Ю.В. Шевцова

# История математики

## Часть 1. Возникновение математических понятий. Математика в Древнем мире.

**Пособие для студентов механико-математического факультета**

# Введение

## *Что такое математика?*

**Математика – это то, посредством чего люди управляют природой и собой.**

А.Н. Колмогоров

**В конце концов, математика – это лишь элементарная философия, а философия – это высшая математика вообще.**

Новалис

**Математика представляется силой человеческого духа, призванной вознаградить нас за несовершенство наших чувств и за краткость нашей жизни.**

Фурье

**Математика – это искусство называть разные вещи одним и тем же именем.**

Пуанкаре

Проще всего ответить на этот вопрос афоризмом Гаусса: «Математика – царица всех наук». Однако, это не определение, а скорее декларация. Гораздо легче ответить на подобный вопрос биологу или геологу. У математики, в отличие от этих наук, нет своего материального предмета исследования, его нельзя потрогать руками или увидеть глазами. И хотя значительная часть математических понятий и родилась при изучении реальных явлений, в процессе развития математика лишилась материального предмета изучения. Парадокс: математика – наука о несуществующем, точнее, невидимом. Ведь нет такой вещи, которая называется «число»: его нельзя увидеть, потрогать. Это идеальная сущность, абстракция, нечто объединяющее многие разрозненные восприятия окружающего нас мира. Это же относится и к геометрическим фигурам, например, нарисовать математическую точку нельзя. В этом смысле математика – наука о мире идей, а не вещей. Из-за этого многие отказывают ей в праве называться наукой, считая, что она лишь специальный язык, всеобщий язык, на котором можно изъясняться и объяснять, как устроен мир. Как только любая из наук переведет свои проблемы на язык математики, так тут же к ее услугам откроется богатейший арсенал математики. В отличие от естественного языка, который в основном классифицирует предметы, язык математики прежде всего количественный. Важнейшим его преимуществом является краткость и точность. Итак, математика – это не только наука о математических структурах, но и язык других наук, единый, точный, красивый.

**Есть одна наука, без которой невозможна никакая другая. Это математика. Ее понятия, представления и символы служат языком, на котором говорят, пишут и думают другие науки. Она объясняет закономерности сложных явлений, сводя их к простым, элементарным явлениям природы. Она предсказывает и предвычисляет далеко вперед с огромной точностью ход вещей.**

Соболев

**Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов, это чудесный дар, который мы не понимаем и которого мы не заслуживаем. Нам остается лишь благодарить судьбу и надеяться, что и в своих будущих исследованиях мы сможем по-прежнему пользоваться им.**

Вигнер

## ***Основные периоды в истории математики***

В истории математики принято различать четыре периода: период накопления начальных математических сведений, период математики постоянных величин, период математики переменных величин и период современной математики.

**1. Период накопления начальных математических сведений.**

Представление о математике как абстрактной науке стало возможным только после накопления достаточного фактического материала. Этот период начался с давнейших времен и закончился около 6-7 вв. до н.э. в Древней Греции. Математические знания этого времени были тесно связаны с потребностями хозяйственной жизни. С исторической и логической точек зрения между основными понятиями математики понятия о **натуральном (количественном и порядковом) числе, величине и геометрической фигуре** занимают первое место. Особенно большой материал по геометрии был накоплен в Древнем Египте. От математики Древнего Вавилона до нас дошли преимущественно различные приемы решения арифметических задач, среди которых попадаются и такие, которые не имеют непосредственного отношения к запросам хозяйства. Поэтому есть все основания предполагать, что известная работа по систематизации и теоретическому осмыслению фактического материала по арифметике и геометрии начала проводится еще в догреческой математике. Однако догреческая математика не стала абстрактной, теоретической наукой.

**2. Период математики постоянных величин.**

С древних греков начался новый период в развитии математики, который продолжался вплоть до начала 17 в. Круг математических понятий, выработанных в это время, приблизительно охватывается курсом элементарной математики, который изучается в средней школе. В начале этого периода, т.е. примерно с 7 до 3 в. до н.э., математика сформировалась как абстрактная, теоретическая наука. В руках древних греков арифметика из собрания различных способов решения практических задач превратилась в науку о числах и действиях над ними. Высокой степени логического совершенства достигла также геометрия, при построении которой впервые был применен аксиоматический метод. Знаменитые «Начала» Евклида, в которых был дан синтез основных результатов греческой мысли, длительное время были источником, из которого черпали знания последующие поколения, и в то же время служили образцом строгого математического изложения. В средние века развитие математики продолжается в странах Арабского Востока. Ученые этих стран не только сохранили для будущих поколений завоевания античной мысли, но своими работами по решению уравнений подготовили создание алгебры. Европейская наука в первое время была занята усвоением наследия своих предшественников и только в в 16 в. начинает превосходить математику древнего мира.

**3. Период математики переменных величин.**

Новый, третий этап в развитии математики был связан с дальнейшим расширением количественных отношений. От изучения постоянных величин математика 17 в. переходит к исследованию зависимостей между переменными величинами, т.е. к математическому отображению процессов. Этот период был подготовлен всем предшествующим развитием математики. Еще в работах Архимеда содержались некоторые идеи интегрального исчисления. Поворотным пунктом в развитии математики явилось введение Декартом идеи переменной величины. Создание дифференциального и интегрального исчислений, обычно связываемое с именами Ньютона и Лейбница, было решающим шагом в развитии математики переменных величин. Математический анализ отныне служит главным каналом, через который математика влияет на естествознание. Развитие анализа, создание новых его разделов и углубление основ продолжается в 18-1 9 в.

**4. Период современной математики.**

Развитие математики в 19 в. в основном составляет следующий, четвертый этап развития, который продолжается и в настоящее время.

Начало этого этапа связывается с открытием Лобачевским и Бойяи новой, неевклидовой геометрии.

Новый этап развития качественно изменил также алгебраическую науку. Если раньше алгебра существенно занималась преимущественно исследованием проблем, связанных с решением уравнений, то теперь в центре ее внимания находится изучение различных алгебраических операций, заданных на множествах произвольной природы.

Такой абстрактный подход к объектам, которые исследуют алгебра и геометрия, получил наиболее полное выражение в теории множеств, а также аксиоматическом методе. Теория множеств дала новый универсальный метод, быстро захвативший всю математику.

Для современной математики характерен общий подход к предмету исследования. Она абстрагируется как от конкретной природы объектов, так и специфического, конкретного содержания отношений между ними. Для нее важна лишь сама структура количественных отношений исследуемых объектов.

Специфика предмета математики обуславливает ряд важных особенностей математической абстракции. Во всей истории математики можно выделить **три больших исторических этапа** в развитии ее абстракций. На первом этапе, связанном с возникновением арифметики и геометрии, отвлекаются от конкретной, качественной природы объектов. На втором этапе, когда вводится буквенная символика и происходит переход к алгебре, стали отвлекаться уже от конкретных чисел и величин. Наконец, на третьем этапе, связанном с переходом к современной математике, стали отвлекаться не только от конкретной природы объектов, но и от конкретных зависимостей между ними. Так, например, под операцией умножения теперь понимают не только умножение чисел, но и векторов, множеств и даже предложений. Таким образом, переменными становятся не только объекты исследования, но и сами операции над ними.

Важнейшей особенностью математики, которая отличает ее как от естествознания, так и от опытных наук вообще, является дедуктивный характер ее доказательств.

В опытных науках, даже достаточно развитых, мы постоянно обращаемся к наблюдениям и экспериментам, чтобы проверить те или иные утверждения. Мы можем тысячу раз измерить сумму углов треугольника и убедиться, что она равна $180^0$, но этим способом мы не докажем геометрической теоремы. Эта теорема будет считаться доказанной только в том случае, если она будет логически выведена из других предложений.

В конечном итоге мы стремимся все доказуемые предложения математики – ее теоремы – получить с помощью логического вывода, или дедукции, из сравнительно небольшого числа первоначальных предложений – ее аксиом. Вот почему аксиоматический метод играет важную роль в математике. В настоящее время он считается общепринятым методом построения математических теорий. Но прежде чем он установился в математике, потребовались усилия многих поколений ученых по установлению логических взаимоотношений между различными предложениями теорий и выделению исходных утверждений, или аксиом.

Между математикой и остальными науками нет какой-либо непроходимой грани. Из всех наук ближе всего математика стоит к естествознанию как по своему происхождению, так и применению. Нередко поэтому ее относят к наукам о природе. Однако такой взгляд едва ли можно считать правильным, в особенности если иметь в виду современную математику.

В противоположность всем остальным естественнонаучным дисциплинам, математика не изучает *качественную* определенность предметов и явлений природы. Специфика математики как особой науки состоит в том, что она специально выделяет *количественные* отношения и пространственные формы, которые присущи без исключения всем предметам и явлениям, и делает их объектом своего исследования.

# Математика в Древнем мире

## 1.1 Возникновение математических понятий

Скажи мне, каменный обломок
Неолитических эпох!
Какие тьмы каких потемок
Хранят твой след, таят твой вздох!
Дон-Аминадо «Стоянка человека»

**Исторический период:** *эпоха палеолита и неолита***.**

Для составления полной картины математической культуры народа, от первых накоплений математических знаний до современных вершин науки, следует изучить все этапы ее развития, начиная с дописьменного периода. Для этого необходимо широко использовать материалы археологии, сравнительного языкознания и в некоторой степени этнографии. В сущности говоря, совокупность этих исследований является единственным путем выяснения познаний наших древних предков в области арифметики и геометрии. Некоторые сведения о дописьменной математике может дать также так называемая народная математика, стоящая на стыке с этнографией и фольклором. Однако этими сведениями следует пользоваться осторожно, так как в них есть наслоения различных периодов, включая и более позднее время, когда уже существовала письменность и даже школьная учебная литература.

1. **Историческая характеристика.**

Наши первоначальные представления о числе и форме относятся к очень отдаленной эпохе каменного века – палеолита. Главным и по существу единственным видом производственной деятельности человека в эпоху палеолита были собирательство и коллективная охота на крупного зверя. Орудиями производства служили грубо обработанные камни, деревянные палки и дубины, мелкие изделия из кости. Главным техническим достижением того времени были овладение огнем. Лишь в самом конце палеолита был изобретен лук. Стала возможной и целесообразной индивидуальная охота на мелкую дичь. Сложился родовой строй в форме матриархата. Род представлял собой единственную форму общественной организации. В эпоху палеолита возникают первые формы религии, появляется искусство.

