ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ. ЧАСТЬ 1

М.П. Мисник, О.В. Сорокина

Учебное пособие для студентов нематематических направлений подготовки

Саратов 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего образования, рабочей программой и фондом оценочных средств курса «Математика» для студентов-бакалавров по направлению подготовки 04.03.01 «Химия» Института химии СГУ.

Курс «Математика» является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной. Ее изучение предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач;
- овладение некоторыми численными методами;
- выработку умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

В процессе практических занятий по курсу «Математика» студенты учатся применять теоретические знания, полученные на лекциях, к решению конкретных задач математики. Текущий контроль освоения дисциплины «Математика» в первом семестре проводится в виде устного опроса и письменного контроля знаний по разделам: «Решение систем линейных алгебраических уравнений»; «Элементы векторной алгебры»; «Геометрические фигуры 1-го и 2-го порядков».

Цель пособия – помочь студентам подготовиться к выполнению контрольных работ по темам первого семестра курса «Математика».

Пособие состоит из трех частей, в соответствии с разделами, по которым проводится письменный контроль знаний в первом семестре. В каждой части приведены контрольные вопросы, позволяющие оценить качество освоения теоретического материала, разбирается решение задач примерных вариантов контрольной работы, приводятся задачи для самостоятельного решения с ответами. Ответы к задачам помогут осуществить контроль за правильностью решения задачи.

В пособии даны методические рекомендации по выполнению контрольных работ и критерии их оценивания, а также приведен необходимый список учебно-методической литературы.

Пособие может быть полезно студентам нематематических специальностей и иных направлений подготовки, изучающих высшую математику.

Методические рекомендации по выполнению контрольных работ

В соответствие с рабочей программой курса «Математика» контрольные работы в первом семестре проводятся по темам: «Решение систем линейных алгебраических уравнений»; «Элементы векторной алгебры»; «Геометрические фигуры 1-го и 2-го порядков (Линии на плоскости)», «Геометрические фигуры 1-го и 2-го порядков (Линии и поверхности в пространстве)». На выполнение каждой контрольной работы отводится 1 час. Контрольная работа проводится в письменной форме без привлечения какой-либо справочной информации и вспомогательных вычислительных средств (калькулятор, телефон и т.п.). Перед выполнением контрольной работы необходимо повторить основной теоретический материал по теме работы с использованием лекций и списка рекомендованной учебно-методической литературы (см. [1]-[11]) и ответить на вопросы темы.

При выполнении контрольной работы необходимо:

– внимательно прочитать условие задачи;

– выбрать алгоритм решения;

– провести подробное решение задачи со всеми промежуточными выкладками в соответствии с выбранным методом решения задачи;

– провести анализ полученных результатов и их интерпретацию;

– изложить полученные результаты ясным научным языком, пользуясь математическими терминами в соответствии с их смыслом.

Критерии оценивания контрольной работы

Максимально возможное количество баллов, которое может получить студент по каждой из тем – 5 баллов, в том числе:

0 баллов – решение задачи отсутствует или выполнено полностью неверно;

1 балл – выбран неоптимальный метод решения; решение не доведено до конца; имеются многочисленные логические и вычислительные ошибки; отсутствуют промежуточные выкладки;

2 балла – выбран неоптимальный метод решения, решение доведено до конца, но с вычислительными ошибками; либо выбран оптимальный метод решения, решение доведено не до конца, но прописан алгоритм решения;

3 балла – выбран оптимальный метод решения, но при решении допущены вычислительные ошибки, или выбран неоптимальный метод решения и решение получено верно;

4 балла – выбран оптимальный метод решения задачи; решение задачи произведено верно, но не совсем подробно, нет обоснований для некоторых действий; получен аналитически и численно верный результат;

5 баллов – выбран оптимальный метод решения поставленной задачи; решение задачи произведено полностью верно, последовательно, подробно; получен аналитически и численно верный результат).

При получении от 0 до 2 баллов данная тема определяется как неосвоенная и требуется повторное выполнение контрольной работы по этой теме.

1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Контрольные вопросы к теме

1. Какие существуют операции над матрицами?
2. Что должно быть выполнено, чтобы существовало произведение матрицы A на матрицу B?
3. Если матрицы A и B можно умножать, следует ли из этого, что их можно складывать?
4. Если матрицы A и B можно складывать, следует ли из этого, что их можно умножать?
5. Может ли произведение прямоугольных матриц быть квадратной матрицей?
6. Может ли при умножении ненулевых матриц получиться нулевая?
7. Перечислить свойства операций над матрицами?
8. Как вычислить определитель второго порядка?
9. Как вычислить определитель третьего порядка?
10. Сформулировать свойства определителей.
11. Сформулировать теорему о разложении определителя по элементам строки (столбца).
12. Какая матрица называется невырожденной?
13. Какая матрица называется обратной?
14. Указать формулу получения обратной матрицы.
15. Какая система называется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)?
16. Какая СЛАУ называется однородной? неоднородной?
17. Что называют решением СЛАУ?
18. Какая СЛАУ называется совместной? несовместной?
19. Какая СЛАУ называется определенной? неопределенной?
20. Какую матрицу называют матрицей системы? расширенной матрицей системы?
21. Что называют рангом матрицы?
22. Сформулировать теорему Кронекера-Капелли.
23. Может ли однородная СЛАУ иметь ровно одно решение? ровно два решения? ровно 17 решений?
24. Может ли у неоднородной СЛАУ быть фундаментальная система решений?
25. В каком случае можно применять метод Крамера при решении СЛАУ?
26. Написать формулы Крамера решения СЛАУ.
27. В каком случае можно применять матричный метод при решении СЛАУ?

Примерный вариант контрольной работы

1. Дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Найти решение системы:

а) с использованием формул Крамера;

б) с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е .

1. Данная система линейных алгебраических уравнений является неоднородной. Число уравнений в системе равно числу неизвестных.

Находим определитель Δ системы. При вычислении определителя воспользуемся теоремой о разложении определителя по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 9 - 13 - 2 = -6 \neq 0.$$

Определитель отличен от нуля, следовательно, решение СЛАУ можно получить с помощью метода Крамера и с использованием обратной матрицы.

1.1. При решении СЛАУ методом Крамера используем формулы Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \qquad (1.1)$$

где Δ – определитель системы, Δ_1, Δ_2, Δ_3 – вспомогательные определители, получающиеся из определителя системы заменой, соответственно, первого, второго и третьего столбцов на столбец правой части системы.

Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3, входящие в формулы (1.1):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 18 - 4 - 20 = -6,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&2&2\\3&2&1\\-1&4&4\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2&1\\4&4\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}3&1\\-1&4\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}3&2\\-1&4\end{vmatrix}=4-26+28=6,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&2\\3&2&2\\-1&-1&4\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2&2\\-1&4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}3&2\\-1&4\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}3&2\\-1&-1\end{vmatrix}=10-14-2=-6.$$

Подставляя найденные значения в формулы (1.1), получим решение системы:

$x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{-6}{-6}=1,\ x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{6}{-6}=-1,\ x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{-6}{-6}=1.$■

1.2. В матричной форме исходная СЛАУ примет вид $AX=B$,

где $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\3&2&1\\-1&-1&4\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}.$

Определитель $\det A$ матрицы равен $\Delta=14\neq 0$. Следовательно, обратная матрица A^{-1} для матрицы A существует. Решение исходной системы можно найти в матричном виде

$$X=A^{-1}B. \tag{1.2}$$

Для того, чтобы воспользоваться формулой (1.2), необходимо найти обратную матрицу A^{-1}.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}^T,$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, $i=1,2,3;\ j=1,2,3$ матрицы. При этом $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, где M_{ij} – минор элемента a_{ij}, $i=1,2,3;\ j=1,2,3$ матрицы.

Вычислим алгебраические дополнения для элементов матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\-1&4\end{vmatrix}=9;\ A_{12}=-\begin{vmatrix}3&1\\-1&4\end{vmatrix}=-13;\ A_{13}=\begin{vmatrix}3&2\\-1&-1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&2\\-1&4\end{vmatrix}=-6;\ A_{22}=\begin{vmatrix}1&2\\-1&4\end{vmatrix}=6;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}=0;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}=5;\ A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}=-1.$$

Тогда обратная матрица будет иметь вид:

$$A^{-1} = -\frac{1}{-6}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -13 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-6}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -13 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно получить решение системы

$$X = -\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -13 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$■

2. Данный определитель является определителем четвертого порядка и для его вычисления необходимо применить теорему о разложении определителя по элементам строки или столбца. Для упрощения вычислений, прежде чем применять теорему, следует преобразовать исходный определитель так, чтобы в преобразованном определителе в какой-либо строке (или столбце) было как можно больше нулей. Этого можно добиться, используя свойства определителей.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{вычтем из} \\ \text{первой строки} \\ \text{вторую} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{прибавим ко} \\ \text{второму} \\ \text{столбцу} \\ \text{первый} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{разложим по} \\ \text{элементам} \\ \text{первой строки} \end{pmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{вычтем из} \\ \text{второй строки} \\ \text{третью} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{прибавим ко второму} \\ \text{столбцу третий} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{разложим по} \\ \text{элементам} \\ \text{второй строки} \end{pmatrix} =$$

$$= -1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3 - 2\cdot 2 = 5.$$■

Задачи для самостоятельного решения

1. Дана СЛАУ. Найти решение системы:
а) с использованием формул Крамера;
б) с помощью обратной матрицы.

1.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = 3;\ x_2 = -2;\ x_3 = 1$).

1.2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = -3$).

1.3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = -2;\ x_2 = 6;\ x_3 = -3$).

1.4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = 3;\ x_2 = -2;\ x_3 = -1$).

1.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = -1;\ x_2 = 3;\ x_3 = -3$).

1.6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = 5;\ x_2 = -1;\ x_3 = -4$).

