div} I = \frac{1}{r} \frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial I_z}{\partial z}$ . Но, перенося последний член равенства, справа в левую часть, мы получаем слева магнитный потенциал  $\Phi(P)$  согласно (21). Справа тот же потенциал приведет к (22), откуда и следует тождественность обеих групп формул для магнитного потенциала.

Для изучения свойств магнитного потенциала можно исходить из представления потенциала по формуле (21):

1.  $\Phi(P)$  - есть непрерывная функция координат точки  $P$ . Она не терпит разрыва, когда  $P$  проходит через граничную поверхность  $S$ ;
2. нормальная производная от  $\Phi$  терпит разрыв на  $S$ , если только  $\mu' \neq 0$ ;
3.  $\Phi$  удовлетворяет во всех внутренних точках уравнению Пуассона  $\Delta\Phi = -4\pi\mu$ , во внешнем поле - уравнению Лапласа  $\Delta\Phi = 0$  при  $\mu = 0$ .  
Магнитный потенциал, приводясь к потенциалу простого слоя, есть функция гармоническая и внутреннего и внешнего  $T$ .

Эти свойства отражают магнитный потенциал и потенциал притяжения. Существуют различия между ними в том, что магнитный потенциал, в виду условия  $\mu' + \mu = 0$  без «массовый» потенциал.

Рассмотрим формулу (23), предположив, что  $\vec{I}$  - вектор намагничивания, постоянен внутри всего объема, т.е. рассмотрим потенциал однородно намагниченного объема:

$$\Phi(P) = -I \int_T \frac{\cos(\vec{I}, \vec{r})}{r^2} d\tau$$

Учитывая формулы (9') и (12) - выражения потенциала диполя замечаем, что

$$-\frac{l}{r^2} \cos(\vec{l}, \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{r} \right)$$

Рассмотрим формулу, где дифференцирование производится по постоянному направлению намагничивания устремлено от  $P$  и  $d\tau$ :

$$\Phi(P) = J \frac{\partial}{\partial l} \int_T \frac{1}{r} d\tau$$

Переменим направление  $\vec{r}$  на обратное, иными словами, дифференцируем по координатам точки  $P$ . Тогда:

$$\Phi(P) = -J \frac{\partial}{\partial l} \int_T \frac{1}{r} d\tau \quad (27)$$

Интеграл в правой части этого равенства имеет очевидную связь с гравитационным потенциалом.

Действительно, пусть объем  $T$  заполнен веществом постоянной плотности  $\delta$ , тогда потенциал этой массы на точку  $P$  определяется:

$$V(P) = f \int_T \frac{\delta d\tau}{r} = f\delta \int_T \frac{d\tau}{r}, \text{ где } f \text{ – постоянное притяжение.}$$

Отсюда:

$$\int_T \frac{d\tau}{r} = \frac{V(P)}{f\delta}$$

Подставляя это в (27) получим:

$$\Phi(P) = -\frac{I}{f\delta} \frac{\partial V}{\partial l} \quad (28)$$

где производная взята по координатам точки  $P$ .

Из данной формулы выведем значения проекций магнитной силы  $F$ . По определению:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}; \quad F_y = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \quad F_z = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \\ \text{но } \frac{\partial V}{\partial l} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dl} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dl} + \frac{\partial V}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dl}, \\ \text{а } \frac{d\xi}{dl} &= \cos \alpha, \quad \frac{d\eta}{dl} = \cos \beta, \quad \frac{d\zeta}{dl} = \cos \gamma, \end{aligned}$$

Умножая это на  $I$ , обозначим  $F_s = F_x \cos \alpha + F_y \cos \beta + F_z \cos \gamma$ .

$$F_x = \frac{I}{f\delta} (AV\xi^2\xi + BV\xi^2\eta + CV\xi^2\zeta)$$

$$F_y = \frac{I}{f\delta} (AV\eta^2\xi + BV\eta^2\eta + CV\eta^2\zeta)$$



$$F_z = \frac{I}{f\delta} (AV\zeta^2\xi + BV\zeta^2\eta + CV\zeta^2\zeta)$$

$$F_x = \frac{J}{f\delta} (V\xi\xi \cos\alpha + V\xi\eta \cos\beta + V\xi\zeta \cos J)$$

$$X = \frac{l}{k\sigma} (I_x V_{xx} + I_y V_{xy} + I_z V_{xz})$$

$$Y = \frac{l}{k\sigma} (I_x V_{yx} + I_y V_{yy} + I_z V_{yz})$$

$$Z = \frac{l}{k\sigma} (I_x V_{zx} + I_y V_{zy} + I_z V_{zz})$$

$$I_x = I \cos\alpha, I_y = I \cos\beta, I_z = I \cos J$$

$$X = \frac{J}{k\sigma} (V_{xx} \cos\alpha + V_{xy} \cos\beta + V_{xz} \cos J)$$

$$Y = \frac{J}{k\sigma} (V_{yx} \cos\alpha + V_{yy} \cos\beta + V_{yz} \cos J)$$

$$Z = \frac{J}{k\sigma} (V_{zx} \cos\alpha + V_{zy} \cos\beta + V_{zz} \cos J)$$

Теперь рассмотрим варианты, когда координатные оси расположены так, что вектор намагничения оказывается в одной из координатных плоскостей.

Например, если  $J$  в плоскости  $XOZ$ ,  $\cos\beta = 0$

$$\begin{aligned} X &= K(V_{xx} \cos\alpha + V_{xz} \cos\gamma) \\ Y &= K(V_{yy} \cos\alpha + V_{yz} \cos\gamma) \\ Z &= K(V_{zx} \cos\alpha + V_{zz} \cos\gamma) \end{aligned} \quad (30)$$

В случае вертикального намагничения, т.е. параллельно оси  $z$

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= 0, \cos\beta = 0, \cos\gamma = 1 \\ J_x &= J_y = 0, J_z = J \\ X &= KV_{yz}, Y = KV_{yz}, Z = KV_{zz} \end{aligned}$$

То есть составляющими магнитного поля для тел любой формы в этом случае будут пропорции *grad* силы тяжести возмущающих масс.

При горизонтальном намагничении пропорциональным градиентом  $V_x$  составляющих:

$$X = KV_{xx}, Y = KV_{yx}, Z = KV_{zx}$$

Располагая прямоугольные координатные оси так, чтобы одна из осей совпала с направлением намагничения, получим, что  $\cos(I, e) = 1$ , а косинус углов между направлениями намагничения и остальными осями равен 0.

Для двухмерных тел, простирающихся, например, параллельно оси  $Y$ :

$$V_{yy}, V_{xy}, V_{yz}, V_{zy} = 0$$

Принимая во внимание уравнение Лапласа:  $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$  и принятое в графике обозначение  $V = V_{yy} - V_{xx}$  возможна такая запись:

$$x = k(-V\Delta \cos \alpha + V_{xz} \cos J)$$

$$y = 0$$

$$z = k(V_{zx} \cos \alpha + V\Delta \cos J)$$

Одной из первых задач при изучении магнитного поля Земли является представление его в виде аналитической зависимости компонент напряженности от координат точек земной поверхности. Первой попыткой такого представления была работа Симонова (1835 г.), который предположил, что магнитное поле Земли является полем однородно намагниченного шара, следовательно, необходимо найти поле однородно намагниченного шара как функцию координат.

Эта работа не утратила своего значения, т.к. большая часть поля, как – установлено, – поле однородно намагниченно.

### 2.7. Однороднонамагниченная сфера

Допустим, что во всех точках сферы и на ее поверхности вектор намагничения сохраняет постоянную величину и направление. Введем понятие магнитного экватора магнитной широты  $\theta$   $\theta = 90 - \varphi$ .

(Проведем через центр сферы диаметр, параллельный вектору  $\vec{I}$  обозначим через  $N$  и  $N'$  точки пересечения его с поверхностью сферы и условно назовем их магнитными полюсами).

Объемная плотность магнетизма равна 0, т.к.  $I = \text{const}$ . Поверхностная плотность определится по формуле (мы предполагаем по формуле 16):

$$\mu' = I \cos(\vec{I}, n) = I \cos \theta$$

Оно будет положительно в северном полушарии  $\theta < 90^\circ$  и отрицательно в южном  $\theta > 90^\circ$ ,  $\mu' = 0$  на экваторе.

Применяя формулу (28) для магнитного потенциала:

$$\Phi(P) = -\frac{I}{F\delta} \frac{\partial V}{\partial l}$$

Положим, что вещество сферы имеет постоянную плотность  $S$ ,  $R$  - ее радиус,  $M$  - масса. Гравитационный потенциал сферы на точку  $P$  в расстоянии  $\rho$  от ее центра определяется по известным формулам:

$$\begin{aligned}
 V(P) &= -\frac{fM}{\rho}, \quad \rho > l \\
 V(P) &= 2\pi f\delta(R^2 - \rho^2), \quad \rho < R
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial V}{\partial l} &= \frac{fM}{\rho^2} \frac{d\rho}{dl} = \frac{fM}{\rho^2} \cos \theta, \quad \rho > R \\
 -\frac{\partial V}{\partial l} &= \frac{4\pi f\delta}{3} \rho \frac{d\rho}{dl} = \frac{fM}{\rho^2} \cos \theta, \quad \rho < R
 \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в формулу Пуассона:

$$I\Phi(P) = -\frac{IfM}{f\delta\rho^2} \cos \theta, \quad \rho > R,$$

учитывая, что  $M = V\delta$ , а  $JV = m$  - магнитный момент, можно записать

$$\begin{aligned}
 \Phi(P) &= \frac{m}{\rho^2} \cos \theta, \quad \rho > R \\
 \Phi(P) &= \frac{m}{R^3} \rho \cos \theta, \quad \rho < R
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

На поверхности сферы:

$$\Phi(P) = \frac{m}{R^2} \cos \Theta.$$

Вспомнив формулу (12') запишем:

$$\Phi(P) = -\frac{m}{r^2} \cos(mr)$$

и сравнив их, можно обнаружить, что потенциал однородно намагниченной сферы равен потенциалу диполя с тем же моментом  $m$ , помещенным в центре сферы и направленным параллельно вектору  $I$  (разница в знаках произошла от перемены "+" направления вектора  $r$ ).

Определим теперь величину силы  $F$ , действующей на поверхности сферы на единицу "+" магнитной массы, т.е. напряженность магнитного поля.

Разложим эту силу на вертикальную составляющую  $m$  массы.  $H$  - по направлению магнитного меридиана):

$$\begin{aligned}
 H &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} \\
 Z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \\
 X &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \\
 Y &= -\frac{1}{r \cos \gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}
 \end{aligned}$$

Исходя из формулы (31), дифференцируя  $\Phi(P)$ , соответственно по  $\rho$  и  $\Theta$ , считая, что  $\rho = \eta$ , получим:

$$H = -\frac{M}{\eta^3} \sin \Theta, \quad Z = \frac{2m}{\eta^3} \cos \Theta$$

$$T = \sqrt{Z^2 + H^2} = \frac{m'}{\eta^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \Theta} \quad (35)$$

На магнитных полюсах  $\Theta = 0^\circ, 180^\circ$   $H = 0$ ,  $Z = \pm \frac{2m}{R^3}$

На экваторе, наоборот,  $\Theta = 90^\circ$   $H = \pm \frac{m}{R^3}$ ,  $Z = 0$

Следовательно, на полюсах  $F$  вдвое больше, чем на экваторе (вспомним 0,66 и 0,33):

$$\operatorname{tg} I = \frac{Z}{H} = \frac{2m \cos R^3}{R^3 m \sin \Theta} = 2 \operatorname{ctg} \Theta$$

$$\operatorname{tg} I = 2 \operatorname{ctg} \Theta$$

Магнитный момент сферы  $Z_p$  - вертикальное

$$M = H_{\text{гориз}} R^3 = \frac{Z_p}{2} R^3$$

Действительные значения элементов земного магнетизма отличаются от указанных.

