ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ЧАСТЬ 1.
СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Г.Н. Белосточный, О.В. Сорокина

Учебное пособие
для студентов механико-математического факультета

Саратов, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования и программой преподавания курса «Теоретическая механика» для студентов механико-математического факультета СГУ. Курс «Теоретическая механика» является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной.

Теоретическая механика изучает общие закономерности механических движений различных математических моделей материальных тел (точка, дискретная система точек, абсолютно твердые тела, твердые деформированные тела, жидкости и т.п.), механических взаимодействий между телами и самих тел с различными по природе физическими полями.

В данном пособии рассматриваются вопросы статики абсолютно твердых тел.

Цель настоящего пособия:

- развить у студентов навыки в использовании определений и аксиом статики при доказательствах утверждений и теорем статики абсолютно твердых тел;
- на основании теорем статики научиться преобразовывать различные системы сил к совокупности «силы» и «пары сил» с последующим анализом возможных вариантов таких преобразований;
- на основании уравнений статики определять реакции связей и геометрические параметры конструкций из абсолютно твердых тел, находящихся в состоянии равновесия под действием заданных сил и моментов;
- уметь анализировать полученные количественные результаты на основе решений уравнений равновесия.

Пособие стоит из двух частей. В первой части изложены теоретические основы статики твердого тела, приведены контрольные вопросы, позволяющие оценить качество освоения теоретического материала. Теоретический материал иллюстрируется рисунками. Вторая часть содержит примеры решения задач статики. Задачи для самостоятельного решения позволят обучающимся научиться применять полученные знания на практике, тем самым будут способствовать лучшему пониманию и усвоению материала.

Пособие может быть полезно при изучении данной темы студентами других факультетов, изучающих теоретическую механику.

Часть 1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ, АКСИОМЫ СТАТИКИ

Статика, по определению Лагранжа, есть наука о равновесии системы сил. Под «силой» понимают любую причину, влияющую на механическое состояние тела. Основные положения статики формулировались и уточнялись на протяжении столетий и получили практически законченный вид в трудах Архимеда и Вариньона. Исторически статика была разработана независимо от законов динамики и, практически, в завершенном виде изложена в труде Вариньона «Новая механика». Основная количественная мера механических взаимодействий тел при непосредственном контакте и на расстоянии является *сила.* Понятие силы, как вектора, впервые введено в 1580 году Саймоном Стевином. По существу, термин «вектор» возник из потребности описать понятие «сила». Стевином установлен закон сложения сил, известный как правило параллелограмма для векторов. Можно сказать, что статика является первым приложением векторного языка в механике.

Материальное тело, расстояние между любыми точками которого остаются неизменными в процессе их механических взаимодействий с окружающими телами, называется *абсолютно твердым телом*.

Геометрическая статика (элементарная) изучает равновесие абсолютно твердых тел.

Под равновесием понимается состояние относительного покоя в выбранной системе отсчета.

Основу статики (аксиоматической теории) составляют предположения, определения и аксиомы.

Если изучается механическое поведение тела A, то все остальные тела во Вселенной являются окружением тела A и обозначают $\tilde{A}$.

Центральным положением в механике является следующее утверждение.

▲ *Влияние окружения* $\tilde{A}$ *на тело* A *можно моделировать заданием вектора силы и пары сил (или вектора момента пары сил).*

В механике сила и момент пары сил являются первичными понятиями.

Сила – это объект с заданными (аксиоматически) свойствами:

1◦. Сила $\vec{F}(A,B)$ является свободным полярным вектором и моделирует воздействие тела B на тело A.

2◦. Сила $\vec{F}(A,B)$ аддитивна по телам C и D, из которых состоит тело B ($B = C \cup D$; $C \cap D = \varnothing$):

$$\vec{F}(A,B) = \vec{F}(A,C \cup D) = \vec{F}(A,C) + \vec{F}(A,D).$$

3∘. Сила $\vec{F}(A,B)$ аддитивна по телам C и D, из которых состоит тело A ($A = C \cup D$; $C \cap D = \varnothing$):

$$\vec{F}(A,B) = \vec{F}(C \cup D, B) = \vec{F}(C,B) + \vec{F}(D,B).$$

Понятие силы хорошо знакомо на интуитивном уровне и определяется первой аксиомой Ньютона.

▲ *Тело, изолированное от окружающего мира, находится в покое или равномерном прямолинейном движении пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.*

Эта аксиома определяет инерциальную систему отсчета и силу, как любую причину, нарушающую состояние относительного покоя или равномерного прямолинейного движения тел.

Момент $\vec{M}(A,B)$–это реакция тела B на повороты тела A.

Моменты так же наделяются, вводимыми аксиоматически, свойствами:

1∘. Момент $\vec{M}(A,B)$ является свободным аксиальным вектором и моделирует моментное воздействие тела B на тело A.

2∘. Момент $\vec{M}(A,B)$ аддитивен по телам, из которых состоит тело B ($B = C \cup D$; $C \cap D = \varnothing$):

$$\vec{M}(A,B) = \vec{M}(A, C \cup D) = \vec{M}(A,C) + \vec{M}(A,D).$$

3∘. Момент $\vec{M}(A,B)$ аддитивен по телам, из которых состоит тело A ($A = C \cup D$; $C \cap D = \varnothing$):

$$\vec{M}(A,B) = \vec{M}(C \cup D, B) = \vec{M}(C,B) + \vec{M}(D,B).$$

Сила $\vec{F}(A,B)$ есть реакция тела B на изменение положения тела A; момент $\vec{M}(A,B)$–это реакция тела B на повороты тела A вокруг различных осей, проходящих через точку приведения P.

Определения статики

Определение. Множество сил, действующих на абсолютно твердое тело A, называется *системой сил*.

Обозначается: $\vec{F}(A,B_i)$, $\{\vec{F}_i\}$, $(i = 1,2,\ldots,n)$, или $\{\vec{F}\}$.

Определение. Две системы сил $\vec{F}(A,B_i)$, $\vec{F}(A,C_i)$, $(i = 1,2,\ldots,n)$ называются *эквивалентными*, если каждая из них вызывает одно и то же механическое состояние тела A.

Обозначается: $\vec{F}(A,B_i) \sim \vec{F}(A,C_i)$.

Определение. Если система сил $\{\vec{F}\}$, при воздействии на абсолютно твердое тело, не вносит изменений в его механическое состояние, то такая система сил называется *уравновешенной системой сил* или системой сил *эквивалентной нулю*, а тело, под действием такой системы сил находится в *равновесии*.

Обозначается: $\{\vec{F}\} \sim 0$.

Говорят, что тело, под действием системы сил эквивалентной нулю, находится в *равновесии* (в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Какое из этих состояний имеет место для статики несущественно).

Определение. Если система сил $\vec{F}(A, B_i)$ эквивалентна одной силе $\vec{R}$, то есть $\vec{F}(A, B_i) \sim \vec{R}$, то сила $\vec{R}$ называется *равнодействующей* данной системы, а сама система сил называется *простейшей*.

Определение. Если направления всех сил системы $\{\vec{F}\}$ изменить на противоположные, сохраняя при этом точки приложения сил, то получим систему сил $\{\vec{F}'\}$, *противоположную* исходной.

Обозначается: $\{\vec{F}'\} = \{-\vec{F}\}$.

Определение. Если тело под действием двух систем сил $\{\vec{F}\}$ и $\{\vec{P}\}$ находится в равновесии, то есть $\{\vec{F}, \vec{P}\} \sim 0$, то говорят, что система $\{\vec{F}\}$ *уравновешивается* системой $\{\vec{P}\}$ и обратно.

Тогда можно сформулировать еще одно определение эквивалентности двух систем сил.

Определение. Если систем сил $\{\vec{F}\}$ уравновешивается системой противоположной системе $\{\vec{P}\}$, то есть $\{\vec{F}, -\vec{P}\} \sim 0$, то говорят, что эти системы *эквивалентны.*

Из определений следует:

1. Если каждая из двух систем сил $\{\vec{F}\}$ и $\{\vec{P}\}$ эквивалентна третьей, то системы $\{\vec{F}\}$ и $\{\vec{P}\}$ эквивалентны, то есть $\{\vec{F}\} \sim \{\vec{P}\}$.
2. Если система сил $\{\vec{F}\}$ эквивалентна одной силе – равнодействующей, то есть $\{\vec{F}\} \sim \{\vec{R}\}$, то система $\{\vec{F}, -\vec{R}\}$ эквивалентна нулю.

Если линии действия сил лежат в одной плоскости, то система сил называется *плоской*, в противном случае – *пространственной*.

Определение. Совокупность материальных точек, механическое состояние любой из которых зависит от механического состояния остальных, называется *механической системой*.

Определение. Если расстояние между любыми двумя точками механической системы не изменяется в процессе механического движения, то механическая система называется *неизменяемой*.

Аксиомы статики

АКСИОМА 1. Система из двух равных по модулю, противоположных по направлению и приложенных в одной точке сил, эквивалентна нулю.

АКСИОМА 2. Система из двух сил, равных по модулю, противоположных по направлению, приложенных в двух каких-либо точках тела и принадлежащих прямой, проходящей через эти точки, эквивалентна нулю только в случае абсолютно твердого тела.

АКСИОМА 3. Всякую систему сил можно заменить системой, ей эквивалентной.

АКСИОМА 4. Две системы сил, различающиеся на систему, эквивалентную нулю, эквивалентны между собой.

Таким образом, всегда можно, при необходимости, вводить в рассмотрение системы сил, эквивалентные нулю.

АКСИОМА 5 (параллелограмм сил). Система двух сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$, приложенных в одной точке A и направленных под углом друг к другу, эквивалентна одной силе $\vec{R}$, приложенной в той же точке A и равной векторной сумме данных сил:

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\} \sim \vec{R}, \quad \text{где} \quad \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \text{ (рис. 1.1).}$$

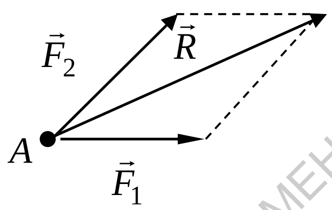

Рис. 1.1

АКСИОМА 6 (принцип затвердевания). Если произвольная, то есть изменяемая, механическая система находится в равновесии под действием некоторой системы сил, то ее равновесное состояние не нарушится, если систему считать неизменяемой.

Из аксиом статики следует, что сила, действующая на абсолютно твердое тело, является свободным вектором на прямой, которой она принадлежит, то есть вектор силы можно переносить по линии действия силы в любую точку этой прямой.

Аксиома связей

Твердое тело называется *свободным*, если его перемещения в пространстве ничем не ограничены, или, что тоже, может занимать произвольное положение в пространстве.

Если тело не может занимать произвольного положения в пространстве, а его точки иметь (в пределах разумного) произвольных скоростей, то тело называется *несвободным*, а причины, ограничивающие свободу, *связями*.

Связи – это материальные тела. Геометрические образы связей – поверхности, плоскости, кривые, точки и т.п.

АКСИОМА 7. Связи, наложенные на тело можно мысленно отбросить, заменив их, так называемыми, *реакциями связей* – векторами, имеющими размерность силы или пары сил и рассматривать тело как свободное, находящееся под действием сил и реакций связей.

При этом, очевидно, аксиома связей ничего нового в механику не вносит.

Приведенные аксиомы позволяют проводить необходимые операции над системами сил с целью уменьшения количества сил в системе, или наоборот. Эту процедуру называют *преобразованием*, или *приведением, системы сил*.

В статике решаются две задачи:

1. Замена исходной системы сил, с помощью аксиом статики, системой с меньшим числом сил (или, при необходимости, наоборот), но обязательно эквивалентной исходной системе.

2. Формулировка необходимых и достаточных условий равновесия систем сил, действующих на абсолютно твердые тела или неизменяемые механические системы.

1.2. ПРОСТЕЙШИЕ СИСТЕМЫ СИЛ

К *простейшим* системам сил относятся:

1. Система сил, приложенных к одной точке.

2. Система с*ходящихся сил,* то есть сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

3. Система из двух параллельных, одинаково направленных и не принадлежащих одной прямой, сил.

4. Система из двух параллельных, противоположно направленных (антипараллельных), не равных по модулю и не принадлежащих одной прямой, сил.

5. Система многих параллельных, одинаково направленных, сил

Все простейшие системы сил, на основании аксиом статики, преобразуются к одной силе – равнодействующей.

Система сходящихся сил

Первые из двух простейших систем сил на основании аксиомы 5 и того факта, что в случае абсолютно твердого тела сила есть свободный на своей линии действия вектор, легко преобразуются к одной силе – равнодействующей

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k ,$$

которая, в случае системы сил, приложенных к одной точке, приложена в той же точке; в случае сходящейся системы сил, приложена в точке пересечения их линии действия.

Модуль и направление в пространстве равнодействующей стандартно определяются после введения в рассмотрение подходящей декартовой системы координат.

Для таких систем можно сформулировать:

▲ *Абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием сходящейся системы сил, когда векторная сумма всех сил системы, предварительно перенесенных в точку пересечения их линии действия, равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k = 0.$$

Система из двух параллельных, одинаково направленных и не принадлежащих одной прямой, сил

Пусть дана система двух сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$: $\vec{F}_1 \uparrow\uparrow \vec{F}_2$, $F_2 \geq F_1$ (рис. 1.2).

Рассмотрим вопрос о существовании равнодействующей данной системы сил.

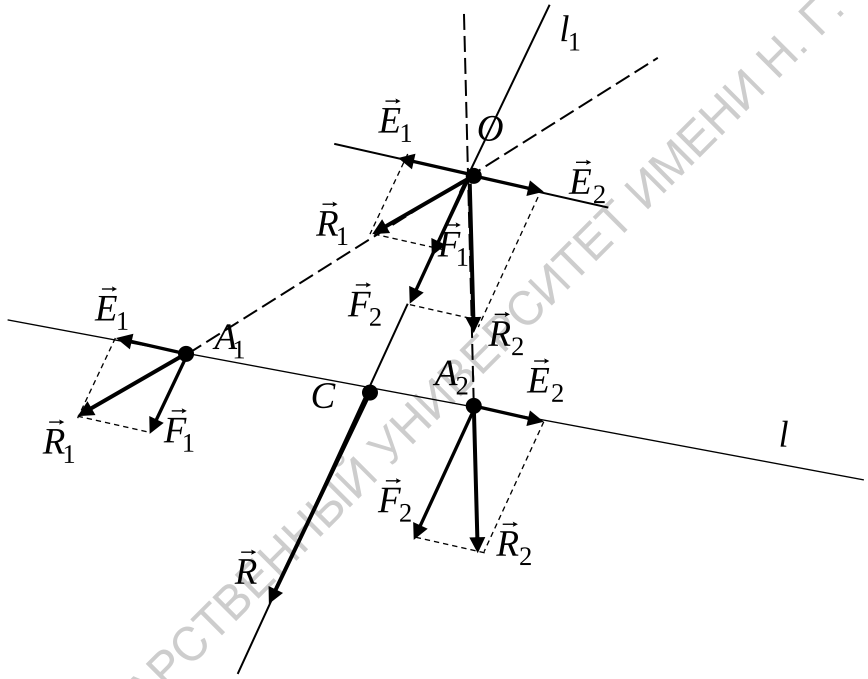

Рис. 1.2

Проведем через точки приложения сил A_1 и A_2 прямую l и введем в рассмотрение систему из двух сил, эквивалентную нулю: $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2\} \sim 0$; $(E_1 = E_2,\quad \vec{E}_1 \uparrow\downarrow \vec{E}_2,\quad \vec{E}_1, \vec{E}_2 \in l)$. Тогда исходная система из двух сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$ эквивалентна системе из четырех сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{E}_1, \vec{E}_2\}$. Эта система, на основании аксиомы 4, эквивалентна системе из двух сил $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$, приложенных в точках A_1 и A_2, соответственно, и направленных под углом друг к другу.

