

Конспект лекций по дисциплине «Матричная оптика»

Курс лекций ориентирован на магистров обучающихся по направлению 03.04.02 «Физика», профиль «Физика оптических и лазерных явлений».

Также данный курс лекций может быть полезен бакалаврам обучающимся по направлению 12.03.04 "Биотехнические системы и технологии", профиль «Медицинская фотоника» (курс лекций по дисциплине «Основы поляризационной оптики»).

Лектор – профессор Г.В. Симоненко

Целями освоения дисциплины являются углубление и расширение знаний в области новейших перспективных направлений в оптических технологиях, современных методов моделирования оптических систем.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- знать: основные матричные методы расчета современных оптических систем
основные программные средства для моделирования оптических систем; средства изучения библиографии и средства ориентации в профессиональных источниках информации (журналы, монографии, сайты и т.д.);
- уметь: самостоятельно выбрать и аргументировано обосновать применения того или иного матричного метода для реализации решения конкретной физической или технической задачи; использовать основные программные средства для моделирования оптических систем; использовать научную аргументацию собственных прогнозов и предпочтений в путях реализации технических решений; использовать библиографию и ориентироваться в профессиональных источниках информации (журналы, монографии, сайты и т.д.);
- владеть: навыками использования основных матричных методов для моделирования оптических систем; навыками научной аргументации собственных прогнозов и предпочтений в путях реализации технических решений; навыками изучения библиографии, навыками ориентации в профессиональных источниках информации (журналы, монографии, сайты и т.д.).

Рекомендуемая литература

- Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. - М.: Мир, 1981. –584 С.
- ЯривА., Юх П. Оптические волны в кристаллах. – М.: Мир, 1987. –616 С.
- Yakovlev Dmitry A., Chigrinov Vladimir G., Kwok Hoi-Sing Modeling and optimization of LCD optical performance. - John Wiley & Sons, Ltd. 2015. 554 p.

Содержание учебной дисциплины

Раздел 1. Введение. Понятие модели и моделирования. Типы моделей. Методы моделирования. Основные методы моделирования в оптике.

Раздел 2. Матричные методы расчета в геометрической оптике.

Раздел 3. Матричный формализм Джонса для расчета оптических систем. Распространение света в слоистых анизотропных средах.

Матрицы Абелеса для расчета оптических характеристик слоистых планарных изотропных структур.

Раздел 4. Метод матриц Мюллера и векторов Стокса для расчета оптических систем.

Раздел 5. Расчет оптических характеристик слоистых планарных анизотропных структур с помощью комплексных матриц 4×4 .

Раздел 6. Матричные методы описания оптических явлений в жидких кристаллах и биологических средах.

МОДЕЛЬ В ФИЗИКЕ

Французское слово "modele" происходит от латинского "modulus", что означает "мера, образец". Содержание понятий "модель", "моделирование" в различных сферах знания и человеческой деятельности чрезвычайно разнообразно. Общее состоит в том, что модель в том или ином смысле, более или менее полно имитирует объект. Различают **модели исследовательские** (о них, собственно, идет речь в данном случае) и **модели рабочие** (автопилот, протез, кукла, деньги и т. п.).

- . Исследовательские модели можно достаточно условно разделить на две группы: **экспериментальные** (предметные) и **теоретические** (умозрительные). Экспериментальные модели представляют собой реально осуществляемые устройства двух основных типов. Модели первого типа имеют ту же природу, что моделируемый объект, однако воспроизводят его упрощенно и, как правило, в измененном масштабе. Эти модели создаются на основе теории подобия и именуются обычно "**физическими**" (нам представляется разумным избегать употребления этого термина). Экспериментальные модели второго типа - это **аналоговые модели**. Они основаны на совпадении математического описания различных явлений.

- . В настоящее время существенно соответствие между физической точностью модели или теории и точностью математических расчетов. Нарушение такой уравновешенности может привести к неправильной оценке всей работы. Именно оценка этого соответствия и является важнейшим элементом современной физической работы, опирающейся на численные расчеты или вычислительный эксперимент. Следует отметить, что одной и той же физической теории может соответствовать различные математические аппараты, которые следует выбирать для оптимального решения поставленной задачи.

ЭТАПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

- **Постановка задачи**
- **Построение математической модели**
- **Реализация математической модели**
- **Разработка алгоритма решения**
- **Программирование**
- **Отладка программы**
- **Проведение расчетов**
- **Анализ результатов**

ОШИБКИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

1. ошибки в исходной информации;
2. ошибки ограничения;
3. ошибки округления

Матричные методы в параксиальной оптике

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

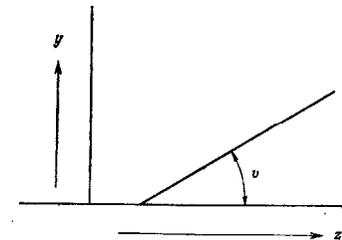
Основные приближения

- Первое из них представляет собой основное допущение всей геометрической оптики и состоит в том, что длина волны света считается пренебрежимо малой и что распространение света можно описывать с помощью отдельных лучей, а не на языке волновых фронтов
- Второе наше приближение состоит в том, что мы будем рассматривать лишь параксиальные лучи, — лучи, которые при своем прохождении через оптическую систему остаются близкими к ее оси симметрии и почти параллельными ей.

Матрицы преобразования лучей

Введем общепринятую в современной оптике систему декартовых координат: ось Oz , совпадающую с оптической осью системы, а также с главным направлением, вдоль которого распространяются лучи света, направим слева направо; ось Oy будем считать расположенной в плоскости страницы и направленной вверх, а ось Ox перпендикулярной этой плоскости и направленной от читателя. Траектории луча, поскольку он проходит через различные преломляющие поверхности системы, будет состоять из последовательности прямых линий. Каждая из этих прямых определяется координатами одной принадлежащей ей точки и углом, который составляет данная прямая линия с осью Oz . Выберем заранее любую плоскость $z = \text{const}$, перпендикулярную оси Oz и назовем ее опорной плоскостью (ОП). Тогда луч можно определить по отношению к опорной плоскости двумя параметрами: высотой, на которой этот луч пересекает опорную плоскость, и углом, который он составляет с осью Oz . Угол v измеряется в радианах и считается положительным, если он соответствует вращению против часовой стрелки от положительного направления оси z к направлению, в котором свет распространяется

$V = nv$ – удобно использовать, т.к. по закону Снелеуса V – инвариант



Поскольку луч проходит через систему преломляющих линз, то для исследования его поведения необходимо рассмотреть только два основных процесса:

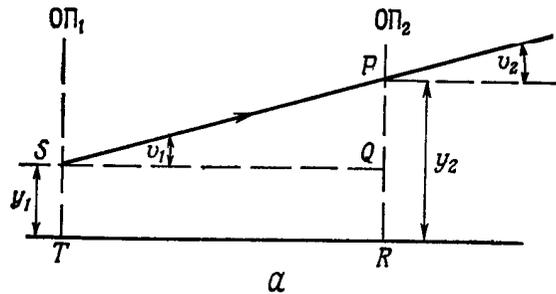
- 1) Перемещение между двумя преломляющими поверхностями — оптический промежуток. На таком участке пути луч, предоставленный самому себе, просто проходит по прямой линии от одной преломляющей поверхности к другой. Область между поверхностями характеризуется ее толщиной t и показателем преломления n среды, через которую проходит луч.
- 2) Преломление на граничной поверхности между двумя областями с различными показателями преломления.

Рассмотрим процесс распространения луча от одной опорной поверхности ОП₁ и второй ОП₂. Вначале луч пересекает ОП₁ и имеет на ней значения параметров y_1 и V_1 , затем он проходит через оптический элемент и, наконец, достигает ОП₂, на которой он характеризуется высотой y_2 и углом V_2 .

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

Причем $(AD - BC) = 1$ — матрица, описывающая оптическую систему унитарная.

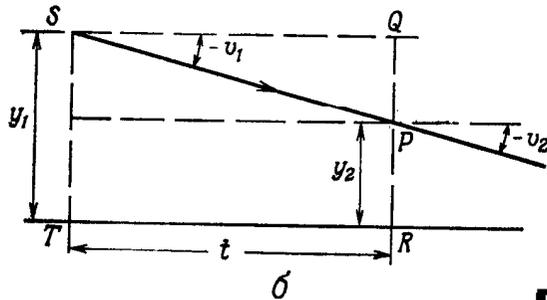
Матрица перемещения



$$y_2 = RP = RQ + QP = TS + SQ \operatorname{tg}(\angle PSQ) = y_1 + t \operatorname{tg}(v_1) = y_1 + tv_1$$

$$y_2 = y_1 + (t/n)(nv_1) = 1y_1 + TV_1,$$

$T = (t/n)$ — приведенная толщина оптического промежутка.

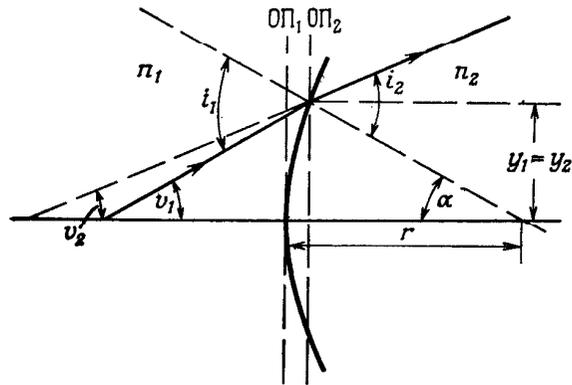


$$V_2 = nv_2 = nv_1 = 0y_1 + 1V_1.$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}. \quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & T_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & T_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & T_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sum_i T_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица преломления



$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2, \quad n_1 i_1 = n_2 i_2.$$

$$i_1 = v_1 + \alpha = v_1 + y_1/r \quad \text{и} \quad i_2 = v_2 + \alpha = v_2 + y_1/r.$$

$$n_1 (v_1 + y_1/r) = n_2 (v_2 + y_1/r),$$

$$V_1 + n_1 y_1/r = V_2 + n_2 y_1/r.$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(n_2 - n_1)/r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(n_2 - n_1)/r & 1 \end{bmatrix}$$