Гаусс в 1838 г. предположил, что магнитное поле Земли вызывается источниками, которые находятся внутри поля и имеют потенциальный характер, т.е.  $H = -\operatorname{grad} \Phi$ .

При этом, считая, что Земной шар обладает намагниченностью  $I$ , которая в любой точке имеет произвольную величину, и направление потенциала можно выразить в виде ряда

$$\Phi = R \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \Theta) \quad (36)$$

где  $r, \Theta, \lambda$  - сферические координаты точки;  $r$  - расстояние от центра Земли;  $\Theta$  - дополнение широты до  $90^\circ$ ;  $\lambda$  - восточная долгота;  $g_n^m, h_n^m$  - постоянные коэффициенты Гаусса;  $P_n^m(\cos \Theta)$  - присоединенный полином Лежандра степени и порядка  $m$ .

Для точек, находящихся на поверхности,  $r = R$

$$\Phi = R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \Theta)$$

Величины  $Z_i, X_i, Y_i$  на поверхности Земли могут быть найдены дифференциальные выражения:

$$Z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad X = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}, \quad Y = -\frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}$$

Как видно из этих уравнений, можно вычислить элементы земного магнетизма для любой точки земной поверхности, если известны постоянные коэффициенты  $g_n^m$  и  $h_n^m$ .

Сам Гаусс, ограничиваясь членами четвертого порядка ( $n' = 4$ ), определил 24 коэффициента по наблюдениям в 12 точках, т.к. решил 36 уравнений с 24 неизвестными. Решение таких уравнений производится способом наименьших квадратов.

Коэффициенты первых членов разложения потенциала  $g_1, g_1', h_1$  представляют собой величины, пропорциональные составляющим вектора однородной намагниченности. Поэтому магнитный момент западной широты, соответствующий однородному намагничиванию:

$$M = R^3 \sqrt{(gI)^2 + (gI')^2 + (hI)^2}$$

Средняя намагниченность:

$$I = \frac{3}{4\pi} \sqrt{(gI)^2 + (gI')^2 + (hI)^2} = 0,072.$$

Первые члены разложения Гаусса представляют собой потенциал, создаваемый однородно намагниченным шаром, магнитный момент которого равен среднему моменту при неоднородном намагничивании.

Интерпретация остальных членов ряда впервые была дана Н.А.Умновым, который показал, что каждая из шаровых функций, входящих в ряд Гаусса представляет магнитный потенциал особого распределения - мультиполя. Но это была "геометрическая гиперпретация, т.е. уподобление каждого члена разложения некоторому геометрическому образу (мультиполь). Физическое объяснение существования таких образов не представляется возможным.

Значения коэффициентов  $g$  и  $h$  вычислялись различными авторами. Из сопоставления значений видно, что они изменяются со временем.

Этот факт говорит о том, что магнитное поле не остается постоянным, а медленно и непрерывно меняется.

<sup>1</sup> Функция  $f$  называется дифференцируемой в точке  $x_0 \in (a, b)$ , если существует предел разности

отношения функции  $f$  в точке  $x_0$   $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . Этот предел называется производной

функции  $f$  и обозначается  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x \rightarrow x_0}$

<sup>2</sup> Известно, что предел функции  $f(x)$  в точке  $x_0$   $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  называется

производной и обозначается  $\frac{df}{dx}$ . Производная функция многих переменных обозначается  $\frac{\partial f(x_1 \dots x_k)}{\partial x_k}$

(это частная производная).

<sup>3</sup> Если  $f$  дифференцирована по каждой из координат в точке  $P_0$ , то вектор  $f'x_1(P_0), f'x_2(P_0) \dots f'x_n(P_0)$

называется градиентом функции  $f$  в точке  $P_0$  и обозначается  $grad f(P_0)$ . Направление  $grad$  есть направление наиболее быстрого роста функции  $f$  (т.е. направление наибольшей производной по направлению).

<sup>4</sup> Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $P_0(x_1^0 \dots x_n^0)$  и пусть  $x_i^0 = \varphi_i(t_0)$  а  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  функции одного переменного дифференцируемы в точке  $t_0$ . Тогда сложная функция составленная из  $f$  и  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  дифференцируемая в точке  $t_0$  и ее производная равна

$$\left. \frac{df[\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)]}{dt} \right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^n f'x_i(x_1^0 \dots x_n^0) \varphi_i'(t_0) = \frac{\partial V}{\partial \xi} \left( \frac{d\xi}{dS} \right)$$

<sup>5</sup> Пусть область ограничения  $D(f)$  функции  $f$  содержит окрестности точки  $P_0(x_1^0 \dots x_n^0)$ . Функция  $f$  называется дифференцируемой в точке  $P_0$ , если для любых  $P(x_1 \dots x_n)$  из этой окрестности

$$f(P) - f(P_0) = \sum_{k=1}^n f'x_k(P_0)(x_k - x_k^0) + d(P_0, P)R_1(P) \text{ где } \lim_{P \rightarrow P_0} R_1(P) = 0 \text{ линейная часть}$$

$df(P) = \sum_{k=1}^n f'x_k(P_0)(x_k - x_k^0)$  приращения  $f(P) - f(P_0)$  называют полным дифференциалом функции

$f$  в точке  $P$ . График функции  $\tilde{f}$ , ограниченным пространством

$\tilde{f}(P) = f(P_0) + \sum f'x_k(P_0) \times (x_k - x_k^0)$  называется касательной плоскостью к графику функции  $f$  в точке  $P_0$ .

<sup>6</sup> Функция  $f$  называется непрерывной в точке  $x_0 \in D(f)$  если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , принадлежащих  $D(f)$  и таких, что  $(x - x_0) < \delta$ , имеет место  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Функция  $f$  определенная в некоторой окрестности  $x_0$  непрерывна в точке  $x_0$ , тогда и только тогда, когда

существует предел  $f$  в точке  $x_0$   $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

<sup>7</sup> Функция называется дифференцируемой в точке  $x_0 \in a, b$ , если существует предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

<sup>8</sup> Точечный потенциал при совпадении  $M$  и  $P$  теряет смысл  $\frac{1}{r} \rightarrow \infty$ , а в объёмном потенциале всегда остаётся элемент объёма и  $M$  и  $P$  не совпадают.

<sup>9</sup> Точечный потенциал  $\frac{fm}{r} \rightarrow m = eW(P) = -e\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right)$

<sup>10</sup> Потенциал диполя равен сумме точечных масс с разными знаками.

<sup>11</sup> Имеется в виду формула  $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{m}} = \text{grad } f(P_0)m$

<sup>12</sup> Пусть  $f$  определена в некоторой окрестности точки  $P_0(x_0, \dots, x_n^0) \in R^n$ ; и пусть  $\vec{m}$  - единичный вектор в  $R^n$  ( $|\vec{m}| = 1$ ) с координатами  $m_i = \cos \alpha_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), где  $\alpha_i$  - углы между  $\vec{m}$  и положительными

направлениями осей координат. Предел  $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} [f(x_1^0 + km_1 + \dots + x_n^0 + km_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)]$  называется

производной функции  $f$  в т.  $P_0$  по направлению  $\vec{m}$ . Производная  $f$  по направлению  $\vec{m}$  равна  $\frac{\partial f P_0}{\partial \vec{m}}$ ,

следовательно обыкновенной производной такой функции одного переменного, которая получена из  $f$  путём сужения области её определения до прямой, проходящей т.  $P_0$  в направлении  $\vec{m}$ .

<sup>13</sup>  $\xi$  - проекция точки  $P$  на ось  $x$ . Угол  $\varphi = 180^\circ - (\bar{r}, \bar{x})$  тогда  $\cos(r, x) = -\cos(180^\circ - \angle rx)$

<sup>14</sup> Вычисляется интеграл по замкнутой оболочке  $E$ . Находится предел отношения этого интеграла к объёму  $V$ , заключённому внутри этой поверхности. Объёмная производная скалярного поля является его

градиентом -  $\frac{\int E U ds}{V}$ . Дивергенцией или расхождением поля  $V$  обозначается  $\text{div } V$  называется скаляр,

определённый в каждой точке поля и являющийся объёмной производной этого поля  $\text{div } V = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int V ds}{V}$ . В

декартовых координатах  $\text{div } V = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

<sup>15</sup> Формула Грина  $\int_T \frac{\partial U}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = \int_S V \frac{\partial U}{\partial x} \cos(n, x) d\sigma - \int_T V \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} d\tau$  если  $U = x$ , то  $\frac{\partial U}{\partial x} = 1$   $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$

и  $\int_T \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = \int_S V \cos(n, x) d\sigma$  откуда легко получается дивергент теорема Гаусса-Остроградского

$$\int_T \text{div } \vec{F} d\tau = \int_S F_n d\sigma.$$

### 3. Решение прямой задачи для тел простой геометрической формы при вертикальном намагничении.

#### 3.1. Магнитные аномалии шара.

Для шара (рис.3.1) на глубине  $h$  вертикальная, горизонтальная и полная составляющие магнитного поля определяются по формулам:

$$Z = \frac{M(2h^2 - x^2)}{(x^2 + h^2)^{5/2}}, \quad H = -\frac{3Mxh}{(x^2 + h^2)^{5/2}}, \quad T = \frac{Mh}{(x^2 + h^2)^{5/2}},$$

где  $h$  - глубина до центра шара;

$M = I \cdot V$  - магнитный момент шара;

$I$  - намагниченность;

$V$  - объем шара;

$x$  - расстояние от эпицентра аномалии.

1. Направление выпуклости  $H$  определяется по вычислению второй производной и подстановкой в выражение значения аргумента, при котором первая производная равна нулю.

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dx} &= -Mh \frac{(h^2 - 4x^2)(x^2 + h^2)^{7/2} - (h^2 - 4x^2)[(x^2 + h^2)^{5/2}]^2}{[(x^2 + h^2)^{5/2}]^2} = \\ &= -Mh \frac{-8x(x^2 + h^2)^{7/2} - (h^2 - 4x^2) \frac{7}{2} (h^2 + x^2)^{5/2} 2x}{(x^2 + h^2)^7} = \\ &= -Mh \frac{[-8x^3 - 8xh^2 - 7xh^2 + 4x^3]}{(x^2 + h^2)^{9/2}} = \\ &= -Mh \frac{[-4x^3 - 15xh^2]}{(x^2 + h^2)^{9/2}} = -Mhx \frac{[-4x^2 - 15h^2]}{(x^2 + h^2)^{9/2}} = \\ &= Mhx \frac{4x^2 + 15h^2}{(x^2 + h^2)^{9/2}} \end{aligned}$$

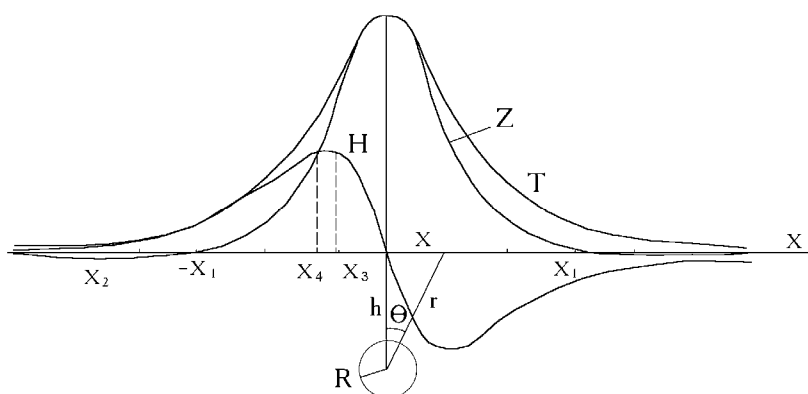


Рис. 3.1.  $H$ ,  $Z$  и  $T$  для шара.



При  $x_3 = -\frac{h}{2}$ ,  $H'' < 0$ , т.е. график  $H$  на оси  $(-y, 0)$  имеет выпуклость, направленную вверх и  $H_{\max}, h = 2x_3$ .