1.7. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = -2;\ x_2 = 6;\ x_3 = -3$).

1.8. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = 5;\ x_2 = -1;\ x_3 = -3$).

1.9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = -1;\ x_2 = -6;\ x_3 = 3$)

1.10. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = 2;\ x_2 = -2;\ x_3 = 3$)

1.11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 5, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1$).

1.12. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = -1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 0$).

1.13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = 3;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1$).

1.14. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = 2;\ x_2 = -1;\ x_3 = 3$).

1.15. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = -8;\ x_2 = -4;\ x_3 = -13$)

1.16. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = 3;\ x_2 = -2;\ x_3 = 1$).

1.17. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = -1;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1$).

1.18. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = 2;\ x_2 = -1;\ x_3 = -3$).

1.19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -8, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -6. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = -2;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1$).

1.20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$

(*Ответ*: $x_1 = 3;\ x_2 = -1;\ x_3 = 4$).

2. Вычислить определитель 4-го порядка

2.1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$ (*Ответ*: 150).

2.2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$ (*Ответ*: 112).

2.3. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}.$ (*Ответ*: 65).

2.4. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$ (*Ответ*: -43).

2.5. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$ (*Ответ*: -269).

2.6. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$. (*Ответ*: 0).

2.7. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$. (*Ответ*: 0).

2.8. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. (*Ответ*: 15).

2.9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. (*Ответ*: 30).

2.10. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. (*Ответ*: 10).

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Контрольные вопросы к теме

1. Что называется ортом вектора $\vec{a}$?
2. Какие векторы называются коллинеарными? компланарными?
3. Какие векторы называются равными?
4. Что называется проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l?
5. Какие основные свойства проекции вектора на ось l.
6. Что называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
7. Что называется разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
8. Что называется произведением вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$?
9. Сформулировать признак коллинеарности векторов.
10. Сформулировать признак компланарности векторов.
11. Что называется скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
12. Чему равно скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
13. Какую тройку векторов называют правой? левой?
14. Что называется векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
15. Что можно сказать о векторном произведении коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
16. Что называется смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?
17. Что можно сказать о векторах, смешанное произведение которых равно нулю?
18. Что называют координатами вектора $\vec{a}$ в декартовой системе координат?
19. Если даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то как определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$?
20. Как определяется длина и направляющие косинусы вектора $\vec{a}$, заданного своими координатами?
21. Сформулировать признак коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами.
22. Как вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданных своими координатами?
23. Как вычислить векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданных своими координатами?
24. Как вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданных своими координатами?
25. Каким образом векторная алгебра используется при определении площадей параллелограмма, треугольника и объема параллелепипеда?

Примерные варианты контрольной работы

Вариант №1

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 150°, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Вычислить $|3\vec{a} + \vec{b}|$.
2. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $(2\vec{a} + 3\vec{b})$ и $(\vec{a} - 2\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°.
3. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{j} + \vec{k}$.
4. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$.

Р е ш е н и е.

1. $|3\vec{a} + \vec{b}|^2 = (3\vec{a} + \vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 =$

$= 9|\vec{a}|^2 + 6|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 9 \cdot 4 + 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 150^\circ + 9 = 45 - 18\sqrt{3}$.■

2. Площадь S треугольника, построенного на векторах $(2\vec{a} + 3\vec{b})$ и $(\vec{a} - 2\vec{b})$ равна половине площади параллелограмма, которая определяется длиной вектора, равного векторному произведению данных векторов. Следовательно, $S = \frac{1}{2}|(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$. Для определения этой длины, пользуясь свойствами векторного произведения, выразим векторное произведение векторов $(2\vec{a} + 3\vec{b})$ и $(\vec{a} - 2\vec{b})$ через векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b}) = 2\,(\vec{a} \times \vec{a}) + 3\,(\vec{b} \times \vec{a}) - 4\,(\vec{a} \times \vec{b}) - 6(\vec{b} \times \vec{b}) =$

$= -3\,(\vec{a} \times \vec{b}) - 4\,(\vec{a} \times \vec{b}) = -7\,(\vec{a} \times \vec{b})$.

$$S = \frac{1}{2}|(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})| = \frac{1}{2} \cdot |-7\,(\vec{a} \times \vec{b})| = \frac{7}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$$

$$= \frac{7}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{45\sqrt{3}}{2}.■$$

3. Обозначим искомый единичный вектор $\vec{c} = (x;\ y;\ z)$. Так как, по условию, вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a} = (3; -1; -1)$ и $\vec{b} = (0;\ 2;\ 1)$, то он коллинеарен вектору $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$. При этом направление вектора $\vec{c}$ может как совпадать с направлением вектора $\vec{d}$, так и быть

ему противоположно. Учитывая, что вектор $\vec{c}$ – единичный, $\vec{c} = \pm\vec{d}^{\circ}$, где $\vec{d}^{\circ}$ – орт вектора $\vec{d}$. Нормируем вектор $\vec{d}$: $\vec{d}^{\circ} = \dfrac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$.

Определим координаты вектора $\vec{d}$.

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Его длина $|\vec{d}| = \sqrt{46}$. Орт вектора $\vec{d}$ примет вид

$$\vec{d}^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{46}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{46}}\vec{j} + \frac{6}{\sqrt{46}}\vec{k}, \quad \text{или} \quad \vec{d}^{\circ} = \left(\frac{1}{\sqrt{46}};\ -\frac{3}{\sqrt{46}}; \frac{6}{\sqrt{46}}\right).$$

Тогда $\vec{c}^{\circ} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{46}}; -\dfrac{3}{\sqrt{46}}; \dfrac{6}{\sqrt{46}}\right)$, или $\vec{c}^{\circ} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{46}}; \dfrac{3}{\sqrt{46}}; -\dfrac{6}{\sqrt{46}}\right)$.■

4. Объем V треугольной пирамиды равен шестой части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Координаты этих векторов легко определяются по координатам начальной и конечной точек векторов: $\overrightarrow{AB} = (2;\,3;\,4)$, $\overrightarrow{AC} = (6;\,2;\,2)$, $\overrightarrow{AD} = (3;\,7;\,1)$. Для вычисления объема параллелепипеда необходимо найти смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 120$.

Следовательно, $V = \dfrac{1}{6} \cdot 120 = 30$ (куб.ед.).■

Вариант №2

1. В треугольнике ABC прямая AM является биссектрисой угла BAC, причем точка M лежит на стороне BC. Найти $\overrightarrow{AM}$, если $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{c}$.
2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 60°, $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=1$. Найти длину вектора $\vec{p}$ равного векторному произведению векторов $\left(7\vec{a}-2\vec{b}\right)$ и $\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)$.
3. Найти координаты вектора $\vec{p}$, если он коллинеарен вектору $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, составляет острый угол с осью Ox и $|\vec{p}|=3$.
4. При каком значении m векторы $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+m\vec{k}$, $\vec{b}=m\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+m^2\vec{j}+4\vec{k}$ компланарны?

Решение.

1. Из условия задачи имеем $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$. Из свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника следует, что $\left|\overrightarrow{BM}\right|:\left|\overrightarrow{MC}\right|=|\vec{b}|:|\vec{c}|$. Векторы $\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{BC}$ коллинеарны и направлены в одну сторону. Тогда $\left|\overrightarrow{BM}\right|:\left|\overrightarrow{BC}\right|=|\vec{b}|:\left(|\vec{b}|+|\vec{c}|\right)$. Отсюда получаем $\overrightarrow{BM}=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}(\vec{c}-\vec{b})$. Так как $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$, то

$$\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}(\vec{c}-\vec{b})=\frac{|\vec{b}|\cdot\vec{c}+|\vec{c}|\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}.\blacksquare$$

2. Для определения $\left|(7\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}+3\vec{b})\right|$ выразим векторное произведение векторов $\left(7\vec{a}-2\vec{b}\right)$ и $\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)$ через векторное произведение заданных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с использованием свойств операции векторного произведения.

$$(7\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}+3\vec{b})=14\cdot(\vec{a}\times\vec{a})-4\cdot(\vec{b}\times\vec{a})+21\cdot(\vec{a}\times\vec{b})-6\cdot(\vec{b}\times\vec{b})=$$
$$=4\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+21\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=25\cdot(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Таким образом,

$$\left|(7\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}+3\vec{b})\right|=25\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=25\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=$$
$$=25\cdot6\cdot1\cdot\sin60^\circ=75\cdot\sqrt{3}.\blacksquare$$

3. Пусть вектор $\vec{p}=(x;\ y;\ z)$. Так как вектор $\vec{p}$ коллинеарен вектору $\vec{a}=(1;\ 2;\ 1)$, то их координаты пропорциональны, то есть $x=\lambda\cdot 1,\ y=\lambda\cdot 2,\ z=\lambda\cdot 1$ и $\vec{p}=(\lambda;\ 2\lambda;\ \lambda)$. Найдем значение λ.

По условию $|\vec{p}|=3$, следовательно

$$\sqrt{\lambda^2+4\lambda^2+\lambda^2}=3,\quad 6\lambda^2=9,\quad \lambda=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Для определения знака воспользуемся условием, что вектор $\vec{p}$ составляет острый угол с осью Ox. Это означает, что направляющий косинус угла между вектором и положительным направлением Ox должен иметь положительное значение. Таким образом, $\lambda=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. В конечном итоге: $\vec{p}=(\frac{3\sqrt{2}}{2};\ 3\sqrt{2};\ \frac{3\sqrt{2}}{2})$.■

4. Чтобы выяснить при каком значении m векторы $\vec{a}=(1;\ 2;\ m)$, $\vec{b}=(m;\ -1;\ 1)$, $\vec{c}=(2;\ m^2;\ 4)$ компланарны, надо найти их смешанное произведение и определить, при каких значениях m смешанное произведение векторов будет равно нулю.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & m\\ m & -1 & 1\\ 2 & m^2 & 4\end{vmatrix}=m^4-m^2-6m=m(m^3-m-6).$$

Таким образом,

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}==0\ \leftrightarrow\ m(m^3-m-6)=0\ \leftrightarrow\ m_1=0,\ m_2=2.$

Окончательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны при $m_1=0,\ m_2=2$.■

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC дано: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, точка M – середина стороны BC. Выразить вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
(*Ответ*: $\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$).