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\} \sim \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{E}_1, \vec{E}_2\} \sim \{\vec{R}_1, \vec{R}_2\}, \text{ где } \vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2; \quad \vec{R}_2 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Обозначим через O точку пересечения линий действия сил $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ и перенесем их в точку O. Таким образом, исходная система двух параллельных, одинаково направленных сил, приложенных в точках A_1 и A_2

эквивалентна системе двух сил $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$, приложенных в одной точке O и направленных под углом. Разложим эти силы на исходные составляющие в точке O. Две из них, очевидно, эквивалентны нулю: $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2\} \sim 0$.

Обозначим точку пересечения прямых l и l_1 через C. Из подобия треугольников и равенств сторон следует

$$\frac{F_2}{A_1C} = \frac{F_1}{A_2C} = \frac{F_1 + F_2}{A_1A_2}. \tag{1.1}$$

Таким образом, доказано следующее.

▲ *Система двух параллельных одинаково направленных сил эквивалентна одной силе* $\vec{R} \uparrow\uparrow \vec{F}_i$ $(i = 1,2)$, *приложенной в точке* C *внутри отрезка* A_1A_2 *расположенной ближе к большей по модулю силе. Положение точки приложения равнодействующей определяется* (1.1). *Модуль силы* $\vec{R}$ *равен сумме модулей исходных сил:* $R = F_1 + F_2$.

Обратная задача о разложении силы на две параллельные одинаково с ней направленные составляющие имеет бесконечное множество решений.

Решение будет определенным в случаях:

1) задана линия действия и модуль одной из составляющих сил;
2) заданы линии действия обеих составляющих сил.

Замечание. В (1.1) узнаем знаменитый принцип рычага Архимеда.

Система из двух антипараллельных, не равных по модулю и не принадлежащих одной прямой, сил

Рассмотрим систему двух антипараллельных, не равных по модулю сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$: $\vec{F}_1 \uparrow\downarrow \vec{F}_2$, $F_2 > F_1$ (рис. 1.3).

Для получения их равнодействующей, рассуждая аналогично предыдущей задаче, получим равенства

$$\frac{F_2}{A_1C} = \frac{F_1}{A_2C} = \frac{R}{A_1A_2}, \qquad \text{где} \quad R = F_2 - F_1. \tag{1.2}$$

Видно, что точка C приложения равнодействующей $\vec{R}$ находится вне отрезка A_1A_2 со стороны большей по модулю силы. Равнодействующая $\vec{R}$ направлена в сторону большей силы $\vec{R} \uparrow\uparrow \vec{F}_2$ и модуль ее равен разности модулей исходных сил $R = F_2 - F_1$.

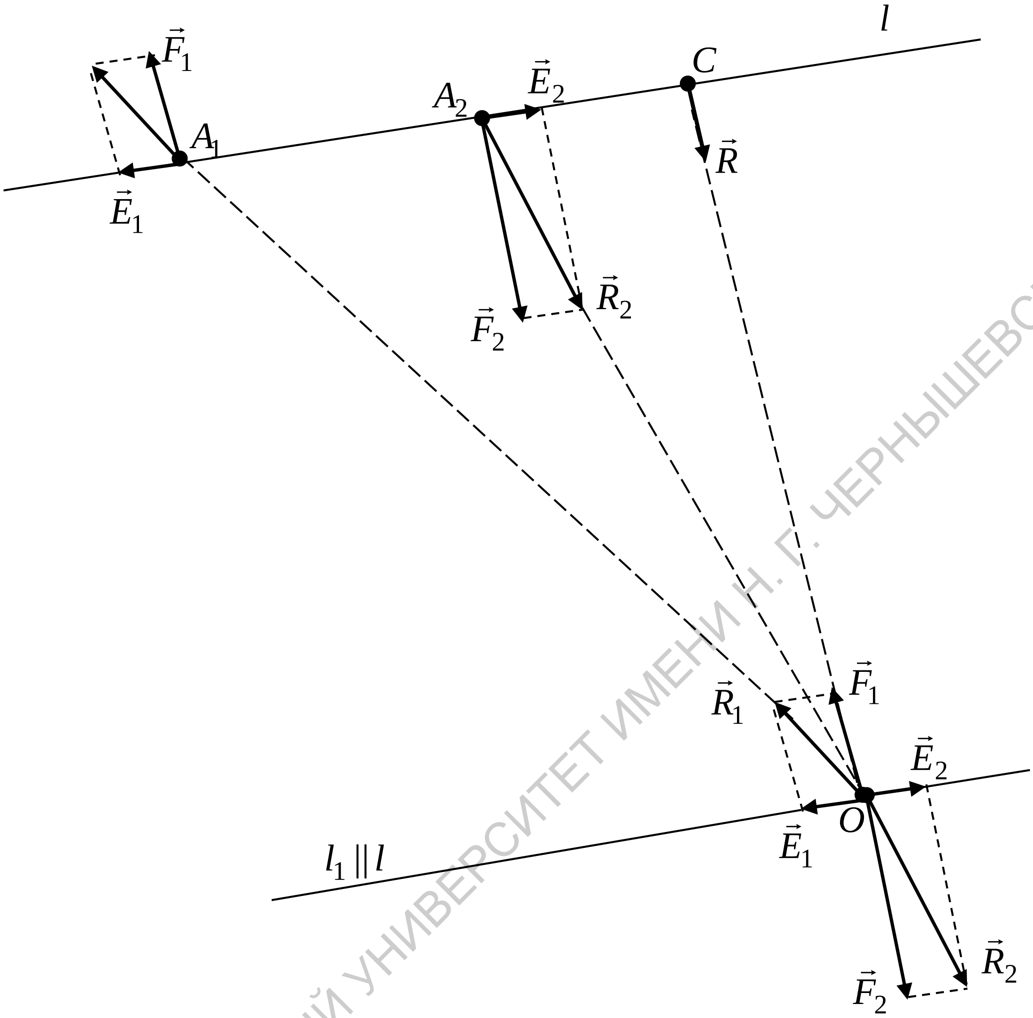

Рис. 1.3

Таким образом, доказано следующее.

▲ *Система двух антипараллельных, не равных по модулю и не принадлежащих одной прямой, сил эквивалентна одной силе* $\vec{R} \uparrow\uparrow \vec{F}_i \quad (i = 1,2)$, *приложенной в точке* C *вне отрезка* A_1A_2 *со стороны большей по модулю силы. Равнодействующая* $\vec{R}$ *направлена в сторону большей силы* $\vec{R} \uparrow\uparrow \vec{F}_2$ *и модуль ее равен разности модулей исходных сил* $R = F_2 - F_1$.

Точка приложения равнодействующей определяется из равенства (1.2).

Отметим, что эту задачу можно решить путем разложения большей из этих сил $\vec{F}_2$ на две составляющие одинаково с ней направленные.

Обратная задача имеет единственное решение в отмеченных выше двух случаях.

Рассмотрим случай, когда $F_2 \to F_1$, или наоборот. Из соотношений (1.2) получим:

$$A_2C = \frac{F_1}{F_2 - F_1} A_1A_2. \qquad (1.3)$$

Из равенства (1.3) следует, что при $F_2 \to F_1$ точка C «уходит» в бесконечность. Таким образом, точка приложения равнодействующей $\vec{R}$ неопределенна. Возникает самостоятельный элемент в статике, который называют *парой сил*.

<u>Определение.</u> Система двух антипараллельных, равных по модулю и не принадлежащих одной прямой сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$ называется *парой сил*:

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}: \quad F_1 = F_2; \quad \vec{F}_1 \uparrow\downarrow \vec{F}_2. \qquad (1.4)$$

Далее будет доказано, что пара сил вообще не имеет равнодействующей.

Система многих параллельных, одинаково направленных, сил

Рассмотрим пространственную систему параллельных одинаково направленных сил:

$$\vec{F}_i \uparrow\uparrow \vec{F}_j \ (i, j = 1,2,3,\ldots,n).$$

Рассмотрим вопрос о точке приложения равнодействующей такой системы сил.

Пусть $\vec{F}_i$ и $\vec{F}_{i+1}$ – две любые силы системы. Выберем в пространстве точку O и введем в рассмотрение векторы положений $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_{i+1}$ точек приложения A_i и A_{i+1} указанных сил (рис. 1.4).

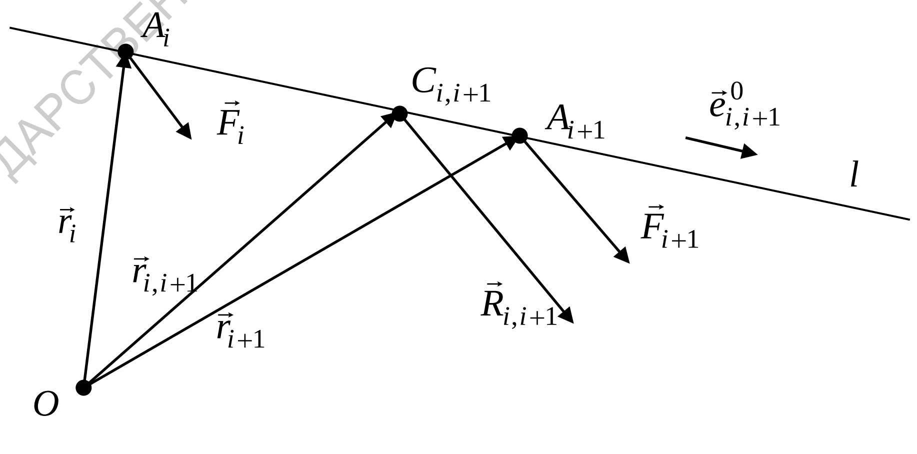

Рис. 1.4

Проведем через две параллельные силы плоскость π, а через точки A_i и A_{i+1} проведем прямую l. Эта система сил, как было показано ранее, имеет равнодействующую $\vec{R}_{i,i+1}$, модуль которой равен сумме модулей исходных сил: $R_{i,i+1} = F_i + F_{i+1}$. Определим вектор положения $\vec{r}_{i,i+1}$ точки $C_{i,i+1}$ приложения силы $\vec{R}_{i,i+1}$. Для этого запишем равенство (1.1) в виде

$$\frac{A_i C_{i,i+1}}{F_{i+1}} = \frac{C_{i,i+1} A_{i+1}}{F_i}. \tag{1.5}$$

Обозначим через $\vec{e}^{\,0}_{i,i+1}$ направляющий вектор прямой l. Умножим обе части равенства (1.5) на вектор $\vec{e}^{\,0}_{i,i+1}$. Получим

$$\frac{\overrightarrow{A_i C_{i,i+1}}}{F_{i+1}} = \frac{\overrightarrow{C_{i,i+1} A_{i+1}}}{F_i}. \tag{1.6}$$

Очевидны равенства (см. рис. 1.4)

$$\vec{r}_i + \overrightarrow{A_i C_{i,i+1}} = \vec{r}_{i,i+1}; \qquad \vec{r}_{i,i+1} + \overrightarrow{C_{i,i+1} A_{i+1}} = \vec{r}_{i+1}. \tag{1.7}$$

Из равенства (1.6) на основании (1.7) получим векторное уравнение для $\vec{r}_{i,i+1}$. Решение этого уравнения будет иметь вид

$$\vec{r}_{i,i+1} = \frac{F_i \vec{r}_i + F_{i+1} \vec{r}_{i+1}}{F_i + F_{i+1}}. \tag{1.8}$$

По этой же схеме определим равнодействующую системы двух сил: $\left\{\vec{R}_{i,i+1}, \vec{F}_{i+2}\right\}$.

Для радиус-вектора точки приложения их равнодействующей получим

$$\vec{r}_{i,i+1,i+2} = \frac{F_i \vec{r}_i + F_{i+1} \vec{r}_{i+1} + F_{i+2} \vec{r}_{i+2}}{F_i + F_{i+1} + F_{i+2}}. \tag{1.9}$$

Перебирая все силы системы, на последнем шаге получим

$$\vec{r}_{i,i+1,i+2,i+3,\ldots} \equiv \vec{r}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i}. \tag{1.10}$$

Вектор $\vec{r}_C$ определяет положение точки C приложения равнодействующей системы параллельных сил.

Точка C называется *центром* параллельных, одинаково направленных сил.

Вектор $\vec{r}_C$ не зависит от направления сил системы. Справедливость равенства (1.10) легко доказывается методом математической индукции.

Умножая (1.10) скалярно на орты декартовой системы координат с началом в точке O, определим координаты точки $C(x_C, y_C, z_C)$:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \qquad (1.11)$$

1.3. ЦЕНТР МАСС И ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ НЕИЗМЕНЯЕМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Понятие «центр масс» является чрезвычайно важным и находит широкое применение в механике. Оно не вытекает ни из каких-либо физических законов и вводится определением.

Определение. Если $\vec{r}_i$ радиус-вектор материальной точки с массой m_i, то *центр масс* C системы материальных точек относительно некоторой точки пространства определяется соотношением:

$$\sum_i m_i \vec{r}_C = \sum_i m_i \vec{r}_i . \qquad (1.12)$$

Понятие «центр тяжести» является весьма узким и относится к единственному случаю, когда интенсивность поля сил тяжести можно считать, с достаточной степенью точности, векторной постоянной:

$$\vec{g} = \overrightarrow{const} . \qquad (1.13)$$

Это возможно, если объем, занятый механической системой, находится вблизи поверхности Земли, а наибольший из геометрических размеров этого объема много меньше радиуса Земли. Тогда сила тяжести для i-ой точки системы будет иметь вид

$$\vec{F}_i = m_i \vec{g} . \qquad (1.14)$$

На основании (1.13) система $\{\vec{F}_i\}$ является системой параллельных, одинаково направленных сил. Формула (1.10) в этом случае примет вид:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \qquad (1.15)$$

Равенство (1.15) определяет положение центра тяжести механической системы и справедливо только при сделанных выше предположениях. Отметим, что центр масс (как и центр тяжести) является геометрической точкой и в общем случае эти точки не совпадают.

1.4. МОМЕНТЫ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ОСИ

Момент силы относительно точки

Рассмотрим абсолютно твердое тело с одной неподвижной точкой O. Приложим в произвольной точке A тела силу $\vec{F}$. Очевидно, тело совершит поворот около некоторой оси, проведенной через неподвижную точку O (рис. 1.5).