$(n_2 - n_1)/r$ оптическая сила поверхности

Тонкая линза

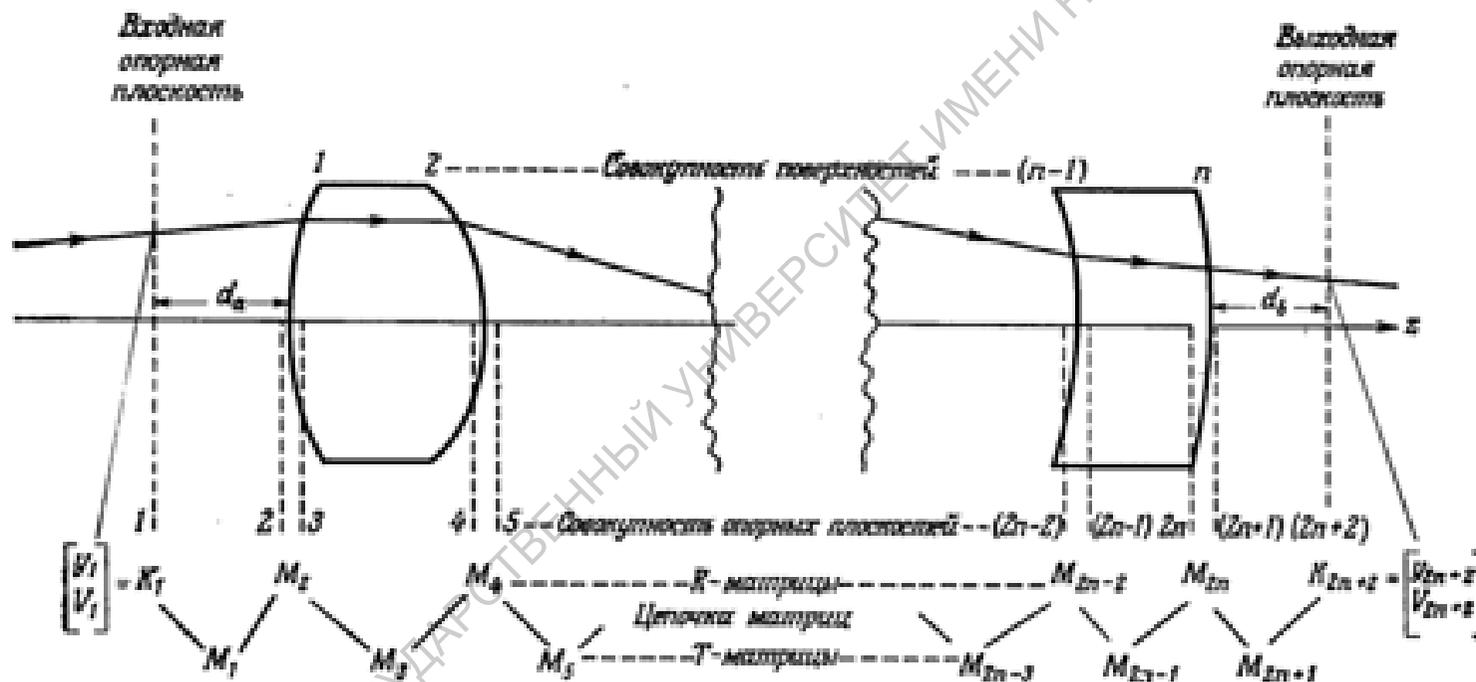
$$\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(P_1 + P_2) & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2.$$

$$P = P_1 + P_2 = (n - 1)/r_1 + (1 - n)/r_2 = (n - 1)(1/r_1 - 1/r_2) = 1/f.$$

$$\mathcal{R}\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ -P & (1 - PT) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{T}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - PT) & T \\ -P & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица преобразования для оптической системы

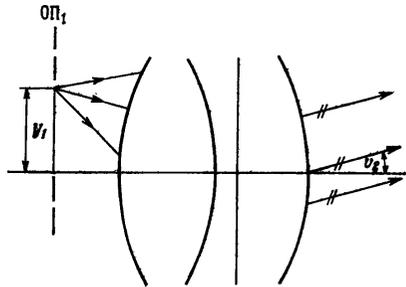


$$K_{2n+2} = (M_{2n+1} \ M_{2n} \ M_{2n-1} \ \dots \ M_2 \ M_1 \ M_0) K_1 = MK_1,$$

$$\text{где } M = (M_{2n+1} \ M_{2n} \ M_{2n-1} \ \dots \ M_2 \ M_1 \ M_0) -$$

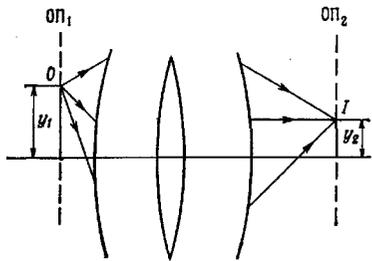
произведенные матрицы, умножаются в обратном порядке

Матричное описание свойств оптической системы

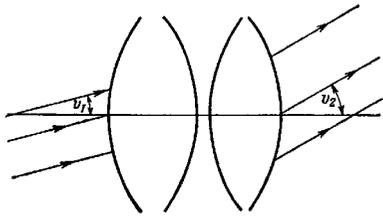


$$\begin{bmatrix} y_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

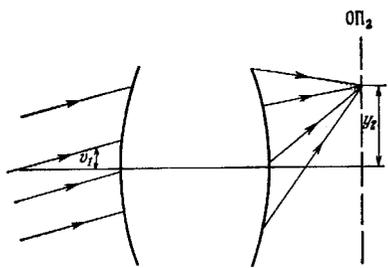
Если $D = 0$, то уравнение для V_2 принимает вид $V_2 = Cy_1 + 0V_1 = Cy_1$. Это значит, что все лучи, выходящие из одной и той же точки y_1 входной опорной плоскости, выйдут из выходной опорной плоскости под одним и тем же углом $V_2 = Cy_1$ к оси системы независимо от того, под каким углом V_1 эти лучи входили в систему. Отсюда следует, что входная плоскость OP_1 должна быть первой фокальной плоскостью системы.



Если $B = 0$, то уравнение для y_2 записывается следующим образом: $y_2 = Ay_1 + 0V_1 = Ay_1$. Это значит, что все лучи, покидающие точку O с координатой y_1 на плоскости OP_1 пройдут через одну и ту же точку I с координатой y_2 на плоскости OP_2 . Следовательно, точки O и I являются соответственно точкой-объектом и точкой-изображением, а плоскости OP_1 и OP_2 — сопряженными плоскостями. Кроме того, в данных условиях величина $A = y_2/y_1$ дает увеличение системы.



Пусть $C = 0$, тогда $y_2 = DV_1$. Это означает, что все лучи, которые входят в систему параллельно друг другу (например, под углом V_1 к оптической оси), на выходе оптической системы дадут также параллельный пучок лучей, но относительно оси его угол распространения изменится и станет равным V_2 . Такая система линз, которая преобразует параллельный пучок лучей в параллельный же, но распространяющийся под другим углом, называется афокальной или телескопической системой. В этом случае величина $(n_1 D / n_2) = (V_2 / V_1)$ представляет собой угловое увеличение оптической системы.



В случае $A = 0$ уравнение для y_2 записывается в виде $y_2 = BV_1$. Это значит, что лучи, входящие в систему под одним и тем же углом V_1 , пройдут через одну и ту же точку (с координатой y_2) на выходной плоскости OP_2 . Таким образом, система собирает пучок параллельных лучей в фокус в точках, расположенных на плоскости OP_2 , т. е. OP_2 является второй фокальной плоскостью оптической системы.

Наконец, нужно помнить, что если какая-либо из величин A или D в матрице преобразования лучей обращается в нуль, то условие $AD - BC = 1$ требует, чтобы выполнялось равенство $BC = -1$. Аналогично если в нуль обращается B или C , то A должно быть величиной, обратной D .

Расположение кардинальных точек системы

Описываемый параметр системы	Измеряемый от до	Функция от матричных элементов	Частный случай $n_1 = n_2 = 1$
Первый фокус	ОП ₁ F_1	$n_1 D / C$	D / C
Первое фокусное расстояние	F_1 H_1	$- n_1 / C$	$- 1 / C$
Первая главная точка	ОП ₁ H_1	$n_1 (D - 1) / C$	$(D - 1) / C$
Первая узловая точка	ОП ₁ L_1	$(D n_1 - n_2) / C$	$(D - 1) / C$
Второй фокус	ОП ₂ F_2	$- n_2 A / C$	$- A / C$
Второе фокусное расстояние	H_2 F_2	$- n_2 / C$	$- 1 / C$
Вторая главная точка	ОП ₂ H_2	$n_2 (1 - A) / C$	$(1 - A) / C$
Вторая узловая точка	ОП ₂ L_2	$(n_1 - A n_2) / C$	$(1 - A) / C$

Матричные способы описания состояния световой волны

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Плоская монохроматическая волна

Вектор Джонса

Пусть световая волна распространяется вдоль оси Oz прямоугольной системы координат XYZ

$$\vec{E}(z, t) = \vec{g}E_x(z, t) + \vec{j}E_y(z, t)$$

$$E_{x,y}(z, t) = E_{0x,y} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \delta_{x,y}), E_{x,y}(z, t) = E_{x,y} e^{-i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \delta_{x,y})} + K.C.$$

$$E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$XYZ \rightarrow X'Y'Z$, угол – θ

$$\begin{bmatrix} E_{X'} \\ E_{Y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_X \\ E_Y \end{bmatrix}$$

Квазимонохроматическая волна и частично – поляризованный свет Матрица когерентности

$$J = \langle E_{x,y} \times E_{x,y}^{\oplus} \rangle = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix},$$

где « \times » означает произведение вектора Джонса $E_{x,y}$ на эрмитово сопряженный вектор $E_{x,y}^{\oplus}$.

Скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по времени.

Элементы матрицы когерентности полностью определяют состояние световой квазимонохроматической волны: ее интенсивность и состояние поляризации. Диагональные элементы матрицы J_{xx} и J_{yy} являются действительными и определяют интенсивности линейно поляризованных в X - и Y - направлениях компонент волны, а элементы J_{xy} и J_{yx} – корреляцию между этими компонентами.

Полная интенсивность I волны является следом матрицы когерентности J :

$$I = J_{xx} + J_{yy} = \text{Sp}(J).$$

а характеристики эллипса поляризации (азимут χ и эллиптичность ε) соответственно равны:

$$\chi = \text{arctg}((J_{xy} + J_{yx}) / (J_{xy} - J_{yx})),$$

$$\varepsilon = \text{arcsin}(-i(J_{xy} - J_{yx}) / (J_{xy} + J_{yx}) / O).$$

O – степень поляризации световой волны, которая определяется следующим образом:

$$O = (1 - \det(J) / \text{Sp}(J))^{1/2},$$

Вектор Стокса

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx} \\ J_{xy} \\ J_{yx} \\ J_{yy} \end{bmatrix}$$

S_0 – полная интенсивность; S_1 – разница интенсивностей компонент поля поляризованных в направлении x и y ; S_2 – разница интенсивностей компонент поля поляризованных в направлении 45° и -45° к оси x ; S_3 – разница интенсивностей компонент поля поляризованных по правому и левому кругу.