При  $x_3' = \frac{h}{2}$ ,  $H'' > 0$ , т.е. график  $H$  на оси  $(0, y)$  имеет выпуклость, направленную вниз и  $H_{\min}, h = 2x_3'$ .

2. Экстремумы  $Z_{\min}$  определяются по производной:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dx} &= M \frac{(2h^2 - x^2)'(x^2 + h^2)^{5/2} - (2h^2 - x^2)[(x^2 + h^2)^{5/2}]'}{[(x^2 + h^2)^{5/2}]^2} = \\ &= M \frac{-2x(x^2 + h^2)^{5/2} - (2h^2 - x^2) \frac{5}{2}(x^2 + h^2)^{3/2} 2x}{(x^2 + h^2)^5} = \\ &= M \frac{(x^2 + h^2)^{3/2}(-2x(x^2 + h^2) - 10h^2x + 5x^3)}{(x^2 + h^2)^5} = \\ &= M \frac{3x^3 - 12h^2x}{(x^2 + h^2)^{7/2}} \end{aligned}$$

$$dZ/dx=0 \text{ при } 3x^3 - 12h^2x=0$$

$$x^2 - 4h^2 = 0, \text{ т.е. при } x_2 = \pm 2h$$

$Z$  имеет минимальные значения при  $h = \pm \frac{x_2}{2}$

$$3. Z=0. \quad Z = \frac{M(2h^2 - x^2)}{(x^2 + h^2)^{5/2}} = 0; \quad x_1 = \pm 1,42h \rightarrow h = \frac{x_1}{1,42}$$

$$4. Z=H. \quad \frac{M(2h^2 - x^2)}{(x^2 + h^2)^{5/2}} = -\frac{3Mxh}{(x^2 + h^2)^{5/2}}$$

Преобразуя эти выражения получим:

$$2h^2 - x^2 = -3xh$$

$$-x^2 + 3hx + 2h^2 = 0$$

Решить данное квадратное уравнение можно стандартным способом:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

В этом квадратном уравнении коэффициенты  $a, b, c$  – соответственно равны:

$$a = -1; \quad b = 3h; \quad c = 2h^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3h \pm \sqrt{9h^2 + 4 * 2h^2}}{-2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3h \pm h\sqrt{17}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-3h - 4.13h}{-2} = \frac{7.13h}{2} = 3.6h \rightarrow h = \frac{x}{3.6}$$

$$x_1 = \frac{-3h + 4.13h}{-2} = -\frac{1.13h}{2} = -0.56h \rightarrow h = -\frac{x}{0.56}$$

$$h = \frac{x}{0.56}$$

5. Учитывая, что  $M=I*V$ -магнитный момент шара, где объем  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  и намагниченность  $I$ , можно определить магнитные свойства:

$$T_{\max} = \frac{M}{h^2} \rightarrow fM = T_{\max} \cdot h^2 \rightarrow I = \frac{T_{\max} \cdot h^2}{V}.$$

При решении обратной задачи имеется возможность определить глубину до центра шара.

Глубина до центра шара может быть определена из соотношения:

$$h = \frac{x_1}{1.41} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{0.5} = \frac{x_4}{0.56}.$$

Зная  $h$ , можно определить магнитный момент шара

$$M = 0,5Z_{\max} h^3.$$

По известным значениям  $I$ , найденным, например, в результате изучения образцов из скважин, пробуренных в пределах подобных аномалий на соседнем участке, можно вычислить объем шара:

$$V = \frac{M}{I};$$

затем радиус шара:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}};$$

и, наконец, глубину залегания его верхней кромки:

$$h_1 = hR.$$

В этом случае можно вычислить также количество руды  $m$ , если аномалия соответствует рудному телу, по зависимости

$$m = V\sigma$$

где  $\sigma$  - плотность руды.

Для горизонтального кругового цилиндра,

$$h = x_1 = \frac{x_2}{1.73} = \frac{x_3}{0.58} = \frac{x_4}{0.41}$$

Зная  $h$ , можно вычислить магнитный момент единицы длины  $M$ , например, по  $Z_{a \max}$ :

$$M = 0,5Z_{a \max} h^2$$

При известном из других источников значении  $I$  можно найти площадь поперечного сечения:

$$S = \frac{M}{I};$$

радиус сечения цилиндра:

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}};$$

и глубину до верхней кромки тела

$$h_1 = hR$$

### 3.2. Магнитные аномалии штока.

Физико-математическую основу всех аналитических методов (характерных точек, амплитудных методов, методов особых точек) иллюстрирует ход математического исследования кривых бесконечно длинного и тонкого штока (столбообразного тела) (рис. 3.2.) Это тело простой геометрической формы может выступать аналогом рудных тел, встречающихся в виде столбообразных залежей, то есть вертикальных штоков. Магнитные полюсы при вертикальном намагничении будут сосредоточены на верхней и нижней поверхностях среза штока, мощность этих полюсов равна магнитному моменту штока. На глубине  $h$  вертикальная, горизонтальная и полная составляющие напряженности магнитного поля определяются по формулам:

$$Z = \frac{Mh}{(h^2 + x^2)^{3/2}}; \quad H = -\frac{Mx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}; \quad T = \frac{M}{(h^2 + x^2)},$$

где  $h$ - глубина залегания поверхности штока;

$M = I \cdot S$  - магнитный момент штока;

$I$ - намагниченность;

$S$ - поверхность сечения штока;

$x$ - расстояние от эпицентра аномалии.

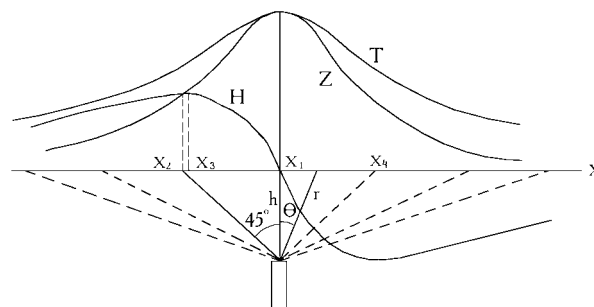


Рис. 3.2. H, Z и T над штоком.

Преобразуем эти формулы, помножив и разделив на  $\frac{h^2}{h^2}$ :

$$Z = \frac{Mhh^2}{(h^2 + x^2)\sqrt{h^2 + x^2}h^2} = \frac{Mh^2}{h^2 + x^2} \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}h^2}.$$

Учитывая, что  $\cos \theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}}$ ,  $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$ ,

$$Z = \frac{M}{h^2} \times \cos^3 \theta$$

$$H = -\frac{Mh^2x}{(h^2 + x^2)\sqrt{h^2 + x^2}h^2} = -\frac{M}{h^2} \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$T = \frac{Mh^2}{(h^2 + x^2)h^2} = \frac{M}{h^2} \cos^2 \theta$$

Анализ этих формул показывает, что при  $\theta=0$  (рис.4.1.1):

1.  $x_1 = 0$  (под полюсом),  $H=0$ , т.к.  $\sin \theta=0$ ,  $\sin \theta = 0$ ,  $Z = T_{\max} = \frac{M}{h^2}$ , т.к.  $\cos \theta = 1$

2. Экстремумы  $H$  ( $H_{\max}$ ,  $H_{\min}$ ) определяются при вычислении и анализе производной выражения для  $H$ :

$$H = -\frac{Mx}{(h^2 + x^2)^{3/2}};$$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dx} &= -M \frac{x''(h^2 + x^2)^{3/2} - [(h^2 + x^2)^{3/2}]' (x^2)x}{[(h^2 + x^2)^{3/2}]^2} = \\ &= -M \frac{(h^2 + x^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(h^2 + x^2)^{1/2} 2x}{(h^2 + x^2)^3} = -M \frac{\sqrt{h^2 + x^2}(h^2 + x^2 - 3x^2)}{(h^2 + x^2)^3} = \\ &= -M \frac{(h^2 - 2x^2)}{(h^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\frac{dH}{dx} = 0, \text{ если } (h^2 - 2x^2) = 0, \text{ т. е. при } x_3 = \frac{h}{\sqrt{2}} = \pm 0,71h, \text{ имея } H_{\max} \text{ и } H_{\min} \text{ или при}$$

несимметричных аномалиях  $\frac{H_{\max} + H_{\min}}{2}$ .

3. Точки максимального и минимального значения кривой определяются по вычислению второй производной и подстановкой в выражение для первой производной значений аргумента, при которых первая производная равна 0.

Исходя из пункта 2,  $\frac{dH}{dx} = -M \frac{(h^2 - 2x^2)}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$ , учитывая, что  $\frac{dH}{dx} = 0$  при

$x = \pm \frac{h}{\sqrt{2}}$ , подставив эти значения  $x$  в  $\frac{d^2H}{dx}$ , получим после преобразований

$$\frac{d^2H}{dx} = -M \frac{-6x^3 - 9xh^2}{(x^2 + h^2)^{5/2}} = M \frac{3x(2x^2 + 3h^2)}{(x^2 + h^2)^{5/2}} = M \frac{3h2h^2}{2\left(\frac{h^2}{2} + h^2\right)^{5/2}}$$

Только множитель  $3h$  определяет знак производной, т. к. остальные множители всегда положительные.

При  $x = +\frac{h}{\sqrt{2}}$   $\frac{d^2H}{dx} > 0$ , что говорит о min на кривой  $H$ , выпуклой вниз, т.е.

вогнутой.

При  $x = -\frac{h}{\sqrt{2}}$   $\frac{d^2H}{dx} < 0$ , что говорит о max на кривой  $H$ , выпуклой вверх.

4. Исследуя выражения для  $Z = H$  в точке с абсциссой  $x_2$ , учитывая, что при  $\theta = -45^\circ$  -  $\sin \theta = \cos \theta$ , получим:

$$\frac{M}{h^2} \cos^3 \theta = -\frac{M}{h^2} \cos^2 \theta \sin \theta \rightarrow \text{при } \theta = 45^\circ \\ \cos(-45^\circ) = -\sin(-45^\circ), \text{ т.е. } Z = H$$

В этой же точке  $Z = 0,35Z_{\max}$ , т.к.  $Z_{\max} = \frac{M}{h^2}$ .

Исходя из формул  $Z = \frac{Mh}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$ ,  $H = \frac{Mx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$ ,  $Z = H$  в точке, где

$x = -h$ , т.е.  $x_2 = -h$ .

В этой же точке и в точке симметричной ей, т. е. в точке  $x = \pm h$

$$T = \frac{M}{h^2 + x^2} = \frac{M}{h^2 + h^2} = \frac{M}{2h^2}$$

учитывая  $T_{\max} = \frac{M}{h^2}$ , в точке  $x_4 = \pm h$   $T = 0,5T_{\max}$ .

5. Исследуя выражение  $H$  в экстремальных точках, можно вычислить долю от  $H_{\max}$ , которую составляет  $H$  экстремальное в точке пересечения кривых  $H$  и  $Z$ , т. е. в точке  $x_2$ .

Из пункта 3,  $Z=H$  в точке с  $x_2 = -h$ .

Из пункта 2,  $H_{\max}$  в точке с  $x_3 = -\frac{h}{\sqrt{2}}$ .

Подставим эти значения в  $H = -\frac{Mx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$ .

$$H = \frac{Mh}{(h^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{Mh}{2h^3\sqrt{2}} = \frac{M}{2h^2\sqrt{2}},$$

$$H_{\max} = \frac{Mh}{\sqrt{2}\left(h^2 + \frac{h^2}{2}\right)^{3/2}} = \frac{Mh}{\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}h^2\right)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{2}Mh}{3h^2\sqrt{2}\sqrt{3}h} = \frac{2M}{3h^2\sqrt{3}}$$

$$\frac{H}{H_{\max}} = \frac{Mh^2 3\sqrt{3}}{2h^2 2M\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 0,95.$$

т. е.  $H$  в точке пересечения кривой  $Z$  и  $H$  составляет 0,95 от  $H_{\max}$ .  
 $H(\theta=45^\circ)=0,95H_{\max}$ .