Эпоха нового, каменного века (неолита) была ознаменована целым рядом важных технических достижений. Изобретение топора дало возможность изготовлять челны. В эту эпоху появилось ткачество, а также начали производить глиняную посуду. К концу неолита относятся первые зачатки земледелия и скотоводства: общество переходило от присваивающих форм хозяйства к производящим формам.

2. **Возникновение счета**

Земледелие и скотоводство стимулировали возникновение и расширение первоначальных математических познаний. Эволюция приемов счета и измерений у всех народов приблизительно одинакова, но процесс становления и степень их развития зависели от особенностей социально-экономических и производственных условий.

Уже на первых ступенях развития человечества в результате практической деятельности людей появилась необходимость уметь считать. Для подсчета количества добычи, полученной во время охоты, для учета скота у древних скотоводческих племен и, наконец, для различных потребностей примитивного тогда сельского хозяйства необходимы были общие правила и приемы, которые и выработали люди в своей совместной жизнедеятельности. Первым приемом счета была конкретизация его на пальцах.

Развитие понятия числа представляет собой длительный процесс, потребовавший от древнего человека большого напряжения мысли. Первоначально люди довольствовались так называемым малым счетом, а именно тремя числами: один, два, много. Иными словами, человек ограничивался счетом до двух, остальные количества он воспринимал как много. Этот этап счета положил начало древнейшей из всех систем счисления – *двоичной системе.* Она, как наиболее, простая, по-видимому существовала у всех народов. С расширением понятия числа бóльшие числа сначала образовывались с помощью сложения: 3 путем сложения 2 и 1, 4 путем сложения 2 и2. Прошло немало времени, прежде чем человек начал считать до пяти и до шести, а затем и до десяти. Следы того, что число 7 служило у наших предков для выражения неопределенной множественности, сохранилось в русском языке в виде пословиц и поговорок: «Семеро одного не ждут», «Семь раз отмерь, а раз отрежь», «За семью печатями» и мн.др. Надо полагать, что во всех указанных случаях число «семь» употреблялось в смысле «много». В дальнейшем число 12 стало символом полноты, а следующее за ним число 13 оказалось, таким образом, лишним, а значит, и «нечестивым», «несчастливым».

В тюркских легендах синонимом неопределенного множества является число «сорок» (по тюркски – «кырк») или выражение «сорок сороков». Последнее нередко употреблялось и у восточных славянских племен.

Развитие ремесла и торговли кристаллизовало понятие числа. Числа группировались и объединялись в бóльшие единицы, обычно пользуясь пальцами одной руки или двух рук – обычный торговый прием. Это привело к счету сначала с основанием пять, потом с основанием десять, который дополнялся сложением и вычитанием, так 12=10+2, 9=10-1. Иногда за основу принимали 20, число пальцев на руках и ногах. Вообще, системы счисления с более высоким основанием появились более позднее, чем с низким. С развитием контактов между различными племенами некоторые системы счета объединялись. Многие народы пользовались смешанной пятерично-десятичной системы счисления. Из 307 систем счисления первобытных американских народов, исследованных Илсом в 1913г., 146 были десятичными, 106 – пятичными.

В наиболее характерной форме система с основанием двадцать существовала у майя в Мексике и у кельтов в Европе. В двоичной и пятеричной системах счисления числа выражаются довольно громоздко, двадцатеричная же система требует большого количества слов – названий низших числительных, а при письменной нумерации – многих (20) цифр. Индейцы майя числа записывали столбцом, снизу вверх. Единица обозначалась точкой, пять – горизонтальной чертой. Первые 19 чисел записывали, комбинируя точку с чертой, 20 – с помощью нуля над точкой (нуль изображался в виде раковины).

До настоящего времени сохранились остатки двенадцатеричной системы счисления. Своеобразными следами древних приемов счета являются слова, характеризующие счет группами, - парами, тройками, четверками, пятерками, десятками, а позже – дюжинами. Позже появились слова, относящиеся к дробному счету – половина, четверть и др.

Счет группами в 12 был в древности очень распространенным. В Африке существуют народы, которые до сих пор ведут счет дюжинами. До недавнего времени, мы сами считали некоторые предметы дюжинами (платки, носки, рубахи). День у нас делится на 12 часов, год на 12 месяцев. Запись чисел в двенадцатеричной системе счисления более удобная, чем десятичная. Но двенадцатеричной системе счисления имеет и еще одно удобство: у числа 12 имеется 4 делителя, а у 10 только 2. Это важно потому, что в практике часто встречаются дроби – половина, треть, четверть и т.д. «Расти на руках у каждого человека еще по одному пальцу, цивилизованные народы приняли бы за основание счета не десяток, а дюжину… Можно пожалеть, разумеется только в интересах арифметики, что на руке у человека нет шестого пальца.»

Изучая историю возникновения счета и числовых понятий у древних народов, мы встречаем три стадии формирования понятия числа

- умение считать;
- умение называть числа;
- умение фиксировать результаты счета.

## Умение считать

Первым начал развиваться словесный счет, как непосредственно вытекающий из потребностей жизненной практики. В течение весьма долгого времени он развивался под влиянием счета на пальцах. Возникновение приемов пальцевого счета уходит в глубь веков, так как было вызвано практической потребностью жизненной деятельности людей, причем этому счету придавалась необходимая тогда наглядность. Таким образом, простые арифметические действия с помощью пальцев осуществлялись как бы на своего рода счетной машине. Первоначальный счет был конкретным, визуальным, с обязательным откладыванием или перекладыванием предметов. Позже счет проводился при помощи пальцев рук и ног, а также палочек, черепашек, камешков и т.п. Для этой ступени характерно некоторое абстрагирование от предметов, принадлежащих счету, хотя он и оставался предметным.

Есть два способа выражения количества, и, соответственно, два вида выражения количества и, соответственно, два вида счета **– бирочный и числовой**.

Бирочный счет выступает в двух разновидностях – 1) счет по частям тела и 2) счет по палочкам, камешкам, зарубкам и т.п.

Папуасы используют при счете не только пальцы рук и ног, но и плечо, шею и т.д. Каждая часть тела означает единицу и больше ничего. В этом отношении все они равны. Надо помнить, где окончен счет, и знать последовательность частей тела при счете. Эту последовательность каждый папуас знает как таблицу умножения европеец.

Двоичный счет всюду сосуществует с бирочным – даже у самых отсталых народов имеются как минимум числительные два и один. Конечно, в этих племенах могли считать дальше двух. Двоичная система говорит не о пределе счета, а лишь о том, что в основу счета положено число два.

Двоичная система счета отмечена у австралийцев, тасманийцев, папуасов, племен Южной Америки и Африки. С помощью чисел австралийцы обычно считали до пяти, папуасы – до семи, а затем и те, и другие обращались к помощи бирок.

Среди народов древности был широко распространен счет с помощью камешков. В древнегреческом языке «класть камешки» означало «считать». Латинское слово «калькуляция» в буквальном переводе – «счет камешков».

Счет с помощью камешков, палочек и т.п. при всей его кажущейся простоте не является изначальным. Оба множества – и считаемое, и считающее- взяты из окружающего мира. Между тем первоначальным эталоном для счета был сам человек: он мерил длину своими локтями, а расстояние – своими шагами.

Папуас берет из груды кокосовых орехов один и откладывает отдельно, а из кучи палочек- одну палочку и кладет ее в сумку. Счет идет по принципу: один считаемый предмет – один считающий предмет. Множество орехов равно множеству отложенных палочек. Папуас знает как много у него орехов, хотя и не знает, сколько. Он знает количество, но не знает числа. Подобным образом австралийцы ведут счет дням. Перед уходом охотники наносят на руки штрихи, чтобы определять, сколько дней они будут отсутствовать, то же самое делает тот, кто остается в лагере. Стирая каждый день штрих, он знает, сколько прошло времени.

Если спросить у папуасов мафулу, сосчитавших 83 ореха, сколько у них орехов, то мы не получим сразу ответ. Сначала один папуас согнет по очереди пальцы на руках, затем сядет и кулаками пересчитает пальцы на ногах, потом это проделает второй, третий, четвертый, а пятый согнет три пальца. Мы говорим с ними на разных языках: они с нами на языке бирок, мы – на языке чисел. Мы спрашиваем «сколько» на языке чисел, они отвечают «как много» на языке бирок. Они разложили считаемое множество на единицы и видят как много этих единиц. Но они могут и не знать, сколько их. В их языке нет слов восемьдесят и три. Из простых числительных у них есть лишь один и два.

**О пальцевом счете**

Пальцевый счет - математические вычисления, осуществляемые человеком с помощью сгибания, разгибания или указывания пальцев рук (иногда и ног). Пальцы рук считаются самым первым счётным инструментом древнего человека с эпохи верхнего палеолита. Счёт на пальцах широко применялся в древнем мире и в средневековье, в настоящее время используется ограниченно, арабскими и индийскими торговцами на Среднем Востоке, в европейских странах — в примитивном виде преимущественно детьми или для отображения цифр жестами, ради убедительности в споре по мере перечисления аргументов, а также судьёй в боксе при отсчете секунд во время нокдауна.

*Создание числовой последовательности*

Пальцы рук и ног дали человеку первую числовую последовательность, которая полностью отделилась от считаемых объектов. Будучи разделены на дифференцируемые группы природой, числа сформировали следующие разряды: 5 — пальцев на одной руке, 10 — пальцы на двух руках, 20 — все пальцы рук и ног. Это нашло своё отражение в названиях чисел в языках некоторых народов: пять — «одна рука»; десять — «две руки»; двадцать — «один человек». По исчерпании чисел, могущих быть выраженными пальцами рук и ног одного человека (20), наступает вторая серия подсчёта, идущая точно таким же образом, добавляя к «одному человеку» такое же число пальцев «второго человека» (20+20=40), и т. д.

Включение пальцев рук и ног определило создание двадцатичной системы счисления у цивилизации майя в Новом Свете (при этом существовала структура в виде четырёх блоков по пять цифр, что соответствовало пяти пальцам руки и ноги), а ограничение исчисления пальцами рук привело к формированию десятичной системы счисления, возобладавшей у народов Евразии. Пятеричная система, взявшая за основу пальцы одной руки, распространилась в тропической Африке. Двадцатеричная система счисления в Старом Свете была традиционной у чукчей, до настоящего времени используется в названии чисел в нахских языках, а в качестве языкового пережитка оставила след во французском слове «quatre-vingts» («восемьдесят»: буквально — «четырежды двадцать»).