Характеристики эллипса поляризации

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{S_2}{S_1} \right),$$

$$O = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \left(\frac{S_3}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}} \right)$$

Преобразование вектора при переходе к другой системе координат

$$S_{\text{новая}} = R(\alpha) S_{\text{старая}};$$

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Вектор Джонса – описание
монохроматической волны

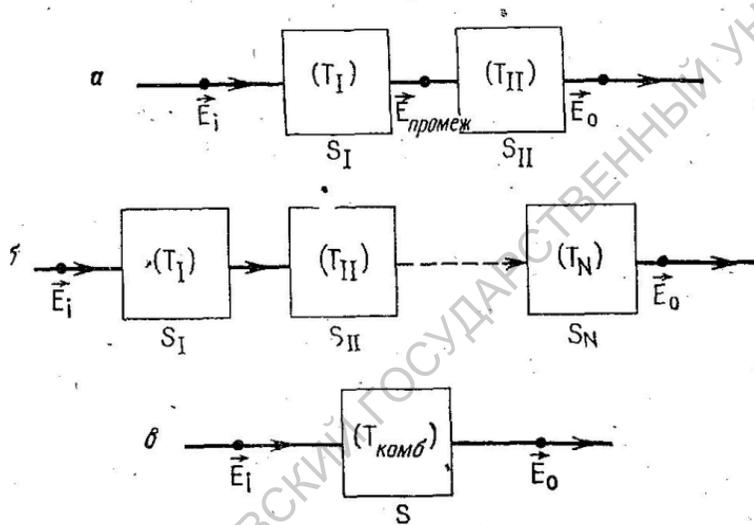
Матрица когерентности – описание
квазимонохроматической волны

Вектор Стокса – описание
квазимонохроматической волны

Матричный формализм Джонса

$$\begin{bmatrix} E_{outx} \\ E_{outy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{inx} \\ E_{iny} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{out} = \mathbf{T}\mathbf{E}_{in}$$



$$\mathbf{T}_{sys} = \mathbf{T}_N \mathbf{T}_{N-1} \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Матрицы Джонса основных оптических элементов

Изотропный слой	$\begin{bmatrix} e^{-i2\pi dn/\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i2\pi dn/\lambda} \end{bmatrix}$
Фазовая пластинка	$\begin{bmatrix} e^{-i2\pi n_e d/\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i2\pi n_o d/\lambda} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{-i\pi(n_e-n_o)d/\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi(n_o-n_e)d/\lambda} \end{bmatrix}$
Фазовая пластинка с поглощением	$\begin{bmatrix} e^{-i(2\pi(n_e-ik_e)d/\lambda)} & 0 \\ 0 & e^{-i2\pi(n_o-ik_o)d/\lambda} \end{bmatrix}$
Изотропный слой с оптической активностью	$\begin{bmatrix} \cos(\alpha d) & \sin(\alpha d) \\ -\sin(\alpha d) & \cos(\alpha d) \end{bmatrix}$

Преобразование матрицы Джонса при смене базиса

$$\begin{bmatrix} T_{x'x'} & T_{x'y'} \\ T_{y'x'} & T_{y'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi \\ -\sin \xi & \cos \xi \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} T_{11}^{\text{круг}} & T_{12}^{\text{круг}} \\ T_{21}^{\text{круг}} & T_{22}^{\text{круг}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$$

Преобразование матрицы когерентности

$$\mathbf{J}_{\text{out}} = \mathbf{T} \mathbf{J}_{\text{in}} \mathbf{T}^+$$

Метод 2×2 матриц для изучения
отражения и пропускания света
многослойными изотропными
структурами

Рассмотрим слоистую структуру, состоящую из набора $1, 2, \dots, m$ параллельных слоев, помещенных между двумя полубесконечными средами с индексами 0 и $(m+1)$, соответственно. Пусть все среды линейны, однородны и изотропны. Каждый слой с номером j описывается показателем преломления N_j и толщиной d_j . Полное поле внутри каждого слоя складывается из двух волн, распространяющихся вперед (индекс «+») и назад (индекс «-»). Волновые вектора всех плоских волн лежат в одной плоскости и образуют некоторые углы с осью Z прямоугольной системы координат. Если падающая волна линейно-поляризована, то все плоские волны, распространяющиеся в системе также линейно-поляризованы. В дальнейшем будем считать, что все волны обладают либо p - либо s - поляризацией.

Пусть $E^+(z)$ и $E^-(z)$ обозначают комплексные амплитуды плоских волн, распространяющихся в прямом и обратном направлении в произвольной плоскости z .

$$E(z) = \begin{bmatrix} E^+(z) \\ E^-(z) \end{bmatrix}$$

Рассмотрим поля в двух разных плоскостях z' и z'' , параллельных границам слоя, то

$$\begin{bmatrix} E^+(z') \\ E^-(z') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^+(z'') \\ E^-(z'') \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}(z') = \mathbf{S}\mathbf{E}(z'').$$

Для границы раздела между слоями $(j-1)$ и j

$$\mathbf{E}(z_j - 0) = \mathbf{I}_{(j-1)j} \mathbf{E}(z_j + 0)$$

z' и z'' – внутри слоя j

$$\mathbf{E}(z_j + 0) = \mathbf{L}_j \mathbf{E}(z_j + d - 0)$$

Очевидно, что общая матрица, связывающая вектора полных полей на входе и выходе системы связаны простым соотношением

$$\mathbf{E}(z_1 - 0) = \mathbf{S} \mathbf{E}(z_{m+1} + 0)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{I}_{01} \mathbf{L}_1 \mathbf{I}_{12} \mathbf{L}_2 \dots \mathbf{I}_{(j-1)j} \mathbf{L}_j \dots \mathbf{L}_m \mathbf{I}_{m(m+1)}$$

Найдем матрицу границы раздела

Пусть есть граница раздела ab и свет падает из a в b .

$$E_b^+ = t_{ab} E_a^+$$

$$E_a^- = r_{ab} E_a^+$$

$$\begin{bmatrix} E_a^+ \\ E_a^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a^- \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{11} = 1/t_{ab}$$

$$I_{21} = r_{ab}/t_{ab}$$

Пусть есть граница раздела ab и свет падает из b в a .

$$E_b^+ = r_{ba} E_b^+$$

$$E_a^- = t_{ba} E_b^+$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ E_a^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_b^+ \\ E_b^- \end{bmatrix}$$

$$I_{12} = -r_{ba}/t_{ab}$$

$$I_{22} = (t_{ab}t_{ba} - r_{ab}r_{ba})/t_{ab}$$

$$r_{ab} = -r_{ba}, t_{ba} = (1 - r_{ab}^2) / t_{ab}$$

$$\mathbf{I}_{ab} = \frac{1}{t_{ab}} \begin{bmatrix} 1 & r_{ab} \\ r_{ab} & 1 \end{bmatrix}.$$

Френелевские коэффициенты отражения и пропускания для границы раздела должны быть рассчитаны, исходя из значений комплексных показателей преломления рассматриваемых сред и значений угла падения в данной точке.

Очевидно, что матрицу преобразования для однородного слоя \mathbf{L} можно записать в виде

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} e^{i\beta} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} \end{bmatrix}, \beta = \frac{2\pi dN}{\lambda} \cos \varphi$$

Матрицу \mathbf{S} называют матрицей рассеяния слоистой структуры. Эта матрица должна быть рассчитана для каждой из двух поляризаций s- и p – отдельно. Тогда коэффициенты отражения и пропускания для этих типов поляризаций принимают вид:

$$r_p = \frac{S_{21p}}{S_{11p}}, r_s = \frac{S_{21s}}{S_{11s}}$$

$$t_p = \frac{1}{S_{11p}}, t_s = \frac{1}{S_{11s}}$$

Пример двух пленок 1 и 2 между полубесконечной средой (0) и полубесконечной подложкой (3).

$$\mathbf{S} = \mathbf{I}_{01} \mathbf{L}_1 \mathbf{I}_{12} \mathbf{L}_2 \mathbf{I}_{23}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{t_{01} t_{12} t_{23}} \begin{bmatrix} 1 & r_{01} \\ r_{01} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\beta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\beta_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r_{23} \\ r_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

$$r = \frac{(r_{01} + r_{12}e^{-i2\beta_1}) + (r_{01}r_{12} + e^{-i2\beta_1})r_{23}e^{-i2\beta_2}}{(1 + r_{01}r_{12}e^{-i2\beta_1}) + (r_{12} + r_{01}e^{-i2\beta_1})r_{23}e^{-i2\beta_2}}$$

$$t = \frac{t_{01}t_{12}t_{23}e^{-i(\beta_1+\beta_2)}}{(1 + r_{01}r_{12}e^{-i2\beta_1}) + (r_{12} + r_{01}e^{-i2\beta_1})r_{23}e^{-i2\beta_2}}$$

Коэффициенты отражения и пропускания вычисляются для каждой из поляризаций s или p отдельно.

Матричный формализм Мюллера

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Для случая линейной оптической системы вектор Стокса световой волны преобразуется с помощью действительной матрицы 4×4, которая называется матрицей Мюллера.

$$\begin{bmatrix} S_0^{out} \\ S_1^{out} \\ S_2^{out} \\ S_3^{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0^{in} \\ S_1^{in} \\ S_2^{in} \\ S_3^{in} \end{bmatrix}, \mathbf{S}^{out} = \mathbf{M}\mathbf{S}^{in}$$

out – выходной, *in* – входной

Формализм векторов Стокса, преобразуемых с помощью матриц Мюллера пригоден для описания распространения света как для не деполяризующих оптических систем, так и для деполяризующих. Деполяризующая оптическая система характеризуется тем, что свет вышедший из нее имеет степень поляризации меньшую, чем падающий на нее. Деполяризующая оптическая система – более общий случай оптических систем.