2. В параллелограмме $ABCD$: K и M – середины сторон BC и CD, $\overrightarrow{AK}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AM}=\vec{b}$. Выразить векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
(*Ответ*: $\overrightarrow{BD}=2\vec{b}-2\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$).

3. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$: $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{q}$. Разложить векторы $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{BF}$; $\overrightarrow{CF}$; $\overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{CA}$ по векторам $\vec{p}$; $\vec{q}$.
(*Ответ*: $\overrightarrow{AC}=\vec{p}+\vec{q}$; $\overrightarrow{BD}=2\vec{q}-\vec{p}$; $\overrightarrow{CD}=\vec{q}-\vec{p}$; $\overrightarrow{AD}=2\vec{q}$; $\overrightarrow{BE}=2\vec{q}-2\vec{p}$; $\overrightarrow{CE}=\vec{q}-2\vec{p}$; $\overrightarrow{AE}=2\vec{q}-\vec{p}$; $\overrightarrow{BF}=\vec{q}-2\vec{p}$; $\overrightarrow{CF}=-2\vec{p}$; $\overrightarrow{DE}=-\vec{p}$; $\overrightarrow{EF}=-\vec{q}$; $\overrightarrow{CA}=-\vec{p}-\vec{q}$).

4. Дано: $|\vec{a}|=3$; $|\vec{b}|=4$; $\angle(\vec{a},\vec{b})=120^\circ$. Найти длину вектора $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$.
(*Ответ*: 73).

5. Найти скалярное произведение векторов $(3\vec{a}-2\vec{b})$ и $(5\vec{a}-6\vec{b})$, если векторы образуют угол $\varphi=\frac{\pi}{3}$, $|\vec{a}|=4$; $|\vec{b}|=6$.
(*Ответ*: 336).

6. Даны векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, для которых $|\vec{a}|=2$; $|\vec{b}|=4$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60^\circ$. Вычислить угол между медианой $\overrightarrow{OM}$ и стороной $\overrightarrow{OA}$ треугольника OAB.
(*Ответ*: $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{7}}$).

7. В прямоугольном треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны 60° и 90° соответственно, а длина гипотенузы равна 2. Вычислить скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.
(*Ответ*: 1).

8. Даны некомпланарные векторы $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$, причем $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$; $|\vec{c}|=4$; $\vec{a}\perp\vec{b}$; $\angle(\vec{c},\vec{b})=\angle(\vec{c},\vec{a})=60^\circ$. Найти $a)$ $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$; $b)$ $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$.
(*Ответ*: $a)$ -1; $b)$ 26).

9. В треугольнике ABC: $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Выразить вектор $\vec{h}$, направленный по высоте AH через векторы $\vec{b}; \vec{c}$.

(*Ответ*: $\vec{h} = \vec{b} + \dfrac{\vec{b}\cdot(\vec{b}-\vec{c})}{\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2}\cdot(\vec{c}-\vec{b})$).

10. Выразить длину медианы $\overrightarrow{AD} = \vec{m}$ произвольного треугольника ABC через длины его сторон $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$.

(*Ответ*: $|\vec{m}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\left|\vec{b}\right|^2 + 2|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2}$).

11. Радиус-вектор точки M составляет с осью Ox угол 45°, с осью Oy – угол 60°. Его длина $|\vec{r}| = 6$. Найти координаты точки M, зная, что третья координата отрицательная.,

(*Ответ*: $M\left(3\sqrt{2};3;-3\right)$).

12. Найти вектор $\vec{p}$, зная, что две его координаты $p_x = 3$, $p_y = -9$, а его длина $|\vec{p}| = 12$.

(*Ответ*: $\vec{p} = (3;-9;\ \pm 3\sqrt{6})$.

13. Найти орт вектора $\vec{a} = (6;-2;-3)$.

(*Ответ*: $\vec{a}^0 = \left(\dfrac{6}{7};-\dfrac{2}{7};-\dfrac{3}{7}\right)$).

14. Даны три вектора $\vec{a} = (1;3)$, $\vec{b} = (2;-1)$ и $\vec{c} = (4;1)$. Найти числа α и β такие, что $\alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{b} + \vec{c} = 0$.

(*Ответ*: $\alpha = -\dfrac{6}{7}$, $\beta = -\dfrac{11}{7}$).

15. Проверить, что векторы $\vec{a} = (-5;-1)$ и $\vec{b} = (-1;3)$ образуют базис на плоскости. Найти координаты векторов $\vec{c} = (-1;2)$ и $\vec{d} = (2;-6)$ в этом базисе.

(*Ответ*: $\vec{c} = \left(\dfrac{1}{16};\dfrac{11}{16}\right)$, $\vec{d} = \left(0;-2\right)$).

16. Показать, что тройка векторов $\vec{e}_1 = (1;0;0)$, $\vec{e}_2 = (1;1;0)$ и $\vec{e}_3 = (1;1;1)$ образуют базис в множестве всех векторов пространства. Вычислить координаты вектора $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{k}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и написать соответствующее разложение по базису.

(*Ответ*: $\vec{a} = (-2;\ 1;\ -1)$; $\vec{a} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$).

17. Разложить вектор $\vec{c} = (9;4)$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, если $\vec{a} = (1;2)$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

(*Ответ*: $\vec{c} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$).

18. Зная одну из вершин треугольника $A(1;-6;3)$ и векторы, совпадающие с двумя сторонами $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 5\vec{k}$ и $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, найти остальные вершины и вектор $\overrightarrow{CA}$.
(*Ответ*: $B(4;-6;8)$, $C(8;-4;7)$, $\overrightarrow{CA} = (-7;-2;-4)$).

19. Установить, являются ли четыре точки $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$, $D(3;-5;3)$ вершинами трапеции.

20. Найти расстояние между концами векторов $\vec{a} = (2;1;8)$, и $\vec{b} = (-2;2;3)$, если векторы отложены от начала координат.
(*Ответ*: $\sqrt{42}$).

21. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны.
(*Ответ*: $\alpha = 4$, $\beta = -1$).

22. Даны векторы $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ и $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, образующие стороны треугольника ABC. Найти длину медианы AM треугольника.
(*Ответ*: 6).

23. Является ли треугольник с вершинами в точках $A(5;-4)$, $B(3;2)$, $C(2;-5)$ прямоугольным?
(*Ответ*: Да (угол A-прямой).

24. Найти единичный вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = (1;1;2)$.
(*Ответ*: $\vec{c} = \left(\frac{\sqrt{11}}{11};-\frac{3\sqrt{11}}{11};\frac{\sqrt{11}}{11}\right)$, $\vec{c} = \left(-\frac{\sqrt{11}}{11};\frac{3\sqrt{11}}{11};-\frac{\sqrt{11}}{11}\right)$;).

25. Найти вектор $\vec{d}$, зная, что $\vec{d} \perp \vec{a}$, $\vec{d} \perp \vec{b}$ и $\vec{d} \cdot \vec{c} = -6$, где $\vec{a} = (2;3;-1)$, $\vec{b} = (1;-2;3)$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
(*Ответ*: $\vec{d} = (-3;3;3)$).

26. Найти вектор $\vec{m}$, зная, что $\vec{m} \perp \vec{c}$, $\vec{m} \cdot \vec{a} = 4$, $\vec{m} \cdot \vec{b} = 35$, где $\vec{a} = (3;-2;4)$, $\vec{b} = (5;1;6)$ и $\vec{c} = (-3;0;2)$.
(*Ответ*: $\vec{m} = (2;7;3)$).

27. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Найти вектор $\vec{x}$, если $\vec{x} \cdot \vec{a} = -5$; $\vec{x} \cdot \vec{b} = -11$; $\vec{x} \cdot \vec{c} = 20$.
(*Ответ*: $\vec{x} = \left(\frac{17}{8};\frac{31}{16};-\frac{39}{16}\right)$).

28. Какие из векторов $\vec{a} = (1;2;-5)$, $\vec{b} = (4;-1;3)$, $\vec{c} = (2;4;-10)$ являются коллинеарными?
(*Ответ*: векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны).

29. Даны векторы $\vec{a}=(2;3)$, $\vec{b}=(1;-3)$ и $\vec{c}=(-1;3)$. При каком значении коэффициента α векторы $\vec{p}=\vec{a}+\alpha\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{c}$ коллинеарны.
(*Ответ*: -2).

30. Представить вектор $\vec{d}=(4;12;-3)$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(5;7;0)$ и $\vec{c}=(3;-2;4)$.
(*Ответ*: $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$).

31. Векторы $\overrightarrow{AB}=(2;6;-4)$ и $\overrightarrow{AC}=(4;2;-2)$ определяют стороны треугольника ABC. Найти длину вектора $\overrightarrow{CD}$, совпадающего с медианой, проведенной из вершины C.
(*Ответ*: $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{10}$).

32. Под действием силы $\vec{F}=(5;4;3)$ тело переместилось из начала вектора $\vec{s}=(2;1;-2)$ в его конец. Вычислить работу, которую совершает сила и угол между направлением силы и перемещения.
(*Ответ*: $A=8;\ \cos\varphi=\dfrac{4\sqrt{2}}{15}\approx 0{,}38;\ \varphi\approx 67^\circ 40'$).

33. При каком значении t векторы $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-t\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны, если $\vec{a}=6\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-4\vec{k}$.
(*Ответ*: $t=\pm\dfrac{7}{5}$).