Самое раннее упоминание о десятичной системе пальцевого счёта в литературе содержится у Публия Овидия Назона в книге «Фасты», где автор поэтически отобразил представление древних римлян о числе пальцев рук, которые были увязаны с десятью лунными месяцами женской беременности. Другой весьма распространённый в древности вариант — счёт четвёрками пальцев, при этом счёте большой палец не засчитывался. Так, в древнерусском языке все пальцы, кроме большого, назывались словом «пьрстъ», а большой — «пальць», в английском языке до настоящего времени четыре «счётных» пальца именуются словом «fingers», а большой палец — «thumb». В этом исчислении пальцы двух рук составляют основу древней восьмеричной системы счисления (отличается от современной).

Кроме того на четырёх пальцах одной руки 12 фаланг, если их считать пятым, большим пальцем, то есть прикосновение кончика большого пальца к каждой фаланге принимать за единицу. Эта особенность повлияла на появление двенадцатиричной и шестидесятиричной систем счисления (во втором случае, большой палец несколько раз подряд касался всех фаланг и счёт продолжался дальше, но после каждого нового цикла касаний загибался один палец на второй руке).

*Счёт на пальцах у разных народов*

Римский счёт

В состав Римской республики, а позднее — империи, входило множество народов, а сфера торговли охватывала всё Средиземноморье и страны Ближнего Востока, имеющие разную счётную письменность или не имеющие таковой. Как результат, возникла весьма развитая, и главное, работающая, система счёта на пальцах, при которой торговцы могли оперировать числами до 10.000 с помощью одних только пальцев двух рук, и до 1.000.000.000, задействуя другие части тела.

Плиний Старший (23-79 гг.) и Макробий (V в.) оставили описания римской статуи бога Януса, которого многие горожане считали также богом Солнца, поскольку пальцы этой статуи изображали число 300 на правой руке и число 65 — на левой: всего 365, что означало количество дней в году, на протяжении которых Солнце совершало свой годичный круг по небосводу. Римский историк Ювенал (ум. ок. 130 г.), рассказывая о мудром старце Несторе, осаждавшем среди прочих греческих героев Трою, между прочим свидетельствует, что пальцы правой руки изображают сотни (и счастлив тот из людей, кто смог обмануть смерть и может показать свой возраст на правой руке). Квинтилиан (ум. ок 96 г.) говорит, что необразованного человека прежде всего выдаёт неумение правильно показать числа на пальцах. Вероятно для неизвестной римской игры использовались комплекты жетонов из слоновой кости по 15 штук каждый, на одной стороне жетона стояла римская буквенная нумерация, а на другой было нанесено изображение руки, показывающей это число особым жестом. Всеобщее знание пальцевого счёта образованными людьми Римской империи подтверждается и трудами ранних отцов Церкви, которые с помощью символики числовых жестов толковали Евангелие, считая, что их читатели прекрасно понимают, о чём идёт речь, и не нуждаются в специальных пояснениях. Так, святой Иероним (342—419/420 гг.), комментируя притчу Иисуса Христа о сеятеле и семенах, которые, упав в добрую почву, дали зерна — «одни — сотню, другие — шестьдесят, а третьи — тридцать», в качестве растолкования привлекает форму жестов римского пальцевого счёта как самоочевидного для всех (хотя к раввинским традициям она отношения и не имеет): «30 — это символ брака, ибо такой способ располагать пальцы, когда они соединены и переплетены, словно в крепком объятии, представляет собой мужа и жену. 60 — символ вдовства, поскольку вдова сгибается от горя и невзгод, обрушившихся на неё, точно так же, как (большой палец) сгибается под давлением указательного пальца, лежащего на нём (при изображении числа 60)… 100 — переносится с левой руки на правую… Круг, образуемый пальцами правой руки, означает корону девственной чистоты». Другой христианский писатель — Августин Блаженный (354—430 гг.), толкуя Евангелие от Иоанна (21:11), где указан чудесный улов Апостолов из 153 рыбин, показал, что с помощью пальцев можно было проводить вычисления, фиксируя промежуточный результат.

Эта система древнеримского счёта перешла в средневековую Европу, первая реконструкция пальцевого счёта, была впервые подробно изложена в капитальном труде по хронологии «Detemporumratione» английского учёного монаха Беды Достопочтенного в 725 году. По свидетельству Валафрида Страбо, аббата монастыря в Рейхенау на Бодензее, изучавшем арифметику летом 922 года под руководством Татто, великовозрастных учеников учили искусству счёта по пальцевой методике, изложенной в вышеназванной книге Беды. В это время малоиспользуемый в торговле пальцевый счёт занял своё место в учёных кабинетах и школах для духовенства. Об исчезновении счёта на пальцах из повседневного светского обихода как о свершившемся факте говорит знаменитый проповедник Бертольд Регенсбургский (1220—1272 гг.). Считать на пальцах умел всесторонне образованный император Фридрих II Гогенштауфен (ум. 1250 г.).

Первой средневековой светской книгой, в которой вновь возрождается интерес к пальцевому счёту и приводится его подробное описание, становится трактат «Сумма арифметики, геометрических пропорций и соразмерности» итальянского математика Луки Пачоли, отпечатанный типографским способом в Венеции в 1494 году. В трактате утверждалось, что пальцевый счёт в то время имел огромное значение в математической науке. В книге «Абака и старинный обычай древних латинян считать с помощью рук и пальцев», изданной в Нюрнберге в 1522 году немецкий писатель Аветин использует пальцевый счёт как вспомогательный для фиксирования промежуточных результатов расчётов на абаке. О том же применении счёта на пальцах, но в сочетании с арабскими (индийскими) цифрами в своё время говорил и итальянский математик Леонардо

Пизанский (1180—1250 гг.), утверждая, что тот, кто хочет в совершенстве овладеть искусством вычислений, должен выучится считать на пальцах. Однако с распространением в Европе в XVI веке новых арабских (индийских) цифр, вычисления которыми были удобны на бумаге, пальцевый счёт стал исчезать. Последним произведением, в котором подробно описывался пальцевый счёт в качестве исторического курьёза, стал «Арифметическо-геометрический театр» Якоба Леопольда, опубликованный в 1727 году. С тех пор римский счёт на пальцах в Западной Европе полностью вышел из употребления, дольше всего (местами сохранился до наших дней) продержавшись на территориях современных Румынии и Молдавии, а также среди цыган Сербии.

Арабско-восточноафриканский счёт

В течение длительного времени на территории Арабского халифата и стран, возникших после его распада, в торговых операциях использовался римский пальцевый счёт, ещё в XIV веке арабские и персидские документы свидетельствуют о хорошем знании арабами римской системы счёта, сходной с той, которая была записана Бедой Достопочтенным в Европе начала VIII века. Особенностью этого счисления стала смена рук, означающих десятки и сотни, в соответствии с системой арабского письма справа-налево. Таким образом, правая рука стала означать сотни, а левая — единицы и десятки. Впоследствии, на восточных базарах и в портах Красного моряи восточного побережья Африки, торговцы выработали собственный оригинальный математический язык жестов. Покупатель и продавец, во избежание нечистоплотных посредников, конкурентов и нежелательных свидетелей, тайно договариваются о цене, накрыв свои руки тканью и касаясь ладоней друг друга по определённым правилам.

Прикосновение к вытянутому указательному пальцу продавца, в зависимости от цены и используемых денежных единиц, будет означать 1, 10 или 100. Одновременное прикосновение к двум, трём или чётырём пальцам продавца будет означать соответственно 2 (20, 200), 3 (30, 300) или 4 (40, 400). Касание открытой ладонью указывает на число 5, 50 или 500. Дотронуться до мизинца означает 6, 60 или 600, безымянный палец — 7, 70 или 700, средний палец — 8, 80 или 800, согнуть указательный палец — 9, 90 или 900, коснуться Большого пальца — 10, 100 или 1000. При этом счислении может соблюдаться последовательность числовых степеней, например число 78 задаётся касанием безымянного пальца продавца, а затем — его среднего пальца. Постукивание по указательному пальцу продавца в направлении от среднего сустава к кончику пальца — предложение о снижении цены вдвое (1/2), на четверть (1/4) или на восьмую часть (1/8) от первоначальной. Постукивание по указательному пальцу от основания пальца до его среднего сустава — будет являться надбавкой половины (1/2) от предложенной цены, или 1/4, или 1/8. Если перед указанием дробной степени указывается целое число, то оно умножается на дробную степень.

<u>Китайский счёт</u>

Китайский метод счёта основан на количестве и символике пальцев. Используя этот метод, на двух руках можно посчитать до 20. Стоит заметить, что в некоторых провинциях жесты могут отличаться.

0 — сложенный кулак;

1 — разжатый указательный палец;

2 — разжаты и растопырены указательный и средний пальцы;

3 — разжаты и растопырены указательный, средний и безымянный пальцы;

4 — кроме прижатого к ладони большого пальца, остальные разжаты;

5 — открытая ладонь;

6 — выпрямлены мизинец и большой палец, остальные — сжаты в кулак;

7 — большой палец вместе с указательным и средним сложены в щепоть;

8 — выпрямлены указательный и большой пальцы, остальные — сжаты в кулак;

9 — указательный и большой изогнуты в виде буквы «С», остальные — сжаты в кулак;

10 — три варианта. Первый: рука сжимается в кулак; второй: указательные пальцы обеих рук пересекаются; третий: выпрямленный средний палец заводится за выпрямленный указательный, остальные — сжаты в кулак.

Древнекитайская позиционная десятичная система счёта по двум рукам является наиболее сложной из существующих подобных, но при всём том позволяет показать числа от 1 до 99 999 999. На обеих руках фалангам каждого пальца задаются цифровые значения от 1 до 9: причём задействуется пространство как посреди фаланги, так и по бокам. Роль указателя играют ногти больших пальцев. Каждый палец имеет собственную разрядность, как на абаке: указательный палец правой руки — означает единицы, средний палец — десятки, безымянный — сотни и т. д. Переход от пальца к пальцу характеризуется последовательным овышением разряда. Пропуск имеет значение нуля.

