Ю.В. Шевцова

История математики

Часть 2. Математика Древней Греции. Математика Востока.

Пособие для студентов механико-математического факультета

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Математика Древней Греции

Исторический период: 600 г. до н.э. – 5 в. н.э.

История математики в Древней Греции делится на 4 периода:

1. Ионийский и италийский период (600-450 г. до н.э.)
2. Афинский период (450-300 г. до н.э.)
3. Эллинистический период (300- 150 г. до н.э.)
4. Завершающий период (150-5 в. н.э.)

Наивысшую известность приобрели четыре философские математические школы:

1. ионийская (Фалес, VII-VI вв. до н.э.);
2. италийская (Пифагор, VI-V вв. до н.э.);
3. афинская (Платон, Аристотель, IV-III вв. до н.э.);
4. александрийская (Аполлоний, Архимед, Птолемей, Евклид, Герон, Диофант, III вв. н.э. – V в. н.э.)

Математические и философские исследования в Древней Греции были тесно связаны между собой вплоть до отождествления смысла слов философия и геометрия. Древнегреческая математика развивалась последовательно вышеупомянутыми школами, каждая из которых использовала достижения своих предшественников.

К сожалению, большая часть рукописей древнегреческих математиков и философов была уничтожена. Греческие тексты дошли до нас в виде списков и комментариев, составленных через 500-1500 лет после появления оригиналов, арабских переводов и их латинских переводов.

I. Ионийский и италийский период (эпоха Фалеса и Пифагора).

К сожалению, у нас нет первоисточников, описывающих ранний период развития греческой математики. Об этой эпохе приходится судить, основываясь лишь на небольших фрагментах, приводимых в более поздних

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

произведениях, и на отдельных замечаниях философов и других не строго математических авторов.

I.I Ионийская математика

Средиземного моря и в прилегающих к нему областях многое изменилось в экономике и политике.

Бронзовый век сменился веком железа. Уже не было царства Миноса и Хеттской державы, ослабли Египет и Вавилон и на исторической сцене появились новые народы. Наиболее выдающимися среди них были греки. Вытеснение бронзы железом сказалось в двух важных новшествах: в замене неудобного письма Древнего Востока легко доступным алфавитом и во введении чеканной монеты, что послужило оживлению торговли.

Деятельность «морских разбойников», - так египетские тексты характеризуют некоторые переселявшиеся народы, - первоначально сопровождалась немалыми культурными потерями. Критская цивилизация исчезла, египетское искусство пришло в упадок, наука Египта и Вавилонии окостенела на столетия. Мы не имеем никаких математических текстов этого периода. Когда положение снова стало устойчивым, Древний Восток оправился, оставаясь в основном верным традициям, но было расчищено место для цивилизации совсем нового склада – греческой.

Те города, которые возникли на побережьи Малой Азии и в самой Греции, уже не были административными центрами страны оросительного земледелия. Это были торговые города. Наиболее значительные из этих городов-государств сложились в **Ионии**, на анатолийском берегу. Их растущая торговля связала со всем побережьем Средиземного моря, С Двуречьем, Египтом. Долгое время ведущее место занимал **Милет**. Новый общественный уклад создал новый тип человека – купца-путешественника. Он жил в период географических открытий, кроме того, он мог пользоваться известным досугом благодаря своему богатству и труду рабов. Отсутствие вполне установившейся религии привело многих

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

обитателей этих прибрежных городов к мистицизму, но это способствовало и противоположному – росту рационализма и научному подходу.

Хотя греческая культура не была полностью свободна от внешних влияний и хотя математике в современном смысле этого слова еще предстояло пройти период созревания, то что создали греки, значительно отличалось от того, что они по крупицам собрали у своих предшественников.

Ионийская математическая школа справедливо считается родоначальницей дедуктивной математики как науки. Первые попытки дать рациональное объяснение природы и устройства Вселенной предприняли ионийские философы в 6 в до н.э. Каждый из знаменитых философов этой эпохи: Фалес, Анаксимандр, Анаксимен, Гераклит и Анаксагор – пытались объяснить устройство Вселенной, принимая за основу какую-нибудь одну субстанцию. Фантастические представления о природе ионийцы заменили рациональным подходом. Квинтэссенцию воззрений ионийцев как нельзя лучше отражают слова Анаксагора «Разум правит миром».

Согласно античному преданию Фалес положил начало процессу выделения математики в самостоятельную научную дисциплину, основанную на дедуктивном методе.

Фалес из Милета (ок. 620 -540 г. до н.э.)