34. Даны две вершины $A(2;-3;-5)$ и $B(-1;3;2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(4;-1;7)$. Найти координаты остальных вершин параллелограмма.
(*Ответ*: $C(6;1;19);\ D(9;-5;12)$).

35. Найти координаты вектора $\vec{b}$ коллинеарного вектору $\vec{a}=(2;1;-1)$, при условии, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$.
(*Ответ*: $\vec{b}=(1;\ 0{,}5;-0{,}5)$).

36. Проверить, что векторы $\vec{a}=7\vec{i}+6\vec{j}-6\vec{k}$, $\vec{b}=6\vec{i}+2\vec{j}+9\vec{k}$ являются ребрами куба. Найти третье ребро $\vec{c}$.
(*Ответ*: $\vec{c}=\pm(6;-9;-2)$).

37. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, где $|\vec{p}|=4;$ $|\vec{q}|=1;$ и $(\vec{p},\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}$.
(*Ответ*: $14\sqrt{2}$).

38. Дано: $|\vec{a}|=10;$ $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$. Найти $|\vec{a}\times\vec{b}|$.
(*Ответ*: 16).

39. Векторы $\vec{a},\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, $|\vec{a}|=2;\ |\vec{b}|=3$. Вычислить: $\left|(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-4\vec{b})\right|$.
(*Ответ*: 66).

40. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $(\vec{a}+3\vec{b})$ и $(3\vec{a}+\vec{b})$, если векторы образуют угол $\varphi=30^\circ$, $|\vec{a}|=1;\ |\vec{b}|=1$.
(*Ответ*: 4).

41. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=7;\ |\vec{q}|=2$ и векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ образуют угол $\varphi=30^\circ$.
(*Ответ*: 63).

42. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 45°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$.
(*Ответ*: $50\sqrt{2}$).

43. Раскрыть скобки и упростить выражение: $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}+(\vec{b}-\vec{c})\times\vec{a}$.
(*Ответ*: $2\vec{a}\times\vec{c}$).

44. Даны векторы $\vec{a}=(3;-1;-2)$ и $\vec{b}=(1;2;-1)$. Найти координаты вектора $(2\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})$.
(*Ответ*: $(20;4;28)$).

45. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=8\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$ и $\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ как на сторонах.
(*Ответ*: $18\sqrt{2}$).

46. Найти площадь треугольника ABC, в котором $A(1;2;0)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;1;2)$.
(*Ответ*: $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$).

47. Сила $\vec{F}=(3;2;-4)$ приложена к точке $A=(2;-1;1)$. Найти вращающий момент этой силы относительно начала координат.
(*Ответ*. $\vec{M}=(2;11;7)$).

48. В треугольнике с вершинами $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$; $C(1;3;-1)$ найти длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.
(*Ответ*: 5).

49. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 3$; $|\vec{c}| = 3$. Найти $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

(*Ответ*: 9).

50. Являются ли векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарными?

(*Ответ*: являются).

51. При каком значении λ $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \lambda\vec{k}$, $\vec{b} = (0;1;0)$, $\vec{c} = (3;0;1)$ компланарны?

(*Ответ*: $\lambda = \frac{1}{3}$).

52. Показать, что точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$; $C(9;4;-4)$; $D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

53. Даны векторы $\vec{a} = (3;4;0)$, $\vec{b} = (0;-4;1)$ и $\vec{c} = (0;2;5)$. Выяснить правой или левой будет тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

(*Ответ*: левой)

54. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2;0;4)$, $B(0;3;7)$, $C(0;0;6)$ и $D(4;3;5)$ и высоту H, опущенную на грань ACD.

(*Ответ*: $V = 2$; $H = 2/\sqrt{3}$).

55. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенный на векторах $\overrightarrow{AB} = (4;3;0)$, $\overrightarrow{AD} = (2;1;2)$, $\overrightarrow{AA_1} = (-3;-2;5)$. Найти:

а) площадь грани $ABCD$;

б) угол между ребрами AB и диагональю BD_1;

в) объем параллелепипеда;

г) длину высоты, проведенной из вершины A_1.

(*Ответ*: а) $2\sqrt{26}$, б) $\cos\varphi = \frac{16\sqrt{10}}{75}$, в) 12, г) $\frac{3\sqrt{26}}{13}$).

56. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(1;2;3)$, $A_2(-2;4;1)$, $A_3(7;6;3)$, $A_4(4;-3;-1)$. Найти:

а) длину ребра A_1A_2;

б) площадь грани $A_1A_2A_3$;

в) объем пирамиды;

г) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

(*Ответ*: а) $\sqrt{17}$, б) 14, в) 30, г) $6\frac{3}{7}$).

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

3.1. ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Контрольные вопросы к теме

1. Что называют уравнением линии на плоскости?
2. Как определить, не производя геометрических построений, пересекаются ли две линии?
3. Что называют угловым коэффициентом прямой?
4. Можно ли использовать уравнение прямой с угловым коэффициентом, если прямая параллельна оси ординат?
5. Написать уравнение прямой в общем виде, если известно, что прямая параллельна оси Oy (оси Ox).
6. Даны уравнения прямых $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Написать условие параллельности этих прямых.
7. Даны уравнения прямых $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Написать условие перпендикулярности этих прямых.
8. Даны уравнения пересекающихся прямых $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Написать уравнение пучка прямых.
9. Даны уравнение прямой $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и точка $M(x_0; y_0)$. Как вычислить расстояние d от точки до прямой.
10. Даны уравнения прямых $l_1 : y = k_1x + b_1$, $l_2 : y = k_2x + b_2$. Написать условие параллельности прямых.
11. Даны уравнения прямых $l_1 : y = k_1x + b_1$, $l_2 : y = k_2x + b_2$. Написать условие перпендикулярности прямых.
12. Даны уравнения прямых $l_1 : y = k_1x + b_1$, $l_2 : y = k_2x + b_2$. Написать формулу, определяющую угол между этими прямыми.
13. Даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Написать уравнение прямой, проходящей через эти точки.
14. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ и образующей угол φ с положительным направлением оси Ox.
15. Написать уравнение прямой в отрезках.
16. Написать нормальное уравнение прямой.
17. Какие координатные четверти пересекает прямая, если $y = kx + b$, $k < 0,\ b < 0$.
18. Написать каноническое уравнение окружности, имеющей радиус R, центр которой находится в точке $C(a;b)$.
19. Написать каноническое уравнение эллипса, большая полуось которого равна a, а фокусы расположены в точках $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.
20. Написать выражение для определения эксцентриситета эллипса, с фокусами в точках $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.

21. Написать выражение для определения директрис эллипса, с фокусами в точках $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.
22. Написать уравнение касательной к эллипсу, проведенной через точку $M_0(x_0;y_0)$ эллипса.
23. Написать каноническое уравнение гиперболы, действительная полуось которой равна a, а фокусы расположены в точках $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.
24. Написать выражение для определения эксцентриситета гиперболы, с фокусами в точках $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.
25. Написать выражение для определения директрис гиперболы, с фокусами в точках $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.
26. Написать выражение для определения асимптот гиперболы, с фокусами в точках $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.
27. Написать уравнение касательной к гиперболе, проведенной через точку $M_0(x_0;y_0)$ гиперболы, с фокусами в точках $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.
28. Написать каноническое уравнение гиперболы, центром симметрии которой является начало координат, с действительной полуосью b, лежащей на оси Oy и мнимой полуосью a, лежащей на оси Ox.
29. Написать каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен в точке $F(\frac{p}{2};0)$, а директриса задается уравнением $x=-\frac{p}{2},\ p>0$.
30. Написать выражение для определения директрисы параболы, с фокусом в точке $F(\frac{p}{2};0)$ и вершиной в начале координат.
31. Написать уравнение касательной к параболе, проведенной через точку $M_0(x_0;y_0)$ параболы, фокус которой расположен в точке $F(\frac{p}{2};0)$, а директриса задается уравнением $x=-\frac{p}{2},\ p>0$.
32. Написать уравнение параболы, фокус которой расположен в точке $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$, а директриса задается уравнением $y=\frac{p}{2}$.

Примерные варианты контрольной работы

Вариант №1

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-3y-1=0$, $3x-y-2=0$ и параллельной прямой $y=x$.
2. Даны вершины треугольника $A(0;1)$; $B(6;5)$ и $C(12;-1)$. Составить уравнение высоты CD и медианы CE треугольника, проведенной из вершины C.
3. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M(4;-1{,}8)$, если его эксцентриситет равен $\frac{4}{5}$.

Решение.

1. Искомая прямая принадлежит пучку:

$$2x-3y-1+\lambda(3x-y-2)=0.$$

Это уравнение может быть записано в виде

$$(2+3\lambda)x-(3+\lambda)y-1-2\lambda=0.$$

Отсюда угловой коэффициент определяется выражением $k=\frac{2+3\lambda}{3+\lambda}$. Искомая прямая параллельна прямой $y=x$, угловой коэффициент которой равен 1. Так как угловые коэффициенты параллельных прямых равны, то, $\frac{3\lambda+2}{\lambda+3}=1$, то есть $\lambda=\frac{1}{2}$. Подставив полученное значение λ в уравнение пучка, после упрощений находим уравнение прямой в общем виде: $7x-7y-4=0$.■

2. Уравнение высоты CD, как прямой, проходящей через точки C и D, будем искать в виде

$$y-y_C=k_{CD}(x-x_C),$$

где (x_C,y_C) – координаты вершины C треугольника, k_{CD} – угловой коэффициент прямой CD.

Высота CD перпендикулярна стороне AB. По формуле $k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$, где (x_A,y_A), (x_B,y_B) – координаты точек A и B, найдем угловой коэффициент стороны AB: $k_{AB}=\frac{5-1}{6-0}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. В силу условия перпендикулярности, $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{3}{2}$.