<u>Японский счёт</u>

В Японии счёт начинается с открытой ладони. Поджатый большой палец представляет число 1, мизинец является числом 5. Таким образом, пальцы, сложенные в кулак, указывает на число 5. Затем совершается обратное действие: число 6 обозначается разжатым мизинцем. Возврат к открытой ладони означает число 10. Однако, чтобы показать цифры другим собеседникам, используется тот же порядок, что в английской или русской традиции: выпрямленный указательный палец становится номером 1, большой палец теперь представляет число 5. Для чисел свыше пяти соответствующее количество выпрямленных пальцев другой руки прижимаются к раскрытой ладони первой. Например, число 7 отображают указательный и средний палец. Число 10 изображается двумя раскрытыми к собеседнику ладонями.

<u>Английский счёт</u>

В англоязычных странах счёт до 5 ведётся разжатием пальцев, первоначально собранных в кулак, начиная с указательного пальца, и продолжается до мизинца (число 4). Разжатый большой палец указывает на число 5. Аналогичным образом процесс счёта продолжается на другой руке для чисел от 6 до 10. Например, число 7 указывается открытой ладонью с растопыренными пальцами одной руки и разжатыми указательным и средним пальцами другой. Чтобы указать на количество своему собеседнику, коренной житель англоговорящей страны поднимает руку или руки вверх. Например, разжатые указательный, средний и безымянный пальцы на поднятой вверх ладони будут означать число 3.

Континентальный европейский счёт

У народов континентальной Западной Европы, таких, как немцы или французы, разжатый большой палец представляет собой начало исчисления (число 1). Затем разжимается указательный палец (число 2) и так далее — до мизинца (число 5)[10].[11]

В некоторых европейских странах, а зачастую и во Франции, альтернативный метод подсчёта проводится путём сгибания пальцев в порядке: большой, указательный, средний, безымянный и мизинец.

Русский счёт

Русский счёт на пальцах до десяти начинается с загибания мизинца левой руки и последовательно ведётся до загнутого большого пальца правой руки. Но когда требуется наглядно показать количество, рука сжимается в кулак и сначала разжимается указательный палец, затем средний, безымянный, мизинец и большой.

Из других способов счисления по пальцам был распространён «счёт дюжинами» (двенадцатеричная система), употреблявшийся в торговле (особенно в Новгородской республике XII—XV веков). Счет дюжинами вёлся большим пальцем по фалангам остальных четырёх пальцев правой руки и начинался от нижней фаланги указательного пальца, а заканчивался верхней фалангой мизинца. Другой вариант — от верхней фаланги мизинца левой руки до нижней фаланги указательного пальца. Если число превышало 12, то при достижении 12 считающий загибал один палец на противоположной руке. По достижении числа 60 (пятёрки дюжин) все пальцы руки, фиксировавшей полные дюжины, оказывались сжатыми в кулак. Дюжинами до начала XX века в России было принято считать носовые платки, пишущие перья, карандаши, школьные тетрадки, набор из 12 предметов по традиции составляли ложки, вилки, ножи, а посудные сервизы и комплекты стульев и кресел рассчитывались на 12 персон (что оставило след в названии романа «Двенадцать стульев»).

Но наибольшее распространение в Древней Руси получил «счёт сороками» («сороковицами»). Охотники за пушным зверем в Сибири вели счет «сорочками», то есть укомплектованными в мешки шкурками (как правило, 40 собольих хвостов или 40 беличьих шкурок), которые полностью уходили на пошив богатой шубы («сорочки») русского боярина XVI века. Так, в таможенной грамоте 1586 года «сороками» были посчитаны шкурки соболей и куниц, посланные в качестве платы за ведение войны с турками от царя Фёдора Ивановича австрийскому императору Рудольфу. Методика счёта была схожа со «счётом дюжинами», только вместо подсчёта фаланг считали суставы пальцев (переходы между фалангами), которых было всего 8. Если число превышало 8, то при достижении 8 считающий загибал один палец на противоположной руке. По достижении числа 40 все пальцы руки, фиксировавшей полные осьмушки, оказывались сжатыми в кулак. Следы пальцевого «счёта сороками» сохранились в народных суевериях. Например, несчастливым для охотника считался сорок первый медведь и т. д. Также словом «сороконожка» традиционно называлась любая многоножка. Выражение «сорок сороков» или «тьма» для древнерусского крестьянина символизировало некое число, превосходящее всякое воображение и собственно математические познания самого земледельца.

Телесный счёт

Одной из самых примитивных систем счёта, является телесный счёт — разновидность пальцевого счёта, задействующая и другие части человеческого тела в определённом порядке. Как правило, первобытные племена, использующие эту разновидность счисления, не имеют в языке достаточного количества слов для обозначения цифр, поэтому те же самые слова могут означать разные цифры и не могут быть верно поняты без содействия жестового языка.

**Умение называть числа.**

Иногда утверждают, что первыми числительными были названия пальцев: мизинец – один, безымянный – два и т.п. Такое утверждение свидетельствует только, что усвоив числовой счет, мы, европейцы, разучились считать по пальцам. Каждый палец – это бирка, изображающая единицу, и счет идет по принципу «один к одному»: один предмет – один палец. Правильный счет по пальцам выглядит так: мизинец – один, безымянный – один, средний – один, указательный – один, большой – один, мизинец и безымянный – два, рука – пять. Ни в одном из языков ни одно из числительных не произошло от названия пальцев.

Числительные один и два, как правило, не поддаются этимологизации, почти никогда нельзя найти предмет, от названия которых они происходят. В некоторых языках предметную основу числительного один удается реконструировать – один переводится словом человек. Собственно, слово человек означает не столько число один, сколько способность человека быть отдельно взятым.

На костяных пластинках, на ребрах животных, на плитках шифера, песчаника эпохи палеолита нередко встречается изображение животного и рядом человеческие фигурки. Животное изображается одно, а человек – несколько. Полагают, что фигурки людей – это счетные знаки. В качестве счетного знака в равной мере могли выступать и фигурка мужчины, и фигурка женщины.

Прошло немало времени, прежде чем «человек» сам по себе стал выражать число один. Но и после этого число один в сознании людей продолжало сохранять свой бирочный, нечисловой характер. Античные и средневековые авторы смотрели на число один как на источник всех чисел, но при этом считали, что само оно числом не является.

Число началось не с единицы, а с двух. В поисках предмета, послужившего основой для числа два, следует исходить из числительного два в тех языках, в которых можно найти для него первоисточник. В древнем Шумере число два обозначалось словом женщина. Существует предположение, что женщина стала означать число два после запрета на браки внутри рода. Женская часть коллектива стала двуединой: одни женщины родились здесь, другие пришли в локальную группу извне по браку. Мужская часть рода осталась единой, и единицу теперь стал изображать не человек, а мужчина. В тасманских языках, например, слово мужчина означает один.

Связь числа с полом ярко проявляется в верованиях многих народов: нечетные числа считаются мужскими, четные – женскими. Пифагор считал один – мужским числом, два – женским. В поэзии и сейчас рифмы с ударением на первом слоге от конца строки называют мужскими, на втором – женскими.

Число три тоже имело свою предметную основу. Древние индусы выражали это число словом таруна – ребенок, подросток.

Для числа четыре не удалось отыскать предметную основу. Числовой ряд от одного до четырех особый. С ним связаны четыре грамматических числа, существовавшие во многих языках – единственное, двойственное, тройственное и четверственное.

Начиная с пяти, числа развиваются самостоятельно. Язык постепенно теряет те грамматические формы, которые связаны с числом. Утрачивается связь числа с полом, а в языке – с грамматическим родом. Числительные постепенно становятся особой частью речи.

**Умение фиксировать результаты счета**

Изображение числа с помощью камешков и т.п. оставалось неудобным, особенно в тех случаях, когда нужно было результат сберечь на длительное время или сообщить его людям, находящимся на значительном расстоянии. Это привело к созданию новых форм счета:

1) изображения чисел завязыванием узлов на веревке, называемого *квипусом,*
2) нанизывания на шнурок или палочку косточек, раковин или кусочков дерева, называемого *четником,*
3) фиксации чисел путем нанесения на палочки или кости зарубок (позже палочки получили название *бирка*).

В квипусе (кипу) один простой узел на веревке означал 10, два простых узла – 20, узел, завязанный дважды, - 100, трижды, -1000 и т.д.

Примеры узлов кипу

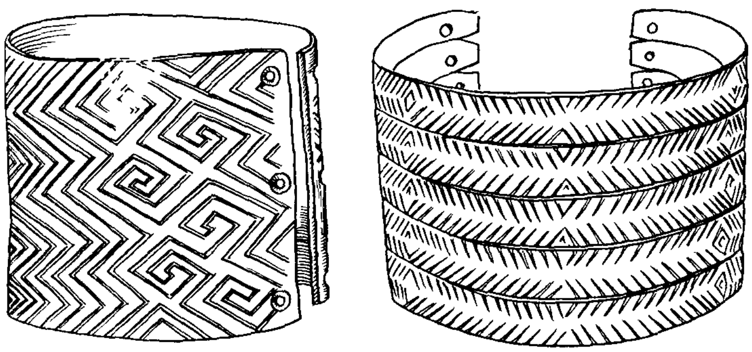
Для нанизывания на шнурок употреблялись косточки, раковины, кусочки дерева разных цветов. Значения каждой косточки или раковины зависело от цвета и порядка нанизывания на шнур. Бирки широко были распространены на Руси, у народов Сибири, Прибалтики. В русских летописях сохранились следы старинных наименований зарубок – «черты», «меты». Употребление бирок представляет собой одну из первых ступеней в попытке человека изображать числа при помощи условных знаков. Дальнейшие поиски человека в направлении фиксации результатов счета привели к созданию цифрового изображения чисел, что было осуществлено на стадии появления у народов письменности.

3. **Возникновение систем измерений.**

Возникла и необходимость измерять длину и емкость предметов. Единицы измерения были грубы, и при этом часто исходили из размеров человеческого тела. Об этом нам напоминают такие единицы, как палец, фут (ступня), локоть. Когда начали строить дома такие, как у земледельцев Индии и обитателей свайных построек Центральной Европы, вырабатывались правила, как строить по прямым линиям и под прямым углом.