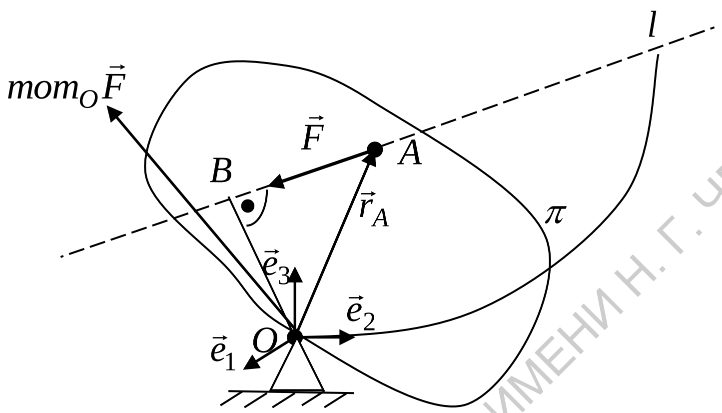

Рис. 1.5

Вращательный эффект зависит

1) от модуля силы;

2) от направления силы (относительно точки O);

3) от величины кратчайшего расстояния OB от точки O до линии l действия силы $\vec{F}$;

4) от положения плоскости π, проведенной через линию действия силы $\vec{F}$ и вектор $\vec{r}_A$ – вектор положения точки A относительно точки O.

Все эти элементы можно учесть одним «вектором», который называют моментом силы $\vec{F}$, приложенной в точке A, относительно точки O.

<u>Определение.</u> *Моментом силы* $\vec{F}$, приложенной в точке A, относительно точки O называется векторное произведение вектора положения точки A относительно точки O и силы $\vec{F}$:

$$mom_O\vec{F} = \vec{r}_A \times \vec{F}. \tag{1.16}$$

Из определения следует, что момент силы приложен в точке O, перпендикулярен плоскости π, направлен в сторону, откуда кратчайший поворот вектора $\vec{r}_A$ к вектору $\vec{F}$ наблюдается против хода часовой стрелки. Модуль вектора момента определяется формулой

$$\left|mom_O\vec{F}\right| = r_A F \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}). \tag{1.17}$$

Следует отметить, что величина $r_A \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}})$ есть кратчайшее расстояние от точки O до линии l действия силы $\vec{F}$. Эта величина называется *плечом силы*.

▲ *Момент силы относительно точки O равен нулю, если линия действия силы проходит через эту точку.*

Если в точке O поместить начало декартовой системы координат с базисными векторами $\vec{e}_j$ $(j = 1,2,3)$, обозначить через x_j, F_j $(j = 1,2,3)$ координаты векторов $\vec{r}_A$ и $\vec{F}$, то векторное произведение (1.16) перепишется в виде

$$\vec{r}_A \times \vec{F} = x_i \vec{e}_i \times F_j \vec{e}_j = x_i F_j \vec{e}_i \times \vec{e}_j = x_i F_j \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \qquad (i, j, k = 1,2,3), \quad (1.18)$$

где ϵ_{ijk} – символы Леви-Чевиты, определяемые следующим образом:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если хотя бы два индекса одинаковы,} \\ +1, & \text{если число перестановок (инверсий) индексов четное,} \\ -1, & \text{если число инверсий индексов нечетное.} \end{cases}$$

Например: $\epsilon_{121} = 0$; $\epsilon_{123} = +1$; $\epsilon_{132} = -1$; $\epsilon_{321} = -1$.

Формула (1.18) определяет координаты вектора момента силы в указанной декартовой системе координат, как коэффициенты при $\vec{e}_k$ $(k = 1,2,3)$.

$$\vec{r}_A \times \vec{F} = (x_2 F_3 \epsilon_{231} + x_3 F_2 \epsilon_{321}) \cdot \vec{e}_1 + (x_1 F_3 \epsilon_{132} + x_3 F_1 \epsilon_{312}) \cdot \vec{e}_2 +$$
$$+ (x_1 F_2 \epsilon_{123} + x_2 F_1 \epsilon_{213}) \cdot \vec{e}_3 \quad .$$

Используя определение символов Леви-Чевиты, запишем выражения для координат момента силы:

$$\left(\vec{r}_A \times \vec{F}\right)_1 = x_2 F_3 - x_3 F_2; \quad \left(\vec{r}_A \times \vec{F}\right)_2 = x_3 F_1 - x_1 F_3; \quad \left(\vec{r}_A \times \vec{F}\right)_3 = x_1 F_2 - x_2 F_1 .$$

Следует помнить:

1) векторное произведение имеет смысл только в ориентированной системе отсчета;

2) ориентация пространства производится до выполнения каких бы то ни было операций над векторами;

3) никакие операции над векторами не меняют выбранной ориентации пространства.

Векторное произведение требует более детального изложения.

Для описания вращательных (спинорных) движений вводится понятие «*спин-вектор*». Спин-вектор изображается в виде элемента окружности со стрелкой на конце, указывающей направление вращения.

Плоскость, которой принадлежит спин-вектор, называется *плоскостью спин-вектора*, а прямая, перпендикулярная к этой плоскости, проходящая через центр элемента окружности, называется *осью спин-вектора*. Длина кривой стрелки, изображающей спин-вектор, есть *модуль спин-вектора*.

Таким образом, механика использует два множества объектов, действующих в трехмерном пространстве: множество прямых векторов (рис. 1.6а) и множество спин-векторов (рис. 1.6б).

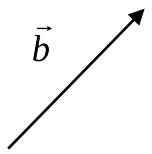

Рис. 1.6а

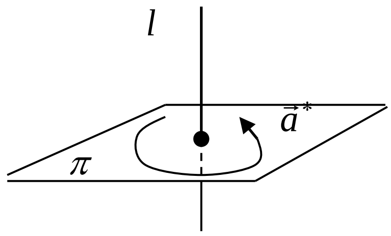

Рис. 1.6б

Примерами прямых векторов служат скорости, ускорения, силы и т.д.

Так как работать с множествами различной природы невозможно, то вводятся дополнительные соглашения, позволяющие спин-вектор заменить прямым вектором.

Всякому спин-вектору $\vec{a}^*$ сопоставим прямой вектор $\vec{a}$, который называют *аксиальным*, с помощью соглашений (рис. 1.7):

1) вектор $\vec{a}$ принадлежит оси спин-вектора $\vec{a}^*$ $(\vec{a} \in l)$;

2) модуль прямого вектора равен длине спин-вектора $(\vec{a} = \vec{a}^*)$;

3) с конца прямого вектора направление спин-вектора наблюдается против хода часовой стрелки (можно и наоборот).

Пункт 3) и есть ориентация системы отсчета: правоориентированная (или левоориентированная).

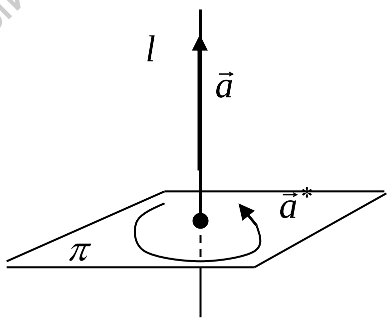

Рис. 1.7

<u>Определение</u>. Прямой вектор $\vec{a}$ называется *полярным вектором*, если при замене ориентации системы отсчета на противоположную, прямой вектор не меняет свое направление на противоположное.

<u>Определение</u>. Прямой вектор $\vec{a}$ называется *аксиальным вектором*, если при замене ориентации системы отсчета на противоположную, прямой вектор меняет свое направление на противоположное, сохраняя длину.

Введем операцию векторного произведения в два этапа:

1. Двум прямым векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сопоставим спин-вектор;

2. Спин-вектору сопоставим, стандартным образом, прямой вектор, а эта процедура связана с выбором ориентации системы отсчета.

Пусть дана упорядоченная пара векторов $\vec{a},\ \vec{b}$ (рис.1. 8).

1. Сопоставим векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ спин-вектор $\vec{c}^{\,*}$ так, что

1) ось спин-вектора l перпендикулярна плоскости π, проходящей через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $(l \perp \pi)$;

2) направление спин-вектора показывает кратчайший поворот вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$;

3) модуль спин-вектора равен

$$c^* = ab\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),$$

где $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ – угол кратчайшего поворота от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$.

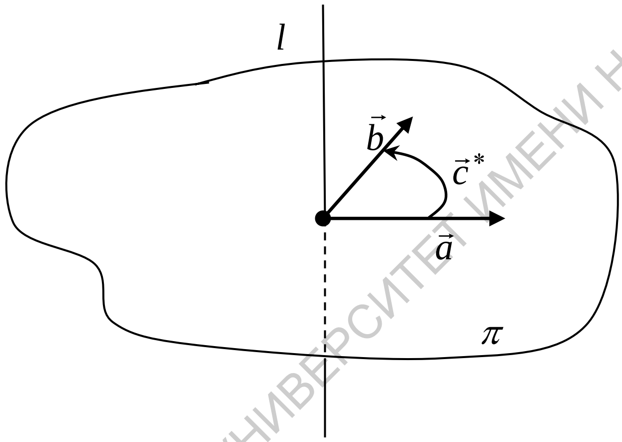

Рис. 1.8

Обозначим $\vec{c}^{\,*} = [\vec{a},\vec{b}]$.

Очевидно, что $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$, так как направление поворота меняется на противоположное.

2. Поставим в соответствие спин-вектору $\vec{c}^{\,*}$, по известным соглашениям, прямой вектор $\vec{c}$. Эта процедура зависит от выбора ориентации системы отсчета.

<u>Определение</u>. Прямой вектор $\vec{c}$, соответствующий спин-вектору $\vec{c}^{\,*}$, назовем векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Возникает вопрос о типе вектора $\vec{c}$.

1. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ –полярные векторы (не зависят от выбора ориентации в пространстве), то $\vec{c}^{\,*} = [\vec{a},\vec{b}]$ также не зависит от этого выбора. Вектор $\vec{c}$, сопоставленный $\vec{c}^{\,*}$, зависит от ориентации в пространстве и является аксиальным.

Таким образом, векторное произведение двух полярных векторов есть аксиальный вектор.

2. Если $\vec{a}$ –аксиальный вектор, $\vec{b}$ –полярный вектор, то спин-вектор $\vec{c}^*$, сопоставленный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ зависит от ориентации пространства, а вектор $\vec{c}$, сопоставленный $\vec{c}^*$, не зависит от ориентации пространства и является полярным.

Рис. 1.9а–правоориентированная система отсчета;

Рис. 1.9б–левоориентированная система отсчета.

3. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ –аксиальные векторы, то векторное произведение является аксиальным вектором.

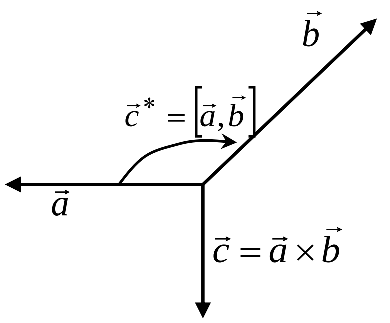

Рис. 1.9а

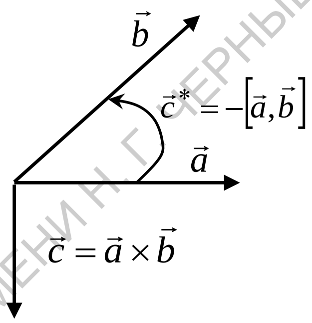

Рис. 1.9б

Справедливы следующие равенства:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}. \qquad (1.18)$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}). \qquad (1.19)$$

Расстановка скобок в левой части тождества (1.19) существенна, так как $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

Таким образом, момент силы относительно точки является *аксиальным вектором.*

Момент силы относительно оси

Рассмотрим абсолютно твердое тело с двумя неподвижными точками A и B. Приложим в любой другой точке C тела, не лежащей на прямой l, проведенной через точки A и B, силу $\vec{F}$, линия действия которой не пересекает l (рис. 1.10).

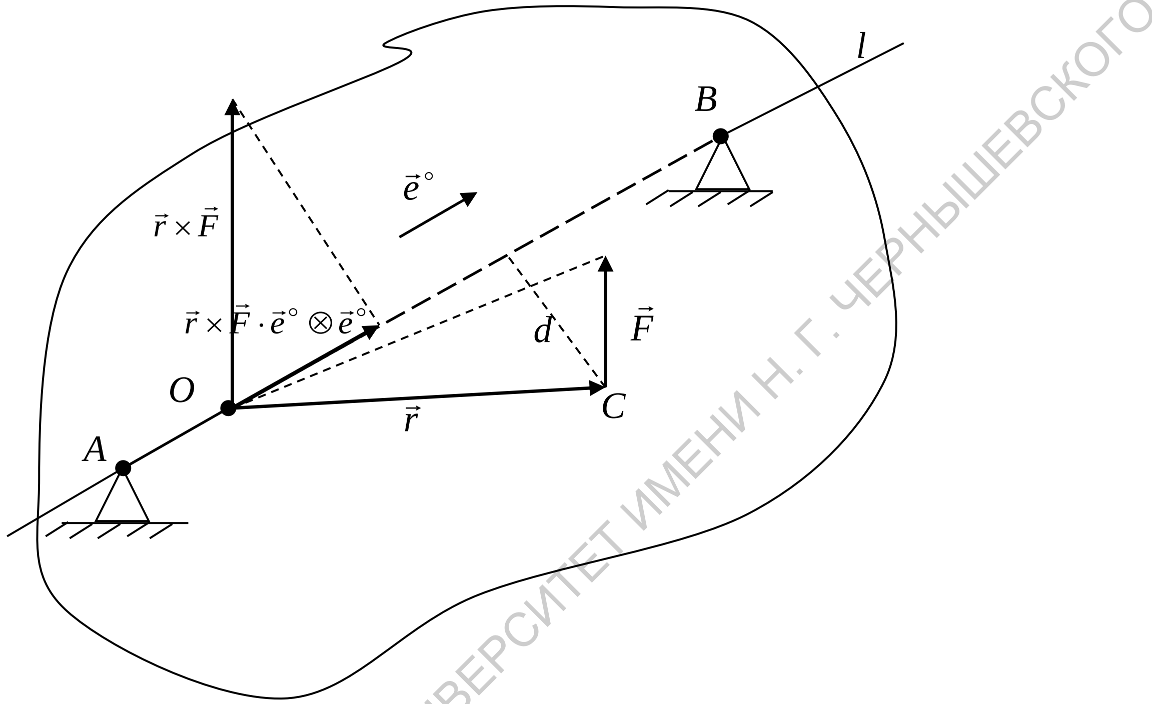

Рис. 1.10

Очевидно, тело совершит поворот вокруг прямой l.

Вращательный эффект зависит:

1) от модуля силы $\vec{F}$;

2) от направления силы относительно предварительно ориентированной прямой l, называемой *осью*;

3) от величины кратчайшего расстояния d от точки C до прямой l.

Все эти элементы можно учесть одним «вектором», который называют моментом силы $\vec{F}$ относительно оси.