Кроме этого в точке, где  $H_{\max}$ , т. е. в точке  $x = \frac{h}{\sqrt{2}} = 0,708h$ , доля  $Z_{\max}$  составляет 0,38, т.к.

$$H_{\max} = \frac{2M}{3h^2\sqrt{3}}, Z_{\max} = \frac{M}{h^2}, \text{ то}$$

$$H_{\max} = \frac{2M}{3\sqrt{3}} Z_{\max} = 0,38Z_{\max}$$

в точке  $x = 0,708h$ .

6. Исходя из пункта 1 и учитывая, что  $M = JS$ , где  $S$  – площадь поверхности штока,  $J$  – его намагниченность,

$$Z_{\max} = Z = \frac{M}{h^2} \Rightarrow M = Zh^2 \Rightarrow JS = Z_{\max} \cdot h^2 \Rightarrow J = \frac{Z_{\max} \cdot h^2}{S}.$$

7. Исходя из пункта 1  $Z_{\max} = \frac{M}{h^2}$  и учитывая, что

$$Z = \frac{M}{h^2} \cos^3 \theta \rightarrow \cos^3 \theta = \frac{Z}{Z_{\max}} \rightarrow \arccos \sqrt[3]{\frac{Z}{Z_{\max}}} = \angle \theta$$

Аналогично,  $\theta = \arccos \sqrt[3]{\frac{T}{T_{\max}}}$ .

Таким образом, решить обратную задачу, т.е. найти параметры аномалеобразующего тела, можно, анализируя экстремальные точки кривых  $Z, H, T : H_{\min}, H_{\max}, Z = H, Z_{\max}, T_{\max}$ . Глубина поверхности штока определяется соотношениями:

$$h = \frac{x_3}{0,71} = -x_2 = \pm x_4.$$

### 3.3. Магнитные аномалии вертикальных пластов.

При вертикальном намагничении вертикальных и крутопадающих пластов сверху вниз магнитные полюса возникают только на верхнем и нижнем крае среза пласта (рис.3.3). Максимум вертикальных напряжений получается над пластом, а векторы горизонтальных напряжений с обеих сторон направлены к пласту. При большой протяженности пласта на глубину нижний полюс практически не действует, и аномалии создаются только верхним полюсом, который при малой мощности пласта можно считать расположенным по линии (поле однополюсной линии), а при значительной мощности его – по плоской полосе шириной, равной мощности пласта. Кривые напряженности по профилю вкрест простирания пласта при малой мощности его ( $2b < h$ ) или ( $2b = h$ ), определяются формулами:

$$T = \frac{2M}{(h^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{2M}{h} \cos \theta = \frac{2M}{r}$$

$$Z = \frac{2Mh}{h^2 + x^2} = \frac{2M}{h} \cos^2 \theta = \frac{2Mh}{r^2},$$

$$H = \frac{-2Mx}{h^2 + x^2} = \frac{-2M}{h} \sin \theta \cos \theta = \frac{-2Mx}{r^2};$$

$\operatorname{tg} J = \frac{Z}{H} = -\operatorname{ctg} \theta$ , или  $J = 90 - \theta$ ,  $M$  – линейная мощность полюса пласта, равная произведению интенсивности намагничения ( $I$ ) на его горизонтальную мощность ( $2b$ ).

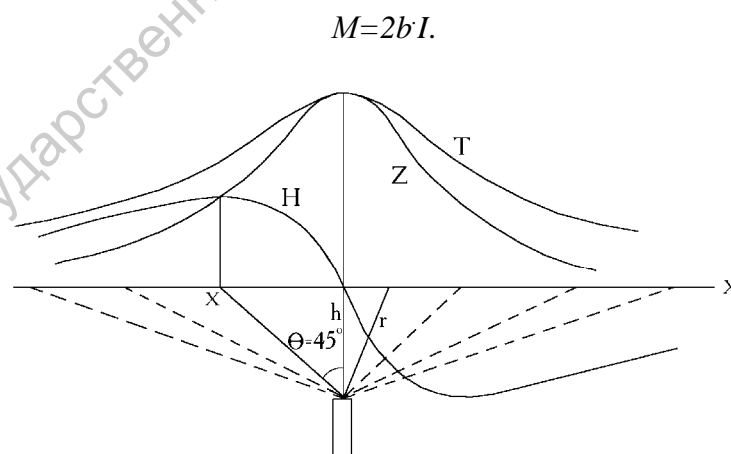


Рис.3.3. Графики  $H$ ,  $Z$  и  $T$  над пластом малой мощности.

Анализ этих кривых показывает:

1. При  $\theta=0$ , т.е. над пластом,  $H=0$ , а  $T$  и  $Z$  равны между собой, направлены вертикально вниз и имеют максимальные значения

$$T_{\max} = Z_{\max} = \frac{2M}{h}, \text{ а так как } Z = \frac{2M}{h} \cos^2 \theta, \text{ то } \theta = \arccos \sqrt{\frac{Z}{Z_{\max}}}.$$

2. При  $\theta = \pm 45^\circ$ , где  $X_J = \pm h$ , значения  $Z$  и  $H$  имеют равную абсолютную величину  $0.5 Z_{max}$  и угол наклона полного вектора  $T \angle J = 45^\circ$ . Кроме того, здесь профиль  $Z$  имеет точку перегиба и наибольшую крутизну, а  $H$  имеет максимальное значение  $H_{max} = 0.5 Z_{max}$ .
3. Отрицательных значений  $Z$  не имеет.

Таким образом, мы видим, что:

- I. Вектор полного напряжения во всех пунктах наблюдения направлен в верхний край пласта.
- II. С удалением от эпицентра аномалии  $Z$ ,  $H$ ,  $T$  убывают медленно, стремясь к нулевым значениям только на бесконечных расстояниях.
- III. При интерпретации таких аномалий прежде всего определяется глубина верхнего края пласта  $h$  из соотношений:

$$h = x_1 = x \operatorname{tg} J = x \frac{Z}{H} = x \operatorname{ctg} \theta,$$

Для определения  $M$  надо знать  $h = x_J$  и  $Z_{max} = Z$  при  $\theta = 0$ .

$$M = \frac{Z_{max} \cdot h}{2},$$

Далее определяется мощность пласта  $2b$ , если известна интенсивность намагничивания  $I$  по формуле:  $M = 2bI$ .

Для мощного вертикального пласта, при его большой относительной мощности пласта  $2b/h = P$ , достигающей единицы и более, аномалии по профилю вкрест простирания пласта будут иметь вид рис. 3.4.

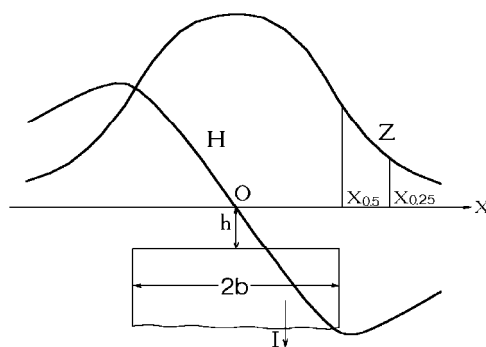


Рис. 3.4. Кривая  $H$  и  $Z$  для мощного вертикального пласта.

Для кривой  $Z_a$ , по сравнению с кривой для маломощного пласта, характерны более пологая форма в эпицентре и более крутой спад на флангах аномалии. Расстояния от максимума кривой  $Z_a$  до полумаксимума ( $X_{0.5}$ ) и до четверти



максимума ( $X_{0,25}$ ) связаны с параметрами пласта (глубиной  $h$  и мощностью  $2b$ ) соотношениями:

$$X_{0,5}^2 = h^2 + b^2,$$

$$X_{0,25}^2 = h^2 + b^2 + 2h\sqrt{h^2 + b^2},$$

Обратная задача в идеальных условиях, когда форма тела близка к теоретической, намагниченность близка к однородной, поверхность наблюдения плоская и горизонтальная, размеры тела по простиранию и падению достаточно велики, решается полностью и однозначно.

Глубина залегания верхней кромки  $h$ , мощность пласта  $2b$  и его намагниченность могут быть вычислены по формулам:

$$h = \frac{X_{0,25}^2 - X_{0,5}^2}{2X_{0,5}},$$

$$2b = 2\sqrt{X_{0,5}^2 - h^2},$$

$$I = \frac{Z_{\max}}{2 \operatorname{arctg} \frac{P}{1 - 0,25P^2}}$$

По  $I$  можно вычислить эффективную восприимчивость  $\chi_{\text{эф}}$ , при которой наблюдаемая аномалия полностью объясняется наведенной намагниченностью. Очевидно, что

$$\chi_{\text{эф}} \approx \frac{I}{Z_0},$$

где  $Z_0$  - модуль вертикальной составляющей вектора нормального поля.

В магниторазведке широко используют связь между интенсивностью аномалии в эпицентре пласта  $Z_{\max}$  и эффективной восприимчивостью  $\chi_{\text{эф}}$ , которая существует в предельном случае, когда  $h \ll 2b$ . Пласт в пределе переходит в полупространство. При этом условии угол видимости верхней кромки пласта будет близким к  $\pi$ , и тогда:

$$Z_{\max} \approx 2\pi I.$$

В этом случае при  $I = Z_0 \chi_{\text{эф}}$  и  $Z_0 \approx 0,5 \text{ Э}$ :

$$Z_{\max} \approx 0,3\chi_{\text{эф}} \cdot 10^6$$

Эта зависимость позволяет легко и быстро оценить максимальную аномалию, которую могут создать породы с заданной восприимчивостью. Та же связь может быть использована для определения минимальной восприимчивости  $\chi_{\min}$  (в

гаммах), которую должна иметь порода, вызвавшая наблюдаемую аномалию  $Z$ .

Очевидно,

$$\chi_{min} \cdot 10^6 \approx 3Z$$

Наклонный пласт. Общий вид кривых  $Z$  и  $H$  над наклонным пластом показан на рис.3.5.

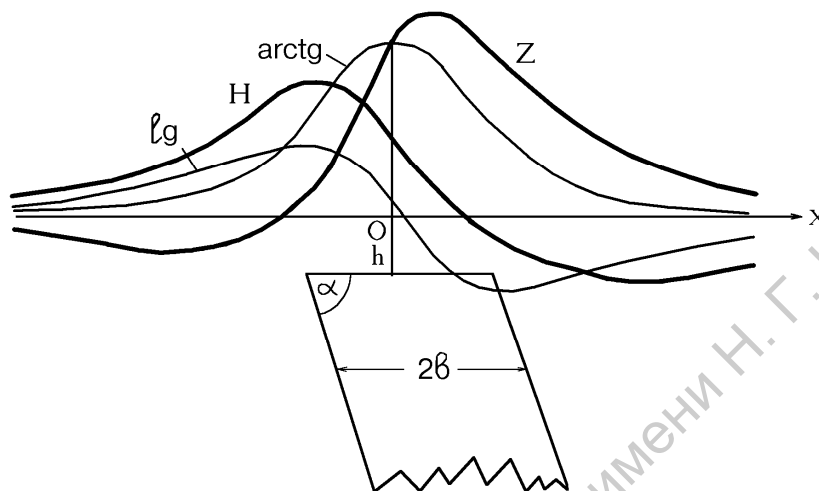


Рис. 3.5. Общий вид кривых над наклонным пластом.

При интерпретации, прежде всего, определяется на профиле положение точки  $O$ , которая расположена между максимумом и минимумом кривой, в которой  $Z=Z_{max}+Z_{min}$ , т.е. разность абсолютных значений максимума и минимума кривой  $Z$ . После чего наблюдаемая кривая  $Z$  разлагается на кривую арктангенса и кривую логарифма (рис. 4.5). Ординаты кривой арктангенса для каждой точки профиля равны полусумме ординат правой и левой ветви заданной кривой, равноотстоящих от точки  $O$  на таких же расстояниях, а ординаты кривой логарифма - полуразности тех же ординат. При этом кривая арктангенса будет вполне аналогична кривой  $Z$ , а кривая логарифма аналогична кривой  $H$  для вертикального пласта с такими же параметрами. Поэтому дальнейшая интерпретация их может быть выполнена по формулам для вертикального пласта.