Первичное возникновение математических понятий или, правильнее, понятий, которые впоследствии могли быть использованы математикой, непосредственно связано с возникновением абстрактной мысли вообще. Очевидно, такие понятия, как «один», «два», «много», «больше», как понятия, связанные с мерой и измерениями, относятся к числу первых абстракций, которые человек выработал в процессе своей трудовой деятельности.

Материал, которым располагает наука, показывает, что абстрактное мышление существовало уже в самом начале человеческой истории, то есть в палеолите. Следовательно, в палеолитической эпохе приходится искать и возникновение интересующих нас представлений. Естественно, у нас нет и не может быть непосредственных источников, отражавших первые шаги абстрактной мысли. Однако некоторые косвенные данные позволяют сделать весьма любопытные наблюдения. Речь идет о древнейших произведениях искусства, в частности об орнаменте на костяных изделиях. На месте палеолитической стоянки в Мезине (Новгород-Северский, Черниговщина ), возраст которой - около 30-25 тыс. лет, найдены разнообразные выделки из кости, покрытые графическим или живописным орнаментом, имеющим весьма регулярные геометрические формы. Внимание привлекают, в частности, костяные



1 2

пластинчатые браслеты. Один из них состоит из пяти узких пластинок вида (см.рис.), ориентированных прямыми наклонными штрихами, расположенными двумя рядами (в виде елочки). Ритм составных элементов орнамента, их размеры, расположение на всех пяти пластинках совершенно одинаковы. Сама возможность такого орнамента предполагает наличие у его создателя идей (пусть даже до конца не сформулированных), представляющих для нас интерес. Это:

1. идея количества и счета. Число черточек, повторяющееся на каждой из пяти пластинок, заставляет думать, что они были подсчитаны, а поскольку число это сравнительно велико (4 зоны по 12-14 черточек в каждой), то можно полагать, что жители Мезинской стоянки знали счет, по крайней мере до 20 (число пальцев на руках и ногах);
2. идея ритма, выраженная в правильном построении орнамента (в частности, здесь отчетливо выступает понятие симметрии).
3. идея меры и измерения. Расстояния между соседними черточками одинаковы, как и длина самих черточек, как ширина и длина пластинок, составляющих браслет. Следовательно, их каким-то образом измеряли (хотя бы на глаз).
4. идея угла и наклона (угол наклона черточек на всех пяти пластинках одинаков).
5. первые представления о геометрической форме (отрезок прямой, точка, квадрат, треугольник и т.д.)

В связи со сказанным представляет интерес небольшая пластинка с нанесенными на ней наклонными черточками, расположенными елочкой в два ряда, подобно описанному выше орнаменту. Количество штрихов здесь также совпадает, но не всегда совпадают их концы. Это убеждает в том, что черточки действительно были подсчитаны и их числовое совпадение достигалось отнюдь не графическими приемами.

При раскопках этой же стоянки найдена лопатка мамонта, на поверхности которой красной краской изображены строго параллельные линии – прямые и ломаные (в форме правильного зигзага). Здесь, в добавление к сказанному, мы видим непосредственное отражение о представления о параллельности линий.

В последующие эпохи эти представления получили дальнейшее развитие. Человек неолита обладал также острым чувством геометрической формы. Обжиг и раскраска глиняных сосудов, изготовление камышовых циновок, корзин, тканей, позже – обработка металлов вырабатывали представление о плоскостных и пространственных соотношениях. Неолитические орнаменты радовали глаз, выявляя равенство, симметрию, подобие фигур. В этих фигурах могут проявляться и числовые соотношения, как в некоторых доисторических орнаментах, изображающих треугольные числа. Весьма распространены мотивы окружности и круга (в больших случаях изображенных довольно точно). Первоначально ранние орнаменты, возможно, имели религиозное или магическое значение, но постепенно преобладающим стало их эстетическое назначение.

В религии каменного века мы можем уловить первые попытки вступить в борьбу с силами природы. Религиозные обряды были насквозь пронизаны магией, магический элемент входил в состав существовавших тогда числовых и геометрических представлений, проявляясь также и в скульптуре, музыке, рисунке.

Существовали магические числа, такие, как 3,4,7 и магические фигуры, как, например, пятиконечная звезда и свастика; некоторые авторы даже считают, что эта сторона математики была решающим фактором в ее развитии.

4. **Астрономические наблюдения.**

Даже у самых отсталых племен мы находим какой-то отсчет времени и, следовательно, какие-то сведения о движении Солнца, Луны и звезд. Сведения этого рода впервые приобрели более научный характер, когда стали развиваться земледелие и торговля. Пользование лунным календарем относится к очень давней эпохе в истории человечества, так как изменение в ходе произрастания растений связывались с фазами Луны. Примитивные народы обратили внимание и на солнцестояние, и на восход Плеяд в сумерках. Некоторые первобытные народы пользовались при плавании созвездиями как ориентирами. Эта астрономия дала некоторые сведения о свойствах сферы, окружностей, об углах.

## Математика Древнего Востока

1. **Историческая характеристика**.

В течение 5-3 тыс. до н.э. новые и более совершенные формы общества складывались на основе упрочивающихся общин нового каменного века, существовавших на берегах великих рек Африки и Азии в субтропическом поясе и вблизи него. Эти реки – Нил, Тигр, Евфрат, Инд, позже – Ганг, Хуанхе, еще позже – Янцзы.

Прибрежные земли в районах этих рек могли давать обильные урожаи при условии регулирования разливов и осушения болот. Были построены валы и плотины, созданы сети каналов и водохранилищ. Регулирование водоснабжения потребовало совместных усилий населения обширных районов в размерах, значительно превосходивших то, что предпринималось в этом роде раньше. Это повело к установлению централизованного управления, сосредоточенного в городских центрах, а не в варварских селениях предшествующих эпох. Возникла городская аристократия во главе с могущественными вождями. Возникло немало профессий и специальностей – их представляли ремесленники, солдаты, писцы и жрецы. Руководство общественными работами находилось в руках бессменных должностных лиц – группы людей, сведущих в смене времен года, движении небесных тел, в деле землеустройства, хранения запасов пищи и взимания налогов. Пользовались письменностью, чтобы придать форму закона требованиям администрации и действиям правителей. Чиновники и ремесленники накопили значительный запас технических знаний, включая сюда металлургию и медицину. В состав этих знаний входило и искусство счета и измерения.

Статичность Востока создавала некую освященность его установлений. Чиновничество часто было религиозного склада, как и государство; во многих странах жрецы были правителями областей. А так как заниматься наукой было задачей чиновничества, то во многих восточных странах жрецы занимали выдающееся положение как обладатели научных знаний.

Восточная математика возникла как прикладная наука, имевшая целью облегчить календарные расчеты, распределение урожая, организацию общественных работ и сбор налогов. Вначале, естественно, главным делом были арифметические расчеты и измерения. Однако в науке, которую столетиями культивировали специалисты, чьей задачей было не только ее применение, но и посвящение в ее тайны, должен был развиться абстрактный уклон. Постепенно наукой стали заниматься ради нее самой. Из арифметики выросла алгебра не только потому, что это облегчало практические расчеты, но и в результате естественного развития науки, культивируемой и совершенствуемой в школах писцов.

Хотя торговля и процветала в этих обществах древнего Востока, их различные культуры оставались резко отличными одна от другой, вопреки сходству экономического строя и одинаковому в основном уровню научных сведений. Никогда не составляло труда отличить друг от друга искусство и письменность Египта, Месопотамии, Китая, Индии. Точно также можно говорить о египетской, месопотамской, китайской и индийской математике, хотя по своей арифметико-алгебраической природе они весьма схожи.

## 2. Математика Древнего Египта.

Египет цели благостной достиг,
Хранят поныне плиты пирамиды
Живой завет погибшей Атлантиды.
Бог Тот чертил слова гигантских книг,
Чтоб в числах три, двенадцать и четыре
Мощь разума распространялась в мире.

Основными памятниками математической науки Древнего Египта являются папирусы относящиеся к периоду Среднего Царства (ок 21-18 вв до н.э.). Наиболее ценными для истории математики являются папирусы: Московский, Ахмеса, Берлинский, Кахунский и Кожаный свиток.

Самым древним математическим папирусом, дошедшим до нас, является так называемый «Московский папирус», написанный около 1850 г. до н.э. Длина его около 5.5 м, ширина – 8 см. Хранится он в Музее изобразительных искусств им. Пушкина. Его изучили и расшифровали русские ученые, академики Тураев Борис Александрович (1868-1920) и Струве Василий Васильевич (1891-?).

Важнейшим по содержанию является «папирус Ахмеса» - по имени его писца. Его длина 544 см, ширина 33 см, хранится он в Лондоне в Британском музее, частично в Нью-Йорке. Этот папирус был открыт в 1858 г. египтологом Риндом (Rhind), поэтому часто называется «папирусом Ринда». Этот папирус датируется 1650 г. до н.э. Озаглавлен он так: «Способы, при помощи которых можно дойти до понимания всех темных вещей, всех тайн, заключающихся в вещах». Папирус Ринда содержит 84 задачи, московский папирус – 25. Эти задачи были уже достаточно стары, но есть меньшие папирусы значительно более позднего происхождения, которые не отличаются от названных своими приемами.

Состояние египетской математики 1-ой пол. 2-го тыс. до н.э. может быть охарактеризовано в следующих чертах.

1. Математика, изложенная в папирусах, основана на десятичной системе счисления со специальными знаками для каждой десятичной единицы более высокого разряда – системе, которая нам знакома благодаря римским обозначениям.
2. Арифметика египтян имела преимущественно аддитивный характер, т.е. основное направление состоит в сведении всех умножений к повторным сложениям.

*Пример.* Умножение на 13 получается умножением сначала на 2, затем на 4, затем на 8 и сложением результатов умножения на 4 и на 8 с первоначальным числом. Умножим 13 на 11:

| | |
|---|---|
| *1 | 11 |
| 2 | 22 |
| *4 | 44 |
| *8 | 88 |

Складывая все числа в строчках, отмеченные звездочкой, получим 143.

3. Многие задачи очень просты и сводятся к линейному уравнению с одним неизвестным.

В московском папирусе и папирусе Ахмеса содержатся задачи, в которых неизвестное имеет особый символ и его название «хау» или «аха», что означает «количество», «куча». Так называемое исчисление кучи приблизительно соответствует нашему решению задач с помощью уравнений.