Определение. *Моментом силы* $\vec{F}$ относительно прямой l (с направляющим вектором $\vec{e}^o$) называется проекция момента этой силы относительно любой точки O прямой l на эту прямую:

$$mom_l\vec{F} = (\vec{r}\times\vec{F})\cdot\vec{e}^o\vec{e}^o \quad \text{или} \quad mom_l\vec{F} = (\vec{r}\times\vec{F})\cdot\vec{e}^o\otimes\vec{e}^o.$$

В механике часто используются тензоры второго ранга Π (в трехмерном евклидовом пространстве), называемые *проекторами*. Для таких тензоров должны выполняться условия:

1) $\Pi = \Pi^T$, где Π^T – траспонированный тензор;

2) $\Pi\circ\Pi = \Pi$, где $\Pi\circ\Pi$ – внутреннее произведение тензора Π на себя.

Проекторами являются тензоры:

$$\Pi_1 = \vec{m} \otimes \vec{m}, \qquad \Pi_2 = \vec{m} \otimes \vec{m} + \vec{n} \otimes \vec{n}, \qquad \Pi_2 = \vec{m} \otimes \vec{m} + \vec{n} \otimes \vec{n} + \vec{k} \otimes \vec{k},$$

где $\vec{m}, \vec{n}, \vec{k}$ – единичные ортогональные векторы.

Скалярное произведение этих проекторов Π_i $(i = 1,2,3)$ на вектор $\vec{a}$

$$\Pi_i \cdot \vec{a} \quad (i = 1,2,3)$$

при $i = 1$ проецирует вектор $\vec{a}$ на прямую, натянутую на вектор $\vec{m}$:

$$\Pi_1 \cdot \vec{a} = \vec{m} \otimes \vec{m} \cdot \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{m})\vec{m};$$

при $i = 2$ проецирует вектор $\vec{a}$ на плоскость, натянутую на вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$:

$$\Pi_2 \cdot \vec{a} = (\vec{m} \otimes \vec{m} + \vec{n} \otimes \vec{n}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{m})\vec{m} + (\vec{a} \cdot \vec{n})\vec{n};$$

при $i = 3$ есть разложение вектора $\vec{a}$ по векторам $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{k}$:

$$\Pi_3 \cdot \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{m})\vec{m} + (\vec{a} \cdot \vec{n})\vec{n} + (\vec{a} \cdot \vec{k})\vec{k}.$$

Используя этот факт, момент силы $\vec{F}$ относительно оси l можно записать в виде:

$$mom_l \vec{F} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}^{\,o} \otimes \vec{e}^{\,o}. \tag{1.20}$$

▲ *Момент силы относительно оси не зависит от положения точки O на этой оси.*

В самом деле, обозначим через O' любую другую точку оси относительно которой точка C приложения силы $\vec{F}$ определяется вектором $\vec{r}\,'$. Покажем, что

$$(\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}^{\,o} \otimes \vec{e}^{\,o} = (\vec{r}\,' \times \vec{F}) \cdot \vec{e}^{\,o} \otimes \vec{e}^{\,o}.$$

$$\left((\vec{r}\,' - \vec{r}) \times \vec{F}\right) \cdot \vec{e}^{\,o} \otimes \vec{e}^{\,o} = \left(\overrightarrow{O'O} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{e}^{\,o} \otimes \vec{e}^{\,o} = 0, \text{ так как } \overrightarrow{O'O} \parallel \vec{e}^{\,o}.$$

Моменту силы относительно оси можно дать определение полезное в практических целях.

Из векторной алгебры известно равенство:

$$np_l(\vec{a} \times \vec{b}) = np_\pi \vec{a} \times np_\pi \vec{b},$$

где π – любая плоскость перпендикулярная прямой l

Введем в рассмотрение в плоскости π, перпендикулярной прямой l, ортогональные единичные векторы $\vec{n}^{\,o}$, $\vec{m}^{\,o}$ (рис. 1.11)

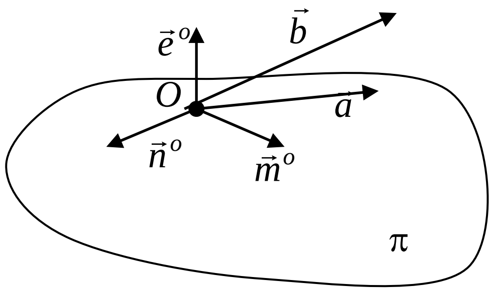

Рис. 1.11

Тогда последнее равенство можно переписать в виде:

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{e}^{o}\otimes\vec{e}^{o}=\vec{a}\cdot(\vec{n}^{o}\otimes\vec{n}^{o}+\vec{m}^{o}\otimes\vec{m}^{o})\times\vec{b}\cdot(\vec{n}^{o}\otimes\vec{n}^{o}+\vec{m}^{o}\otimes\vec{m}^{o}). \quad (1.21)$$

На основании (1.21) определение (1.20) будет иметь вид

$$\vec{r}\times\vec{F}\cdot\vec{e}^{o}\otimes\vec{e}^{o}=\vec{r}\cdot(\vec{n}^{o}\otimes\vec{n}^{o}+\vec{m}^{o}\otimes\vec{m}^{o})\times\vec{F}\cdot(\vec{n}^{o}\otimes\vec{n}^{o}+\vec{m}^{o}\otimes\vec{m}^{o}).$$

Для вычисления момента силы $\vec{F}$ относительно оси l следует выполнить следующие действия:

1) выбрать на оси l произвольную точку O' и провести через нее плоскость π, перпендикулярную оси l;

2) построить проекции векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$ на плоскость π, то есть

$$\vec{r}\cdot(\vec{n}^{o}\otimes\vec{n}^{o}+\vec{m}^{o}\otimes\vec{m}^{o}),\quad \vec{F}\cdot(\vec{n}^{o}\otimes\vec{n}^{o}+\vec{m}^{o}\otimes\vec{m}^{o});$$

3) записать векторное произведение этих проекций (рис. 1.12).

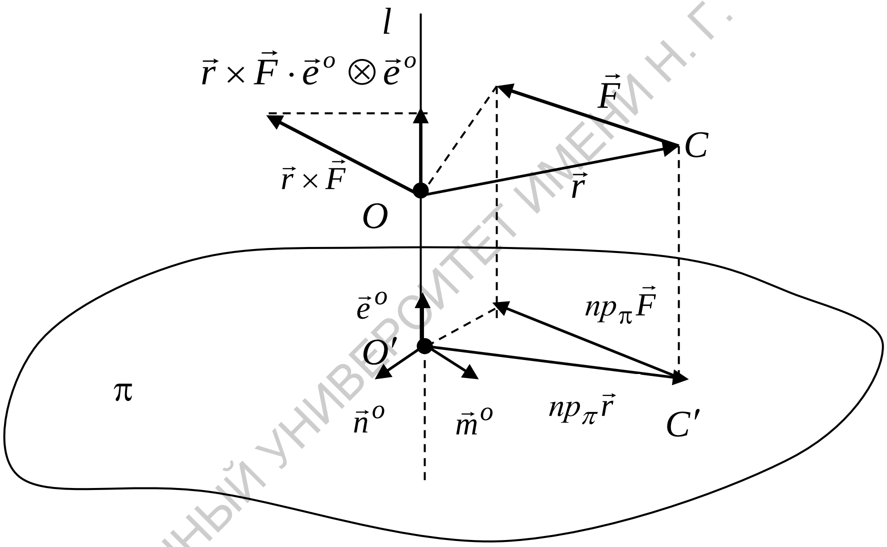

Рис. 1.12

Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси или линии действия силы пересекает ось.

Момент системы сил относительно центра

Рассмотрим две системы сил. Первая из них произвольная системы сил в пространстве (рис.1.12а). Вторая – одна из четырех простейших систем сил.

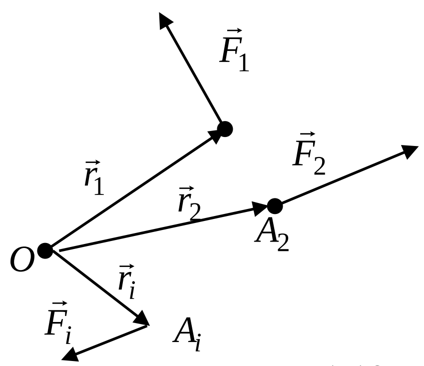

Рис. 1.12а

В первом случае сумма моментов сил системы относительно некоторой точки O пространства называется *главным моментом системы сил относительно точки* O

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \,.$$

Во втором случае (простейших систем сил) имеет место известная теорема Вариньона:

▲ *В случае простейшей системы сил, момент равнодействующей* $\vec{R}$ *этой системы относительно произвольной точки* O *в пространстве равен сумме моментов сил системы* $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ *относительно той же точки, то есть* $\vec{r}_C \times \vec{R} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$.

Эта теорема легко доказывается для любой из простейших систем сил.

Действительно, рассмотрим случай сходящейся системы сил. Обозначим через C точку пересечения линий действия сил системы, через O - любую точку в пространстве. Положение точки C относительно O определяет вектор $\vec{r}_C$, положения точек A_i приложений соответствующих сил $\vec{F}_i$ системы относительно той же точки O определяют векторы $\vec{r}_i$ (рис.1.12б).

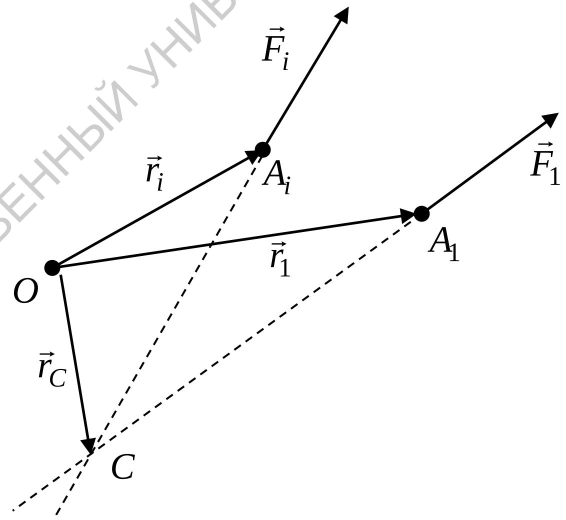

Рис. 1.12б

Определим, стандартным образом, сумму моментов всех сил системы относительно точки O и запишем цепочку равенств.

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_C + \overrightarrow{CA_i}) \times \vec{F}_i = \vec{r}_C \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{r}_C \times \vec{R} \,. \qquad (1.22)$$

Следовательно, $\vec{r}_C \times \vec{R} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$.

Рассмотрим случай системы параллельных и одинаково направленных сил $\vec{F}_i = F_i \vec{e}^{\,o}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, где $\vec{e}^{\,o}$ – произвольно направленный единичный вектор. Рассуждая по той же схеме, запишем сумму моментов сил системы относительно произвольной точки O.

$$\sum_i \vec{r} \times \vec{F}_i = \vec{r} \times \sum_i F_i \vec{e}^{\,o}, \tag{1.23}$$

где $\vec{r}_i$ – вектор положения точки A_i, к которой приложена сила системы $\vec{F}_i$.

Обозначим через C точку приложения равнодействующей $\vec{R}$ рассматриваемой системы сил, $\vec{r}_C$ – вектор положения этой точки относительно полюса O.

Ранее было доказано, что

$$\vec{r}_C \sum_i F_i = \sum_i F_i \vec{r}_i. \tag{1.24}$$

Умножим обе части равенства (1.24) справа налево векторно на $\vec{e}^{\,o}$:

$$(\vec{r}_C \sum_i F_i) \times \vec{e}^{\,o} = (\sum_i F_i \vec{r}_i) \times \vec{e}^{\,o}.$$

На основании (1.23) приходим к равенству (1.22):

$$\vec{r}_C \times \sum_i F_i \vec{e}^{\,o} = \sum_i \vec{r}_i \times F_i \vec{e}^{\,o}, \quad \text{или} \quad \vec{r}_C \times \vec{R} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i,$$

где $\vec{R} = \sum_i F_i$ – равнодействующая системы параллельных, одинаково направленных сил.

Докажем теорему Вариньона для системы двух антипараллельных сил (рис. 1.13)

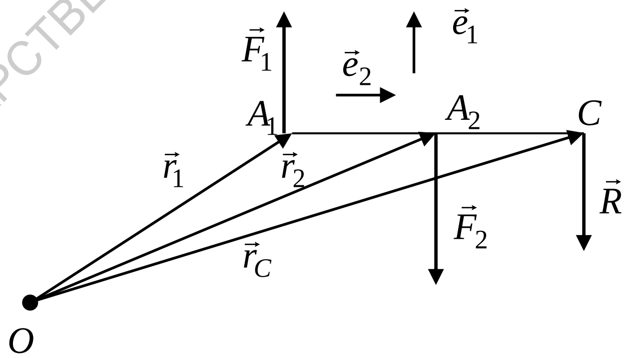

Рис. 1.13

Для данного случая равенства (1.2) можно записать в виде:

$$\frac{A_1C}{F_2} = \frac{A_2C}{F_1}. \tag{1.25}$$

Перейдем к векторной форме, умножая (1.25) на $\vec{e}_2$ $(\vec{e}_2 \parallel A_1A_2)$

$$\frac{\overrightarrow{A_1C}}{F_2} = \frac{\overrightarrow{A_2C}}{F_1}, \qquad . \tag{1.26}$$

Отметим, что

$$\overrightarrow{A_1C} = \vec{r}_C - \vec{r}_1, \qquad \overrightarrow{A_2C} = \vec{r}_C - \vec{r}_2 \ . \tag{1.27}$$

Умножим обе части равенства (1.26) справа векторно на любую из сил $\vec{F}_1$ или $\vec{F}_2$ и запишем

$$\frac{\overrightarrow{A_1C} \times \vec{F}_1}{F_2} = \frac{\overrightarrow{A_2C} \times \vec{F}_1}{F_1}, \quad \text{где} \quad \frac{\vec{F}_1}{F_1} = \vec{e}_1.$$

Так как $-\vec{F}_2 = F_2\vec{e}_1$, то последнее равенство перепишется в виде

$$\overrightarrow{A_1C} \times \vec{F}_1 = -\overrightarrow{A_2C} \times \vec{F}_2.$$

На основании (1.27) получим

$$(\vec{r}_C - \vec{r}_1) \times \vec{F}_1 = -(\vec{r}_C - \vec{r}_2) \times \vec{F}_2$$

или, что то же

$$\vec{r}_C \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2, \quad \text{или} \quad \vec{r}_C \times \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{2} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \ .$$

Теорема Вариньона для этого случая доказана.

Замечание. В геометрии Вариньоном была доказана теорема:

▲ *Для любого параллелограмма сумма произведений перпендикуляров, опущенных из любой точки плоскости параллелограмма на продолжение смежных сторон, на соответствующие стороны, равна произведению перпендикуляра, опущенного на продолжение диагонали между этими сторонами, на диагональ:* $ah_a + bh_b = dh_d$ (рис. 1.14).