Тогда уравнение высоты CD будет имеет вид $y+1=-\frac{3}{2}(x-12)$. В общем виде уравнение прямой CD примет вид: $3x+2y-34=0$.■

Уравнение медианы CE треугольника, как прямой, проходящей через точку C и середину E стороны AB треугольника, будем искать в виде

$$\frac{y-y_C}{y_E-y_C}=\frac{x-x_C}{x_E-x_C}.$$

Точка E делит отрезок AB пополам, следовательно, ее координаты могут быть найдены следующим образом

$$x_E=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{0+6}{2}=3; \quad y_E=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{5+1}{2}=3.$$

Тогда уравнение медианы CE примет вид

$$\frac{y+1}{3+1}=\frac{x-12}{3-12}, \quad \text{или} \quad \frac{y+1}{4}=\frac{x-12}{-9}.$$

В общем виде уравнение прямой CE примет вид: $4x+9y-39=0$.■

3. По условию эксцентриситет эллипса $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$, откуда $c=\frac{4}{5}a$. Но $b^2=a^2-c^2$, тогда $b^2=\frac{9}{25}a^2$. Так как точка $M(4;-1{,}8)$ принадлежит эллипсу, ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса, то есть имеем равенство

$$\frac{16}{a^2}+\frac{3{,}24}{b^2}=1.$$

Подставляя в последнее равенство выражение для b^2, получим $\frac{16}{a^2}+\frac{9}{a^2}=1$, то есть $a^2=25$ и тогда $b^2=9$. Таким образом, каноническое уравнение эллипса будет иметь вид $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.■

Вариант №2

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;6)$ и составляющий с осью Ox угол, вдвое меньший угла, который составляет с осью Ox прямая $\sqrt{3}y-3x+13=0$.
2. Дан треугольник с вершинами в точках $A(2;5)$; $B(5;-1)$; $C(8;3)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения медиан треугольника, перпендикулярно прямой $x+y+4=0$.
3. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(3;5)$, $B(5;-1)$, если ее центр лежит на прямой $x-y-2=0$.

Решение.

1. Уравнение искомой прямой l_1, проходящей через точку $M(-2;6)$, будем искать в виде

$$l_1:\ y-y_M=k_1(x-x_M),$$

где (x_M, y_M) – координаты точки M, k_1 – угловой коэффициент прямой l_1.

Из уравнения прямой $l_2:\ \sqrt{3}y-3x+13=0$ ее угловой коэффициент $k_2=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$. Так как угловой коэффициент определяет тангенс угла между прямой и положительным направлением оси Ox, то прямая l_2 составляет с осью Ox угол 60°. По условию задачи, прямая l_1 составляет с осью Ox угол, вдвое меньший угла, который составляет с осью Ox прямая l_2. Следовательно, угол, составляющий прямой l_1 с осью Ox равен 30°. Тогда $k_1=tg30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Подставляя координаты точки M и значение углового коэффициента k_1 в уравнение прямой, получаем уравнение прямой в общем виде $l_1:\ \sqrt{3}x-3y+2\sqrt{3}+18=0$.■

2. Одной из медиан треугольника является медиана BN, где точка $N(x_N, y_N)$ – середина стороны AC треугольника ABC. Координаты этой точки определяются как полусумма координат точек A и C. Таким образом, $x_N=\dfrac{2+8}{2}=5;$ $y_N=\dfrac{5+3}{2}=4.$ Уравнение прямой BN, проходящей через две точки с одинаковыми абсциссами будет иметь вид: $x=5.$

Если $M(x_M, y_M)$ – точка пересечения медиан, лежащая на медиане BN, то, очевидно, $x_M=5$.

Известно, что точка пересечения медиан делит отрезок BN в отношении $2:1$, считая от вершины B. Тогда в соответствии с формулой деления отрезка в данном отношении имеем

$$y_M = \frac{y_B + \lambda \cdot y_N}{1+\lambda} = \frac{-1+2\cdot 4}{1+2} = \frac{7}{3}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M\left(5; \frac{7}{3}\right)$ пересечения медиан, будем искать в виде

$$l_1: \ y - y_M = k_1(x - x_M).$$

Искомая прямая l_1 по условию перпендикулярна прямой $l: \ x + y + 4 = 0$, угловой коэффициент которой $k = -1$. Тогда $k_1 = -\frac{1}{k} = 1$. Подставляя найденные величины в уравнение прямой l_1, получив в общем виде следующее уравнение: $3x - 3y - 8 = 0$.■

3. Каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2.$$

В нем необходимо знать координаты центра $C(x_C, y_C)$ и радиус R окружности.

По условию центр окружности лежит на прямой $x - y - 2 = 0$. Следовательно, его координаты удовлетворяют уравнению прямой: $x_C - y_C - 2 = 0$. Отсюда $x_C = y_C + 2$.

Окружность проходит через точку $A(3;5)$. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению окружности

$$(3 - x_C)^2 + (5 - y_C)^2 = R^2.$$

Окружность проходит через точку $B(5;-1)$. Следовательно, ее координаты также удовлетворяют уравнению окружности

$$(5 - x_C)^2 + (-1 - y_C)^2 = R^2.$$

В последних двух уравнениях равны правые части, следовательно,

$$(3 - x_C)^2 + (5 - y_C)^2 = (5 - x_C)^2 + (-1 - y_C)^2.$$

Подставляя в последнее уравнение $x_C = y_C + 2$, раскрывая скобки и выполняя сокращения, получим $y_C = 2$. Тогда $x_C = 4$ и $C(4;2)$.

Учитывая, что $R = |AC| = \sqrt{(4-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{10}$, получим каноническое уравнение окружности в виде

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 10.$$■

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(-1;1)$, чем к точке $B(-4;4)$.

   (*Ответ*: $x^2+y^2=8$).

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $A(-1;3)$ в $B(4;5)$.

   (*Ответ*: $2x-5y+17=0.$)

3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;-3)$ и составляющий с осью Ox угол, втрое больший угла, который составляет с осью Ox прямая $x-y-17=0.$

   (*Ответ*: $x+y+6=0$).

4. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $x-2y+3=0.$

   (*Ответ*: $x-2y+4=0$).

5. Написать уравнение средней линии, параллельной стороне AC треугольника ABC, если заданы его вершины $A(1;-1)$; $B(4;2)$, $C(-3;3)$.

   (*Ответ*: $x+y-3=0$)).

6. Найти уравнение прямой, параллельной прямой $12x+5y-52=0$ и отстоящей от нее на расстоянии 2.

   (*Ответ*: $12x+5y-26=0;\ 12x+5y-78.$)

7. Точка $A(2;-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y-7=0.$ Найти площадь квадрата.

   (*Ответ*: 5.)

8. Даны вершины треугольника $A(2;2)$, $B(8;12)$, $C(14;6)$. Найти угловой коэффициент прямых AB, AC, BC.

   (*Ответ*: $k_{AB}=\dfrac{3}{5}, k_{AC}=\dfrac{1}{3}, k_{BC}=-1$).

9. Даны вершины треугольника $A(-3;3)$, $B(5;1)$, $C(6;-2)$. Найти уравнение: а) стороны BC; б) высоты, опущенной на сторону BC; в) медианы, проведенной из вершины C.

   (*Ответ*: а) $3x+y-16=0$; б) $x-3y+12=0$; в) $4x+5y-14=0$).

10. Даны вершины треугольника $A(3;2)$, $B(3;8)$, $C(6;2)$. Найти уравнения сторон треугольника.

    (*Ответ*: $x=3;\ y=2;\ 2x+y-14=0$).

11. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;1)$ параллельно прямой $x-3y+7=0$.

    (*Ответ*: $x-3y+1=0$).

12. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;2)$ перпендикулярно прямой $3x - y + 7 = 0$.
(*Ответ*: $x + 3y - 8 = 0$).

13. Даны вершины треугольника $A(2;0)$, $B(5;3)$, $C(3;7)$. Найти уравнение прямой, проходящей через вершину B и параллельной медиане AM треугольника.
(*Ответ*: $5x - 2y + 1 = 0$).

14. Даны вершины треугольника $A(1;-2)$, $B(-1;3)$, $C(3;2)$. Найти уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника и параллельных его сторонам.
(*Ответ*: $x + 4y + 7 = 0$; $2x - y + 5 = 0$; $5x + 2y - 19 = 0$).

15. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + 3y + 5 = 0$, $x + 8y + 9 = 0$ и точку $A(2;2)$.
(*Ответ*: $\frac{1}{57}$).

16. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-6)$ и отсекающей на осях Ox и Oy равные отрезки.
(*Ответ*: $x + y + 4 = 0$, $x - y - 8 = 0$).

17. Найти угловой коэффициент прямой, отсекающей на осях координат Ox и Oy отрезки, соответственно равные 4 и 5.
(*Ответ*: 1,25).

18. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $A(0;2)$ и образующих с прямой $x - 2y + 3 = 0$ угол 45°.
(*Ответ*: $3x - y + 2 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$).

19. Найти расстояние от точки $A(1;1)$ до прямой, образующей с осью Ox угол 135° и отсекающей на оси Oy отрезок равный 4.
(*Ответ*: $\frac{\sqrt{2}}{3}$).

20. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x + 4y - 20 = 0$ и $6x + 8y + 5 = 0$.
(*Ответ*: 4,5).

21. На оси абсцисс найти точку, расстояние которой до прямой $8x + 15y + 10 = 0$ равно 1.
(*Ответ*: $\left(\frac{7}{8}; 0\right), \left(-\frac{27}{8}; 0\right)$).

22. Найти расстояние от точки $A(2;-1)$ до прямой отсекающей на осях координат отрезки $a = 8$ и $b = 6$.
(*Ответ*: 4,4).