*Пример* из «папируса Ахмеса». Количество и его четвертая часть дают вместе 15.

В папирусе Ахмеса решение начинается так «Считай с 4; от них ты должен взять четверть, а именно 1, вместе 5». Затем 15 делится на 5, умножается частное на 4 и получается неизвестное 12.

Египетский метод решения является по существу методом предположения. Начинают с того, что в качестве неизвестного берут произвольное число, в данном случае 4, так как его четверть равна 1 – просто вычисляется. Далее, 4+1=5. Однако, по условию задачи результат должен быть не 5, а 15, следовательно, во сколько раз 15 больше 5, во столько раз неизвестное должно быть больше произвольно взятого числа 4.

Этот метод широко применялся в средние века и получил название «метода ложного положения».

4. Самой замечательной чертой египетской арифметики являются действия с дробями.

Все дроби сводятся к сумме так называемых *основных дробей,* то есть дробей, имеющих числителем единицу. Единственное исключение составляла дробь 2/3, для которой существовал специальный символ. Сведение к суммам основных дробей производилось с помощью таблиц, которые давали разложение дробей вида 2/n . Папирус Ринда дает таблицу, в которой приведены разложения на основные дроби для всех нечетных n от 5 до 331. Такие действия с дробями придавали египетской математике тяжеловестность и растянутость и существенно затрудняли дальнейший прогресс науки. В то же время указанное разложение предполагает определенное математическое искусство, и существуют интересные теории для объяснения того способа, каким египетские специалисты могли получить эти результаты.

5. Во многих задачах идет речь о количестве хлеба, различных сортов пива, о кормлении животных, о хранении зерна.

Это указывает на практическое происхождение такой запутанной арифметики и алгебры.

6. Некоторые задачи имеют геометрическую природу и касаются преимущественно измерений.

Площадь треугольника находится как половина произведения основания и высоты; площадь круга диаметра d $(d - d/9)^2$, что дает для $\pi$ значение 256/81=3,1605. Мы находим также некоторые формулы для объемов тел, таких как куб, параллелепипед, круговой цилиндр, причем все они рассматриваются как сосуды, преимущественно для зерна.

7. Самым замечательным результатом в египетских измерениях была формула для объема усеченной пирамиды с квадратным основанием

$$V = \frac{h}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right),$$

где a и b – длины сторон квадрата, h – высота.

8. Египетская астрономия дала человечеству календарь, длина года в котором равнялась 365 дням, причем год делился на 12 месяцев по 30 дней и 5 дополнительных дней в начале каждого года, а сутки делились на 24 часа. Однако она оставалась на низком уровне вплоть до правления Птолемеев.

## 3. Математика Двуречья.

И ярко факел вспыхнул в Вавилоне;
Вещанья звезд прочтя на небосклоне,
Их в символы Семит пытливый влил.
Седмица дней и Зодиак, - идеи,
Пребудут знаком, что уже в Халдее
Исканьем тайн дух человека жил.

В.Брюсов «Светоч мысли»

Математических текстов, позволяющих судить о математике в Вавилоне, значительно больше, чем египетских. Вавилонские клинописные математические тексты охватывают период от начала 2 тыс. до н.э (эпоха династии Хаммурапи) до возникновения греческой математики. Математика Двуречья достигла более высокого уровня, чем тот, которого когда-либо достигла египетская математика. Здесь улавливается прогресс в ходе столетий. Уже самые древние тексты, относящиеся к последнему шумерскому периоду (2100 г. до н.э.), показывают высокое вычислительное искусство. Клинописные тексты содержат таблицы умножения, таблицы обратных величин, служащие для замены деления умножением, таблицы квадратов и кубов, и специальные математические тексты, содержащие задачи с решениями.

Основные особенности вавилонской математики заключаются в следующем.

1. Вавилоняне пользовались смешанной десятично-шестидесятиричной системой счисления, доставшейся им от шумеров. Появление такой системы обусловливалось, по-видимому, торговыми операциями между шумерами и аккадцами. Денежная единица шумеров «мина» (кучка серебра) приравнивалась к 60 шекелям, при этом при расчетах часто употреблялась шестая часть мины, равная 10 шекелям, что обеспечивало особую роль числа 10.

2. Система счисления была *позиционной*. Подобная система имеет огромное преимущество при вычислениях. Она устраняла многие трудности в арифметике дробей (шестидесятиричных).

*Пример.* Единицы обозначались ▼, а десятки ◄, эти знаки употреблялись также для обозначения десятков и единиц следующих разрядов. Число 153=2·60+33 изображалось так:

▼▼◄◄◄▼▼▼

Однако, при таком способе счета существовала некоторая неопределенность, так как значение символа не всегда было ясно по его положению. Так, упомянутое число можно было прочесть и как $2\cdot60^2+33\cdot60$. Другая неопределенность возникала из-за того, что незаполненное место иногда обозначало нуль. Иной раз появлялся специальный символ для нуля, но не раньше персидской эпохи.

3. Арифметика вавилонян переросла в хорошо разработанную алгебру. Вавилоняне времен Хаммурапи (1950 г. до н.э.) решали линейные и квадратные уравнения с двумя неизвестными, а также задачи, сводящиеся к биквадратным и кубическим уравнениям. Такие задачи они формулировали только при определенных значениях коэффициентов, но, несомненно, они знали и общие правила.

4. Вавилонская геометрия располагала формулами для площадей простых прямолинейных фигур и для объемов простых тел, но не найдена формула для объема усеченной пирамиды. Площадь четырехугольника определялась как произведение полусумм противоположных сторон, что верно только для прямоугольника. Известна теорема Пифагора не для частных случаев, а во всей ее общности. В более поздних математических табличках появляются некоторые правильные многоугольники, вписанные в круг.

5. В поздних клинописных текстах (600 г. до н.э. – 300 г. н.э.) вычислительная техника становится еще более совершенной.

От эпохи Селевкидов дошли вычисления, которые доведены до семнадцатого шестидесятиричного знака. Стимулом для таких вычислений были астрономические задачи или просто любовь к вычислениям. Если учесть, что в текстах никогда не даются записи промежуточных вычислений, то указанное явление проще всего объяснить тем, что вычисления производились на счетной доске. Можно думать, что и употребление позиционного принципа связано с применением счетной доски.

В одной из таблиц имеется ряд чисел вида $n^3+n^2$, которым, по-видимому, пользовались при решении уравнений вида $n^3+n^2=a$. В них содержится превосходное приближение для $\sqrt{2} = 1\frac{5}{12} \approx 1{,}4167$ (вместо 1,4142), для $1/\sqrt{2} = 0{,}7071$ дается $\frac{17}{24} \approx 0{,}7083$.

6. Для числа $\pi$ в основном использовалось приближенное значение 3, иногда 3 1/8.

7. В клинописных текстах встречаются задачи на сложные проценты. Вавилоняне умели суммировать арифметические прогрессии, по крайней мере простейшие геометрические прогрессии и знали правило суммирования последовательных квадратных чисел, начиная с 1.

8. Из достижений вавилонской математики в области геометрии, выходящих за пределы познаний египтян, следует отметить разработанное измерение углов и некоторые зачатки тригонометрии, связанные с развитием астрономии. Наиболее характерными достижениями вавилонской астрономии относятся: теория движения Солнца и Луны, зодиак, состоящий из 12 участков по 30 градусов, описание основных планетных и лунных явлений. Вавилонская математика оказала влияние на греческую математику. Следы шестидесятиричной системы счисления сохранились в современной науке при измерении времени и углов.

## 3. Математика Древнего Китая

Когда я пытаюсь представить величие наших предков,
Они мне кажутся в небе плывущими облаками.
Если я вижу, что где-то мудрые ошибались,
Тогда я, стихи слагая, пытаюсь сказать об этом.

Цюй Юань «Злой вихрь»

Китайская математика имеет богатую многовековую историю и оригинальные пути своего становления. Она развивалась преимущественно в вычислительно-алгоритмическом направлении, используя принципиально новые приемы решения алгебраических задач. Согласно летописной истории, третий правитель династии Ся – Юй (22-21 вв. до н.э.) укрощал реки с помощью циркуля и линейки. Известно о существовании учебника по математике эпохи Чжоу (11 в. до н.э.).

Классическим математическим произведением Древнего Китая является «Девять книг о математическом искусстве» («Арифметика в девяти главах»), составленная в 152 г. до н.э. В результате последующих переработок и дополнений это издание стало математической энциклопедией, основным китайским учебником в 7-10 вв. н.э.

Математика «Девяти книг» состоит в основном из задач (246) и общих указаний как их решать. В 4 книге «Шао гуан» определялась сторона прямоугольника по заданной площади и другой стороне, радиус круга по площади, диаметра шара по объему. Вычисляются квадратные и кубические корни. В 8 книге «Фан чэн» ряд задач сводится к системам линейных уравнений, которые записываются «матрицей» своих коэффициентов.
Решение таких систем ищется с помощью «матричных преобразований». В 9 книге «Гоу-гу» («гоу» - горизонтальный катет, «гу»- вертикальный катет (обычно больший)) содержатся задачи на применение теоремы Пифагора.

Анализ математических и астрономических работ китайских математиков позволяет сделать *следующие выводы*:

1. Система счисления у китайцев была десятичной и позиционной. Арифметические действия выполнялись с помощью счетной доски. Пропуски, т.е. пустые места, обозначали нуль. При календарных расчетах применялось нечто вроде шестидесятиричной системы счисления.

2. Китайская математика математика занимает особое положение, - практически до последних лет мы видим в ней непрерывность традиции. Традиционное учение передавалось из поколения в поколение с обременительной тщательностью. В такой застойной культурной атмосфере новые открытия стали чрезвычайно редким явлением, а это опять-таки обеспечивало неизменность математической традиции.

3. Одним из самых крупных открытий китайских ученых было введение во 2 в. до н.э отрицательных чисел и правил их сложения и вычитания – правил «чжэн-фу» («чжэн» - положительное число, обозначалось красным

цветом, «фу» - отрицательное число - черным). В 3 в. н.э отрицательные числа в Греции рассмотрел Диофант, в 7 в.н.э. они появились в Индии.