Для не деполяризующей оптической системы матрицы Джонса и Мюллера связаны между собой следующими соотношениями:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}(\mathbf{T} \times \mathbf{T}^*) \mathbf{A}^{-1},$$

Матрица \mathbf{A} – это комплексная матрица связывающая между собой вектор когерентности и вектор Стокса. В явном виде это матричное соотношение можно записать следующим образом:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(E_1 + E_2 + E_3 + E_4) & \frac{1}{2}(E_1 - E_2 - E_3 + E_4) & F_{13} + F_{42} & -G_{13} - G_{42} \\ \frac{1}{2}(E_1 - E_2 + E_3 - E_4) & \frac{1}{2}(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) & F_{13} - F_{42} & -G_{13} + G_{42} \\ F_{14} + F_{32} & F_{14} - F_{32} & F_{12} + F_{34} & -G_{12} + G_{34} \\ G_{14} + G_{32} & G_{14} - G_{32} & G_{12} + G_{34} & F_{12} - F_{34} \end{bmatrix}$$

$$E_i = T_i T_i^*, i = 1, 2, 3, 4$$

$$F_{ij} = F_{ji} = \operatorname{Re}(T_i T_j^*), i, j = 1, 2, 3, 4$$

$$G_{ij} = -G_{ji} = \operatorname{Im}(T_i T_j^*), i, j = 1, 2, 3, 4$$

$$T_1 = t_{11}, T_2 = t_{22}, T_3 = t_{12}, T_4 = t_{21}$$

t_{ij} – элементы матрицы Джонса оптической системы.

При преобразовании системы координат матрица Мюллера преобразуется по следующему правилу:

$$\mathbf{M}_{x'y'z'} = \mathbf{R}^{-1}(\alpha) \mathbf{M}_{xyz} \mathbf{R}(\alpha),$$

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрицы Мюллера некоторых оптических элементов

Идеальный линейный поляризатор, ориентированный под углом θ

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Фазовая пластинка с разностью фаз δ , быстрая ось которой ориентирована под углом θ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \cos \delta & \cos 2\theta \sin 2\theta (1 - \cos \delta) & -\sin 2\theta \sin \delta \\ 0 & \cos 2\theta \sin 2\theta (1 - \cos \delta) & \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta (1 - \cos \delta) & \cos 2\theta \sin \delta \\ 0 & \sin 2\theta \sin \delta & -\cos 2\theta \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix}$$

Ротатор на угол α

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица Мюллера оптической системы, состоящей из различных оптических элементов

Пусть оптическая система состоит из n оптических элементов. Каждый i – оптический элемент характеризуется своей матрицей Мюллера \mathbf{M}_i . Тогда вся оптическая система в целом описывается следующей матрицей Мюллера:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_n \mathbf{M}_{n-1} \dots \mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i-1} \dots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1$$

Порядок прохождения оптических элементов следующий: 1-ый элемент- 2-ой элемент-...-($i - 1$)- й элемент- i -й элемент-...($n-1$)-й элемент- n – й элемент. Если переставляются местами оптические элементы, то меняется порядок перемножения соответствующих матриц Мюллера.

Описание распространения света через деполяризующую систему

В качестве примера рассмотрим отражение света от деполяризующей поверхности. Если зеркало не деполяризует падающее на него излучение, то этот оптический элемент описывается следующей матрицей Мюллера:

$$\mathbf{R}_{\text{Френ}} = \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\text{Френ}} \times \mathbf{r}_{\text{Френ}}^*) \mathbf{A}^{-1}$$
$$\mathbf{r}_{\text{Френ}} = \begin{bmatrix} r_s & 0 \\ 0 & r_p \end{bmatrix}$$

r_s, r_p – френелевские амплитудные коэффициенты отражения. Если поверхность отражает свет так, что степень деполяризации излучения увеличивается, то для такого случая введем следующую модель для вычисления матрицы Мюллера деполяризующего зеркала:

$$\mathbf{R}_{\text{деп}} = [(1 - \Sigma)\mathbf{I} + \Sigma\Phi] \mathbf{R}_{\text{Френ}}$$

Σ - степень деполяризации зеркала, \mathbf{I} – единичная матрица, Φ - матрица идеального деполяризатора

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Алгоритм расчета для оптических систем с деполяризацией

- 1) Разделить оптическую систему на отдельные деполяризующие и не деполяризующие элементы;
- 2) Для не деполяризующих элементов рассчитать соответствующие матрицы Мюллера, используя основные оптические элементы или матрицы Джонса;
- 3) Рассчитать матрицы Мюллера для деполяризующих элементов;
- 4) Рассчитать матрицу Мюллера всей оптической системы;
- 5) Рассчитать выходной вектор Стокса, через входной.

Метод комплексных матриц 4×4

Монохроматическая волна

временная зависимость имеет вид $e^{i\omega t}$

$$-\mathit{rot}\mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}, \quad \mathit{rot}\mathbf{H} = i\omega\mathbf{D},$$

Выберем декартовую систему координат так, чтобы ось z этой системы была параллельна границе раздела двух сред, а оси x и y были параллельны этой границе.

$$\mathbf{OG} = i\omega/c\mathbf{C},$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & \mathit{rot} \\ -\mathit{rot} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathit{rot} = \begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix}$$

Через \mathbf{G} обозначен 6×1 вектор-столбец, элементы которого представляют собой компоненты электрического поля \mathbf{E} и магнитного поля \mathbf{H} в декартовой системе координат, а \mathbf{C} представляет собой 6×1 вектор-столбец, элементами которого являются компоненты вектора электрического индукции \mathbf{D} и вектора магнитной индукции \mathbf{B} в Декартовой системе координат.

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\mathbf{G} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \rho \\ \rho' & \mu \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O}\mathbf{G} = i\omega/c\mathbf{M}\mathbf{G}.$$

$$\mathit{rot} = \begin{bmatrix} 0 & -\partial / \partial z & 0 \\ -\partial / \partial z & 0 & i\zeta \\ 0 & -i\zeta & 0 \end{bmatrix}, \quad \zeta = \omega / c N_0 \sin \varphi_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{H}_y \\ \mathbf{E}_y \\ -\mathbf{H}_x \end{bmatrix} = -i\omega \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \Delta_{34} \\ \Delta_{41} & \Delta_{42} & \Delta_{43} & \Delta_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{H}_y \\ \mathbf{E}_y \\ -\mathbf{H}_x \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -i\omega / c \Delta \psi \quad \psi = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{H}_y \\ \mathbf{E}_y \\ -\mathbf{H}_x \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= M_{51} + (M_{53} + \eta)A_1 + M_{56}A_5 \\
\Delta_{12} &= M_{55} + (M_{53} + \eta)A_4 + M_{56}A_8 \\
\Delta_{13} &= M_{52} + (M_{53} + \eta)A_2 + M_{46}A_6 \\
-\Delta_{14} &= M_{54} + (M_{53} + \eta)A_3 + M_{56}A_7 \\
\Delta_{21} &= M_{11} + M_{13}A_1 + M_{16}A_5 \\
\Delta_{22} &= M_{15} + M_{13}A_4 + M_{16}A_8 \\
\Delta_{23} &= M_{12} + M_{13}A_2 + M_{16}A_6 \\
-\Delta_{24} &= M_{114} + M_{13}A_3 + M_{16}A_7 \\
-\Delta_{31} &= M_{41} + M_{43}A_{11} + M_{46}A_5 \\
-\Delta_{32} &= M_{45} + M_{43}A_4 + M_{46}A_8 \\
-\Delta_{33} &= M_{42} + M_{43}A_2 + M_{46}A_6 \\
\Delta_{34} &= M_{44} + M_{43}A_3 + M_{46}A_7 \\
\Delta_{41} &= M_{21} + M_{23}A_1 + (M_{26} - \eta)A_5 \\
\Delta_{42} &= M_{25} + M_{23}A_{14} + (M_{26} - \eta)A_8 \\
\Delta_{43} &= M_{22} + M_{23}A_2 + (M_{26} - \eta)A_6 \\
-\Delta_{44} &= M_{24} + M_{23}A_3 + (M_{26} - \eta)A_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= (M_{61}M_{36} - M_{31}M_{66}) / D \\
A_2 &= [(M_{62} - \eta)M_{36} - M_{32}M_{66}] / D \\
A_3 &= (M_{64}M_{36} - M_{34}M_{66}) / D \\
A_4 &= [M_{65}M_{36} - (M_{35} + \eta)M_{66}] / D \\
A_5 &= (M_{63}M_{31} - M_{33}M_{61}) / D \\
A_6 &= [M_{63}M_{32} - (M_{62} - \eta)M_{33}] / D \\
A_7 &= (M_{63}M_{34} - M_{33}M_{64}) / D \\
A_8 &= [(M_{35} + \eta)M_{63} - M_{33}M_{65}] / D \\
D &= M_{33}M_{66} - M_{36}M_{63} \\
\eta &= \zeta / \omega = N_0 \sin \varphi_0 / c
\end{aligned}$$

Вычисление матрицы слоя

$$L(h) = e^{-i\omega h\Delta} = [I - i\omega h\Delta - (\omega h)^2 \Delta^2 / 2! - i(\omega h)^3 \Delta^3 + \dots]$$

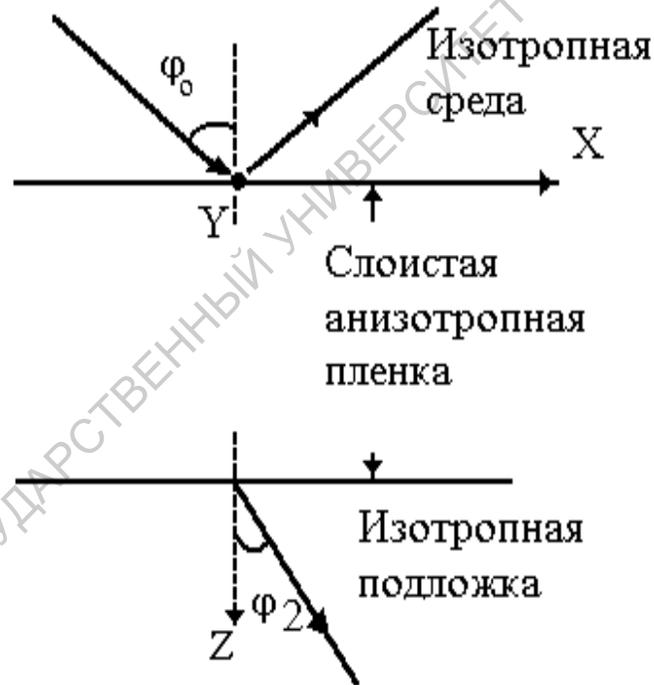
$$L(h) = \Psi K(h) \Psi^{-1},$$

$$\psi(z+d) \equiv \underline{L}(z,d) \psi(z),$$

$$\underline{L}(z,d) = L(z+d-h_m, h_m) \dots L(z+h_1+h_2, h_2) L(z+h_1, h_1),$$
$$d = h_1 + h_2 + \dots + h_m$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(z,d)}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} \Delta(z) L(z,d)$$