23. Найти длину высоты BD в треугольнике с вершинами $A(4;-3)$, $B(-2;6)$, $C(5;4)$.
(*Ответ*: $5{,}1\cdot\sqrt{2}$).

24. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $5x+3y+10=0$ и $x+y-15=0$ и через начало координат.
(*Ответ*: $17x+11y=0$).

25. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x-2y=0$ и $x-y-1=0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3;-1)$. Найти уравнения двух других сторон.
(*Ответ*: $x-y-7=0;\ x-2y-10=0$).

26. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(-4;2)$ и уравнения двух медиан: $3x-2y+2=0;\ 3x+5y-12=0$.
(*Ответ*: $2x+y-8=0;\ x-3y+10=0;\ x+4y-4=0$).

27. Даны уравнения сторон треугольника $x-y=0\,(AB)$; $x+y-2=0\ (BC)$; $y=0\ (AC)$. Составить уравнения медианы, проходящей через вершину B и высоты, проходящей через вершину A.
(*Ответ*: $x=1;\ y=x$)

28. Даны уравнения сторон треугольника $x-y+2=0\,(AB)$; $x-2=0\ (BC)$; $x+y-2=0\ (AC)$. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину B и через точку на стороне AC, делящую ее (считая от вершины A) в отношении 1:3.
(*Ответ*: $5x-3y+2=0$).

29. Даны уравнения стороны треугольника $3x-4y+5=0\,(AB)$; уравнение высоты $x+2y-10=0\ (AM)$; и уравнение высоты $2x-3y+4=0\ (BN)$. Составить уравнение двух других сторон треугольника.
(*Ответ*: AC: $3x+2y-16=0;\ BC: 2x-y=0)$).

30. Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма $3x+5y-15=0$ и $3x-5y+15=0$. Точки $A(10;-3)$ и $B(-5;0)$ – его вершины. Найти уравнения диагоналей этого параллелограмма.
(*Ответ*: $x+5y+5=0;\quad 9x+5y-15=0$).

31. Дано уравнение стороны ромба $x+3y-8=0$ и уравнение его диагонали $2x+y+4=0$. Записать уравнения остальных сторон ромба, зная, что точка $A(-9;-1)$ лежит на стороне, параллельной данной.
(*Ответ*: $x+3y+12=0;\ 3x-y-4=0;\ 3x-y+16=0$).

32. Зная уравнения двух сторон треугольника $2x+3y-6=0\,(AB)$; $x+2y-5=0\ (AC)$ и внутренний угол при вершине B, равный $\dfrac{\pi}{4}$,

записать уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.
(*Ответ*: $x-5y+23=0$).

33. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x+2y+3=0$ и $2x+5y-1=0$, параллельную прямой $5x+8y+3=0$.
(*Ответ*: $5x+8y+11=0$).

34. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x+3y+10=0$ и $x+y-15=0$ и через начало координат.
(*Ответ*: $17x+11y=0$).

35. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x+2y+1=0$ и $2x+y+2=0$ и образующую угол 135° с осью абсцисс.
(*Ответ*: $x+y+1=0$).

36. Найти прямую, принадлежащую пучку $2x+3y+5+\lambda(x+8y+6)=0$ и проходящую через точку $A(1;1)$.
(*Ответ*: $4x-7y+3=0$).

37. Найти центр пучка прямых, заданного уравнением $\alpha(2x+3y-1)+\beta(x-2y-4)=0$.
(*Ответ*: $(6;1)$).

38. Пучок прямых задан уравнением: $\alpha(x+2y-5)+\beta(3x-2y+1)=0$. Найти уравнение прямой, принадлежащей данному пучку и
а) проходящей через точку $A(3;-1)$;
б) проходящей через начало координат;
в) параллельной оси Ox;
г) параллельной оси Oy;
д) параллельной прямой $4x+3y+5=0$;
е) перпендикулярной прямой $2x+3y+7=0$.
(*Ответ*: а) $3x+2y-7=0$; б) $2x-y=0$; в) $y-2=0$; г) $x-1=0$; д) $4x+3y-10=0$; е) $3x-4y+4=0$).

39. Даны уравнения сторон треугольника $x+2y-1=0$; $5x+4y-17=0$; $x-4y+11=0$. Не определяя координат его вершин, составить уравнения высот этого треугольника.
(*Ответ*: $4x-5y+22=0$, $2x-y+1=0$, $4x+y-18=0$).

40. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y+5=0$, $4x+3y-1=0$ и пересекающей ось ординат в точке с ординатой -3. Решить задачу, не определяя координат точки пересечении данных прямых.
(*Ответ*: $74x+13y+39=0$).

41. Найти угол между высотой AD и медианой AE в треугольнике с вершинами в точках $A(1;3);\ B(4;-1);\ C(-1;1)$.

(*Ответ*: $tg\varphi = \pm\frac{17}{28}$).

42. Даны последовательные вершины параллелограмма $ABCD$ $A(-4;-3); B(-2;5);\ C(2;7)$. Найти координаты четвертой вершины D.
(*Ответ*: $(0;-1)$).

43. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$ и $5x-12y+26=0$. Найти площадь квадрата.
(*Ответ*: 49).

44. Даны две вершины треугольника $A(2;-2);\ B(-6;2)$ и точка $D(1;2)$ пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины C.
(*Ответ*: $(2;4)$).

45. Точки $A(1;2);\ C(3;6)$ являются противоположными вершинами квадрата $ABCD$. Определить координаты вершин B, D квадрата.
(*Ответ*: $(0;5),\ (4;3)$).

46. Две смежные вершины квадрата имеют координаты $A(1;4);\ B(4;5)$. Найти координаты двух других вершин.
(*Ответ*: $(2;1),\ (5;2)$; или $(0;7),\ (3;8)$).

47. Найти координаты точки симметричной точке $M_1(-2;-2)$ относительно прямой $x+y-4=0$.
(*Ответ*: $(6;6)$).

48. В треугольнике ABC дана вершина $A(3;9)$ и уравнения медиан $BM: y-6=0$, $CN: 3x-4y+9=0$. Найти координаты вершин B, C.
(*Ответ*: $(1;3),\ (11;6)$).

49. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника, зная уравнения двух высот: $7x-2y-1=0$ и $2x-7y-6=0$ и вершину $A(3;-4)$.
(*Ответ*: $2x+7y+22=0$, $7x+2y-13=0$, $x-y+2=0$).

50. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2-4x+6y-3=0.$
(*Ответ*: $(2;-3),\ \ r=4$).

51. Найти координаты центра и радиусы окружности $9x^2+9y^2+42x-54y-95=0.$

(*Ответ*: $\left(-\frac{7}{3};\ 3\right),\ \ r=5$).

52. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2=9,\ \ x^2+y^2-8y+12=0.$
(*Ответ*: 4).

53. Написать уравнение окружности, концы одного из диаметров которой имеют координаты $(0;6)$, $(8;0)$.

(*Ответ*: $(x-3)^2+(y-2)^2=13$).

54. Написать уравнение окружности, если ее центр находится в точке $C(-4;5)$, и окружность проходит через точку $M(-1;1)$.

(*Ответ*: $(x+4)^2+(y-5)^2=25$).

55. Найти уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(4;-2)$.

(*Ответ*: $(x-2)^2+(y+2)^2=4$).

56. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки $A(0;2)$, $B(1;1)$, $C(2;-2)$.

(*Ответ*: $(-3;-2)$, $r=5$).

57. Найти уравнение прямой, содержащей диаметр окружности $x^2+y^2-6x+4y+8=0$, перпендикулярной прямой $x-3y+2=0$.

(*Ответ*: $3x+y-7=0$).

58. Найти угол между радиусами окружности $(x-4)^2+(y+3)^2-25=0$, проведенными в точках ее пересечения с осью Ox.

(*Ответ*: $\pi-arctg(24/7)$).

59. Найти центр и радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами $3x+4y-12=0$, $4x-3y+12=0$, $y=0$.

(*Ответ*: $\left(-\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$; $r=\frac{7}{5}$).

60. Найти точки пересечения окружности $(x-4)^2+(y+3)^2=20$ и прямой $y=x-3$. (*Ответ*: $(4;1)$, $(-2;-5)$).

61. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(7;7)$, $B(-2;4)$, если ее центр лежит на прямой $2x-y-2=0$.

(*Ответ*: $(x-3)^2+(y-4)^2=25$).

62. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис эллипса $16x^2+25y^2-400=0$.

(*Ответ*: $a=5$; $b=4$; $(-3;0)$; $(3;0)$; $e=0{,}6$; $x=\pm 25/3$).

63. Составить каноническое уравнение эллипса, если его эксцентриситет $e=\frac{7}{25}$, а фокусы расположены в точках $(-7;0)$, $(7;0)$.

(*Ответ*: $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{576}=1$).

64. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox, симметрично начала координат, если $a = 10$, эксцентриситет $e = \frac{3}{5}$.

(*Ответ*: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$).

65. Найти эксцентриситет эллипса, если $2c = 8$, $b = 3$.
(*Ответ*: $e = 0{,}8$).

66. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.
(*Ответ*: $4x + 3y + 12 = 0$).

67. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(2;-4\sqrt{3})$ и $M_2(-1;\ 2\sqrt{15})$.

(*Ответ*: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$).

68. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс, симметрично начала координат, если расстояние между фокусами равно 24 и большая ось равна 26.

(*Ответ*: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$).

69. Найти уравнение касательной к эллипсу $3x^2 + 4y^2 = 28$, в точке $A(2;2)$.
(*Ответ*: $3x + 4y - 14 = 0$).

70. Найти уравнение касательных к эллипсу $x^2 + 2y^2 = 3$, параллельных прямой $x - 2y + 1 = 0$.
(*Ответ*: $x - 2y \pm 3 = 0$).