4. В 1-ой книге «Девяти глав» значение $\pi$ приравнивалось равным 3, позднее были получены более точные приближения. В 5 в. Цзу Чун-чжи получил следующую оценку $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$. Только через 1000 лет эту точность превзошел среднеазиатский астроном Аль-Каши.

## 4. Математика Древней Индии

Развитию математики в Индии посвящена значительна литература. Во всех общих работах по истории математики подробно описывается создание десятичной позиционной системы счисления, указывается на то, что арифметика, значительная часть алгебры и элементы тригонометрии имеют индийское происхождение. Наконец, оценивается та значительная роль, которую сыграла Индия в научных контактах между Древней Грецией и средневековой арабской и западноевропейской культуре. Однако эти работы охватывают преимущественно средневековый период развития индийской математики, тогда как наиболее ранние сведения о естественнонаучных знаниях индийцев относятся к эпохе Индской цивилизации, датирующейся серединой III тысячелетия до н.э.

В 1925 г. археологи объявили об удивительном открытии развалин двух больших городов — Мохенджо-Даро и Хараппы, расположенных в бассейне реки Инд (отсюда и названия «Индская цивилизация» или «культура долины Инда»). До нас не дошли тексты математического характера, а имеющиеся надписи не расшифрованы. Поэтом об уровне знаний в эпоху Индской цивилизации можно судить косвенно по результатам раскопок либо по аналогии с естественнонаучными знаниями других народов. Виды ремесленного производства, формы изделий, предметы быта свидетельствуют о наличии связей культур долины Инда с культурами Передней Азии. Прослеживаются некоторые связи с Эламом, Египтом, Троей, Кавказом и даже Европой. Но в первую очередь обнаружены довольно интенсивные связи с Шумером.

Сохранившиеся надписи Индской цивилизации очень кратки, они встречаются лишь на печатях из обожженной глины и амулетах, а также изредка на орудиях и оружии. Письмо на всех этих предметах выглядит одинаковым вне зависимости от того, были ли они найдены в верхних или нижних слоях обоих городов. Для повседневных нужд мог применяться и другой вид письма, более близкий к рукописному; отсутствие каких-либо длинных текстов заставляет полагать, что наиболее распространенным материалом для письма была кора, хлопчатобумажная ткань, кожа или листья пальмы — материалы, которые давно погибли во влажной почве.

Табличками для письма также могли служить тонкие глиняные плитки прямоугольной формы с проделанным на одном конце ушком. Они невелики — длина их составляет от 10 до 18 см и некогда, подобно деревянным табличкам, употребляемым до сих пор в Индии, были покрыты каким-то гладким веществом, с которого написанное легко смывается. При раскопках найдена маленькая глиняная баночка, представляющая собой, по всей вероятности, чернильницу, поскольку древние писцы писали чернилами или тушью.

Каков же был уровень арифметических знаний индийцев в эпоху Индской цивилизации? Нумерация, по-видимому, была десятичной; об этом свидетельствует линейка, от которой сохранился лишь обломок, представляющий собой узкую полоску раковины с нанесенными на ней делениями шириной 6,7 мм, из которых осталось девять. Погрешность в делениях этой линейки не превышает в среднем 0,07 мм, и две различные отметки говорят о том, что когда-то она составляла часть более длинного измерительного инструмента, основанного на десятичной системе. Как же обозначались числа? Прежде всего—штрихами-зарубками. Такие зарубки обнаружены на каменных кольцах, из которых строились колонны, поддерживающие кровлю жилищ. Обнаружено девять чисел, обозначенных подобным образом; это числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. Число, обозначавшее 8, отсутствует, зато 6 обозначается двумя способами. Числа от 1 до 4 состоят из одной группы штрихов, числа от 5 до 7 — из двух групп, расположенных как горизонтально, так и вертикально; число 9 состоит из трех вертикальных групп. Некоторые горизонтальные и вертикальные черточки сохранились в позднейших индийских числовых системах кхарошти и брахми.

На некоторых орудиях, найденных в Мохенджо-Даро, вырезаны пиктографические знаки и символы, напоминающие цифры, отличные от штрихов-зарубок. Видимо, эти предметы являлись храмовой или государственной собственностью и были пронумерованы для учета.

При выполнении арифметических операций можно было использовать специальный счетный прибор — абак. В Мохенджо-Даро был найден кирпич с тремя рядами вырезанных на нем прямоугольников, по четыре в каждом ряду; одна из клеток на этом кирпиче была отмечена перекрестными линиями. Вероятно, этот кирпич представлял собой игральную доску или часть доски, так как он находился в мощеном полу. Был обнаружен и другой кирпич, с отбитым концом, на одной стороне которого выдолблено четыре ряда небольших углублений; ряд, сохранившийся лучше других, имеет пятнадцать таких, углублений. Каждая ямка ничем не отличается от другой, и все это напоминает игральную доску. Эти или подобные доски могли также служить счетными приборами при выполнении простейших арифметических операций, для чего можно было применять камешки или бобы, которые также найдены при раскопках.

Некоторые игры, распространенные в городах долины Инда, требовали применения игральных костей. При раскопках были найдены древнейшие в мире кости как кубической формы, так и в форме табличек. Первые, похожие на современные, только значительно более крупные, изготовлялись из обожженной глины или камня. С каждой стороны у них ямочками обозначены числа — от одного до шести; расположение их отлично от современного, при котором сумма каждой пары противоположных чисел равна семи. Кости в виде табличек, сделанные всегда из слоновой кости, помечены с трех сторон числам 1, 2 и 3; четвертая сторона иногда украшена продольными линиями. Другой способ помечать стороны заключался в вырезывании на каждой из них различных узоров или иероглифических знаков, значение которых пока остается неизвестным.

Чрезвычайно широкое распространение имели каменные гири, сделанные из тщательно отполированного сланца. Наиболее частой формой являлся куб; гири такого типа встречаются от самых маленьких до сравнительно крупных, максимальный их вес 274,938 г. После гирь этого типа наиболее часто встречаются шаровидные гири с плоскими верхушкой и основанием, среди них также обнаружены довольно крупные образцы.

Говоря о геометрических представлениях древних индийцев, следует отметить, что города долины Инда, по-видимому, с самого начала планировались по какой-то заранее установленной геометрической схеме, характер которой легче уяснить на примере Мохенджо-Даро, сохранившегося лучше, чем Хараппа. Улицы здесь тянутся правильными параллельными линиями, пересекающимися под прямым углом. Город был расположен на территории, напоминающей по форме трапецию, три угла которой можно проследить довольно отчетливо. Эта правильная форма плана города заставляет предположить наличие вокруг него городских стен.

При раскопках найдено большое число предметов, имеющих правильную геометрическую форму. Это, например, разнообразные металлические конусы и предметы полусферической формы, служившие для украшений. Среди домашней утвари встречается сосуд, имеющий форму цилиндра; цилиндрической формы же были и две печати-амулета, хотя большинство их имело квадратную или прямоугольную форму. Небольшие металлические конусы были найдены в кладах с драгоценностями, откопанных в Мохенджо-Даро и Хараппе. Это конусы высотой в среднем 6 см и в диаметре 5 см, они сделаны из золота, серебра, меди и фаянса. Своеобразные полые предметы полусферической или конической формы, сделанные из двух, трех и даже четырех кусков раковины, по-видимому, также служили предметами украшений.

Абстрактную геометрическую форму имел орнамент на керамических изделиях, частично встречающийся также на керамике других стран древнего мира, частично же свойственный исключительно долине Инда. Наиболее распространен орнамент в виде находящих друг на друга кружков; этот рисунок не встречается на посуде других древних культур. В тех случаях, когда сосуд для правильности нанесения рисунка предварительно размечался на квадраты, кружки выведены более тщательно. Очень распространен орнамент, напоминающий большой гребень, он встречается вместе с солнечным знаком и другими эмблемами, которые трудно определить. Другой, также распространенный орнамент состоит из черных клеток, чередующихся в шахматном порядке с клетками, образованными красным фоном; треугольники расположены в один, два и реже в три ряда, образуют красивый узор.

Широко применяется штриховка как средство отделения одного треугольника, квадрата или какого-либо иного мотива от другого.

Многие черты роднят Индскую цивилизацию с другими древнейшими культурами — Египтом и Вавилоном. Поэтому в этих государствах должны были появляться схожие математические задачи, связанные с необходимостью расчетов при строительстве дворцов, храмов, жилищ, складов для зерна, военных укреплений, при межевании земель, распределении материалов и продуктов, при торговле, мореплавании. Мы не знаем, как жители долины Инда решали эти задачи,— скорее всего, так же, как древние египтяне и вавилоняне.

Можно с уверенностью сказать, что наши сведения о естественнонаучных знаниях древних индийцев значительно расширятся в результате дешифровки имеющихся текстов.

Следующие сведения о математических знаниях индийцев относятся к эпохе составления религиозно-философских книг «Вед» — «Знаний», составление которых относится к II—I тысячелетиям до н. э. Один из разделов древнеиндийской ведической литературы носит название «Шульба-сутра». Это трактаты, связанные с правилами измерений и построений различных жертвенных алтарей. Сам термин «шульба» (иногда произносится как «шульва») означает веревку, струну, канат, нить, а корень «шульб»— действие или процесс измерения; «сутра»— это наставление, руководство, правило. Поэтому трактаты, называемые «Шульба-сутра», могут быть переведены как «Правила веревки».

«Шульба-сутра» в редакции Баудхайаны является наиболее ранней и наиболее полной работой; ее составление относится к VI—V вв. до н. э. Она состоит из 525 строф, разделенных на три главы: первая глава из 116 строф содержит геометрические предложения, необходимые для построения алтарей; во второй главе, насчитывающей 86 строф, описываются различные виды алтарей и приводятся соотношения между отдельными частями жертвенников; в наиболее объемной третьей главе (323 строфы) даны исходные и требуемые алтари.

«Шульба-сутра» в редакции Манавы — более позднее и сравнительно небольшое по объему сочинение; в нем приведено описание частных видов жертвенников, которые не встречаются в других работах.

«Шульба-сутра» в редакции Апастамбы (V—IV вв. до н. э.) состоит из 223 строф, разделенных на шесть глав. В ней рассматриваются аналогичные проблемы, что и в других сочинениях.

«Шульба-сутра» в редакции Катиайаны (IV—III вв. до н. э.) также разбита на шесть глав, хотя она более короткая, чем предыдущая,— всего 102 строфы. Здесь приведена в обобщенном виде теорема Пифагора и даются решения прямоугольных треугольников в рациональных числах.