Полубесконечная среда- анизотропная среда – полубесконечная среда



$$N_2 \sin \varphi_2 = N_0 \sin \varphi_0 \quad \psi(d) = \underline{L} \psi(0) \quad \psi(0^+) = \psi_i(0^-) + \psi_r(0^-), \quad \psi(d - 0) = \psi(d + 0),$$

$$H_p/E_s = H_s/E_p = N.$$

$$\psi_i = \begin{bmatrix} E_{ip} \cos \varphi_0 \\ N_0 E_{ip} \\ E_{is} \\ N_0 E_{is} \cos \varphi_0 \end{bmatrix}, \quad \psi_r = \begin{bmatrix} -E_{rp} \cos \varphi_0 \\ N_0 E_{rp} \\ E_{rs} \\ -N_0 E_{rs} \cos \varphi_0 \end{bmatrix}, \quad \psi_t = \begin{bmatrix} E_{tp} \cos \varphi_2 \\ N_2 E_{tp} \\ E_{ts} \\ N_2 E_{ts} \cos \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} E_{tp} \cos \varphi_2 \\ N_2 E_{tp} \\ E_{ts} \\ N_2 E_{ts} \cos \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (E_{ip} - E_{rp}) \cos \varphi_0 \\ N_0 (E_{ip} + E_{rp}) \\ (E_{is} + E_{rs}) \\ N_0 (E_{is} - E_{rs}) \cos \varphi_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{ip} E_{ip} + a_{is} E_{is} + a_{rp} E_{rp} + a_{rs} E_{rs} &= 0 \\ b_{ip} E_{ip} + b_{is} E_{is} + b_{rp} E_{rp} + b_{rs} E_{rs} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{ip} &= \cos \varphi_0 (l_{11} N_2 - l_{21} \cos \varphi_2) + N_0 (l_{12} N_2 - l_{22} \cos \varphi_2) \\
a_{rp} &= -\cos \varphi_0 (l_{11} N_2 - l_{21} \cos \varphi_2) + N_0 (l_{12} N_2 - l_{22} \cos \varphi_2) \\
a_{is} &= N_0 \cos \varphi_0 (l_{14} N_2 - l_{24} \cos \varphi_2) + (l_{13} N_2 - l_{23} \cos \varphi_2) \\
a_{rs} &= -N_0 \cos \varphi_0 (l_{14} N_2 - l_{24} \cos \varphi_2) + (l_{13} N_2 - l_{23} \cos \varphi_2) \\
b_{ip} &= \cos \varphi_0 (l_{31} N_2 \cos \varphi_2 - l_{41}) + N_0 (l_{32} N_2 \cos \varphi_2 - l_{42}) \\
b_{rp} &= -\cos \varphi_0 (l_{31} N_2 \cos \varphi_2 - l_{41}) + N_0 (l_{32} N_2 \cos \varphi_2 - l_{42}) \\
b_{is} &= N_0 \cos \varphi_0 (l_{34} N_2 \cos \varphi_2 - l_{44}) + (l_{33} N_2 \cos \varphi_2 - l_{43}) \\
b_{rs} &= -N_0 \cos \varphi_0 (l_{34} N_2 \cos \varphi_2 - l_{44}) + (l_{33} N_2 \cos \varphi_2 - l_{43})
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} E_{rp} \\ E_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{pp} & R_{ps} \\ R_{sp} & R_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ip} \\ E_{is} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{R} \mathbf{E}_i$$

$$\mathbf{R} = (a_{rs} b_{rp} - a_{rp} b_{rs})^{-1} \begin{bmatrix} (a_{ip} b_{rs} - a_{rs} b_{rp}) & (a_{is} b_{rs} - a_{rs} b_{is}) \\ (a_{rp} b_{ip} - a_{ip} b_{rp}) & (a_{rp} b_{is} - a_{is} b_{rp}) \end{bmatrix}$$

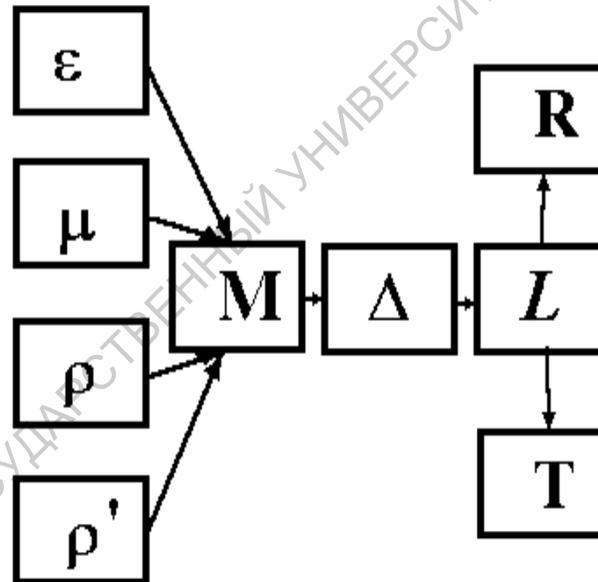
$$\mathbf{E}_t = \mathbf{T}\mathbf{E}_i, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{pp} & T_{ps} \\ T_{sp} & T_{pp} \end{bmatrix}$$

$$T_{pp} = [(I_{21} \cos \varphi_0 + I_{22} N_0) + R_{pp}(-I_{21} \cos \varphi_0 + I_{22} N_0) + R_{sp}(I_{23} - I_{24} N_0 \cos \varphi_0)] / N_2$$

$$T_{ps} = [(I_{23} + I_{24} N_0 \cos \varphi_0) + R_{ps}(-I_{21} \cos \varphi_0 + I_{22} N_0) + R_{ss}(I_{23} - I_{24} N_0 \cos \varphi_0)] / N_2$$

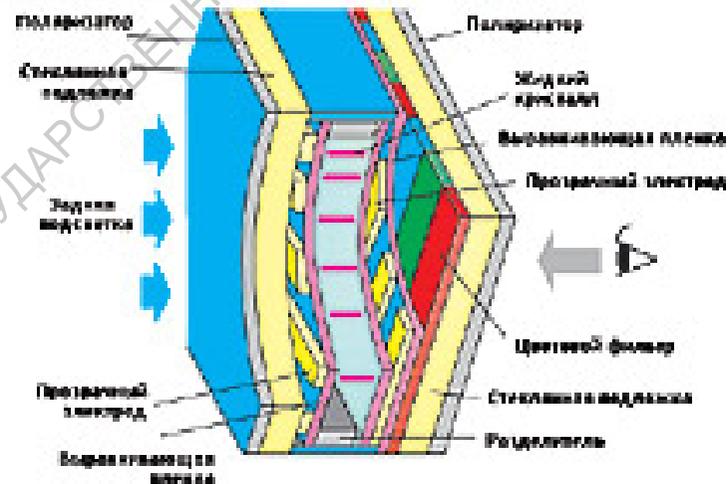
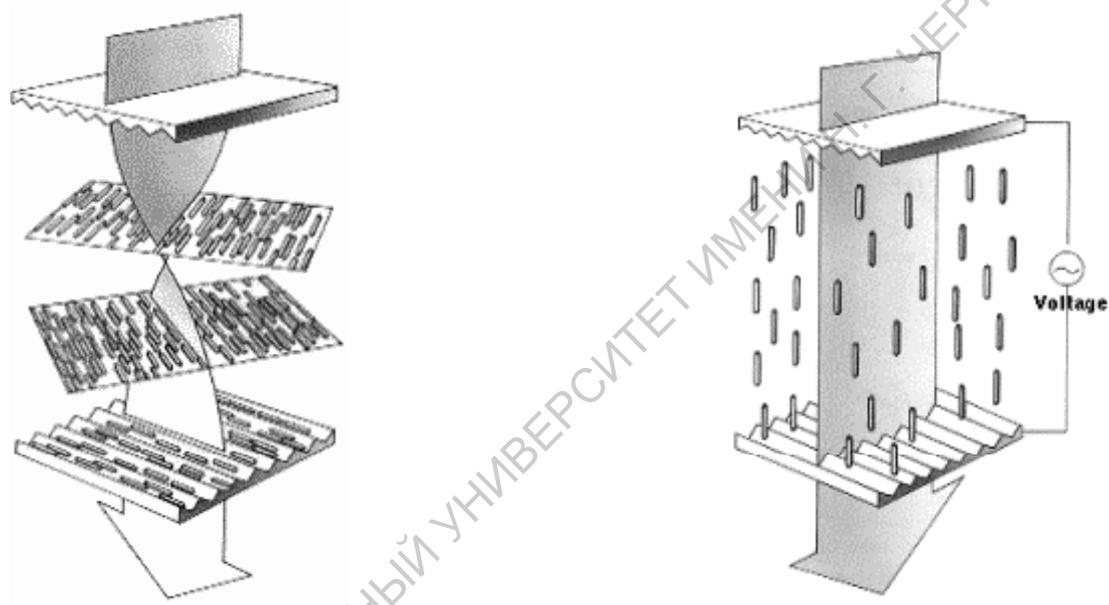
$$T_{sp} = (I_{31} \cos \varphi_0 + I_{32} N_0) + R_{pp}(-I_{31} \cos \varphi_0 + I_{32} N_0) + R_{sp}(I_{33} - I_{34} N_0 \cos \varphi_0)$$

$$T_{ss} = (I_{33} + I_{34} N_0 \cos \varphi_0) + R_{ps}(-I_{31} \cos \varphi_0 + I_{32} N_0) + R_{ss}(I_{33} - I_{34} N_0 \cos \varphi_0)$$



Примеры использования
матричных методов для
расчета оптических
характеристик систем

Устройство ЖК - индикатора



Характеристики ЖК - индикатора

- Светимость или яркость
- Цвет
- Контраст и градация (контраст определяется как

$K = (L - L_{фон}) / L$, где L , $L_{фон}$ — яркости источника и фона)

- Диаграмма направленности
- Мощность управления
- Быстродействие
- Деградация
- Разрешение и размер
- Способы адресации

Метод Джонса

$$M_{ин} = \prod_{i=1}^n M_i,$$

1) в однородном слое ЖК распространяются обыкновенная и необыкновенная волны в одном направлении, но для них различны показатели преломления и коэффициенты поглощения; угол распространения α световых волн в слое ЖК определяется соотношением

где α_1 - угол распространения св. $((n + n_o) / 2) \sin \alpha = \sin \alpha_1$, n - показатель преломления для необыкновенной и обыкновенной волн соответственно;