Используя этот вид математического анализа можно получить аналогичные соотношения для других тел простой формы.

Исследования аналитических выражений магнитных аномалий от тел простой формы приводит к группе способов решения обратных задач на основе взаимосвязей абсцисс характерных точек кривых и параметров среды.

## 4. Состояние и перспективы современной магниторазведки.

### 4.1. Высокоточная аэро- и наземная магниторазведка.

Высокоточная магниторазведка обеспечивает расширение круга решаемых геологических задач в новых областях применения ее методов.

#### В рудных районах:

- изучение структур (складчатых, разрывных, вулканических, инъективных) и отдельных их элементов (крыльев, сводов, раздувов, жерл), сложенных слабомагнитными образованиями ( $\chi < 50 \cdot 10^{-5}$  СИ);
- выделение и изучение рудоносных формаций, в составе которых преобладают слабомагнитные осадочные, метаморфогенные и кислые вулканогенные образования;
- прямые поиски слабомагнитных руд – сульфидных и рудно-кварцевых (цветных редких и рассеянных металлов), марганцевых (осадочных), бокситовых (платформенных и геосинклинальных), благородных металлов, радиоактивного сырья.
- Выявления и изучения слабомагнитных неметаллических полезных ископаемых – алмазов, пьезооптического (горный хрусталь, исландский шпат), агрономического (апатиты, фосфориты), горно-химического (калийные соли и сера) сырья, корунда (естественного наждака), пегматитов;

#### в нефтегазоносных районах:

- выяснение структурных условий бассейнов и выделение внутренних впадин и валов;
- изучение состава и структур кристаллического фундамента, сложенного слабомагнитными образованиями;
- поиски нефтегазоперспективных структур (платформанных, тектонических, солянокупольных, грязевых выулканов и др.);
- прямые поиски залежей нефти и газа;

#### в угольных бассейнах:

- исследование элементов разрывной тектоники шахтных угольных полей и выделение малоамплитудных нарушений (2 – 5 м);
- изучение структурных условий и состава, формаций бассейнов;
- выделение зон выгорания углей;

в гидрогеологии и инженерной геологии:

- выявление и прослеживание водоносных горизонтов и интрузивных комплексов, обводненных трещинных зон;
- картирование водоносных магнитных и слабомагнитных комплексов складчатого фундамента;
- выделение и изучение агрессивных экзогенных структур – оползней, трещинноватости, закарстования, морен;

в археологии –

- обнаружение подземных сооружений, тоннелей, заброшенных выработок, останцов древних фундаментов, водоводов, крепостных сооружений, очагов выплавки металлов и др.

**4.2. Микромагнитная съемка.**

Методология микромагниторазведки основывается на изучении микроструктуры магнитного поля, которая выражается слабыми эффектами, флюктуациями и другими малоприметными особенностями. Информация о микроструктуре полей может быть основной при исследовании слабоконтрастных объектов (соотношение сигнал/помеха близкое или меньше единицы) и существенно дополняет информацию о макроструктуре полей на относительно контрастных объектах (соотношение сигнал/помеха более единицы) путем выделения и изучения слабоконтрастных элементов их строения. При этом при глубинности изучения 10 – 15 м в полях отражаются прямые и косвенные приповерхностные эффекты от скрытых и глубокозалегающих объектов.

Технология съемки основывается на максимально достижимой точности и высокой детальности наблюдений элементов магнитного поля. В числе освоенных вариантов можно указать:

- 1) съемку по рассредоточенным на площади исследуемого участка микроплощадкам с повысотными и режимными наблюдениями. Используется при изучении поверхностных неоднородностей, локальных изометричных структур, даек, штоков, трубок взрыва, карстов и др. Размеры площадок - 10×10, 20×20, 50×50 м – зависят от условий работ, глубины залегания и характера объекта, сеть наблюдений, как правило, кратная размерам (1×1, 2×2, 5×5 м). Для разделения объектов приповерхностных и глубинных наблюдения на площадках выполняются на трех высотах (0,2 – 1 – 2 или 1 – 2 – 3 м);

- 2) съемки по микрополосам, проложенным вкрест простирания исследуемых линейных объектов при их обнаружении и рекогносцировании и вдоль – при их изучении. Привлекаются для исследования рудных зон месторождений, зон нарушений, гидротермального изменения пород, оползней и других линейных структур. Одним из преимуществ варианта является непрерывность изучения состояния пород в пределах исследуемой структуры;
- 3) съемки корреляционным способом при наличии хорошо распознаваемых коррелирующих признаков. Применяются на протяженных объектах, простирание которых сильно изменяется (ветвистое). Способ является разновидностью полосового варианта, в котором реализована возможность постоянной корректировки положения профилей и полосы в целом. Полоса как бы следует за геологическим объектом, благодаря чему достигается высокая детальность изучения и экономичность опробования площади. Сети наблюдений как в полосовом, так и в корреляционном вариантах могут быть квадратными (1×1, 2×2, 5×5, 10×10 м) и прямоугольными (2×1, 5×1, 5×2, 10×5 м). Способ опробован на рудно-сульфидных месторождениях полиметаллитов, меди, золота гидротермального генезиса, в результате выявлено строение рудных зон, их смещение по разломам в условиях сплошной закрытости площади.

Высокие технико-экономические показатели микросъемки определяются:

1. фрагментарным изучением площади с полным охватом самого объекта детальными наблюдениями;
2. вовлечением в оценку при максимальных затратах множество ранее выявленных рудоперспективных геофизических и геохимических аномалий и рудопроявлений;
3. возможностью наращивания запасов полезных ископаемых за счет резервных объектов, оставшихся неизученными аномалий и рудопроявлений;
4. сохранением квалифицированных кадров при минимальном расходовании средств в период финансовых затруднений (сокращаются организационные, транспортные, коммуникационные и другие расходы).

Микросъемки могут найти применение на стадиях детальных поисков и, особенно, поисково-оценочных работ и разведки месторождений.

Микросъемку можно использовать на поверхности, в карьерах, подземных и наземных горных выработках.

#### **4.3. Скважинная магниторазведка.**

Скважинная магниторазведка основана на изучении элементов геомагнитного поля в буровых скважинах. Исследования в скважинах являются комплексными – по измерениям магнитного поля исследуется околоскважинное пространство (в радиусе десятков и первых сотен метров), по измерениям магнитной восприимчивости изучаются породы, вскрытые скважиной. К числу геологических задач, решаемых скважинной магниторазведкой, относятся: поиски магнитных рудных тел в околоскважинном пространстве, определение их элементов залегания, пространственного положения, формы, размеров, а при изучении стенок скважин – литологическое расчленение разреза, выделение интервалов магнитных руд, качественная и количественная оценка содержания железа в рудах. Материалы скважинной магниторазведки широко используются для выяснения геологической природы магнитных аномалий при поисковых работах, оконтуривании рудных залежей, для подсчета запасов намагниченных рудных тел и установления морфологии разведываемых рудных тел. Наиболее широкое признание получили два направления этого вида работ – измерения вертикальной составляющей магнитного поля и магнитной восприимчивости (непрерывно и одновременно), и векторная скважинная магнитометрия, позволяющая определить пространственное положение рудных тел. Последнее направление получило развитие от поточечных измерений трех взаимно перпендикулярных составляющих магнитного поля к непрерывным измерениям. При трехкомпонентных измерениях используются две схемы ориентации датчиков – осевая и вертикальная. С помощью феррозондовых магнитометров, помимо указанного комплекса параметров, можно определять и приращения модуля полного вектора магнитного поля  $\Delta T$ . Эти магнитометры позволяют исследовать скважины диаметром от 36 мм и более, и глубиной до 2000 м; эффективный радиус исследований – 150 – 200 м.

Дальнейшее повышение точности скважинных исследований ожидается с внедрением скважинных протонных магнитометров. Эти приборы могут повысить точность измерений до  $\pm 5$  -  $\pm 10$  нТл и выше, что позволит использовать скважинную магниторазведку не только при изучении магнитных и сильномагнитных объектов, но и слабомагнитных, и существенно расширит

область ее применения. Повышение точности измерений в перспективе на порядок можно связывать с освоением криогенных скважинных магнитометров. Пространственное положение скважин в магнитных средах определяется гироскопическими инклинометрами с непрерывной регистрацией данных измерений, что способствует повышению точности оконтуривания рудных тел по измерениям магнитного поля в скважинах. Использование магнитных измерений в сверхглубоких скважинах способствует изучению глубинного строения земной коры. С их помощью осуществляется литологическое расчленение формаций, выделяются интервалы с ферромагнитной минерализацией, обнаруживаются магнитные геологические тела, расположенные вблизи ствола скважин, исследуется остаточная намагниченность пород разного состава и возраста, определяется азимут наклона скважин. Скважинно-шахтный вариант магнитных измерений нашел применение при изучении железорудных месторождений на стадии эксплуатационной разведки в условиях подземных выработок. Наличие корреляционной связи между значениями магнитной восприимчивости и содержанием магнетитового железа в рудах позволяет выполнять магнитное опробование, которое стало основным видом опробования железных руд на горнодобывающих предприятиях на стадиях разведки, эксплуатации и обогащения. Установленные возможности ведения документации скважин геофизическими методами позволяют прогнозировать в ближайшее время возможности перехода на бескерновое бурение скважин при разведке магнетитовых месторождений.

#### **4.4. Сверхточная магнитометрия.**

Перспективы сверхточной магнитометрии связываются с разработкой и освоением, так называемых, криогенных магнитометров. Выделим основные аспекты решения этой проблемы:

- 1) аппаратный аспект: применение КМ обеспечивает повышение точности измерений (чувствительность  $10^{-4} - 10^{-6}$  нТл), высокую стабильность показаний, высокое быстродействие (Т измерение за п.0,1 – п.0,01 с), мобильность и производительность, измерение градиентов на малой базе (10 см) с чувствительностью  $\approx 10^{-5}$  нТл;
- 2) методичный аспект: КМ могут быть использованы для выполнения наблюдений в космо-, аэро-, наземных, морских, скважинных и подземных условиях для исследования вариаций геомагнитного поля изучения слабых и весьма слабых магнитных свойств пород и руд, для

измерения компонент магнитного поля и величины его полного вектора, для выполнения микромагнитных наблюдений, для исследования вторичных магнитных полей, создаваемых электрическими полями в методах гармонических полей, вызванной поляризации и других;

- 3) геологический аспект: КМ могут найти применение при решении специальных геологических, гидрогеологических и инженерно-геологических задач путем исследования микроструктуры магнитного поля. Основное ограничение – высокий уровень естественных и искусственных помех;
- 4) основные области применения – специальное картирование отдельных слоев, горизонтов, сложенных очень слабо намагниченными образованиями, слабо проявленными в магнитном поле тектонических нарушений, зон метаморфизма и метасоматизма, околорудных изменений, исследования первичных и вторичных текстур пород и руд; прямые поиски слабомагнитных руд металлов и неметаллов, выделение прямых эффектов от залежей нефти и газа;
- 5) обнаружение водонасыщенных трещинных зон в слабомагнитных породах, зон закарстования и отдельных карстов, подземных пещер, пустот;
- б) исследование агрессивных сред (оползней, плывунов, трещиноватости), сейсмичности, установление предвестников землетрясений, решение задач археологии.

#### **4.5. Спутниковая магнитометрия.**

Одним из приоритетных направлений современной магниторазведки должно стать развитие и освоение спутниковой магнитометрии. Магнитная съемка ведется из космоса с 1958 года. С ее помощью осуществляется изучение магнитного поля планет Солнечной системы для сравнения их геологических характеристик, исследуется морфология Главного магнитного поля Земли, устанавливается его связь с глубинным геологическим строением. Рассматривая магнитное поле Земли, исследователи исходят из предположения, что его источники располагаются на больших глубинах, возможно, на границе «ядро-мантия».