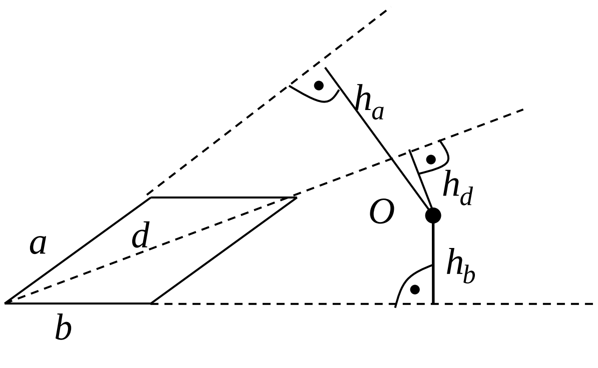

Рис. 1.14

Теорема Вариньона, как отмечал Лагранж, «является изящной теоремой геометрии».

1.5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПАР СИЛ

Определение. Система двух сил, равных по модулю, противоположных по направлению и не принадлежащих одной прямой называется *парой сил.* Обозначается $\{\vec{F}, \vec{F}'\}$.

Справедлива следующая теорема о трех силах:

▲ *Если абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием трех сил, принадлежащих одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в дной точке .*

На основании теоремы о трех силах доказывается утверждение:

▲ *Пара сил не имеет равнодействующей.*

Утверждение докажем «от противного». Предположим, что пара сил имеет равнодействующую $\vec{R}$, то есть $\{\vec{F}, \vec{F}'\} \sim \vec{R}$. Тогда плоская система из трех сил $\{\vec{F}, \vec{F}', -\vec{R}\} \sim 0$. Следовательно, по теореме о трех силах линии действия сил этой системы должны пересекаться в одной точке. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Определение. Плоскость, которой принадлежит пара сил, называется *плоскостью пары.*

Определение. Кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары, называется *плечом пары.*

Определение. Направление сил относительно любой точки внутри полосы, ограниченной линиями действия сил пары, называется *направлением пары* (повороты *по ходу или против хода часовой стрелки* отрезков, соединяющих точки приложения сил с любой точкой внутри полосы).

Пара сил, действуя на абсолютно твердое тело, вызывает вращательное (спинорное) движение.

Вращательный эффект зависит (рис. 1.15)

1) от модулей сил пары F, F';

2) от плеча пары d;

3) от направления пары;

4) от положения плоскости пары π.

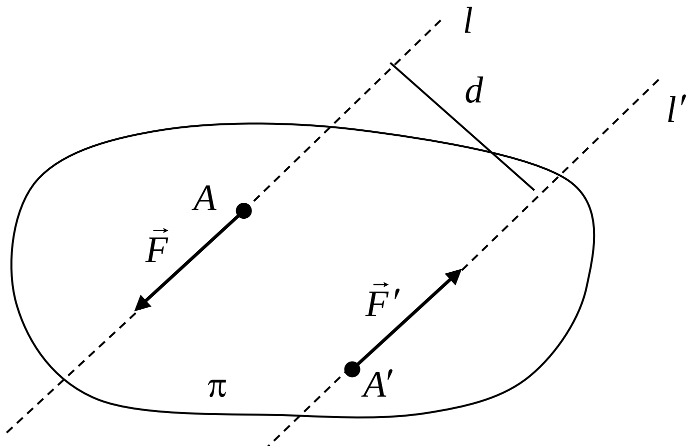

Рис. 1.15

Все перечисленные элементы можно учесть одним вектором, который называют моментом пары сил.

Определение. *Моментом пары сил* называется вектор, перпендикулярный плоскости пары, направленный в сторону, откуда направление пары наблюдается против хода часовой стрелки и по модулю равный произведению любой из сил пары на ее плечо (рис. 1.16).

Обозначается $mom\{\vec{F},\vec{F}'\}\equiv\vec{M}$.

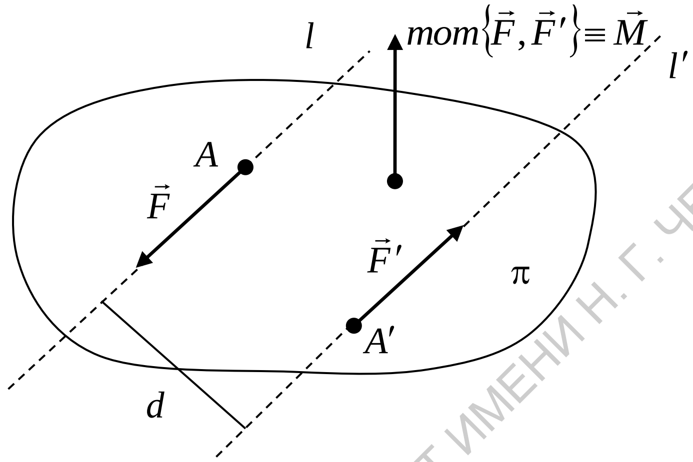

Рис. 1.16

▲ *Момент пары сил есть свободный в пространстве вектор, или, что то же, пара сил есть свободная в пространстве совокупность двух сил, образующих пару.*

Действительно, определим сумму моментов $\vec{M}$ сил пары относительно произвольной точки O в пространстве (рис. 1.17)

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}+\vec{r}'\times\vec{F}'.$$

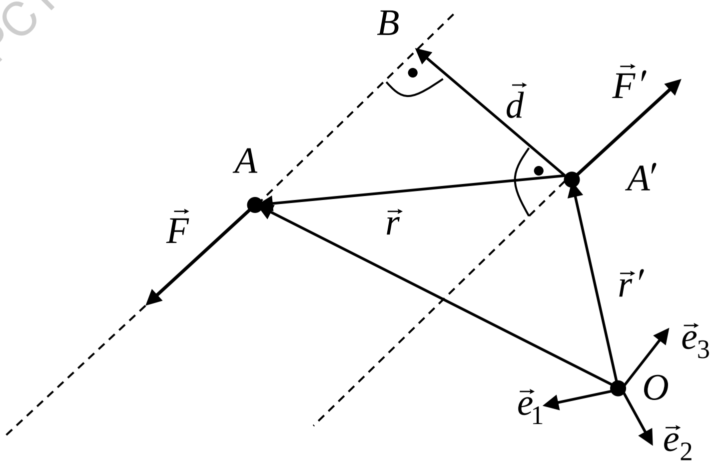

Рис. 1.17

На основании определения пары сил возможны замены

$$\vec{F} \text{ на } -\vec{F}', \text{ или } \vec{F}' \text{ на } -\vec{F}.$$

Тогда

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{r}\,' \times \vec{F}\,' = (\vec{r} - \vec{r}\,') \times \vec{F} = \overrightarrow{A'A} \times \vec{F} = \overrightarrow{AA'} \times \vec{F}\,'. \qquad (1.28)$$

Как следует из (1.28) момент пары не зависит от положения точки O и является свободным вектором.

Введем в рассмотрение вектор $\vec{d} = \overrightarrow{A'B}$ и вектор $\vec{d}\,'$ такой, что $\vec{d}\,' \uparrow\downarrow \vec{d};\ d' = d$. Так как $\overrightarrow{A'A} = \vec{d} + \overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BA} \,||\, \vec{F}$, то

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = \vec{d}\,' \times \vec{F}\,'. \qquad (1.29)$$

Равенства (1.28) или (1.29) позволяют сформулировать три положения.

▲ *Пару сил можно переносить в ее плоскости, при этом механическое состояние абсолютно твердого тела не меняется.*

▲ *Плоскость пары сил можно переносить параллельно самой себе в пространстве, при этом механическое состояние абсолютно твердого тела не меняется.*

▲ *Любым образом можно видоизменить модули сил пары и ее плечо, сохраняя при этом их произведение* (*то есть модуль вектора момента пары*), *при этом механическое состояние абсолютно твердого тела не меняется.*

Приведенные выше положения позволяют преобразовать системы пар сил к одной (результирующей) паре. Для этого достаточно выполнить следующие действия.

1. Все пары исходной системы пар сил преобразовать к системе пар сил с одинаковыми плечами: $\left\{\vec{F}_i, \vec{F}_i\,'\right\}_{d_i} \sim \left\{\vec{P}_i, \vec{P}_i\,'\right\}_d, \quad F_i d_i = P_i d$.

2. Совместить плечи пар преобразованной системы и, на основании аксиомы 4 статики, получить результирующую пару $\left\{\vec{P} = \sum\limits_i \vec{P}_i,\ \vec{P}\,' = \sum\limits_i \vec{P}_i'\right\}_d$ с плечом d, эквивалентную исходной системе пар сил

$\left\{\vec{P}, \vec{P}\,'\right\}_d \sim \left\{\vec{F}_i, \vec{F}_i\,'\right\}_{d_i}$ (рис. 1.18).

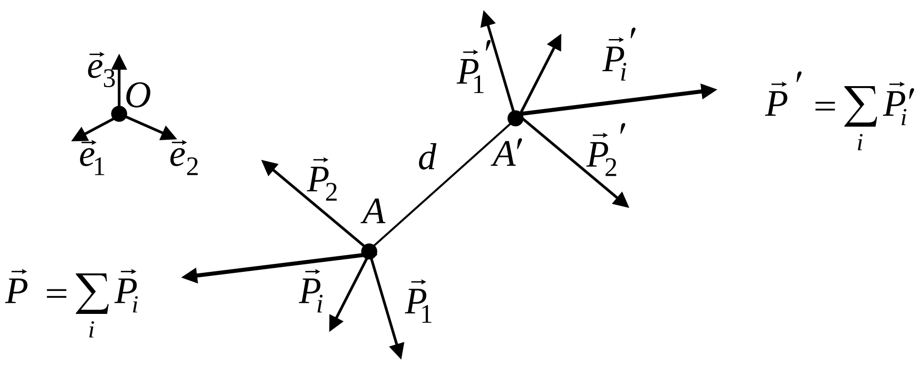

Рис. 1.18

1.6. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ТРЕХМЕРНАЯ СИСТЕМА СИЛ

Определение. Если линии действия хотя бы двух сил системы являются скрещивающимися прямыми, то такая система сил называется *произвольной*.

Преобразование такой системы сил осуществляется на основании теоремы статики о параллельном переносе силы (теорема Пуансо).

▲ *Сила* $\vec{F}$, *приложенная в точке* A *абсолютно твердого тела эквивалентна той же по модулю и направлению силе, приложенной в любой другой точке* B *тела и паре сил, момент которой равен моменту силы, приложенной в точке* A *относительно точки* B:

$$\left\{\vec{F}\right\}_A \sim \left\{\vec{F}, \overrightarrow{BA} \times \vec{F}\right\}_B .$$

Для доказательства теоремы проведем через точку B прямую, параллельную силе $\vec{F}$. Приложим в точке B систему сил, эквивалентную нулю $\left\{\vec{F}, -\vec{F}\right\}_B \sim 0$.

Исходная система из одной силы $\left\{\vec{F}\right\}_A$ эквивалентна системе из трех сил

$$\left\{\vec{F}\right\}_A \sim \left\{\left\{\vec{F}\right\}_A, \left\{\vec{F}, -\vec{F}\right\}_B\right\},$$

в которой $\left\{\vec{F}\right\}_B$ – сила, перенесенная в точку B, а $\left\{\vec{F}\right\}_A$, $\left\{-\vec{F}\right\}_B$ – образуют пару сил, момент которой

$$\overrightarrow{BA} \times \left\{\vec{F}\right\}_A = \overrightarrow{AB} \times \left\{-\vec{F}\right\}_B \text{ (рис. 1.19).}$$

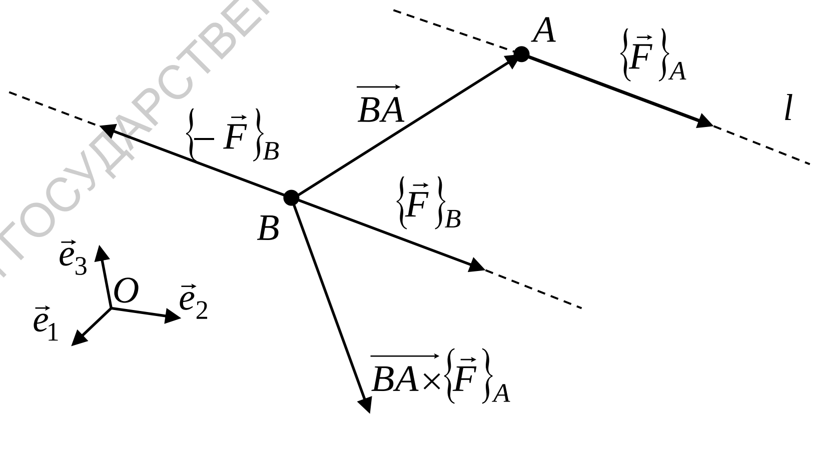

Рис. 1.19

На основании теоремы Пуансо, произвольная система сил $\left\{\vec{F}_i\right\}_{A_i}$ эквивалентна системе сил, приложенных в некоторой точке O, и системе пар сил, моменты которых $\overrightarrow{OA_i} \times \left\{\vec{F}_i\right\}_{A_i}$ приложены в той же точке O:

$$\left\{\vec{F}_i\right\}_{A_i} \sim \left\{\left\{\vec{F}_i\right\}_O,\ \overrightarrow{OA_i} \times \left\{\vec{F}_i{}'\right\}_{A_i}\right\}.$$

Вектор $\overrightarrow{OA_i}$ положения точки A_i приложения силы $\vec{F}_i$ относительно точки O обозначим через $\vec{r}_i$ (рис. 1.20).

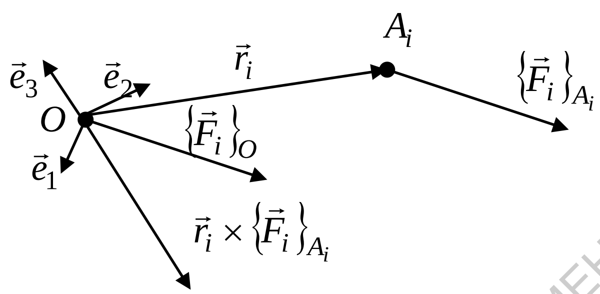

Рис. 1.20

Проводя суммирование сил и моментов, приложенных в точке O, получим

$$\left\{\vec{F}_i\right\}_{A_i} \sim \left\{\sum_i \left\{\vec{F}_i\right\}_O = \vec{R}(O),\ \sum_i \vec{r}_i \times \left\{\vec{F}_i{}'\right\}_{A_i} = \vec{M}(O)\right\}. \qquad (1.30)$$

Таким образом, произвольная система сил эквивалентна двум векторам, один из которых имеет размерность «силы», другой – «момента силы».

<u>Определение.</u> Векторная сумма всех сил системы, предварительно перенесенных параллельно самим себе в некоторую точку O пространства, называется *главным вектором* системы сил и обозначается $\vec{R}(O)$:

$$\sum_i \vec{F}_i(O) = \vec{R}(O). \qquad (1.31)$$

<u>Определение.</u> Сумма моментов всех сил системы, вычисленных относительно произвольной точки O пространства, называется *главным моментом* системы сил и обозначается $\vec{M}(O)$:

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i(A_i) = \vec{M}(O). \qquad (1.32)$$

Свойства главного вектора и главного момента

1◦. Главный вектор системы сил не зависит от точки O переноса сил: $\vec{R}(O) = \vec{R}(O')$, то есть является свободным вектором для данной системы сил (рис. 1.21). Это следует из определения главного вектора.