2) поляризации необыкновенной и обыкновенной волн ортогональны друг другу;

3) в прямоугольной системе координат XYZ , связанной с фронтом падающей волны, направление распространения в которой совпадает с осью Z , матрицу Джонса ЖК $M_{жк}$ можно записать в виде

$$M_{жк} = G_{KXYZ} \rho_{N-1,N-2} \dots \rho_{K,K+1} G_{KXYZ} \dots \rho_{1,2} G_{1XYZ},$$

где G_{KXYZ} - матрица Джонса K -го однородного субслоя ЖК; $\rho_{K,K+1}$ - матрица, учитывающая различие в направлениях распространения света в K и $(K+1)$ -м однородных субслоях и различие их показателей преломления; N - число однородных субслоев ЖК.

$$M_{\text{жж}} = \prod_{K=1}^N G_{KXYZ}.$$

$$G_{KXYZ} = R(\varphi_K) G_K R(-\varphi_K).$$

$$G_K = \begin{vmatrix} e^{j(\frac{2\pi}{\lambda} n_K + j\frac{a_K}{2}) \frac{\Delta z}{\cos \alpha_K}} & 0 \\ 0 & e^{j(\frac{2\pi}{\lambda} n_o + j\frac{a_o}{2}) \frac{\Delta z}{\cos \alpha_K}} \end{vmatrix}$$

$$a_K = a_e (n_K / n_e)^3 \cos^2 \theta_K + a_o (n_K / n_o)^3 \sin^2 \theta_K$$

$$\frac{1}{n_K^2} = \frac{\cos^2 \theta_K}{n_e^2} + \frac{\sin^2 \theta_K}{n_o^2},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (n_X + n_o) \sin \alpha_X = \sin \alpha_1 \\ n_X^2 (n_o^2 + (n_e^2 - n_o^2) \sin^2 \theta_X) - n_e^2 n_o^2 = 0 \\ \sin \theta_X = \cos \Theta_X \sin \Phi_X \sin \alpha_X \cos \beta + \cos \Theta_X \sin \Phi_X \sin \alpha_X \sin \beta + \sin \Theta_X \cos \alpha_X \\ \cos \theta_X \cos \varphi_X = \frac{\cos \Theta_X \cos \Phi_X (1 - \sin^2 \alpha_X \cos^2 \beta) - \cos \Theta_X \sin \Phi_X \sin \beta \cos \beta - \sin \Theta_X \cos \beta \cos \alpha_X \sin \alpha_X}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_X \cos^2 \beta}} \\ \cos \Theta_X \sin \Phi_X = \frac{\cos \Theta_X \sin \Phi_X \cos \alpha_X - \sin \Theta_X \sin \beta \sin \alpha_X}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_X \cos^2 \beta}} \end{array} \right.$$

$$M_{XYZ} = R(\psi) M_{ps} R(-\psi)$$

$$M_{ps} = \begin{vmatrix} t_p & 0 \\ 0 & t_s \end{vmatrix},$$

$$t_{p(s)} = t_{01p(s)} t_{12p(s)} t_{23p(s)} e^{-j(\alpha_1 + \alpha_2)} / R_e, R_e = 1 + r_{01p(s)} r_{12p(s)} e^{-j2\alpha_1} + (r_{12p(s)} + r_{01p(s)} e^{-2j\alpha_1}) r_{23p(s)} e^{-2j\alpha_2}$$

$$J_{вых} = M_{ин} J_{вх} M_{ин}^+,$$

Матричный метод Берремана

$$\zeta_t(d) = P(d, 0)(\zeta_i(0) + \zeta_r(0)),$$

$$P(d, 0) = P_{\text{пол}2} P_{\text{ст}2} P_{\text{эл}2} P_{\text{ор}2} P_{\text{жк}} P_{\text{ор}1} P_{\text{эл}2} P_{\text{ст}1} P_{\text{пол}1},$$

$$P_i = X K X^{-1}$$

$$\begin{array}{ll} X_{11} = a_{1x} & X_{21} = a_{2x} \\ X_{21} = n_o d_{1y} & X_{22} = n_o d_{2y} \\ X_{31} = a_{1y} & X_{32} = a_{2y} \\ X_{41} = -n_o d_{1x} & X_{42} = -n_o d_{2x} \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{a}_1 = [\vec{n} \times \vec{M}_1] / \sqrt{1 - (\vec{n} \cdot \vec{M}_1)^2} \\ \vec{a}_2 = [\vec{n} \times \vec{M}_2] / \sqrt{1 - (\vec{n} \cdot \vec{M}_2)^2} \end{array}$$

где $\vec{a}_{1,2}$ - единичный вектор обыкновенной волны, распространяющейся в $\vec{M}_{1,2}$ направлении в подслое с директором \vec{n} ; $\vec{d}_{1,2} = [\vec{M}_{1,2} \times \vec{a}_{1,2}]$; индекс 1 относится к прямой обыкновенной волне, а индекс 2 к обратной обыкновенной волне.

$$X_{13} = d_{31x} + \operatorname{tg} \zeta_3 \sin \alpha_3 \quad X_{14} = d_{4x} + \operatorname{tg} \zeta_4 \sin \alpha_4$$

$$X_{23} = -n_3 a_{3y}$$

$$X_{24} = -n_4 a_{4y}$$

$$X_{33} = d_{3y}$$

$$X_{34} = d_{4y}$$

$$X_{43} = n_3 a_{3x}$$

$$X_{44} = n_4 a_{4x}$$

$$, \vec{a}_3 = [\vec{n} \times \vec{M}_3] / \sqrt{1 - (\vec{n} \cdot \vec{M}_3)^2}, \vec{a}_4 = [\vec{n} \times \vec{M}_4] / \sqrt{1 - (\vec{n} \cdot \vec{M}_4)^2}$$

$$\operatorname{tg} \zeta_3 = (\varepsilon_e - \varepsilon_o)(\vec{n} \cdot \vec{M}_3) \sqrt{1 - (\vec{n} \cdot \vec{M}_3)^2} / (\varepsilon_e - (1 - (\vec{n} \cdot \vec{M}_3)^2) + \varepsilon_o (\vec{n} \cdot \vec{M}_3)^2), \quad \vec{d}_{3,4} = [\vec{M}_{3,4} \times \vec{a}_{3,4}]$$

$$\operatorname{tg} \zeta_4 = (\varepsilon_e - \varepsilon_o)(\vec{n} \cdot \vec{M}_4) \sqrt{1 - (\vec{n} \cdot \vec{M}_4)^2} / (\varepsilon_e - (1 - (\vec{n} \cdot \vec{M}_4)^2) + \varepsilon_o (\vec{n} \cdot \vec{M}_4)^2),$$

$$K = \begin{vmatrix} e^{i \frac{\omega}{c} \cos \alpha_1 dz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i \frac{\omega}{c} \cos \alpha_2 dz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i \frac{\omega}{c} \cos \alpha_3 dz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i \frac{\omega}{c} \cos \alpha_4 dz} \end{vmatrix}.$$

$$P_{LC} = \prod_{i=1}^N P_i$$

$$K = \begin{vmatrix} e^{\frac{i\omega}{c} \cos \alpha_1 dz - a_1^1 dz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\omega}{c} \cos \alpha_2 dz - a_2^2 dz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{i\omega}{c} \cos \alpha_3 dz - a_3^3 dz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{i\omega}{c} \cos \alpha_4 dz - a_4^4 dz} \end{vmatrix}.$$

Практические задания к курсу «Основы поляризационной оптики»

Задание 1.

Использование матричного формализма для расчета характеристик линзовых систем

Центрированная оптическая система состоит из двух толстых двояко выпуклых линз. Радиусы кривизны первой линзы соответственно равны 25 и 30 см, а толщина линзы 5 см. Радиусы кривизны второй линзы равны соответственно 40 и 60 см, а толщина линзы 4 см. На расстоянии $l = 12$ см от поверхности первой линзы находится объект. Расстояние между первой и второй линзами d .

А) Разработать алгоритм и программу для расчета положения объекта при заданном расстоянии между линзами. В качестве входных параметров являются параметры оптической системы.

Б) Построить зависимость положения изображения, получаемого с помощью этой системы, от расстояния между линзами. Представить результат в графическом и табличном виде.

Задание 2.

Изучение оптических характеристик фильтров Шольца

Скрещенный фильтр Шольца работает между двумя скрещенными поляризаторами. Геометрия из четырех фазовых пластинок изображена на рис. 1., а в табл. 1 приведены азимутальные углы ориентации отдельных фазовых пластинок. Согласно табл.1, пропускающая ось переднего поляризатора параллельна оси X, а ось заднего поляризатора параллельна оси Y прямоугольной системы координат XYZ. Свет в этой оптической системе распространяется вдоль ось Z. В такой геометрии количество пластинок N должно всегда быть четным. В этом случае полная матрица Джонса M равна:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N/2},$$

где $A = (\cos(\Gamma/2) - i \cos(2\rho) \sin(\Gamma/2))^2 + \sin^2(2\rho) \sin^2(\Gamma/2)$,

$B = \sin(4\rho) \sin^2(\Gamma/2)$,

$C = -B$,

$D = (\cos(\Gamma/2) + i \cos(2\rho) \sin(\Gamma/2))^2 + \sin^2(2\rho) \sin^2(\Gamma/2)$,

$\Gamma \equiv 2\pi(n_e - n_o)d / \lambda$,

λ - длина волны света.



Рис. 1 Скрещенный фильтр Шольца

Веерный фильтр Шольца также представляет собой стопу одинаковых двулучепреломляющих пластин, каждая из которых ориентирована под определенным азимутальным углом друг к другу, а вся стопка пластин помещена между параллельными поляризаторами. В табл. 2 приведена краткая характеристика типичного веерного фильтра Шольца, а на рис. 2 показано геометрическое расположение его элементов.