За истекший период выполнено несколько глобальных магнитных съемок, что позволяет вести изучение Главного магнитного поля Земли в пространстве и во



времени. За короткий промежуток времени съемкой охватывается все пространство поверхности Земли. Периодически повторяя съемки, получаем сведения об особенностях его изменения во времени. Благодаря этому можно досконально изучить материковые аномалии, их морфологию и динамику, соотношение дипольного, материкового полей и поля внешних источников (ионосферы) – составляющих Главного магнитного поля Земли, а также установить наличие крупных магнитных масс в пределах земной коры, закономерности их распределения в зависимости от происходящих геологических процессов.

Космические съемки ведутся с искусственных спутников Земли (ИСЗ) и долговременных орбитальных станций (ДОС). Для обеспечения одинакового масштаба съемки более подходят круговые космические орбиты. Высота трассы полета  $150 \div 300$  км. Наблюдения выполняются с помощью феррозондовых, протонных и квантовых магнитометров. Погрешность наблюдений с феррозондовыми магнитометрами оценивается в  $10 \div 30$  нТл. Приемное устройство магнитометра удерживается в направлении действия напряженности магнитного поля специальным автоматическим устройством. Магнитные датчики используются также для ориентации искусственных спутников и космических кораблей.

В результате обработки материалов съемки строятся кругосветные профили модуля полного вектора магнитного поля и глобальные магнитные карты. Данные магнитных измерений передаются на Землю для обработки. Интерпретация материалов преимущественно качественная. Это обусловлено неравномерностью разброса точек наблюдения как по площади, так и по вертикали, а также трудность учета глобальных вариаций магнитного поля Земли. Все это ограничивает возможности количественной интерпретации материалов. Применяется способ редукции данных космических съемок на определенный уровень приведения и внесения поправок за вариации интенсивности и направления магнитного поля.

В ближайшее время целесообразно достичь такого положения, чтобы материалы космических съемок, в том числе магнитных, стали доступными для геологических организаций, занимающимися региональными, картировочными и поисковыми исследованиями.

#### **4.6. Повысотные наблюдения.**

Повысотные наблюдения – измерения напряженности поля на разных высотах – могут использоваться как при аэромагнитных съемках, так и при наземных.

Повысотные аэромагнитные наблюдения выполняются в особо сложных геологических условиях – при наличии покровов траппов, базальтов и других неоднородно намагниченных образований. В их назначение входит разделение полей от объектов различной геологической природы, морфологии, глубины залегания и пространственного положения и выделение эффектов от искомым объектов.

Минимальный интервал высот 50 м, максимальный – сотни метров. Нередко высоты удваиваются, к примеру, 100 – 200 – 400 – 800 м.

Маршруты по отдельным пересечениям выполняются на постоянной барометрической высоте и задаются вкрест и через эпицентр аномалий. Основные требования к наблюдениям – постоянство высоты полетов, тщательный учет вариаций, низкая турбулентность воздуха. Известны примеры применения повысотных аэромагнитных наблюдений при поисках алмазонасных кимберлитовых тел, железорудных образований, бокситов в условиях островного развития трапповых покровов и в других районах. В назначение наземных повысотных наблюдений входит изучение особенностей строения магнитных аномалий и аномальных зон, выяснение их геологической природы, дифференциация объектов по глубине залегания и распространения, выделение эффектов от всякого рода помех (магнитных неоднородностей верхнего слоя, дневного и подземного рельефа и др.), выбор оптимальной высоты наблюдений при рядовых съемках, фильтрация полей. Наблюдения могут выполняться при наземных работах в диапазоне высот от 0 до 5 – 6 м по интерпретационным профилям, микроплощадкам и микрополосам, а также в площадном варианте в пределах аномальных зон. Применимы на всех стадиях работ, но особенно, при детализационно-оценочных и разведочных работах.

#### **4.7. Режимные наблюдения.**

В основе режимных наблюдений лежит изучение напряженности магнитного поля и его изменений во времени под воздействием разного рода геологических процессов и в результате человеческой деятельности. В районах современной вулканической и гидротермальной активности ими можно исследовать ее

периодичность, особенности проявления, влияние на окружающую среду; в сейсмоактивных районах – изучить развитие зон разломов, узлов их сопряжения, осуществить разделение разломов на активные и залеченные, по возможности установить эффекты – предвестники землетрясений; в районах промышленной застройки – выявить деформации и перемещения масс, развитие закарстования трещиноватости и других экзогенных процессов. Применение таких наблюдений при изучении оползней на ряде участков Крыма позволило зафиксировать изменения во времени магнитной анизотропии, обусловленной развитием вторичной текстуре рыхлых отложений под влиянием динамических напряжений. В районе разрабатываемых железорудных месторождений такие наблюдения могут использоваться для контроля за ходом выемки рудной массы.

#### **4.8. Изучение локальных изменений вариаций магнитного поля**

Изменение геомагнитного поля в рудных зонах месторождений может быть использовано с целью выяснения природы магнитных аномалий и оценки их рудоносности. Такого рода изменения вариаций отмечались ранее на железорудных месторождениях (железистых кварцитов и магнетитовых). Высокоточное исполнение эксперимента следует распространить в первую очередь на сульфидные месторождения с массивными или густо вкрапленными рудами с высокопроводными и магнитными свойствами. Исследования заключаются в сопоставлении хода вариаций в пределах рудного месторождения и вблизи него во вмещающей безрудной среде. Заслуживают детального изучения изменения хода вариаций, проявлений суточных, бухтообразных и КПК в зонах сейсмической активности для установления возможных предвестников землетрясений. Следует исследовать проявление существенного межсуточного хода вариаций магнитного поля, наблюдаемого в ряде северных районов страны. Амплитуда таких вариаций достигает нескольких десятков нТл, при этом может меняться и сам характер суточного хода. Возможна связь таких вариаций с особенностями глубинного строения районов, с изменениями естественного электромагнитного поля. В несколько меньших масштабах эти явления наблюдаются в отдельные дни и в средних широтах. Отклонения суточного хода вариаций здесь в пределах первого десятка нТл, что потребовало введения в данные наблюдений соответствующих поправок. Требуется обратить внимание на возможность использования этого явления в прикладных целях.

#### 4.9. Математическое моделирование магнитных полей.

Математическое моделирование магнитных полей с использованием ЭВМ привлекается для оценки достоверности поисков и разведки магнитных руд, уточнения методики и технологии магниторазведочных работ.

Оптимизация геологоразведочного процесса на основе моделирования позволяет более рационально размещать поисковые и разведочные скважины, корректировать их направление и глубину, своевременно и надежно опосредовать фланги и глубокие горизонты и с высокой достоверностью определять запасы руд. Особенно актуально применение моделирования при решении поисково-оценочных задач на ранних стадиях изучения железорудных месторождений, когда имеется ограниченный объем геологоразведочных данных. Для этого этапа разработаны основы методики моделирования, базирующейся на автоматизированном подборе объемных неоднородно намагниченных моделей месторождений на ЭВМ с помощью решения обратных задач магниторазведки.

Неоднородно намагниченные модели стали использоваться в практике решения поисково-разведочных задач на железо на основе реализации эвристического алгоритма подбора модели мощного пласта. С усложнением решаемых геологических задач были разработаны более эффективные алгоритмы для подбора моделей, состоящих из нескольких возмущающих объектов. Для определения параметров неоднородно намагниченных моделей использовались методы нелинейного программирования.

Методика моделирования, основанная на подборе объемных неоднородно намагниченных моделей, позволяет проводить картирование рудных залежей и рудных зон в целом, оценивать их вертикальные и горизонтальные размеры, а также проводить разделение магнитных полей с целью выделения эффектов от глубокозалегающих магнитных объектов. Проблема поисков глубокозалегающих железорудных месторождений сводится, прежде всего, к проблеме разбраковки магнитных аномалий на рудные и безрудные. При поисках погребенных месторождений, залегающих под чехлом рыхлых отложений известной мощности, в основе оценки магнитных аномалий могут быть величина и характер изменения расчетной намагниченности. При поисках слепых или погребенно-слепых месторождений подбираются объемные модели при условии неоднородной намагниченности по латерали и по падению возмущающего объекта. Наряду с ростом намагниченности с глубиной при оценке магнитных аномалий используется

также критерий, определяющий величину прогнозных ресурсов, глубину их залегания и экономический фактор их размещения.

Дальнейшее развитие магниторазведки на современном этапе можно связывать:

– с созданием и освоением криогенных магнитометров, обеспечивающих точность измерений  $1 \cdot 10^{-4} \div 1 \cdot 10^{-6}$  нТл; магнитных градиентометров с базой наблюдения 10 – 20 м (протонных, квантовых, криогенных), квантовых магнитометров с точностью измерений 0,001–0,01 нТл; аппаратуры магнитного каротажа с регистрацией магнитной восприимчивости с точностью  $(1-2) \cdot 10^{-5}$  ед.СИ и др. – **области аппаратных разработок.**

– с развитием космических магнитных съемок, направленных на исследование региональных составляющих магнитных полей и особенностей глубинного строения земной коры; с освоением стратосферных съемок на высотах 30 – 40 км по магнитному полю и градиентометрических (с базой измерений 1 – 2 км) для изучения аномалий магнитного слоя литосферы; с разработкой комплексных многопараметровых аэрогеофизических станций, включающих высокоточные магнитометры, в самолетном, вертолетном исполнении и выполнении аэрогеофизических съемок широкого комплекса; с микромагнитными и микрокаппометрическими съемками при геолого-технологическом картировании руд – **в области новых технологий.**

– с дальнейшим совершенствованием учета КПК вариаций геомагнитного поля и автоматизацией этой операции; комплексированием петромагнитных исследований с минералогическими и петрографическими определениями; разработкой методики высокоточного каротажа магнитной восприимчивости и высокоточных трехкомпонентных измерений магнитного поля в скважинах (малого диаметра); разработкой методики высокоточной градиентометрии; теоретическими и методическими разработками по автоматизированному подбору ВМ объемных моделей неоднородно намагниченных сред по данным наземных, скважинных и разновысотных аэромагнитных съемок в комплексе с априорной информацией на месторождениях магнитных руд – **в области методики съемки.**

## 5. Применение магниторазведки для решения геологических задач.

Под геологическими задачами будем понимать три основных:

- I. Районирование территорий.
- II. Изучение строения и вещественного состава земной коры.
- III. Поиск и разведка полезных ископаемых в земной коре.

Во всех случаях геологическое истолкование данных магниторазведки начинать надо с общего анализа аномалий, т.е. с проведения районирования территории исследований по размерам, форме, простиранию аномалий, их интенсивности, знаку. На втором этапе необходимо поставить и решить прямую и обратную задачи. Следующим этапом является преобразование (трансформация) наблюдаемых аномалий для выделения из них региональной и локальной составляющих при качественной интерпретации.

На завершающем этапе дается заключение о геологической природе аномалий для решения поставленных перед магниторазведкой задач.

В процессе длительной истории формирования земной коры отдельные территории ее имели весьма разнообразные, и отличные друг от друга, условия геологической и тектонической жизни. Одни участки (геосинклинальные области) сопровождалась многочисленными разломами, интенсивной складчатостью, внедрением различных по составу магматических пород, накоплением больших толщ осадочных пород и т.д. Другие участки земной коры (платформенные области), наоборот, имели более спокойную тектоническую жизнь и сравнительно большой период времени последующих геологических эпох, оставались почти недеформированными. Несмотря на это, и в этих областях наблюдается разнообразный литологический состав пород, тектонические нарушения и тому подобные различия в условиях формирования земной коры привели к тому, что разные участки ее по структурно-тектоническому строению и по вещественному составу имеют свои характерные особенности и, следовательно, различаются по физическим свойствам.