По этой причине, главный вектор системы сил является *первым векторным инвариантом* рассматриваемой системы сил, который обозначим через $\vec{J}_1$

$$\vec{R} = \vec{J}_1. \tag{1.33}$$

2◦. Главный момент системы сил зависит от точки O.

Действительно, рассмотрим другую точку приведения O', переноса системы сил $\{\vec{F}_i\}_{A_i}$. Главный момент $\vec{M}'(O')$ будет иметь вид

$$\vec{M}'(O') = \sum_i \vec{r}_i{}' \times \vec{F}_i(A_i), \tag{1.34}$$

где $\overrightarrow{O'O} + \vec{r}_i = \vec{r}_i{}'$ (рис. 1.21).

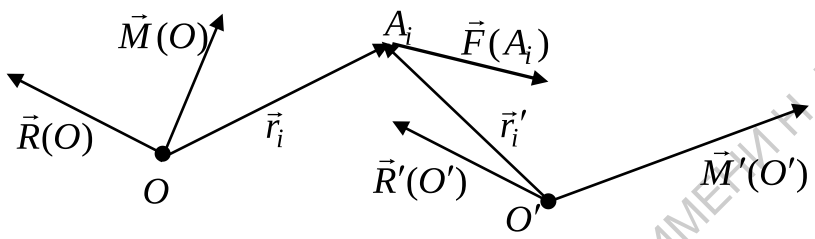

Рис. 1.21

Тогда

$$\vec{M}'(O') = \sum_i (\vec{r}_i + \overrightarrow{O'O}) \times \vec{F}_i(A_i) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i(A_i) + \overrightarrow{O'O} \times \sum_i \vec{F}_i(A_i).$$

Следовательно,

$$\vec{M}'(O') = \vec{M}(O) + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R}(O). \tag{1.35}$$

Из (1.35) видно, что с изменением центра приведения сил, главный момент изменяется на величину равную моменту главного вектора относительно нового центра приведения O'. Равенство (1.35) можно переписать в виде

$$\vec{M}'(O') = \vec{M}(O) - \overrightarrow{OO'} \times \vec{R}(O). \tag{1.36}$$

3◦. Скалярное произведение главного вектора на главный момент не зависит от положения точки O.

В этом нетрудно убедиться, если умножить равенство (1.35) или (1.36) скалярно на главный вектор.

$$\vec{M}'(O') \cdot \vec{R}(O) = \vec{M}(O) \cdot \vec{R}(O) - \overrightarrow{OO'} \times \vec{R}(O') \cdot \vec{R}(O).$$

Учитывая, что смешанное произведение $\overrightarrow{OO'} \times \vec{R}(O') \cdot \vec{R}(O) = 0$, получим

$$\vec{M}'(O') \cdot \vec{R}(O) = \vec{M}(O) \cdot \vec{R}(O). \tag{1.37}$$

Таким образом, скалярное произведение главного вектора на главный момент не чувствителен к точке переноса O и по этой причине является *вторым скалярным инвариантом* $\vec{J}_2$ рассматриваемой системы сил

$$J_2 = \vec{M} \cdot \vec{R}. \tag{1.38}$$

Следует отметить, что инвариантов системы сил бесчисленное множеств, но все они выражаются через $\vec{J}_1$ и J_2.

Инварианты произвольной системы сил $\vec{J}_1$ и J_2 называют *главными инвариантами* системы сил.

4◦. Проекция главного момента на прямую l, которой принадлежит главный вектор $\vec{R}$, не зависит от точки приведения O.

Действительно,

$$np_l\vec{M}(O) = \vec{M}(O)\cdot\left(\frac{\vec{R}}{R}\otimes\frac{\vec{R}}{R}\right) = \frac{\vec{M}(O)\cdot\vec{R}}{R^2}\vec{R}. \tag{1.39}$$

Отношение $\dfrac{\vec{R}}{R} = \vec{e}^{\circ}$ – есть единичный направляющий вектор прямой l. Тогда проекция главного момента на прямую l выражается через первые два инварианта следующим образом:

$$np_l\vec{M}(O) = \frac{J_2}{J_1}\vec{e}^{\circ}.$$

5◦. Существует такая прямая l^* в пространстве, которой всегда принадлежат главный вектор и главный момент.

Обозначим через $\vec{m}^{\circ}$ единичный вектор перпендикулярный $\vec{e}^{\circ}$. Тогда главный момент можно разложить на две составляющие, одна из которых является проекцией главного момента на прямую l: $\vec{M}(O)\cdot\vec{e}^{\circ}\otimes\vec{e}^{\circ}$, а другая – проекцией главного момента на прямую, перпендикулярную l: $\vec{M}(O)\cdot\vec{m}^{\circ}\otimes\vec{m}^{\circ}$.

Таким образом,

$$\vec{M}(O) = \vec{M}(O)\cdot\vec{e}^{\circ}\otimes\vec{e}^{\circ} + \vec{M}(O)\cdot\vec{m}^{\circ}\otimes\vec{m}^{\circ}. \tag{1.40}$$

Так как первое слагаемое в этой сумме инвариант, то с изменением точки приведения системы сил изменяется только перпендикулярная составляющая главного момента – второе слагаемое в равенстве (1.40).

Естественно предположить, что существует такая точка O^*, в которой эта перпендикулярная составляющая равна нулю

$$\vec{M}(O^*)\cdot\vec{m}^{\circ}\otimes\vec{m}^{\circ} = 0.$$

Тогда

$$\vec{M}(O^*) = \vec{M}(O^*)\cdot\vec{e}^{\circ}\otimes\vec{e}^{\circ}. \tag{1.41}$$

Следовательно, главный момент и главный вектор в точке O^* параллельны:

$$\vec{M}(O^*)\,||\,\vec{R}(O^*).$$

Нетрудно показать, что таких точек бесчисленное множество и образуют они прямую в пространстве, которую обозначим l^*.

Действительно, запишем условие параллельности векторов с учетом равенства (1.36)

$$\frac{\vec{M}(O^*)}{\vec{R}} = p \Rightarrow \frac{\vec{M}(O) - \overrightarrow{OO^*} \times \vec{R}}{\vec{R}} = p. \qquad (1.42)$$

Уравнение (1.42) определяет прямую l^*, где переменный вектор – $\overrightarrow{OO^*}$.

Определение. Прямая, заданная уравнением (1.42), называется *центральной осью системы сил*

Определение. Проекция главного момента на линию действия главного вектора $\vec{M}(O) \cdot \vec{e}^\circ \otimes \vec{e}^\circ \equiv \vec{M}^*$ называется *наименьшим главным моментом.*

Таким образом, совокупность $\left(\overline{M}^*, \vec{R}\right) \in l^*$.

Динамический винт

Определение. Совокупность главного вектора $\vec{R}$ и главного момента $\vec{M}^*$, или пары сил, момент которой $\vec{M}^*$, называется *динамическим винтом*.

Свободное в пространстве тело под действием такой совокупности совершает одновременно поступательное (трансляционное) и вращательное (спинорное) движения. Траектория любой точки тела находится на поверхности цилиндра, осью которого является центральная ось системы сил и является винтовой линией.

Определение. Скаляр p в уравнении (1.42) называется *параметром динамического винта*.

Параметр динамического винта также является инвариантом, так как из (1.42) следует

$$\frac{\vec{M}(O^*)}{\vec{R}} = \frac{\vec{M} \cdot \vec{R}}{R^2} = \frac{J_2}{J_1^2} = p.$$

Возможные случаи воздействий

Обозначим через $\vec{F}_i$ систему сил – результат воздействий на абсолютно твердое тело A со стороны других тел B_i

$$\vec{F}_i = \vec{F}(A, B_i).$$

Возможны следующие случаи:

1. $J_2 = \vec{M} \cdot R = 0.$

1.1. $\vec{R} \neq 0$; $\vec{M} = 0$.

Система сил эквивалентна одной равнодействующей силе $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ и является простейшей. Тело под действием этой системы совершает поступательное (трансляционное) движение.

1.2. $\vec{R}=0$; $\vec{M}\neq 0$.

Система сил эквивалентна паре сил с моментом $\vec{M}$, который не зависит от точки приведения O (и является инвариантом в этом случае). Свободное в пространстве тело под действием такой системы сил совершает вращательное (спинорное) движение.

1.3. $\vec{R}\neq 0$; $\vec{M}\neq 0$; $\vec{R}\perp\vec{M}$.

Очевидно, это случай 1.1.

1.4. $\vec{R}=0$; $\vec{M}=0$.

В этом случае система сил эквивалентна нулю, а тело, под действием такой системы сил, находится в равновесии.

2. $J_2=\vec{M}\cdot R\neq 0.$

Система сил приводится к динамическому винту с параметром p.

$$\{\vec{F}_i\}\sim\{\vec{R},\,\vec{M}\},\ (i=1,2,\ldots,n).$$

Центральная ось системы определяется уравнением (1.42). Тело под действием такой системы сил совершает одновременно поступательное (трансляционное) и вращательное (спинорное) движения.

1.7. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ СИЛ

Как было отмечено, что система сил эквивалентная нулю $\{\vec{F}_i\}\sim 0,$ не вносит изменений в механическое состояние тела, будь то движение тела или покой. Так же доказано, что система сил эквивалентна главному вектору и главному моменту $\{\vec{F}_i\}\sim\{\vec{R},\,\vec{M}\},\ (i=1,2,\ldots,n)$. На основании транзитивности следует, что совокупность главного вектора и главного момента эквивалентна нулю $\{\vec{R},\,\vec{M}\}\sim 0.$ Следовательно, каждый из элементов этой совокупности должен быть равен нулю

$$\vec{R}=\vec{0};\qquad \vec{M}=\vec{0}. \tag{1.43}$$

Условие (1.43) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i(O)=\vec{0};\qquad \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i(A_i)=\vec{0}. \tag{1.44}$$

Эти равенства есть векторная форма условий равновесия произвольной системы сил.

Уравнения (1.43) или (1.44) позволяют сформулировать следующее утверждение.

▲ *Абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием произвольной системы сил тогда и только тогда, когда главный вектор и главный момент системы равны нулю, или, что тоже, векторная сумма всех сил, предварительно перенесенных в точку O пространства, и сумма моментов всех сил относительно этой точки равны нулю.*

Умножая (1.44) скалярно на базисные орты $\vec{e}_j$ $(j=1,2,3)$ декартовой системы координат, получим координатную форму записи уравнений равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ij} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} mom_{(\vec{e}_j)}\vec{F}_i = 0 \quad (j=1,2,3). \qquad (1.45)$$

Шесть уравнений (1.45) есть условия равновесия системы сил в координатной форме.

▲ *Сумма проекций всех сил на координатные оси выбранной системы координат и сумма моментов всех сил относительно этих осей равны нулю.*

В случае плоской системы сил векторная форма условий равновесия определяется (1.43) или (1.44). Координатная форма условий равновесия системы сил запишется в виде трех уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ij} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} mom_O\vec{F}_i = 0 \quad (j=1,2), \qquad (1.46)$$

где O – произвольная точка в плоскости сил.

Существуют еще две формы условий равновесия плоской системы сил, полезные в практических целях.

▲ *Абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием плоской системы сил тогда и только тогда, когда сумма моментов всех сил относительно трех, не лежащих на одной прямой точек* O_j $(j=1,2,3)$ *плоскости равны нулю.*

$$\sum_{i=1}^{n} mom_{O_j}\vec{F}_i = 0 \quad (j=1,2,3).$$

▲ *Абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием плоской системы сил тогда и только тогда, когда сумма моментов всех сил относительно двух точек* O_1, O_2 *плоскости равны нулю и сумма проекций всех сил на любую прямую* l' *в плоскости не перпендикулярную прямой* l, *проходящей через точки* O_1, O_2 *равна нулю.*

$$\sum_{i=1}^{n} mom_{O_j}\vec{F}_i = 0 \quad (j=1,2); \qquad \sum_{i=1}^{n} np_{l'}\vec{F}_i = 0.$$

Контрольные вопросы

1. Что изучает раздел теоретической механики «геометрическая статика»?
2. Каково смысловое значение термина «сила»?
3. Сформулировать гипотезу абсолютно твердого тела.
4. Дать определение равнодействующей системы сил.
5. В каком случае можно утверждать, что две системы сил эквивалентны?
6. В каком случае говорят, что система сил эквивалентна нулю,
7. Сформулировать аксиомы статики?
8. Какие две задачи рассматривают в статике?
9. Дать определение связи и сформулировать аксиому связей.
10. Какие аксиомы статики и следствия из них используются при определении равнодействующих двух параллельных одинаково направленных сил и двух антипараллельных не равных по модулю сил?
11. Дать определение центра масс механической системы материальных точек.
12. На основании каких предположений определяется центр тяжести механической системы?
13. Что называют моментом силы относительно точки? оси?
14. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
15. В каком случае точка приложения равнодействующей системы двух антипараллельных не равных по модулю сил «уходит» в бесконечность (неопределенна)?
16. Сформулировать второе определение момента силы относительно оси.
17. Почему момент силы относительно точки, оси и момент пары сил являются псевдовекторами?
18. Доказать, что пара сил не имеет равнодействующей.
19. Дать определение момента пары сил и доказать, что этот псевдовектор является свободным в пространстве.
20. Сформулировать основную теорему статики (теорема Пуансо). Какие аксиомы статики используются при ее доказательстве?
21. Что называют главным вектором и главным моментом пространственной системы сил?
22. Как главный вектор и главный момент системы реагируют на изменение центра приведения системы сил?
23. Что называют первым и вторым статическим инвариантом системы сил?
24. Перечислить возможные случаи приведения системы сил к центру.
25. Какая составляющая главного момента не зависит от центра приведения (является «векторным» инвариантом)?
26. Как найти уравнение центральной оси системы сил – прямой, которой принадлежит главный вектор и главный момент?
27. В каком случае главный вектор есть равнодействующая системы сил?
28. Сформулировать условия равновесия систем сил в векторной форме.
29. Для какой системы сил справедлива теорема Вариньона?

30. Доказать теорему Вариньона для системы двух одинаково направленных сил.
31. Доказать теорему Вариньона для системы двух антипараллельных сил.
32. Как будет перемещаться в пространстве «свободное» тело под действием силы? под действием пары сил? одновременно под действием силы и пары сил?
33. Сформулировать условия, при которых центр тяжести совпадет с центром масс?

Часть 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАТИКИ

2.1. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

План решения задач

1. Изобразить тело, силы, действующие на него, и наложенные связи.
2. На основании аксиомы связей ввести в рассмотрение реакции связей.
3. Записать уравнения равновесия в векторной форме.
4. Подходящим образом выбрать систему координат.
5. Перейти от векторной формы к координатной.
6. Решить алгебраическую неоднородную систему уравнений.
7. Провести анализ полученного решения.