Согласно методу матриц Джонса полная матрица стопки из N дается следующим выражением:

$$M = R(-\pi/2 + \rho)W_0R(\pi/2 - \rho)\dots R(-5\rho)W_0R(5\rho)R(-3\rho)W_0R(3\rho)R(-\rho)W_0R(\rho) = R(-\pi/2 + \rho)[W_0R(2\rho)]^N R(\rho),$$

где R – матрица поворота;

$$W_0 = \begin{bmatrix} \exp(i\pi(n_e - n_o)d/\lambda) & 0 \\ 0 & \exp(-i\pi(n_e - n_o)d/\lambda) \end{bmatrix}$$

Таблица 1.
Скрещенный фильтр Шольца

Оптический элемент	Азимутальный угол ориентации оптического элемента, градусы
Передний поляризатор	0
Первая пластина	ρ
Вторая пластина	$-\rho$
Третья пластина	ρ
....
N – ая пластина	$(-1)^{N-1}\rho$
Задний поляризатор	90

Таким образом, матрицы Джонса для всех оптических элементов скрещенного или веерного фильтров Шольца определены. Тогда падающая и выходящая из системы волны связаны между собой соотношением

$$\begin{bmatrix} E_x^{out} \\ E_y^{out} \end{bmatrix} = P_{out} M P_{in} \begin{bmatrix} E_x^{int} \\ E_y^{int} \end{bmatrix},$$

где матрицы P_{out} и P_{in} являются матрицами выходного и входного поляризаторов.

Если на систему падает свет единичной интенсивности, то пропускание такого фильтра Шольца T будет выражаться следующим образом:

$$T = (A_{11}A_{11}^* + A_{12}A_{12}^* + A_{21}A_{21}^* + A_{22}A_{22}^*)/2,$$

где A – матрица всего фильтра Шольца

$$A = P_{out} M P_{in}.$$

Задание

1. Разработать алгоритм и программу для расчета пропускания скрещенного (веерного) фильтра Шольца. Входными параметрами должны являться толщина одной фазовой пластины d и азимутальный угол ρ .
2. Исследовать оптические характеристики фильтра Шольца с идеальными поляризаторами ($t_1 = 1, t_2 = 0$). Получить максимум пропускания фильтра на длине волны света 550 нм. Найти при каком значении толщины пластины и каких значениях азимутального угла выполняется это условие. Представить спектр пропускания фильтра в графическом виде.
3. Исследовать оптические характеристики фильтра Шольца с неидеальными поляризаторами ($t_1 = 0.91, t_2 = 0.01$) максимум пропускания фильтра находится в

области 550 нм. Найти при каком значении толщины пластины и каком значении азимутального угла выполняется это условие. Спектр пропускания фильтра представить в графическом виде.

Таблица 2.
Веерный фильтр Шольца

Оптический элемент	Азимутальный угол ориентации оптического элемента, градусы
Передний поляризатор	0
Первая пластина	ρ
Вторая пластина	3ρ
Третья пластина	5ρ
....
N – ая пластина	$\pi/2 - \rho$
Задний поляризатор	0



Рис. 2 Веерный фильтр Шольца

Указания

- Все матрицы Джонса оптических элементов должны быть вычислены в одной системе координат.
- Выражение для матрицы Джонса стопки пластин M и входного поляризатора P_{in} записаны в одной системе координат.
- Выходной поляризатор в скрещенном фильтре Шольца повернут относительно входного (и соответственно всей системы координат) на 90 градусов.
- При моделировании характеристик фильтра Шольца для пластины считать, что $n_e = 1.507$; $n_o = 1.500$ во всем видимом диапазоне; число пластин в фильтре считать равным 10; длины волн изменять от 400 нм до 700 нм.

Задание 3

Метод расчета оптических характеристик ЖК устройств отображения информации

Для теоретического исследования оптических характеристик электрооптических эффектов в ЖК - ячейках обычно используются различные методы матричной оптики. Широко для этой цели применяется матричный метод Джонса, который был рассмотрен для описания оптических характеристик фильтров Шольца (лабораторная работа №3).

В матричном формализме Джонса ЖК – ячейка характеризуется некоторой комплексной матрицей 2×2 M_{LCD} , которая имеет вид

$$M_{LCD} = \prod_{i=1}^n M_i \quad (1)$$

где M_i – матрица Джонса i – го оптического элемента ЖК – ячейки; n – количество элементов.

Основная трудность в вычислении M_{LCD} связана с нахождением матрицы Джонса слоя ЖК M_{LC} . Для определения этой матрицы предположим, что в слое ЖК отсутствует многолучевая интерференция, а поглощение в рабочем веществе ЖК - ячейки слабое. Для вычисления M_{LC} разобьем неоднородный слой ЖК на гомогенные субслои, в каждом из которых ориентация директора ЖК одинакова. Задача о нахождении ориентации директора ЖК решалась в предыдущей лабораторной работе. Считая, что ЖК является положительным одноосным кристаллом и оси эллипсоида поглощения совпадают с осями эллипсоида показателей преломления, предположим, что:

- 1) в однородном слое ЖК распространяются обыкновенная и необыкновенная волны в одном направлении, но для них различны показатели преломления и коэффициенты поглощения;
- 2) поляризации необыкновенной и обыкновенной волн ортогональны друг другу;
- 3) в прямоугольной системе координат XYZ такой, что, направление распространения в волны совпадает с осью Z, а ось X совпадает с направлением ориентации ЖК на первой подложке, матрицу ЖК M_{LC} можно записать в виде

$$M_{LC} = G_{NXYZ} \rho_{N-2,N-1} \dots \rho_{K,K+1} G_{KXYZ} \dots \rho_{1,2} G_{1XYZ},$$

где G_{KXYZ} - матрица Джонса K -го однородного слоя ЖК; $\rho_{K,K+1}$ – матрица, учитывающая различие в направлениях распространения света в K и $(K+1)$ –м однородных субслоях и различие их показателей преломления; N – число однородных субслоев.

При большом числе субслоев ЖК ($N \geq 100$) и при нормальном падении света на ЖК - ячейку, можно считать матрицы $\rho_{K,K+1}$ единичными. Тогда матрицу M_{LC} можно записать следующим образом:

$$M_{LC} = \prod_{K=1}^N G_{KXYZ} \quad (2)$$

Таким образом, нахождение матрицы M_{LC} сводится к отысканию вида матрицы G_{KXYZ} , которую с учетом сделанных приближений для однородного нематического слоя ЖК можно записать в виде:

$$G_{KXYZ} = \begin{bmatrix} \exp\left(j\left(\frac{2\pi L n_K}{\lambda N}\right)\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(j\left(\frac{2\pi L n_0}{\lambda N}\right)\right) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $\frac{1}{n_K^2} = \frac{\cos^2 \theta_K}{n_e^2} + \frac{\sin^2 \theta_K}{n_o^2}$, n_K – показатель преломления для необыкновенной волны в K – ом однородном слое нематического ЖК, n_e, n_o – главные показатели преломления для нематического ЖК; θ_K – угол ориентации директора ЖК в K -ом однородном слое (вычисляется на первом этапе моделирования характеристик ЖК устройств отображения информации, предыдущая лабораторная работа); λ – длина волны падающего на ЖК – ячейку света; j – мнимая единица.

Тогда матрица Джонса для всей ЖК – ячейки M_{LCD} будет иметь вид:

$$M_{LCD} = R(-\chi_{out})P_{out}R(\chi_{out})M_{LC}R(-\chi_{in})P_{in}R(\chi_{in}), \quad (4)$$

где P_{in}, P_{out} – матрицы Джонса для входного выходного поляризаторов соответственно;

$R(\chi)$ – матрицы поворота на угол χ ;

χ_{in} – угол ориентации входного поляризатора относительно системы координат XYZ ;

χ_{out} – угол ориентации выходного поляризатора относительно системы координат XYZ ;

$$P_{in,out} = \begin{bmatrix} t_{1in,out} & 0 \\ 0 & t_{2in,out} \end{bmatrix}, R(\chi) = \begin{bmatrix} \cos \chi & \sin \chi \\ -\sin \chi & \cos \chi \end{bmatrix}, R(-\chi) = \begin{bmatrix} \cos \chi & -\sin \chi \\ \sin \chi & \cos \chi \end{bmatrix},$$

$t_{1in,out}$ – максимальный коэффициент пропускания для входного или выходного поляризатора соответственно;

$t_{2in,out}$ – минимальный коэффициент пропускания для входного или выходного поляризатора соответственно.

Таким образом, матрица Джонса всей ЖК – ячейки полностью определена выражениями (1) – (4) и оптические характеристики электрооптического эффекта двойного лучепреломления в ЖК, управляемого электрическим полем, определяются в этом случае по выходной матрице когерентности J_{out} :

$$J_{out} = M_{LCD}J_{in}M_{LCD}^+, \quad (5)$$

где J_{in} – матрица когерентности для света, падающего на ЖК – ячейку; M_{LCD}^+ – матрица, эрмитово сопряженная к M_{LCD} .

В этом случае пропускание T ЖК – ячейки определяется следующим образом:

$$T = \frac{J_{out11} + J_{out22}}{J_{in11} + J_{in22}}. \quad (6)$$

Степень поляризации Δ и характеристики эллипса поляризации (азимут ψ и эллиптичность ε) для света, вышедшего из ЖК – ячейки, соответственно равны:

$$\Delta = \sqrt{1 - 4 \frac{J_{out11} J_{out22} - J_{out12} J_{out21}}{J_{out22} + J_{out11}}},$$

$$\psi = \text{arctg} \left(\frac{J_{out12} + J_{out21}}{J_{out11} - J_{out22}} \right),$$

$$\varepsilon = \arcsin \left(\frac{-j(J_{out12} - J_{out21})}{J_{out11} + J_{out22}} \right).$$

Таким образом, используя матрицу когерентности, преобразуемую с помощью соответствующих комплексных матриц Джонса, можно простым и эффективным способом теоретически исследовать характеристики электрооптических эффектов в ЖК – ячейках.

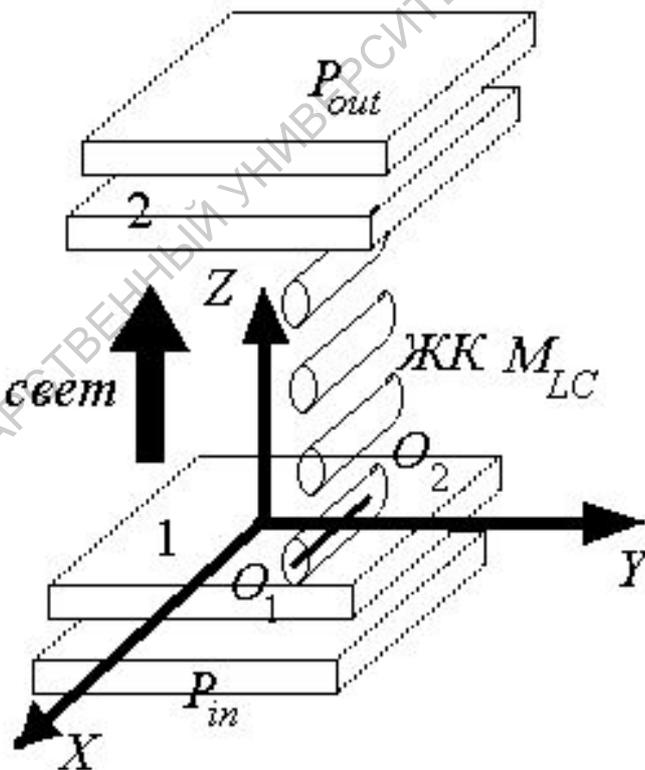


Рис. 1 Геометрия ЖК – ячейки

O_1O_2 – направление ориентации ЖК – молекул нематика;

1 и 2 – ориентирующие поверхности ЖК – ячейки;

XYZ – базовая система координат, связанная с ориентирующей поверхностью ЖК

Задание.