71. Найти уравнение касательных к эллипсу $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, перпендикулярных прямой $x - y + 50 = 0$.
(*Ответ*: $x + y \pm 5 = 0$).

72. Найти площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $5x^2 + 9y^2 - 180 = 0$, а две другие совпадают с концами его малых полуосей.
(*Ответ*: $16 \cdot \sqrt{5}$).

73. Найти координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и асимптот гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$.

(*Ответ*: $a = 3; b = 4$; $(-5;0); (5;0)$; $e = \frac{5}{3}$; $x = \pm\frac{6}{5}$; $y = \pm\frac{4}{3}x$).

74. Составить каноническое уравнение гиперболы, если $c=3$, $e=1{,}5$.

(*Ответ*: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$).

75. Составить каноническое уравнение гиперболы, если $e=\sqrt{2}$ и точка $M_1(\sqrt{3};\sqrt{2})$ принадлежит гиперболе.

(*Ответ*: $x^2-y^2=1$).

76. Найти каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси абсцисс, проходящей через точки $A_1(6;-1)$, $A_2(-8;-2\sqrt{2})$.

(*Ответ*: $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$).

77. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что действительная ось равна 6, гипербола проходит через точку $A(9;-4)$.

(*Ответ*: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$).

78. Найти угол между асимптотами гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

(*Ответ*: 60°).

79. Найти уравнения касательных к гиперболе $9x^2-8y^2=72$, проведенных из точки $A(2;0)$.

(*Ответ*: $3x+2y-6=0$; $3x-2y-6=0$).

80. Найти уравнения касательных к гиперболе $4x^2-5y^2=20$, параллельных прямой $x+y-4=0$.

(*Ответ*: $x+y\pm 1=0$).

81. Дан эллипс $5x^2+8y^2-40=0$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы в вершинах данного эллипса.

(*Ответ*: $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$).

82. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $9x^2+25y^2=225$. Найти уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет $e=2$.

(*Ответ*: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$).

83. Найти расстояние между точками пересечения асимптот гиперболы $9x^2-16y^2=144$ с окружностью, имеющей центр в правом фокусе гиперболы и проходящей через начало координат.

(*Ответ*: $(0;0)$, $(6{,}4;\ 4{,}8)$, $(6{,}4;\ -4{,}8)$).

84. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

(*Ответ*: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$).

85. Найти фокус, уравнение директрисы параболы $y^2 = 8x$.
(*Ответ*: $(2;0)$, $x = -2$).

86. Найти фокус, уравнение директрисы параболы $x^2 = 16y$.
(*Ответ*: $(0;4)$, $y = -4$).

87. Составить каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, фокус которой находится в точке пересечения прямой $3x - 4y + 12 = 0$ с осью абсцисс.

(*Ответ*: $y^2 = 4x$).

88. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy с вершиной в начале координат, проходящей через точку $A(-2;4)$.

(*Ответ*: $x^2 = y$).

89. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси ординат, с вершиной в начале координат, и отсекающей на биссектрисе I и III координатных углов хорду длиной $8\sqrt{2}$.
(*Ответ*: $x^2 = 8y$).

90. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, фокус которой находится в точке пересечения прямой $5x - 3y + 12 = 0$ с осью абсцисс; с осью ординат.

(*Ответ*: $y^2 = -\frac{48}{5}x$; $x^2 = 16y$).

91. Найти уравнение прямой, которая проходит через вершину параболы $y = -2x^2 - 6x - 4$ параллельно прямой $2x - y + 3 = 0$.
(*Ответ*: $x - y + 2 = 0$).

92. Найти высоту арки моста длиной 24 м, имеющей форму параболы, уравнение которой $x^2 = -48y$.
(*Ответ*: 3).

93. Написать уравнение касательной к параболе $y^2 = 9x$ в точке $A(1;3)$.
(*Ответ*: $3x - 2y + 3 = 0$).

3.2 ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Контрольные вопросы к теме

1. Написать общее уравнение плоскости.
2. Написать общее уравнение плоскости параллельной оси Oz.
3. Написать общее уравнение плоскости параллельной плоскости Oyz.
4. Написать уравнение плоскости в отрезках.
5. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$.
6. Две плоскости заданы своими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Написать:
   а) условие параллельности плоскостей;
   б) условие перпендикулярности плоскостей;
   в) формулу для определения величины угла между плоскостями.
7. Написать формулу для определения расстояния от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.
8. Написать канонические уравнения прямой в пространстве.
9. Написать параметрические уравнения прямой в пространстве.
10. Написать уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$.
11. Написать общее уравнение прямой в пространстве.
12. Написать формулу для определения угла между прямыми $L_1: \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ и $L_2: \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$ в пространстве.
13. Определить условие параллельности двух прямых в пространстве.
14. Определить условие перпендикулярности двух прямых в пространстве.
15. Определить условие принадлежности двух прямых $L_1: \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ и $L_2: \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$ одной плоскости $P: \ Ax + By + Cz + D = 0$.
16. Определить величину угла между плоскостью $P: \ Ax + By + Cz + D = 0$ и прямой $L_1: \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$.
17. Определить условия параллельности и перпендикулярности плоскости $P: \ Ax + By + Cz + D = 0$ и прямой $L_1: \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$.
18. Написать уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат.
19. Написать уравнения эллипсоидов.
20. Написать уравнения гиперболоидов.
21. Написать уравнения параболоидов.

Примерный вариант контрольной работы

1. Написать уравнение плоскости параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(3;\,-1;2)$, $M_2(-1;\,2;5)$.
2. Установить взаимное расположение прямых:

$$L_1:\frac{x-2}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-2} \quad \text{и} \quad L_2:\begin{cases} x=5-8t,\\ y=4-6t,\\ z=3+4t.\end{cases}$$

3. Даны точки $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$. Найти:
   а) уравнение ребер тетраэдра $ABCD$;
   б) длину ребра DC;
   в) длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC;
   г) угол между ребрами BD и AD;
   д) площадь грани DBC.

Решение.

1. Уравнение плоскости, параллельной оси Oz имеет вид

$$Ax+By+D=0.$$

Так как плоскость проходит через точки M_1 и M_2, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению плоскости. Подставим их в уравнение и получим систему

$$\begin{cases} 3A-B+D=0,\\ -A+2B+D=0\end{cases}$$

с тремя неизвестными $A,\ B,\ D$. Выразим неизвестные коэффициенты A и B через D. Перенесем неизвестный коэффициент D в правую часть уравнений, получим систему вида

$$\begin{cases} 3A-B=-D,\\ -A+2B=-D.\end{cases}$$

Решение этой линейной системы относительно неизвестных $A,\ B$ дает $A=-\frac{3}{5}D$, $B=-\frac{4}{5}D.$ Подставляя полученные значения A и B в уравнение $Ax+By+D=0$, получаем $-\frac{3}{5}Dx+\left(-\frac{4}{5}D\right)y+D=0$. Разделим последнее уравнение на $\left(-\frac{1}{5}D\right)$. Уравнение искомой плоскости примет вид $3x+4y-5=0$.■

2. Прямая L_1 задана в канонической форме, а прямая L_2 – в параметрической. Координаты направляющего вектора $\vec{s}_1$ прямой L_1:

$\vec{s}_1 = (4;3;-2)$, а координаты направляющего вектора $\vec{s}_2$ прямой L_2: $\vec{s}_2 = (-8;-6;4)$. Как видно, координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{4}{-8} = \frac{3}{-6} = \frac{-2}{4}.$$

Следовательно, данные прямые параллельны или совпадают. Если прямые совпадают, то точка, принадлежащая прямой L_1 должна принадлежать и прямой L_2. Прямой L_1 принадлежит точка $M_1(2;\,0;-1)$. Подставим ее координаты в уравнения прямой L_2:

$$\begin{cases} 2 = 5 - 8t \;\Rightarrow t = \dfrac{3}{8}, \\ 0 = 4 - 6t \Rightarrow t = \dfrac{2}{3}, \\ -1 = 3 + 4t \Rightarrow t = 1. \end{cases}$$

Так как параметр t в параметрических уравнениях принимает разное значение, Точка M_1 не принадлежит прямой L_2. Таким образом, прямые не совпадают, значит они параллельны.■

3. а) запишем уравнения всех ребер тетраэдра, как прямых, проходящих через две точки пространства:

ребро AB: $\dfrac{x-0}{2-0} = \dfrac{y-0}{3-0} = \dfrac{z-1}{5-1}; \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{4}$,

ребро BC: $\dfrac{x-2}{6-2} = \dfrac{y-3}{2-3} = \dfrac{z-5}{3-5}; \Rightarrow \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-5}{-2}$,

ребро CD: $\dfrac{x-6}{3-6} = \dfrac{y-2}{7-2} = \dfrac{z-3}{2-3}; \Rightarrow \dfrac{x-6}{-3} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-3}{-1}$,

ребро AD: $\dfrac{x-0}{3-0} = \dfrac{y-0}{7-0} = \dfrac{z-1}{2-1}; \Rightarrow \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z-1}{1}$,

ребро BD: $\dfrac{x-2}{3-2} = \dfrac{y-3}{7-3} = \dfrac{z-5}{2-5}; \Rightarrow \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-5}{-3}$,

ребро AC: $\dfrac{x-0}{6-0} = \dfrac{y-0}{2-0} = \dfrac{z-1}{3-1}; \Rightarrow \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{2}$;

б) ищем длину ребра DC:

$$|DC| = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2},$$

$$|DC| = \sqrt{(6-3)^2 + (2-7)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{35}.■$$