Пример 1. Конструкция из двух стержней, на которые наложены связи в точках A, E и B (рис. 2.1), находится в равновесии под действием известной силы $\vec{P}$ и момента $\vec{M}$. В точке C стержни связаны через шарнир. Необходимо записать неоднородную систему алгебраических уравнений для определения неизвестных координат реакций связей, рассмотрев возможные варианты числа связей, обеспечивающих статическую определимость конструкции. Геометрию конструкции считать известной. В случае необходимости, сделать конструкцию статически определимой.

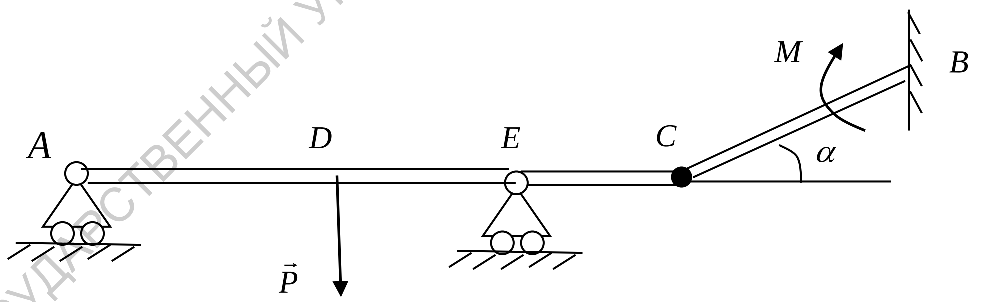

Рис. 2.1

Решение.

Мысленно отбросим связи, рассечем конструкцию в точке C на две части: I и II. На основании аксиомы связей введем в рассмотрение реакции связей: $\vec{R}(A)$, $\vec{R}(E)$, $\vec{R}(C)$, $\vec{R}'(C)$, $\vec{R}(B)$, $\vec{M}_B$ (рис. 2.2).

Отметим, что истинное направление реакций связей дает решение задачи. Если в результате решения значение реакции связи получено с положительным знаком, то ее направление выбрано верно, в противном случае направление следует изменить на противоположное.

Рассмотрим равновесное состояние каждого элемента I и II. Реакции связей в точке контакта C двух элементов конструкции, на основании третьей аксиомы Ньютона, связаны равенством

$$\vec{R}(C) = -\vec{R}'(C). \tag{2.1}$$

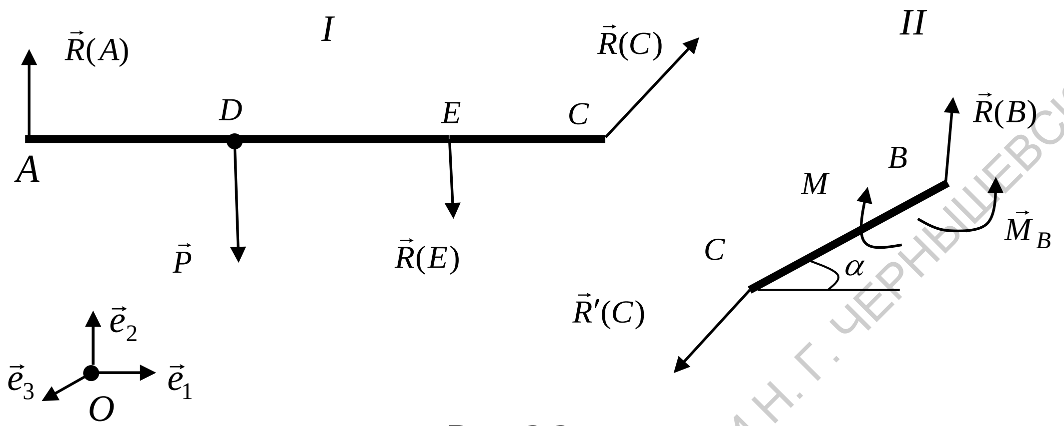

Рис. 2.2

Уравнения равновесия в векторной форме запишутся

I:

$$\vec{R}(A) + \vec{P} + \vec{R}(E) + \vec{R}(C) = \vec{0}; \tag{2.2}$$

$$\overrightarrow{CA} \times \vec{R}(A) + \overrightarrow{CD} \times \vec{P} + \overrightarrow{CE} \times \vec{R}(E) = \vec{0}. \tag{2.3}$$

II:

$$\vec{R}'(C) + \vec{R}(B) = \vec{0}; \tag{2.4}$$

$$\overrightarrow{CB} \times \vec{R}(B) + \vec{M} + \vec{M}_B = \vec{0}. \tag{2.5}$$

Равенство (2.1) запишем в виде

$$\vec{R}(C) + \vec{R}'(C) = 0. \tag{2.6}$$

Таким образом, в векторной форме имеем пять уравнений равновесия и шесть неизвестных реакций связей: $\vec{R}(A)$, $\vec{R}(E)$, $\vec{R}(C)$, $\vec{R}'(C)$, $\vec{R}(B)$, $\vec{M}_B$.

Рассмотренная задача статически неопределима. Необходимо убрать одну из связей. Возможны следующие варианты.

1. Убрать подвижный шарнир в точке A (рис. 2.3).

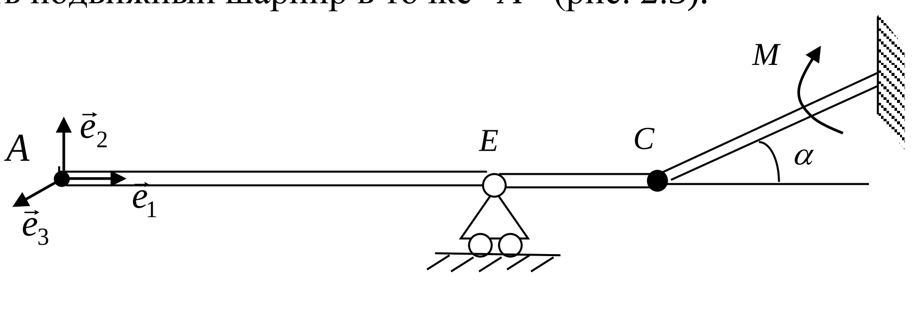

Рис. 2.3

2. Убрать подвижный шарнир в точке E (рис. 2.4).

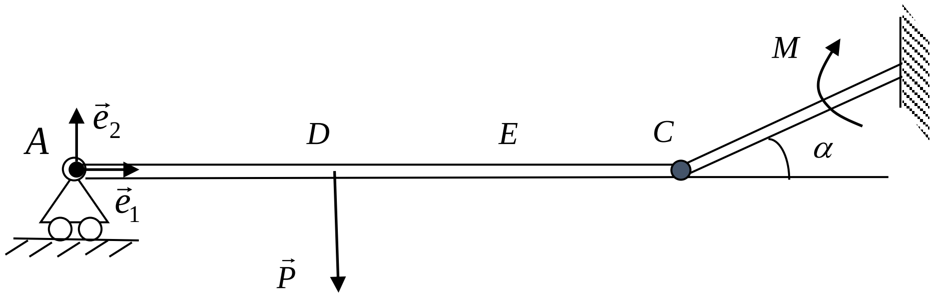

Рис. 2.4

3. Жесткое крепление в точке B заменить неподвижным шарниром (рис. 2.5).

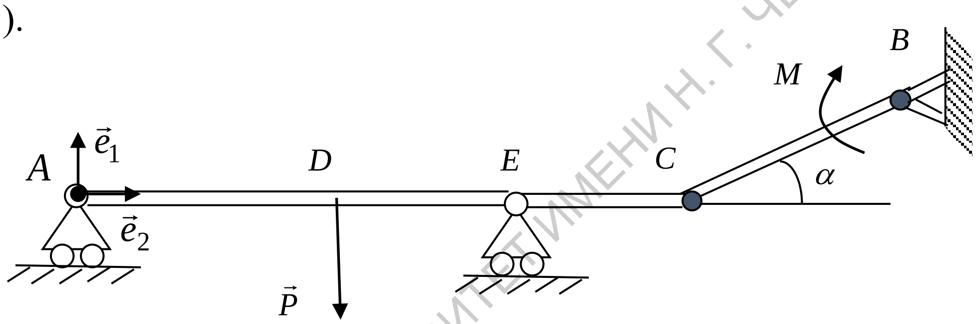

Рис. 2.5

В этом случае в уравнении (2.5) $\vec{M}_B = \vec{0}$.

Перепишем систему (2.2)-(2.6) в координатной форме. Для этого введем в рассмотрение базис декартовой системы координат $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ так, что орт $\vec{e}_1$ направлен параллельно оси горизонтального стержня AC (рис. 2.2). Умножим скалярно уравнения (2.2), (2.4) и (2.6) на орты $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Уравнения (2.3) и (2.45) умножим скалярно на орт $\vec{e}_3$ и запишем:

I:

$$\begin{cases} R_1(C) = 0; \\ R(A) - P - R(E) + R_2(C) = 0; \\ \overrightarrow{CA} \times \vec{R}(A) \cdot \vec{e}_3 + \overrightarrow{CD} \times \vec{P} \cdot \vec{e}_3 + \overrightarrow{CE} \times \vec{R}(E) \cdot \vec{e}_3 = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

II:

$$\begin{cases} -R_1'(C) + R_1(B) = 0; \\ -R_2'(C) + R_2(B) = 0; \\ \overrightarrow{CB} \times \vec{R}(B) \cdot \vec{e}_3 + M_B - M = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} R_1(C) + R_1'(C) = 0; \\ R_2(C) + R_2'(C) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Здесь $\vec{R}(B) = \vec{R}_1(B) + \vec{R}_2(B)$.

Вычислим смешанные произведения векторов в этих уравнениях.

$$\overrightarrow{CA} \times \vec{R}(A) \cdot \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} -CA & 0 & 0 \\ 0 & R(A) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -CA \cdot R(A).$$

$$\overrightarrow{CD} \times \vec{P} \cdot \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} -CD & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = CD \cdot P.$$

$$\overrightarrow{CE} \times \vec{R}(E) \cdot \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} -CE & 0 & 0 \\ 0 & -R(E) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = CE \cdot R(E).$$

$$\overrightarrow{CB} \times \vec{R}(B) \cdot \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} CB \cdot \cos\alpha & CB \cdot \sin\alpha & 0 \\ R_1(B) & R_2(B) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = CB \cdot \cos\alpha \cdot R_2(B) -$$

$$- CB \cdot \sin\alpha \cdot R_1(B).$$

В координатной форме получили 8 уравнений и 9 неизвестных координат реакций связей:

$$R_1(C),\ R_2(C),\ R_1'(C),\ R_2'(C),\ R(A),\ R(E),\ R_1(B),\ R_2(B),\ M_B.$$

Обращаясь к рассмотренным выше вариантам в системе (2.7)-(2.9) следует убрать:

вариант 1 – $R(A)$, вариант 2 – $R(E)$, вариант 3 – M_B.

Во всех случаях останется 8 неизвестных координат реакций связей, которые определяются как решения системы 8 неоднородных алгебраических уравнений. На основании (2.9) число уравнений и число неизвестных можно сократить до шести.

2.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил

Жесткая рама (рис. 2.6.-2.7) закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена к шарнирной опоре на катках.

В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом $P = 25\,kH$. На раму действует пара сил с моментом $M = 60\,kH \cdot м$ и две силы $F_1 = 20\,kH$ и $F_2 = 30\,kH$, направленные под углом к горизонтальной оси.

Определить реакции связей в точках A, B, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять $a = 0{,}5\,м$.

<u>Указания</u>. При решении данной задачи следует учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей.

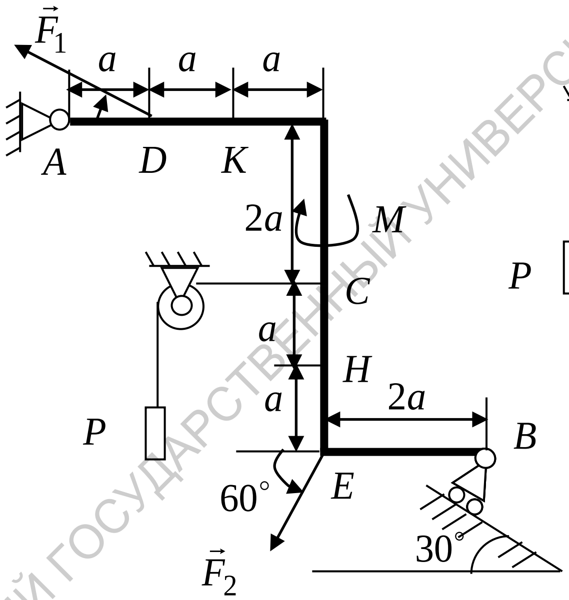

Рис. 2.6

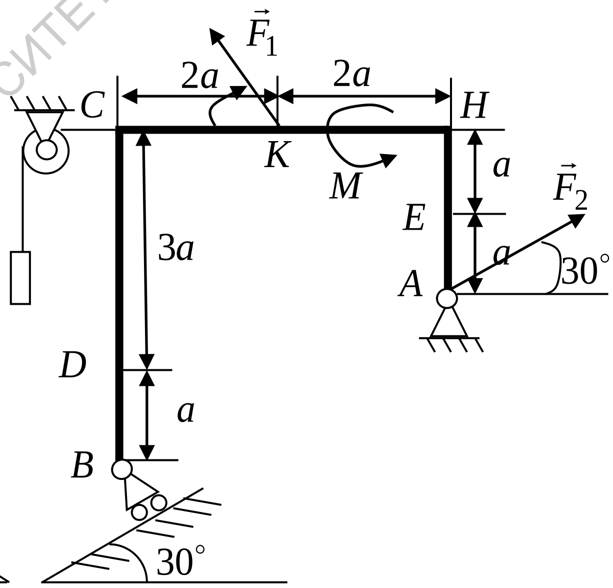

Рис. 2.7

Задачи на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке C или соединены друг с другом шарнирно (рис. 2.8), или свободно опираются друг о друга (рис. 2.9). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке A или шарнир, или жесткая заделка; в точке B или невесомый стержень, или гладкая плоскость, или шарнир; в точке D или невесомый стержень, или шарнирная опора на катках.

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом $M = 60 kH \cdot м$, равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 20 kH / м$ и еще две силы $F_1 = 20\, kH$ и $F_2 = 30\, kH$, направленные под углом к горизонтальной оси.

Определить реакции связей в точках A, B, C, D, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять $a = 0{,}2\, м$.

<u>Указания</u>. При решении данной задачи следует расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой тоже неизвестен.