Фалес из Милета принадлежит к числу «семи мудрецов» античного мира и считается отцом древнегреческой науки. В старину писатели звали Фалеса «первым» философом, «первым» физиком, «первым» математиком и астрономом. Столь почетные отличия свидетельствуют о том, что Фалес был человеком всесторонней заинтересованности, и в тех областях знаний, которыми занимался в течение всей своей жизни, сделал немало примечательных открытий.

Фалес был основателем ионийской школы философов природы и одновременно активно участвовал в политической и экономической жизни своего полиса, который на протяжении некоторого времени находился под

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

владычеством персов. Вопреки многим легендам, Фалес был человеком практическим, поддерживал оживленные отношения с Египтом, Фининкией, Вавилоном, куда вывозились ценимые древними милетские ткани. Это, в частности, служило поводом для поездок Фалеса в эти края – он был купцом. Всюду изучал опыт, накопленный жрецами, ремесленниками и мореходами, познакомился с египетской и вавилонской школами математики и астрономии.

Возратившись на родину, Фалес отошел от занятий торговлей и посвятил себя занятиям наукой – так образовалась милетская ионийская школа, из которой вышли многие знаменитые ученые. Это **Анаксимандр (ок. 610 - ок. 547 до н.э.)**, впервые высказавший мысль о бесконечности вселенной, составивший первую географическую карту с применением прямоугольной проекции; это **Анаксимен (6 в. до н.э.)**, выдвинувший гипотезу, объясняющую затмения Луны и Солнца.

Научная деятельность Фалеса была тесно связана с практикой. Во время одного из путешествий он служил у лидийского царя Креза специалистом по военной технике.

По свидетельству Геродота, Фалес предсказал полное затмение Солнца на день 28 мая 585 г. до н.э. Ему же приписывают такие астрономические открытия, как объяснение причины солнечных затмений, установление времени солнцестояний и равноденствий, определение длины года в 365 дней и ряд других.

Фалес открыл любопытный способ определения расстояния от берега до видимого корабля. Проиллюстрируем этот метод на чертеже (рис.2).

Пусть А – точка берега, В – корабль. На берегу восстанавливается перпендикуляр АС произвольной длины. Из точки С проводится перпендикуляр СД в противоположную от моря сторону. Из точки Д смотрят на корабль и фиксируют на АС точку Е – точку пересечения АС и ДВ. Тогда длина отрезка АВ во столько раз больше (или

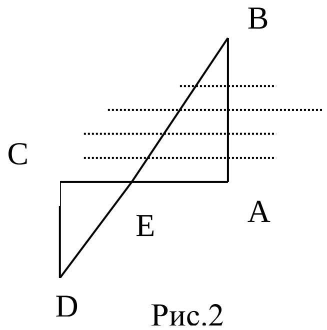

Рис.2

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г ЧЕРНЫШЕВСКОГО

меньше) длины отрезка СД, во сколько раз АЕ больше или меньше СЕ.

Другие историки (Прокл) говорит, что Фалес применил признак конгруэнтности прямоугольных треугольников, то есть точку Д выбирал так, чтобы наблюдатель Д, корабль В и середина отрезка АС лежали на одной прямой. Тогда АВ=СД.

Столь же остроумно предложил Фалес измерять высоту предметов. Став недалеко от предмета, надо дождаться, пока тень от человека не станет равной его росту. Измерив тогда длину тени предмета, можно тогда заключить, что она равна высоте предмета. Говорят, таким образом Фалес измерил высоту египетских пирамид.

Считается, что Фалес был автором следующих теорем

- теорема о пропорциональности отрезков сторон угла пересеченных параллельными прямыми;
- доказательства, что диаметр делит круг пополам;
- открытия равенства углов у основания равнобедренного треугольника;
- теоремы о равенстве вертикальных углов;
- теоремы о равенстве треугольников, у которых равны одна из сторон и прилегающие к ней углы;
- теоремы, говорящей о том, что угол, вписанный в полукруг – прямой.

Потомки Фалеса обязаны ему тем, что он, пожалуй, впервые ввел в науку *доказательство*. Строгое логическое доказательство правильности каких-либо предложений на основании общих положений, принятых за достоверные истины, было изобретено греками. Характерная и совершенно новая черта греческой математики заключается в постепенном переходе при помощи доказательства от одного предложения к другому. Именно такой характер математике был придан Фалесом. Трудно сказать, что в научном перечне принадлежит действительно Фалесу и что приписано ему потомками, восхищенными гением. Несомненно, в лице Фалеса Греция впервые обрела одновременно философа, математики и естествоиспытателя.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

I.I Италийская математика

В конце VI в. до н.э. центр философско-математических исследований переместился из Ионии в Великую Грецию – совокупность полисов-колоний на побережье Южной Италии и Сицилии. Философия италийцев была дальнейшим шагом в развитии математики и становлении античной философии. К ней принадлежали:

1. пифагорейский союз;
2. школа элеатов;
3. Эмпедокл.