«Шульба-сутра» в других редакциях не содержит нового материала по сравнению с упомянутыми редакциями. В этих книгах, а также в некоторых других ведических сочинениях можно почерпнуть сведения о знаниях индийцев по арифметике, алгебре, теории чисел, геометрии.

Отметим основные черты математики Древней Индии:

1. Широкое распространение в этот период получила десятичная нумерация; существовали специальные названия для больших степеней десяти вплоть до $10^{53}$. Эти наименования образовывались с помощью аддитивного, субтрактивного и мультипликативного принципов, которые позднее стали необходимыми компонентами при создании десятичной позиционной системы счисления. Определения и правила выполнения четырех арифметических действий в ведической литературе не встречаются, хотя приводятся многочисленные примеры этих операций. Так, в «Шатапатха брахмана» дается следующий пример: «Когда Индра и Вишну разделили тысячу коров на три части, осталась одна корова; и даже теперь, если кто-либо делит тысячу на три, всегда сверх [частного] остается единица».

Имеются также многочисленные примеры специальной терминологии для обозначения дробей. Так, в «Ригведе»— наиболее ранней по времени составления веде — приводятся названия простейших дробей — ардха (1/2), трипада (3/4), позднее упоминаются дроби пада (1/4), шапха (1/8), куштха (1/12), кала (1/16).

Для обозначения дробей в «Шульбах» применяли специальные термины «амша» и «бхага», что в переводе означает «часть», в сочетании с количественными и порядковыми числительными, например: триамша — 1/3, панча-мабхага — 1/5. Порой эти термины могли опускаться; так, дробь 1/12 обозначалась или «двадашабхага», или просто «двадаша».

Многообразные способы обозначения дробей позволяют проследить путь, каким шел процесс от более ранних обозначений, когда каждая из простейших дробей, чаще всего аликвотных, имела специальный термин, до позднейших обозначений, когда выработались общие принципы наименования любых дробей.

2. Большой интерес вызывают описанные в «Шулъбах» действия с иррациональными величинами, для которых был введен специальный термин «карани» — корень.

Весьма интересно данное в «Щульба-сутре» рациональное приближение для величин $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Приближение для диагонали квадрата с единичной стороной равно

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}.$$

Подобное приближение примечательно по нескольким причинам. Во-первых, обращает на себя внимание желание ограничиться лишь немногими цифрами. Во-вторых, большая для того времени точность приближения: в десятичных дробях 1,4142157 вместо 1,442136. В тексте нет указаний на то, как было получено подобное приближение. Возможно, что здесь применялся метод итерации, известный задолго до «Шульба-сутра» в Вавилоне. Примерно в 1600 г. до н.э. вавилоняне нашли для $\sqrt{2}$ значение, очень близкое к индийскому. Это указывает на математические связи вавилонских и индийских ученых, хотя прямых свидетельств этого не обнаружено.

3. Ряд задач при построении алтарей приводит к линейным и квадратным уравнениям, а также к неопределенным уравнениям первой и второй степеней. При построении алтарей порой приходилось решать задачу о нахождении размеров фигуры, подобной данной, площадь которой увеличилась на известную величину.

4. Интерес индийцев к прогрессиям отмечен в самых ранних ведических сочинениях. В ведическую эпоху не существовало общих правил суммирования прогрессий, однако были известны некоторые частные методы нахождения суммы подобных последовательностей.

5. Еще одной областью, к которой индийцы проявили большой интерес, как теоретический, так и практический, была комбинаторика. Первоначальным толчком послужило ведическое стихосложение, имевшее различные размеры стихов с 6, 8, 9, 11, 12 слогами. Проблема осложнялась еще и тем, что при построении различных размеров надо было учитывать не только число слогов, но и долготу гласных звуков в каждой слоговой группе. Это и привело к математической теории в области комбинаторики.

Среди сочинений по этому вопросу наибольший интерес представляет трактат «Чхандах-сутра» Пингалы (200 г. до н. э.), в котором дается описание метода, называемого «меру-прастара» для нахождения числа сочетаний из $n$ слогов, взятых по 1, 2, 3, . . ., $n$ слогов одновременно. Этот метод, согласно объяснению комментатора Халайудха {X в. н. э.), заключается в следующем: «После построения квадрата на вершине ниже строятся еще два квадрата так, чтобы половина каждого располагалась по каждой из двух сторон. Под этим построим три квадрата, еще ниже строятся четыре квадрата, и процесс повторяется до тех пор, пока требуемая пирамида не будет получена. В первом квадрате запишем единицу. Затем в каждом из двух квадратов второй линии следует снова поместить по единице. В третьей линии единицу следует поместить в каждом из двух крайних квадратов. В среднем квадрате [этой линии] следует поместить сумму цифр ближайших двух квадратов, расположенных выше. В четвертой линии единица помещается в каждом из двух крайних квадратов, в каждом из средних квадратов помещается сумма цифр ближайших двух квадратов, написанных выше, а это есть 3. Таким же путем продолжаем заполнять квадраты. Так, вторая линия дает число комбинаций из короткого и длинного звуков, образующих один слог, третья линия дает то же самое для двух слогов, четвертая линия — для трех слогов и т. д.».

Таким образом, «меру-прастара» дает способ построения треугольника биномиальных коэффициентов, который использовался для комбинаторных задач, и нет оснований говорить о знакомстве индийцев в это время с разложением степени двучлена.

6. Постройка алтарей регламентировалась следующими правилами: они ориентировались по странам света; в их основании лежали строго определенные фигуры; основания были либо подобными с целочисленными коэффициентами пропорциональности, либо различными геометрическими фигурами, но равновеликими по площади. Все это приводило к решению следующих геометрических задач: построение прямого угла, квадрата,

прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, построение из них трапеций, преобразование прямоугольника в равновеликий квадрат, построение квадрата, равновеликого сумме или разности двух данных квадратов.

7. При выполнении различных построений встречаются утверждения, сходные с теми, которые позднее можно найти в эллинистической науке. Так, прямую линию можно делить на бесконечное число равных частей; круг можно разбить диаметрами на любое число частей; каждая диагональ делит прямоугольник пополам, а обе диагонали в точке пересечения делятся пополам, при этом прямоугольник делится на четыре части; прямая линия, соединяющая вершину с серединой противоположной стороны, делит равносторонний треугольник на две равные части; параллелограммы, построенные на одном и том же основании и между теми же параллельными линиями, равны между собой.

8. Во всех построениях видное место занимала теорема Пифагора. Составители «Шульба-сутра» применяли шесть прямоугольных треугольников с целыми сторонами: 3,4,5; 5,12,13; 8,15,17; 7,24,25; 12,35,37; 15,36,39. Из этих и подобных им треугольников составлялись равнобедренные трапеции. С помощью теоремы Пифагора также производилось удвоение, утроение и т. п. данного квадрата, а также преобразование данного прямоугольника в квадрат.

В «Шульба-сутра» даны точные и приближенные правила нахождения площадей треугольника, параллелограмма, трапеции, объемов призмы, цилиндра, усеченной призмы.

Хотя математические элементы «Шульба-сутра» и других ведических сочинений не носят систематизированного характера, но и они свидетельствуют о значительных познаниях индийских математиков в эпоху составления этих книг.

В Индии существовали аналогичные Китаю условия, и там мы находим даже такие математические тексты, которые написаны стихотворными размерами с целью облегчить запоминание. Нет никаких особых причин считать, что приемы, которыми пользовались в древнем Египте и в Вавилоне, могли значительно отличаться от практики Индии и Китая.

### *Итоги и выводы*

Математика Древнего Востока ставила вопрос «как?». Во всей математике Древнего Востока мы нигде не находим никаких попыток дать доказательства. Нет никаких доводов, есть только предписания типа «делай то-то и так-то». Видимо, восточная математика не могла освободиться от тысячелетнего влияния технических проблем и проблем управления, для пользы которых она и была создана.

Во всех древних цивилизациях, за исключением греческой, математика еще не сформировалась в отдельную науку. У нее не было своей особой методологии, и она не ставила перед собой иных целей, кроме решения непосредственных, практических задач. Математика была своего рода инструментом, набором разрозненных нехитрых правил, позволявших людям удовлетворять повседневные запросы: составлять календари, назначать сроки проведения сельскохозяйственных работ, вести торговлю. Открытые методом проб и ошибок, на основе опыта и наблюдений, многие из этих правил были верны лишь приближенно. О математике догреческих цивилизаций в лучшем случае можно сказать, что она в известной мере продемонстрировала мощь, если не строгость мышления и проявила больше упорства, чем блеска. Математику такого рода принято называть **эмпирической.** Эмпирическая математика египтян и вавилонян стала прелюдией к тому, что создали греки.

## *Практические занятия*

### Возникновение математических понятий. Эмпирическая математика Древнего Востока

Темы докладов:

1. Происхождение и развитие письменной нумерации.
2. Происхождение и развитие узлового счета и письма.
3. Цифры различных времен и народов.
4. Пальцевый счет. Различные приемы умножения.
5. Техника счета древних египтян.
6. Геометрия египтян.
7. Вавилонская арифметика и алгебра.
8. Вавилонская геометрия.
9. Математика древнего Китая.
10. Математика древней Индии.
11. Математика коренных народов Америки.

Примеры исторических задач:

1. Докажите формулу древних египтян для вычисления объёма правильной усечённой пирамиды с квадратными основаниями.
2. Представьте единицу в виде суммы основных дробей египтян с разными знаменателями.

Литература.


1. Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. Физ.-мат.лит. 1959.
2. История математики с древнейших времен до начала 19 столетия/ под ред. А.П.Юшкевича.т.1.-М.:Наука,1970.
3. Кольман Э.Я. История математики в древности.М.:Физматгиз,1961.
4. Рыбников К.А. История математики. – М. 1974.
5. Цейтен Г.Г. История математики в древности и в средние века. М. 1938.
6. Раик А.Е. Две лекции о египетской и вавилонской математике. Историко-математические исследования. Вып. XII. Физ.-мат.лит. 1959.
7. Попов Г.П. Культура точного знания в древнем Перу. Изд-во «Сеятель». 1923.
8. Меннингер К. История цифр. Числа, символы, слова. М.:Полиграф. 2013.