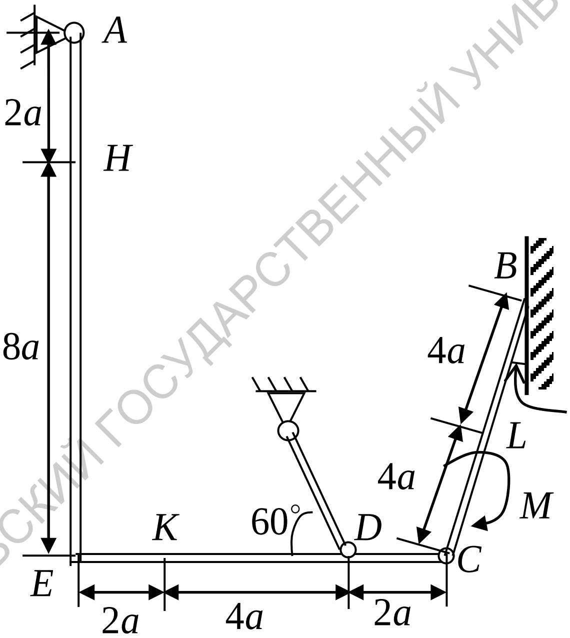

Рис. 2.8

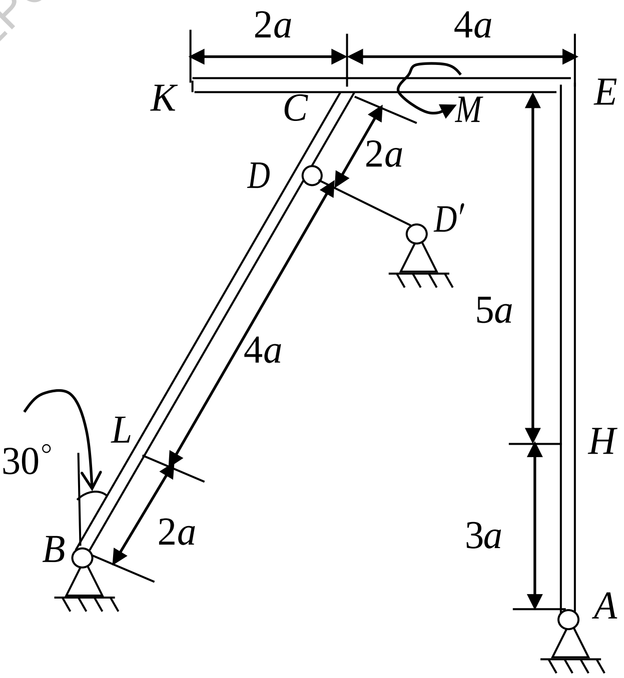

Рис. 2.9

Задачи на равновесие тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке A, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем (рис. 2.10) или же двумя подшипниками в точках A и B и двумя невесомыми стержнями (рис. 2.11). Все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами. Размеры плит указаны на рисунках.

Вес большей плиты $P_1 = 5\,kH$, вес меньшей плиты $P_2 = 3kH$. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость xy горизонтальная). На плиты действует пара сил с моментом $M = 4\,kH \cdot м$, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Точки приложения сил находятся в углах или серединах сторон плит. Сила $F_1 = 6kH$, лежит в плоскости параллельной плоскости xy приложена к точке E и составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с осью x; $F_2 = 8kH$ лежит в плоскости параллельной xz приложена к точке H и составляет угол $\beta = 30^\circ$ с осью Oz; $F_3 = 10kH$ лежит в плоскости параллельной yz приложена к точке K и составляет угол $\gamma = 0^\circ$ с осью Oy. Точки приложения сил находятся в углах или серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках A и B, реакцию стержней. При подсчетах принять $a = 0{,}6м$

<u>Указания</u>. При решении данной задачи следует учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы F часто удобно разложить ее на две составляющие F' и F'', параллельные координатным осям (или на три), тогда по теореме Вариньона: $m_x(F) = m_x(F') + m_x(F'')$ и т.д.

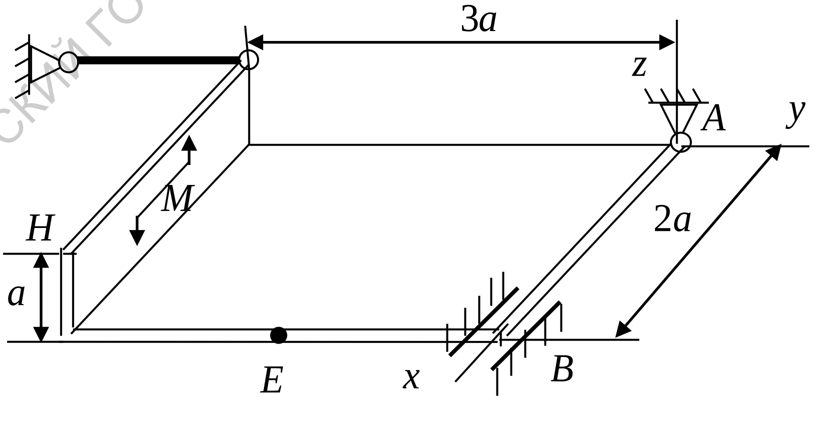

Рис. 2.10

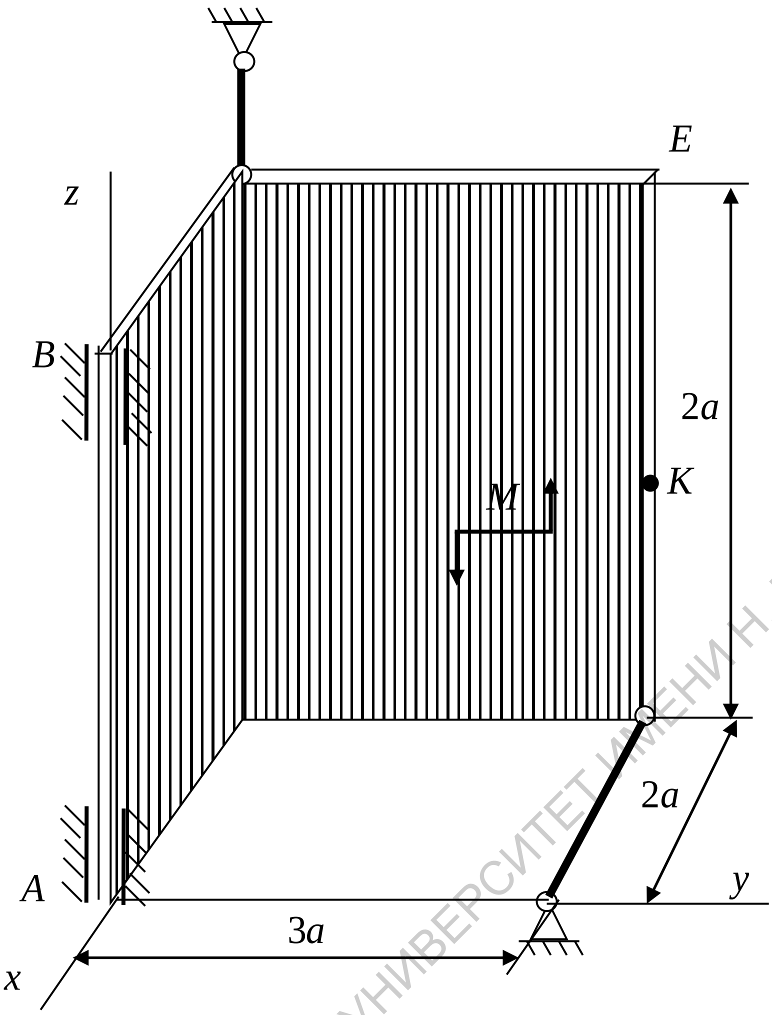

Рис. 2.11

Историческая справка

Симон Стевин (Simon Stevin, 1548-1620) – фламандский механик и инженер. Он начинал как купец из Брюгге. Симон Стевин стал известен прежде всего своей книгой «*Десятая*» (*De Thiende*), изданной на фламандском и французском языках в 1585 г. Именно после неё в Европе началось широкое использование десятичных дробей. Он же доказал закон равновесия тела на наклонной плоскости. Стевин сформулировал правило векторного сложения сил – правда, только для частного случая перпендикулярных сил.

Исаак Ньютон (Newton, 1643-1727) – английский физик и математик, создатель теоретических основ механики и астрономии. Он открыл закон всемирного тяготения, разработал (наряду с Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисления, изобрел зеркальный телескоп и был автором важнейших экспериментальных работ по оптике. Ньютона по праву считают создателем "классической физики".

Исаак Ньютон родился в семье фермера в Вулсторпе, близ Грантема в Англии. С 12 лет начал учиться в Грантемской школе, а в 1661 г. поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета. Окончив колледж в 1665 г., Ньютон получил учёную степень бакалавра. В 1668 г. Ньютону была присвоена степень магистра, а в 1669 г. его учитель знаменитый английский математик И. Барроу передал ему почётную физико-математическую кафедру в университете, которую Ньютон занимал до 1701 г.

В январе 1672 г. Ньютон был избран членом Лондонского королевского общества - английской академии наук. Позднее, в 1703 г., он стал президентом Лондонского королевского общества.

В 1687 г. он опубликовал свой грандиозный труд "Математические начала натуральной философии" ("Начала"), котором обобщил результаты, полученные его предшественниками - Г. Галилеем, И. Кеплером, Р. Декартом, Х. Гюйгенсом, Дж. Борелли, Р. Гуком, Э. Галлеем, и свои собственные исследования.

В 1695 г. ученый был назначен на должность смотрителя Монетного двора. Ньютону было поручено руководить перечеканкой всей английской монеты. Ему удалось привести в порядок расстроенное монетное дело Англии, и за это он получил в 1699 г. пожизненное высокооплачиваемое звание директора Монетного двора.

Труды Ньютона получили высокую оценку и за границами Англии - он был избран иностранным членом Парижской академии наук. В 1705 г. за научные труды он возведён в дворянское достоинство.

Он впервые создал единую стройную систему земной и небесной механики, которая легла в основу всей классической физики. Здесь были даны определения исходных понятий - количества материи, эквивалентного массе, плотности; количества движения, эквивалентного импульсу, и различных видов силы.

Ньютон умер в 1727 г. в Кенсингтоне и был похоронен в английском национальном пантеоне – Вестминстерском аббатстве.

Пьер Вариньон (Petrre Varignon, 1654-1722) – французский математик и механик, член Парижской Академии наук, профессор математики коллежа Мазарини (1688), профессор Коллеж де Франс (с 1704). Обучался в иезуитском коллеже и университете в Кане, где стал магистром в 1682 году.

Основной вклад Вариньон сделал в статику и механику. Кроме того, труды Вариньона посвящены анализу бесконечно малых, геометрии, гидромеханике. Одним из первых Вариньон был пропагандистом дифференциального исчисления во Франции. В своей работе «Проект новой механики…» (1687) Вариньон дал точную формулировку закона параллелограмма сил, развил понятие момента сил и вывел теорему, получившую имя Вариньона. В работе «Новая механика или статика, проект, который был дан в 1687» Вариньон дал систематическое изложение учения о сложении и разложении сил, о моментах сил и о правилах оперирования с ними.

Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813).

Родился в Турине в итало-французской семье. В 19 лет профессор математики артиллерийской школы в Турине. В 1766 году Фридрих II пригласил Лагранжа в Берлин. В Берлине Лагранж работал до смерти Фридриха II (1786). В 1786 году переезжает в Париж. В Париже Лагранж становится профессором Нормальной школы (1795), а затем Политехнической школы (1797).

Наиболее ценный труд Лагранжа – «Аналитическая механика». В нем Лагранж сформулировал различные принципы статики: «Статика – это наука о равновесии сил. Под силой мы понимаем, вообще говоря, любую причину, которая сообщает или стремится сообщить движение телам, к которым мы представляем себе ее приложенной; поэтому силу следует оценивать по величине движения, которое она вызывает или стремится вызвать…..

Равновесие получается в результате уничтожения нескольких сил, которые борются и взаимно сводят на нет действие, производимое ими друг на друга; статика имеет своей целью дать законы, согласно которым происходит это уничтожение. Эти законы основаны на общих принципах, которые можно свести к трем: принципу рычага, принципу сложения сил и принципу виртуальных скоростей».

Луи Пуансо (Louis Poinsot, 1777-1859) – французский математик и механик, академик Парижской Академии наук (1813), пэр Франции (1846), сенатор (1852).

Учился в Париже в лицее Людовика Великого, Политехнической школе, Школе мостов и дорог. Работал преподавателем математики в Лицее Бонапарта (1804-1809), профессором анализа и механики в Политехнической школе (до 1816). Являлся генеральным инспектором Французского университета, членом Королевского совета народного просвещения (с 1840).

Для научной методологии Пуансо-механика характерно последовательное применение *строгой математической теории* к конкретным задачам, берущим начало из практики. Пуансо предпочитает опираться на *геометрическую трактовку* таких вопросов.

В области геометрической статики главнейшими трудами Пуансо стали мемуар «О сложении моментов и площадей в механике» (1803) и трактат «Начала статики» (1803). Этот трактат многократно переиздавался и более столетия оставался учебником, в котором геометрическая статика впервые была представлена так, как теперь ее излагают в высших учебных заведениях.

Трактат Пуансо «Новая теория вращения тел» (1834) добавили к представлению о силе представление о вращающем моменте (паре).

Список рекомендованной литературы

Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики [Текст]: учеб. пособие: [в 2 ч.] / Н. Н. Бухгольц. - 10-е изд., стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2009 - - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0926-6. Ч. 1 : Кинематика, статика, динамика материальной точки. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2009. - 467, [13] с. - Библиогр.: с. 461. - ISBN 978-5-8114-0919-8 (Ч. 1).

Лойцянский, Л.Г. Курс теоретической механики [Текст]: учеб. пособие: в 2 т. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. - Москва: Дрофа, 2006. - (Высшее образование) (Классики отечественной науки). - ISBN 5-358-01275-3. Т. 2: Динамика. - 7-е изд., испр. и доп. - Москва: Дрофа, 2006. - 719, [1] с.: рис., фот. - Библиогр.: с. 706-709 (44 назв.). - Предм. указ.: с. 710-714. - Имен. указ.: с. 715-716. - ISBN 5-358-01277-X (т. 2) (в пер.).

Белов, М.И. Теоретическая механика [Текст]: Учебное пособие / М. И. Белов, Б. В. Пылаев. - 2. - Москва: Издательский Центр РИОР; Москва: ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2017. - 336 с. - ISBN 978-5-369-01574-2. ЭБС «Инфра-М».

Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч.1: Учеб. пособие для вузов. Москва: Наука, 1972.

Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Ч.1. Учеб. пособие. Москва: Наука, 1979.

Ишлинский, А.Ю. Классическая механика и силы инерции. Москва: Наука, 1987, 319 с.

Арнольд В.И. Математические методы классической механики. Москва: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1974, 431 с.

Лурье А.И. Аналитическая механика. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961, 823 с.

Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. Санкт-Петербург: Нестор, 2001, 275 с.

Лагранж, Ж.-Л. Аналитическая механика. Т.1. М.-Л.: ОНТИ, 1938, 348с.

Лапунов, А.М. Лекции по теоретической механике. Киев: Наукова думка, 1982, 631с..

Леви-Чевита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т.1. М.: ПЛ, 1952, 387с..

Ньютон, И. Математические начала натуральной философии. Из собраний трудов акад. А.Н.Крылова, Т.1. М.-Л.: Изд. АНСССР, 1936.