Например, области сложной тектоники горноскладчатых районов, отличающихся большим литологическим разнообразием горных пород, будут иметь и быстроменяющиеся геофизические поля, будут отличаться пестрой, мозаичного типа картиной. Области же, сложенные мощными осадочными

отложениями, как правило, характеризуются весьма плавными изменениями магнитных аномалий.

Первым и основным методом геофизических исследований при решении вопросов региональной геологии следует считать аэромагнитную съемку, как наиболее произвольный и дешевый метод геофизической разведки.

По результатам аэромагнитной съемки хорошо выделяются районы интенсивной горной складчатости в виде резких, меняющихся по знаку аномалий; четко прослеживаются основные тектонические элементы, выделяются области развития осадочных отложений большой мощности.

### **5.1. Геологическое картирование.**

Целью геологического картирования является расчленение и изображение на карте различных комплексов горных пород, слагающих верхние слои Земной коры с подразделением их по литологическому, петрографо-минералогическому признакам с указанием основных элементов их залегания – положения в плане, простирания, падения и т.д.

Имея разные условия образования и залегания, различный петрографо-минералогический состав, разные породы, тем самым, имеют весьма различные физические свойства. Магнитные свойства горных пород меняются в широких пределах, что и позволяет успешно применять магниторазведку для решения задач геологического картирования.

При этом по данным магнитной съемки можно решать следующие задачи:

1. Выделять, оконтуривать и дифференцировать по магнитным свойствам массивы ультраосновных пород среди кислых изверженных или осадочных отложений.
2. Выделять и оконтуривать массивы кислых интрузивных пород.
3. Выявлять и прослеживать дайки, крупные жилы, зоны разломов в различных геологических условиях.
4. Выявлять и оконтуривать ксенолиты ультраосновных пород среди изверженных кислых интрузивов.

### **5.2. Выделение геосинклиналей и платформ.**

Геосинклинали – зоны земной коры высокой подвижности, дифференциации и повышенной проницаемости, в которых накапливаются осадочные и вулканогенные толщи, превращаясь в складчатые горные массивы. Повышенная проницаемость зон выражается в разломах, способствующих

внедрению интрузий, вулканизму, миграции флюидов. Характерной чертой геосинклиналей является изменчивость фаций и толщин вкост их простирания и выдержанность вдоль простирания, присутствие флишевых, молласовых пород, эффузий, интенсивный магматизм, надвиги, метаморфизм. Все это способствует резкой дифференциации намагниченности горных пород, слагающих разрез, что вызывает интенсивные, узколокальные аномалии. Пестрая картина магнитного поля геосинклинальных областей хорошо видна на рис. 5.1.

Платформы отличаются от геосинклиналей меньшей подвижностью земной коры, меньшей расчлененностью на структуры, меньшей проницаемостью. Особенностью является субгоризонтальное залегание слоев, сравнительная выдержанность литологии осадков, слабый магматизм, пологая локальная складчатость, глубинные разломы.

Все это способствует тому, что в гравимагнитном поле наблюдаются крупные по плановым размерам, малоинтенсивные, протяженные аномалии (рис. 5.1) Обусловлено это сравнительно слабой дифференциацией намагниченности отложений, слагающих разрез платформенных. В платформенных условиях встречаются интенсивные аномалии, когда в разрезе присутствуют гранито-гнейсы, габбро-диабазы, слагающие часть кристаллического основания, обладающие высокой плотностью. Один из примеров отражения внутренней структуры фундамента приведен на рис. 5.1. Аномалия зафиксирована на участке, где рельеф поверхности фундамента и горизонтов осадочного чехла имеет моноклиналиное строение.



Рис. 5.1. Магнитные аномалии.

Крупные платформенные впадины на Русской плите отмечаются минимумами, края которых осложнены магнитными ступенями, соответствующими зонам разломов. Например, Днепровско-Донецкая впадина



ограничена глубинными разломами, по направлению которых ориентированы ее основные структуры, а также подчинено размещение залежей нефти, газа и полиметаллических руд. Однако, закономерные соотношения между рельефом фундамента платформ и аномалиями напряженности гравитационного поля, из-за сильного влияния на поле состава фундамента, встречаются редко. По-видимому, структура этих впадин гораздо более сложная, чем это представляется в настоящее время. Эти максимумы можно интерпретировать как глубокие впадины, в которых почти отсутствует гранитный слой, зато поднимается к поверхности базальтовый слой.

### 5.3. Изучение фундамента.

Изучение структурного плана фундамента предусматривает выделение блоков, трассирование разрывных нарушений и прогнозирование вещественного состава пород, слагающих фундамент.

Существенную роль при решении указанных задач играет сопоставление аномалий силы тяжести с магнитными аномалиями. Объясняется это тем, что кристаллические породы обладают высокими значениями плотности и намагничения, причем наиболее магнитны плотные основные и ультраосновные, а наименее – кислые. Следовательно, на основе анализа гравитационных и магнитных аномалий можно судить о литологии пород. Различные соотношения аномалий характеризуют строение фундамента. Основные соотношения:

Гравитационному максимуму отвечает магнитный максимум. Вероятной причиной возникновения аномальных полей могут быть:

- интрузия основных изверженных пород в толще гранита или гнейса;
- увеличение плотности пород (например, в гнейсовой толще) при одновременном увеличении содержания магнетита;
- выступ фундамента, представленный блоком из тяжелых магнитных пород (основных, ультраосновных).

Гравитационному максимуму отвечает магнитный минимум. Возможна одна из следующих причин:

- залегание в легких слабомагнитных породах плотных немагнитных пород;
- внедрение изверженных или метаморфических немагнитных пород в отложениях осадочной толщи;
- залегание в легких слабомагнитных породах плотных пород с обратным по полярности намагничиванием.

Гравитационному минимуму отвечает магнитный максимум. Соотношение может быть обусловлено залеганием пород повышенной намагниченности среди вмещающих пород повышенной плотности. В случае кристаллических пород первые могут быть представлены гранитом, вторые – гнейсом, а в случае осадочных пород – соответственно терригенными и карбонатными отложениями.

Гравитационному минимуму отвечает магнитный минимум. Аномалеобразующими факторами могут быть:

- впадина в кристаллическом фундаменте, заполненная осадочными отложениями;
- залегание магматической породы – пониженной намагниченности и плотности в породах с повышенными намагниченностью и плотностью. Такое сочетание пород наблюдается в пределах интрузий изверженных пород.

Имея разные условия образования и залегания, различный петрографо-минералогический состав, разные породы, тем самым, имеют весьма различные физические свойства.

#### **5.4. Применение магниторазведки для выявления и прослеживания зон разломов.**

Зоны разломов, возникающие вследствие тектонических деформаций верхней части земной коры, образуются в разных геологических условиях в виде зон интенсивного слияния горных пород или с образованием ряда жил или даек, заполненных породами другого состава, чем вмещающие их горные породы.

Для выделения зон разломов могут быть использованы различные методы разведочной геофизики потому, что в зоне разломов наблюдаются следующие явления:

- ✓ вмещающие горные породы в зоне разломов будут сильно раздроблены и перемяты, их первоначальная структура нарушена;
- ✓ в зонах разломов, в сравнении с вмещающими породами, всегда будет преобладать рыхлый и песчано-глинистый материал и наибольшая обводненность.
- ✓ если зоны разломов будут расположены среди магнитных, особенно ультраосновных пород, то вследствие нарушения первоначальной структуры и нарушения пространственной ориентации продуктов дробления за счет большого окисления и выветривания пород, магнитная восприимчивость пород зон разлома будет сильно понижена.

Термин «разлом» употребляется геологами при описании дизъюнктивных нарушений в горных породах с неустановленным характером перемещений блоков вдоль них, то есть разрывов в земной коре. Особый класс – глубинные разломы, отличающиеся длительностью или многофазностью развития, большей глубиной заложения (десятки км) и определенной связью с формациями горных пород.

Глубинные разломы – не обязательно дизъюнктивные нарушения земной коры, а сложные линейные тектонические структуры, объемные геологические объекты с наложенной складчатостью.

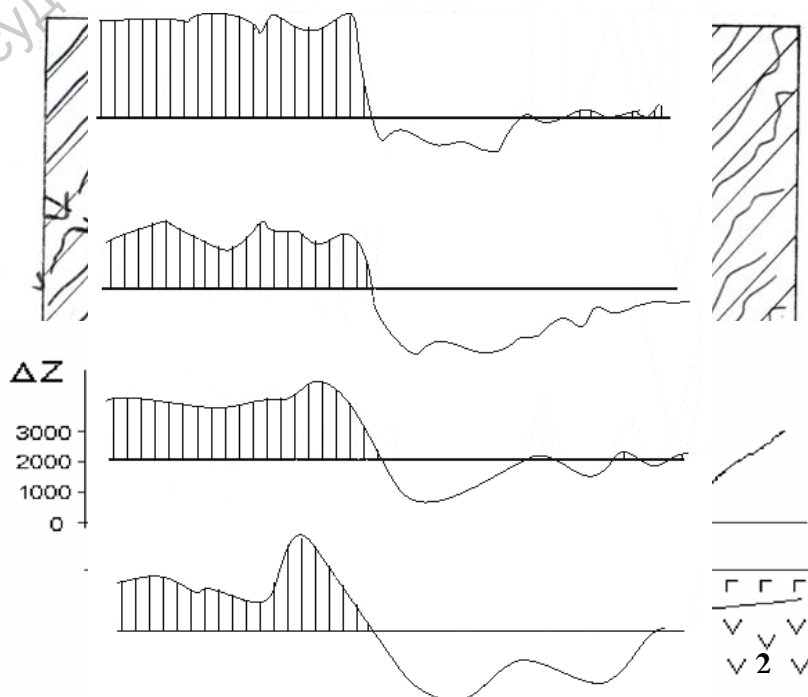
Основными признаками глубинных разломов являются магнитные аномалии типа ступеней с высоким горизонтальным градиентом всюду, где имеет место относительное вертикальное смещение блоков земной коры. При одинаковых денудационных срезах блоков, когда по разные стороны от разлома породы намагничены, разломы отражаются в магнитном поле в виде линейных положительных и отрицательных аномалий. Особенно четко они проявляются в поле высших производных аномалий  $\Delta T_n$ .

Рис. 5.2. Зона разломов, отмеченная отрицательным полем  $\Delta T$ .

Рис. 5.3. Зона разлома, отмечаемая полосой резко отрицательных значений магнитного поля.

### 5.5. Прослеживание даек.

Дайковые породы, внедряющиеся по разломам и трещинам в верхние части земной коры, по своему составу и физическим свойствам всегда резко отличаются



от вмещающих горных пород и поэтому являются благоприятными объектами для их пользования и прослеживания. Магнитная съемка является основным видом их обнаружения. Дайки пород основного состава обладающие повышенными магнитными свойствами среди осадочных, метаморфических и кислых извержений пород, выделяются и прослеживаются по повышенным значениям напряженного магнитного поля (рис.5.4).

Рис. 5.4. Магнитное поле над дайкой и краем массива серпентинитов 2 среди габбро 1.

Если же дайки представлены кислыми комплексами пород, то среди магнитных вмещающих пород, например, среди пород ультраосновного состава, они будут отличаться пониженными значениями магнитного поля.