- 1) Используя выражения (1) – (6) разработать алгоритм и составить программу для вычисления коэффициента пропускания света системы: поляризатор – ячейка с нематическим ЖК – поляризатор. На рис. 1 представлена геометрия ЖК – ячейки в базовой системе координат XYZ . В качестве входных параметров использовать следующие:
 - i) углы ориентации входного и выходного поляризаторов χ_{in} и χ_{out} относительно оси X базовой системы координат, которая связана с ориентацией директора ЖК на поверхностях ЖК –ячейки;
 - ii) главные показатели преломления ЖК $n_o = 1.5$, $n_e = 1.64$;
 - iii) L толщина ЖК – слоя, которая находится в диапазоне 2 – 10 мкм для промышленно выпускаемых ячеек;
 - iv) распределение углов ориентации директора ЖК (см. предыдущую лабораторную работу); длина волны света видимого диапазона.
 - 2) Исследовать зависимость пропускания ЖК – ячейки на определенной длине волны от управляющего напряжения для различных длин волн видимого диапазона и различных толщин ЖК - слоя.
 - 3) Исследовать зависимость характеристик эллипса поляризации для света, прошедшего через систему поляризатор – ЖК- слой от управляющего напряжения.
- Все данные результатов расчета представить в табличном и графическом виде.

Задание 4.

Использование матричного формализма Мюллера для расчета характеристик оптических систем

Исследовать спектр пропускания света, прошедшего через оптическую систему, которая описывается выражением (10) и показана на рис. 1, при различных значениях степени деполаризации деполаризующей пластины.

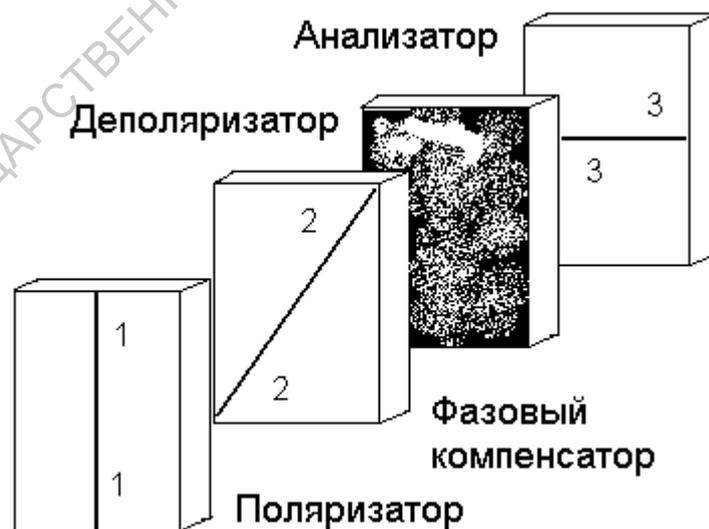


Рис.1 Оптическая система с деполаризующим элементом.

1 1 - ось поляризации поляризатора, 2 2 - оптическая ось фазового компенсатора;
3 3 – ось поляризации анализатора

Для этого следует:

1. Разработать алгоритм и вычислительную программу для расчета спектра пропускания оптической системы. В качестве поляризатора выбрать идеальные поляризатор и анализатор, фазовый компенсатор должен иметь произвольную фазовую задержку и угол ориентации его оптической оси относительно направления поляризации поляризатора. В программе рассмотреть два варианта системы: поляризатор и анализатор скрещены; поляризатор и анализатор параллельны.
2. Исследовать спектры пропускания оптической системы в зависимости от степени деполяризации деполяризующей пластины для следующих значений $\text{dep} = 0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1$. Для фазового компенсатора взять следующие параметры $n_o = 1.5$, $n_e = 1.6$, толщину пластины взять равной 688 нм, угол ориентации оптической оси относительно направления поляризации поляризатора взять равным 45° .
3. Полученные результаты представить в **графическом** и табличном виде.

Таблица 2.

Матрицы Мюллера некоторых оптических элементов

Оптический элемент	Матрица Мюллера в собственной системе координат
Линейный фазовый компенсатор с фазовой задержкой $\delta = 2\pi(n_e - n_o)l / \lambda$, где n_o, n_e – главные показатели преломления фазового компенсатора, l – толщина фазового компенсатора, λ – длина волны света	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \delta & \sin \delta \\ 0 & 0 & -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix}$
Линейный частичный поляризатор с максимальным T_{\max} и минимальным T_{\min} пропускание	$\begin{bmatrix} (T_{\max} + T_{\min})/2 & (T_{\max} - T_{\min})/2 & 0 & 0 \\ (T_{\max} - T_{\min})/2 & (T_{\max} + T_{\min})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{T_{\max} T_{\min}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{T_{\max} T_{\min}} \end{bmatrix}$
Вращатель плоскости поляризации света на угол α	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Идеальный деполяризатор	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Примечание	В таблице приведены матрицы в собственной системе координат. Для нахождения матрицы Мюллера в произвольной системе координат необходимо использовать выражение (7).

Задание 5.

Использование формализма матриц Берремана для расчета характеристик оптических систем.

Ярким примером использования матричного формализма расчета оптических характеристик сложных анизотропных систем является использование комплексных матриц 4×4 для вычисления пропускания и отражения света ориентированным слоем жидкого кристалла. Жидкие кристаллы обладают уникальными оптическими свойствами, особенно холестерическая фаза ЖК, которая была обнаружена Леманом в ранних работах (до 1900 г.). Когда белый свет падает на образец с планарной структурой (его оптическая ось перпендикулярна поверхностям стекол), происходит селективное отражение света, причем максимум длины волны отражения изменяется в зависимости от угла падения по закону Брэгга. При нормальном падении отраженный свет в значительной степени поляризован по кругу. Одна поляризованная по кругу компонента почти полностью отражается в некотором спектральном интервале, тогда как другая проходит практически без изменений. Более того, в отличие от обычных случаев, отраженная волна имеет тот же знак круговой поляризации, что и падающая. В направлении вдоль оптической оси среда обладает очень большим оптическим вращением, обычно порядка нескольких тысяч градусов на миллиметр. Вблизи области отражения дисперсия оптического вращения аномальна, и знаки вращения по разные стороны от полосы отражения противоположны. Такое поведение сходно с поведением оптически активной молекулы в окрестности полосы поглощения.

Для описания оптических свойств ЖК рассмотрим сначала его модельное представление. Холестерические жидкие кристаллы (ХЖК) образованы оптически активными молекулами (до недавнего времени почти исключительно эфирами холестерина) и отличаются тем, что направление длинных осей молекул в каждом последующем слое, состоящем из параллельно ориентированных и свободно перемещающихся в двух направлениях молекул, составляет с направлением осей молекул предыдущего слоя некоторый угол. При этом образуется спираль, шаг которой p зависит от природы молекул и внешних воздействий. Шагу p соответствует поворот оси ориентации молекул (директора) на угол 2π , хотя период изменения оптических свойств равен $p/2$, вследствие не полярности молекул образующих структуру ХЖК). В качестве примера ХЖК, бесцветного в кристаллическом и жидком изотропном состоянии и меняющего окраску (селективное отражение) по мере изменения температуры в ЖК-состоянии, можно привести холестерилэракат. К ХЖК относятся также так называемые «хиральные» (chiral) нематики обладают оптической активностью.

При таком рассмотрении ХЖК, для света падающего на него нормально (вдоль оси ХЖК), характеризуется следующей дифференциальной матрицей распространения Δ :

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon + \delta \cos 2\beta z & 0 & \delta \sin 2\beta z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \delta \sin 2\beta z & 0 & \varepsilon - \delta \cos 2\beta z & 0 \end{bmatrix},$$

где $\varepsilon + \delta = n_e^2$, $\varepsilon - \delta = n_o^2$, n_o , n_e - показатели преломления ЖК перпендикулярно и вдоль оптической оси ХЖК соответственно, $\beta = 2\pi/p$, p - шаг спирали ХЖК.

Длина волны λ_{max} максимума полосы селективного отражения ХЖК удовлетворяет следующему равенству:

$$(n_e + n_o)p/2 = \lambda_{max}.$$

Задание

1. Разработать алгоритм и вычислительную программу для расчета отражения и пропускания слоев холестерического ЖК световой волны. В качестве входных параметров использовать следующие величины: показатели преломления ЖК $n_o = 1.5$, $n_e = 1.7$; шаг спирали $p = 0.34$ мкм; толщина слоя ЖК 15 мкм; слой ЖК помещен между двумя стеклянными подложками с показателями преломления $n = 1.5$. Считать, что свет на ЖК падает нормально ($\phi_0 = 0^0$).
2. Исследовать зависимость пропускания и отражения света слоем ЖК в зависимости от длины волны падающего на него света. Убедиться, что величина длины волны максимума селективного отражения λ_{max} подчиняется уравнению (42). Убедитесь, что в этом случае свет отраженный и пропущенный слоем ХЖК является поляризованным по кругу.
3. Изменяя шаг спирали ХЖК и оставляя постоянными показатели преломления ЖК n_o и n_e и его толщину, проследите как изменяется λ_{max} . Шаг спирали ХЖК при этом изменяйте в пределах от 0.3 мкм до 0.4 мкм.

Результаты исследований представить в графическом и табличном виде

Литература.

1. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. - М.: Мир, 1981. –584 С.
2. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. – М.: Мир, 1987. –616 С.
3. Блинов Л.М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов // М.: Наука. 1978. 484 С.
4. Сонин А.С. Введение в физику жидких кристаллов // М.: Наука. 1983. 384 С.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных сотрудников и инженеров // М.: Наука. 1984. 812 С.
6. Дьяконов В. П. Сборник алгоритмов и программ на языке бэйсик для персональных ЭВМ // М.: Наука. 1987. 400 С.
7. Плис А.И., Сливина Н.А. Лабораторный практикум по высшей математике // М.: Наука. 1994. 534 С.