в) сначала найдем уравнение грани DBC как уравнение плоскости, проходящей через три точки. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки D, B, C с радиусами-векторами $\vec{r}_1 = 3\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{r}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{r}_3 = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ соответственно, можно найти из условия компланарности векторов $\vec{r}-\vec{r}_1=\overrightarrow{MD},\ \vec{r}_2-\vec{r}_1=\overrightarrow{BD},\ \vec{r}_3-\vec{r}_1=\overrightarrow{CD}$, где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}-$ радиус-вектор текущей точки M искомой плоскости DBC:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z-2 \\ 2-3 & 3-7 & 5-2 \\ 6-3 & 2-7 & 3-2 \end{vmatrix}=0.$$

Откуда получим уравнение плоскости, проходящей через три точки,

$$11x+10y+17z-137=0.$$

Теперь подсчитаем длину высоты, опущенной на грань DBC

$$d=AH=\frac{|11\cdot 0+10\cdot 0+17\cdot 1-137|}{\sqrt{11^2+10^2+17^2}}=\frac{120}{\sqrt{510}}.\blacksquare$$

г) определяем косинус угла между прямыми

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot 1+4\cdot 7-3\cdot 1}{\sqrt{1+4^2+3^2}\sqrt{3^2+7^2+1}}=\frac{14\sqrt{26}}{13\sqrt{59}}.$$

д) длина ребра BC определяется аналогично длине ребра DC:

$$|BC|=\sqrt{(6-2)^2+(2-3)^2+(3-5)^2}=\sqrt{21}.$$

Найдем $\cos\angle C$, как угла между прямыми CD и CB

$$\cos\angle C=\frac{(-3)\cdot 4+5\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt{(-3)^2+5^2+(-1)^2}\sqrt{4^2+(-1)^2+(-2)^2}}=-\frac{\sqrt{15}}{7}.\blacksquare$$

Тогда находим $\sin\angle C=\sqrt{1-\frac{15}{49}}=\frac{\sqrt{34}}{7}$ и по формуле площади треугольника имеем

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|BC|\cdot|CD|\sin C=\frac{1}{2}\sqrt{21}\cdot\sqrt{35}\cdot\frac{\sqrt{34}}{7}=\frac{\sqrt{510}}{2}.\blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;-1;0)$ параллельно векторам $\vec{a}=(0;2;3)$; $\vec{b}=(-1;4;2)$.
(*Ответ*: $8x+3y-2z-5=0$).
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;5)$.
(*Ответ*: $10x-5y-4z+20=0$).
3. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые:
$L_1: \ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$, $\qquad L_2: \ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$.
(*Ответ*: $6x-20y-11z+1=0$).
4. Найти величину острого угла между плоскостями $11x-8y-7z-15=0$ и $4x-10y+z-2=0$.
(*Ответ*: 45°).
5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4;2;3)$, $B(2;0;1)$ и перпендикулярной плоскости $x+2y+3z+4=0$.
(*Ответ*: $x-2y+z-3=0$).
6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0;2;1)$ и линию пересечения плоскостей $x+5y+9z-13=0$ и $3x-y-5z+1=0$.
(*Ответ*: $x+y+z-3=0$).
7. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $x-2y+2z+5=0$ и удаленной от точки $A(3;4;-2)$ на расстояние $d=5$.
(*Ответ*: $x-2y+2z+24=0$; $\quad x-2y+2z-6=0$;)
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую
$$\begin{cases} 3x+2y+z-3=0, \\ 2x-y-4z+1=0, \end{cases}$$
перпендикулярно плоскости $x+19y-7z-11=0$.
(*Ответ*: $\alpha(5x-y-2z-3)+\beta(3x-2y-5z+2)=0$;).
9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-2;1)$ и прямую $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=2-3t, \\ z=-3+2t. \end{cases}$
(*Ответ*: $4x+6y+5z-1=0$).

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-2}{2}$ перпендикулярно плоскости $3x+2y-z-5=0$. (*Ответ*: $x-8y-13z+9=0$).

11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A(3;-3;1)$, $B(2;4;-5)$.

(*Ответ*: $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-1}{-6}$).

12. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(3;-2;5)$ параллельно прямой $\begin{cases} x-2y+z-1=0, \\ 2x+y-4z+3=0. \end{cases}$

(*Ответ*: $\frac{x-3}{7}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{5}$).

13. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1;-1;-3)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{0}$.

(*Ответ*: $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=4t-1, \\ z=-3. \end{cases}$).

14. Найти угол между прямыми:

$$\frac{x}{11}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-1}{7}; \qquad \frac{x-4}{7}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{8}.$$

(*Ответ*: 45°).

15. Найти угол между прямыми:

$$\begin{cases} 4x-y-z+12=0, \\ y-z-2=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-2y+16=0, \\ 3x-z=0. \end{cases}$$

(*Ответ*: $\cos\varphi=\frac{20}{21}$).

16. Установить будут ли следующие прямые параллельны:

а) $\begin{cases} x+y-3z=0, \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$ и $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$;

б) $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=-t+2, \\ z=t-7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0. \end{cases}$

17. Установить будут ли следующие прямые перпендикулярны:

а) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ и $\begin{cases}3x+y-5z+1=0,\\ 2x+3y-8z+3=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x=2t+1,\\ y=3t-2,\\ z=-6t+1\end{cases}$ и $\begin{cases}2x+y-4z+2=0,\\ 4x-y-5z+4=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+y-3z-1=0,\\ 2x-y=9z-2=0\end{cases}$ и $\begin{cases}2x+y-2z+5=0,\\ 2x-2y-z+2=0.\end{cases}$

18. При каком значении m прямая $\dfrac{x+10}{m}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z+2}{-6}$ параллельна плоскости $5x-3y+4z-1=0$.

(*Ответ*: 6).

19. Найти координаты точки пересечения прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{2}$ с плоскостью $4x-3y+2z+5=0$.

(*Ответ*: $(1;3;0)$).

20. Составить канонические уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $A(2;3;1)$ на плоскость $3x+y+2z-11=0$.

(*Ответ*: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{2}$).

21. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(1;1;6)$ на прямую $\begin{cases}x=-1+3t,\\ y=2t,\\ z=t.\end{cases}$

(*Ответ*: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{-5}$).

22. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-4;3;0)$ перпендикулярно прямым L_1 и L_2, если

$$L_1:\ \frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1},\qquad L_2:\ \frac{x}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+3}{-5}.$$

(*Ответ*: $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-3}{8}=\dfrac{z}{7}$).

23. Найти уравнения проекции прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ на плоскость $2x+3y-z-5=0$.

(*Ответ*: $\dfrac{x}{-10}=\dfrac{y-3{,}4}{13}=\dfrac{z-5{,}2}{19}$).

24. Найти расстояние от точки $A(3;5;5)$ до прямой $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}$.

(*Ответ*: $\sqrt{33}$).

25. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-1}{-3} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{-8}=\frac{z+1}{-12}.$$

(*Ответ*: $\frac{6\sqrt{42}}{7}$).

26. Заданы прямая $L: \frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$ и плоскость $P: x+y-z+1=0$.

Найти:

а) угол между прямой и плоскостью;

б) координаты точки пересечения прямой и плоскости.

(*Ответ*: а) $\sin\varphi=\frac{\sqrt{15}}{15}$; б) $(1;-6;-4)$).

27. Даны прямые

$$L_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}, \qquad L_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

Найти:

а) расстояние между прямыми;

б) уравнение общего перпендикуляра к прямым.

(*Ответ*: а) $\frac{4\sqrt{21}}{7}$; б) $\begin{cases} x-10y+2z+11=0, \\ 3x-2y-z+3=0 \end{cases}$).

28. Какие поверхности определяются уравнениями:

а) $x^2+y^2+z^2-10x+8y-8=0$;

б) $y=4z^2$.

29. Установить как расположена точка $A(2;-1;3)$ относительно сферы:

а) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$;

б) $(x+14)^2+(y-11)^2+(z+12)^2=625$;

в) $(x-6)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$.

(*Ответ*: а) вне сферы, б) на сфере, в) внутри сферы).

30. Составить уравнение плоскости, касательной к сфере $x^2+y^2+z^2=49$ в точке $M_1(6;-3;-2)$.

(*Ответ*: $6x-3y-2z-49=0$).

31. Составить уравнение линии пересечения плоскости Oyz и сферы, центр которой находится в точке $S(1;1;3)$ и радиус равен 5.

(*Ответ*: $(x-1)^2+(y-1)^2=16;\ z=0$).

Список рекомендованной литературы

1. *Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П.*. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. СПб.: Питер, 2009.
2. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Ч.1: Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.
3. *Демидович В.П., Кудрявцев В.А.,* Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие. М.: Астрель, 2005.
4. *Лунгу К. Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.* Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3-е изд., испр. и доп. М.: Айрис-пресс, 2004.
5. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. М.: Физ.-мат. лит., 2006.
6. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Дмитрий Письменный. – 8-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009.
7. *Щипачев В. С.* Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов / Под ред. акад. А. Н. Тихонова. М.: Высшая школа, 1985.
8. *Анофрикова Н.С., Сорокина О.В.* Метод координат. Введение в векторную алгебру [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов нематематических направлений подготовки/Н.С. Анофрикова, О.В. Сорокина; ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского”.-Саратов:[б.и.], 2012.
9. *Мисник М.П., Сорокина О.В.* Некоторые методы решения систем линейных алгебраических уравнений [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов нематематических направлений подготовки/М.П. Мисник, О.В. Сорокина; ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского”.-Саратов:[б.и.], 2013.
10. *Анофрикова Н.С., Сорокина О.В.,* Введение в аналитическую геометрию на плоскости [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов нематематических направлений подготовки/Н.С. Анофрикова, О.В. Сорокина; ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского”.-Саратов:[б.и.], 2013.
11. *Анофрикова Н.С., Сорокина О.В.,* Введение в аналитическую геометрию в пространстве [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов нематематических направлений подготовки/Н.С. Анофрикова, О.В. Сорокина; ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского”.-Саратов:[б.и.], 2013.