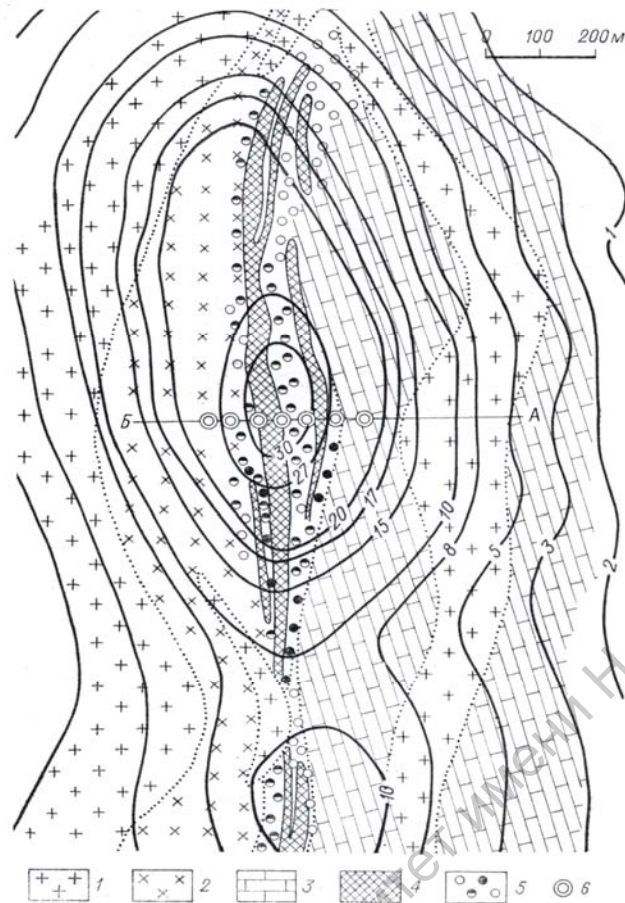
## **5.6. Поиски месторождений полезных ископаемых.**

### **5.6.1. Поиск и разведка железорудных месторождений.**

Железорудные месторождения по генетическому признаку можно подразделить на следующие основные типы:

1. осадочные месторождения, представленные бурими железняками и сидеритами;
2. метаморфические месторождения, представленные, главным образом, железистыми кварцитами;
3. контактово-метасоматические магнетитовые месторождения.

Все эти месторождения, по условиям образования и по геологической обстановке, весьма различные и обладают разными физическими свойствами (рис.5.5).



Изолинии даны в миллиэрстедах.  
 1 — граниты, сиениты; 2 — диориты, габбро; 3 — известняки; 4 — магнетитовая руда; 5 — рудные и безрудные скарны; 6 — скважины.

Рис. 5.5. Магнитные аномалии над магнетитовым телом, залегающим на большой глубине.

Например, месторождения бурых железняков обычно не имеют резко выраженных отличий по физическим свойствам с вмещающими породами. Поэтому применение магниторазведки здесь менее эффективно, чем поиски месторождений магнетитов, железистых кварцитов и гематитов. Магнетитовые рудные тела, как известно, обладают большой магнитностью и повышенными значениями плотности. Поэтому магниторазведка является основным методом поисков таких месторождений.

Главными отличительными характеристиками месторождений железистых кварцитов являются их относительно большие размеры, пластовая форма залегания, высокая магнитность и плотность по сравнению с вмещающими породами. Для поисков и предварительной разведки таких месторождений (например, Курской магнитной аномалии, Кривого Рога) целесообразно применять аэромагнитную съемку, а затем поставить наземную съемку для детализации выявленных аномалий.

### 5.6.2. Поиски месторождений титана.

При поисках месторождений титана, представленных титаномагнетитом, применяется обычная съемка. Это обусловлено высокой магнитной восприимчивостью ( $650-13500 \times 10^{-6}$  ед.СГС). Поэтому над такими месторождениями наблюдаются интенсивные магнитные аномалии (рис.5.6). Применение магниторазведки обуславливается также наличием значительной магнитной восприимчивости у ильменита, одного из главных минералов титана и тем, что ильменит всегда встречается совместно с магнетитом.

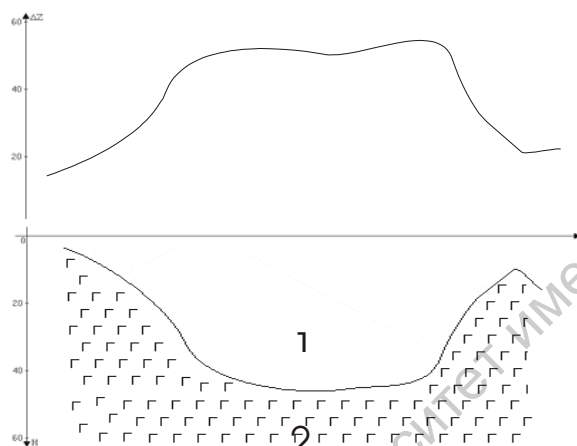


Рис. 5.6. Повышение магнитного поля  $\Delta Z$  над зоной обогащенной ильменитом в коре выветривания (1) габбрового массива (2)

### 5.6.3. Поиски хромитов.

Хромитовые месторождения всегда генетически связаны и территориально располагаются среди ультраосновных массивов горных пород и обычно приурочиваются к зонам разломов и смятия этих массивов. Учитывая эти особенности и высокую магнитную восприимчивость хромитов применяют следующую последовательность исследований. Производят оконтуривание и дифференциацию ультраосновного массива. Затем выделяют зоны разломов по беспокойному полю с пониженными значениями аномалий.

Чистый хромит является немагнитным, и, поэтому, эффективность зависит, в основном, от оруденения, что позволяет применять магнитную съемку. А вот плотность хромитов довольно высокая по сравнению с вмещающими породами. Учитывая небольшую глубину залегания месторождений хромитов и небольшие плановые размеры, наиболее эффективным методом будет гравиметрическая съемка.

#### 5.6.4. Поиски месторождений никеля.

Месторождения никеля образуются в процессе химического и физического выветривания ультраосновных пород, богатых никелем. Поэтому месторождения никеля всегда территориально связаны с ультраосновными породами и располагаются или в зонах наибольшего выветривания и разрушения этих массивов, или в приконтактных областях этих массивов, особенно с карбонатными породами. Для оконтуривания, установления контактов проводят детальную магнитную съемку. Для разведки применяют металлометрическую съемку.

#### 5.6.5. Поиски месторождений бокситов.

Месторождения образуются в результате процессов выветривания и выщелачивания глинозема из содержащих алюминий, главным образом, ультраосновных пород. Основными химическими компонентами бокситов являются глинозем (30-80%) и окись железа (до 30%). Плотные каменистые бокситы (бобовые) обладают высокими значениями магнитной восприимчивости и остаточной намагниченности (500-1000-10<sup>6</sup> бед.СГС). Вследствие этого они создают четкие локальные магнитные аномалии (рис. 5.7).



Рис. 5.7. План изодинам  $\Delta Z$  (в гаммах) над бокситовыми залежами платформенного типа в зоне контакта порфиров и известняков (по А.А.Логачеву). (точеной кривой показаны контуры бокситовых тел по пазведочным данным).

Другие геофизические параметры бокситов мало отличаются от вмещающих пород (за исключением случая, когда их вмещают известняки). Магнитная съемка позволяет оконтурить ультраосновные массивы и выделить участки спокойного магнитного поля, отвечающие известнякам, перспективным для месторождений бокситов (рис. 5.8).

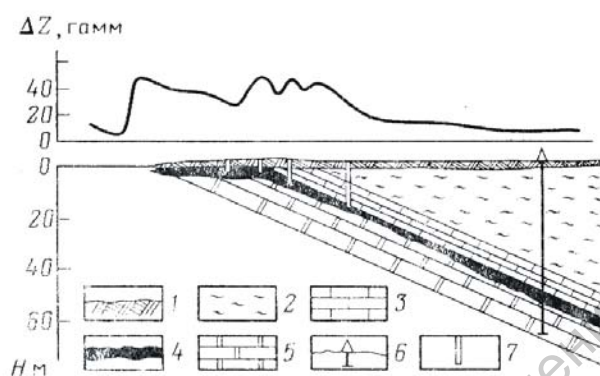


Рис. 5.8. Кривая  $\Delta Z$  над бокситовой залежью геосинклинального типа (по А.А.Логачеву)

1 – наносы; 2 – глины; 3 – известняки кровли; 4 – бокситы;  
5 – известняки подошвы; 6 – разведочные скважины; 7 – шурф.

#### 5.6.6. Применение магниторазведки при поисках месторождений нефти и газа.

Поиски месторождений углеводородов основаны на том, что нефть относится к диамагнетикам ( $\chi < 0$ ), в то время как вмещающие ее породы имеют положительную магнитную восприимчивость ( $\chi > 0$ ). В связи с этим нефтегазовая залежь будет уменьшать значение магнитной аномалии.

Вместе с тем следует отметить одну важную особенность, нарушающую теоретические основы применения магниторазведки при поисках залежей углеводородов: над некоторыми известными месторождениями наблюдаются не снижение, а увеличение значений магнитных аномалий. Объяснение этому факту нашли Белоликов Н.И., Карзе Е.З., открывшие явление парагенезиса горных пород – вторичного преобразования минералов под действием мигрирующих углеводородов. Взаимодействие их с минералами горных пород приводит к образованию сидерита и пирита, имеющих  $\chi > 0$ . Установлено, что над древними залежами располагаются магнитные минералы, присутствие которых экранирует действие нефтегазовой залежи, и, тем самым, вместо локального минимума в



магнитном поле наблюдается относительный максимум магнитной аномалии. Поэтому, однозначного ответа на возможность поиска нефти и газа магниторазведкой нет.

Здесь уместно сказать, что скважинная магниторазведка (магнитный каротаж) используется недостаточно для выделения продуктивных пластов, хотя основа очевидна.

### **Заключение.**

Необходимость применения магниторазведки, начиная от тектонического районирования и выделения геоструктурных элементов земной коры до поисков полезных ископаемых, очевидна.

К настоящему времени разработаны различные приемы геологической интерпретации аномалий магнитных полей – решение прямых и обратных задач трансформаций, комплексирования геолого-геофизических данных.

Дальнейшие перспективы повышения эффективности интерпретации связаны с разработкой новых способов обработки, основанных на применении статистического анализа, физико-геологических предпосылок метода магниторазведки и автоматизации процессов обработки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бродовой В.В. Комплексование геофизических методов. Недра , 1991 .
2. Гринкевич Г.И., Магниторазведка, М., Недра ,1979.
3. Гладкий К.В., Гравиразведка и магниторазведка, М., Недра , 1967.
4. Герхард Дор, Введение в прикладную геофизику, М.,Недра, 1984.
5. Знаменский В.В. Общий курс полевой геофизики, М., Недра , 1989.
6. Комплексование геофизических методов при решении геологических задач. Под редакцией Никитского В.Е. и Бродового В.В., М., Недра ,1987.
7. Логачев А.А. ,Захаров В.П., Магниторазведка, М., Недра , 2000.
8. Любимов Г.А. ,Любимов А.А. ,Методика гравимагнитных
9. исследований с использованием ЭВМ, М., Недра, 1988.
10. Миков Д.С., Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий, Томск, 1975.
11. Магниторазведка. Справочник геофизика. Под ред. Никитского В.Е. и Глебовского Ю.С., М., Недра, 1980.
12. Добрынин В.М., Петрофизика. Изд-во Нефть и газ, РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2004 г.
13. Геофизические методы поисков и разведки. Материалы международной научно-технической конференции Горно-геологическое образование в Сибири – 100 лет на службе производства. Томск. Издательство Томского политехнического университета. 2001 г.
14. Страхов В.Н. Методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.Пермь, изд.Пермского университета,2004.

Учебное издание

**Конценебин Юрий Петрович  
Волкова Елена Николаевна.**

**Интерпретация магнитных аномалий.  
(разъяснения и комментарии к лекционному курсу «Магниторазведка»)**

Учебное пособие для студентов вузов,  
обучающихся по специальности 011200 – геофизика.

Допечатная подготовка – Е.В. Моисеева  
Обложка – Е.В. Моисеева

Издательство «Научная книга»

Подписано в печать 5.09.2006. Печать трафаретная. Бумага офсетная 80 г/м<sup>2</sup>.  
Тираж 100 экз. Объем 8,6 усл. п. л. Заказ № от 3.09.2006

Отпечатанов в типографии ООО «МЕТРО-ПРИНТ»  
410056, г. Саратов, ул. Рабочая, 105  
Тел.: (845-2) 22-66-77