Пифагорейцы. Первой научной школой, предложившей свой вариант «математизированного плана» строения Вселенной, были ***пифагорейцы***, возглавляемые **Пифагором Самосским (около 585- 500 гг. до н.э.).** Пифагорейцы жили на юге Италии. Они черпали вдохновение и заимствовали свои взгляды из религиозных представлений греков, в которых центральное место отводилось очищению души и ее освобождению от скверны и узилища тела. Пифагорейцев поразило, что весьма различные в качественном отношении явления обладают одинаковыми математическими свойствами. Значит, решили пифагорейцы, именно математические свойства отражают сущность явлений. В поисках вечных законов вселенной они изучали, геометрию, астрономию и музыку («квадривий»). Самым выдающимся их представителем был **Архит из Тарента**, который жил около 400 г. до н.э. Арифметика пифагорейцев была в высшей степени спекулятивной наукой и имела мало общего с современной ей вычислительной техникой Вавилона.

Сам Пифагор был одной из самых влиятельных и тем не менее загадочных фигур в математике. Поскольку достоверных сообщений о его жизни не сохранилось, она оказалась окутанной мифами и легендами, и историкам бывает трудно отделить правду от вымысла. Благодаря его гению, числа перестали использоваться только для счета и вычислений и были

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

впервые оценены по достоинству. Пифагор изучал свойства определенных классов чисел, соотношения между ними и фигуры, которые образуют числа. Пифагор понял, что числа существуют независимо от материального мира, и поэтому на изучении чисел не сказывается неточность наших органов чувств. Это означало возможность открывать истины, независимые от чьего-либо мнения или предрассудка

Свои знания и умения Пифагор приобрел, странствуя по Древнему миру. По некоторым преданиям он побывал в Индии и Британии, но по более достоверным сведениям, он перенял многие математические методы и средства у вавилонян.

После двадцати лет странствий Пифагор собрал и усвоил математические правила существовавшие в цивилизованном мире и отплыл на родину – остров Самос в Эгейском море – с намерением основать школу, члены которой занимались бы изучением философии и в особенности исследованием собранных им правил. Пифагор хотел понять числа, а не только вслепую пользоваться ими. Он надеялся, что ему удастся найти достаточное количество свободно мыслящих учеников, которые помогут ему создать радикально новую философию, но за время его отсутствия тиран Поликрат превратил некогда вольный Самос в нетерпимое консервативное общество. Поликрат пригласил Пифагора ко двору, но философ понимал, что это был не более чем маневр с целью заставить его замолчать, и под благовидным предлогом отклонил предложенную честь. Пифагор покинул город и поселился в пещере, расположенной в отдаленной части острова, где он мог свободно предаваться размышлениям, не опасаясь преследований.

Пифагор был настолько одинок, что в конце концов был вынужден подкупить юношу, чтобы тот согласился стать его учеником. Кем был этот юноша, неизвестно, но некоторые историке высказывают предположение, что его также звали Пифагором и что позднее именно он прославился тем, что посоветовал атлетам есть мясо, чтобы улучшить свои спортивные результаты. Пифагор-учитель платил по три обола за каждый урок, который

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

тот посещал. По прошествии нескольких недель он заметил, что упорное нежелание юноши учиться превратилось в любовь к знанию. Чтобы испытать своего ученика, Пифагор сделал вид, что не в состоянии платить ему и что уроки придется прекратить. В ответ ученик преложил сам оплачивать уроки, но просил покинуть колонию.

Пифагор отправился в южную Италию, бывшую тогда частью Древней Греции, и поселился в Кротоне, где ему посчастливилось найти идеального покровителя в лице Мило, самого богатого человека в Кротоне и одного из сильнейших людей в истории. Хотя слава Пифагора как мудреца с острова Самос распространилась по всей Греции, слава Мило была еще больше. Мило был сложен, как Геркулес, и двенадцать раз завоевывал титул чемпиона Олимпийских и Пифийских игр. Помимо занятий атлетикой Мило высоко ценил философию и математику и занимался их изучением. Он предоставил Пифагору достаточно большую часть своего дома для того, чтобы тот мог основать школу. Так самый творчески мысливший разум и самое мощное тело стали партнерами.

Чувствуя себя в безопасности в своем новом доме, Пифагор основал *пифагорейское братство* – группу из шестисот последователей, способных не только понять его учения, но и добавить к ним новые идеи и доказательства. Вступая в братство, каждый последователь Пифагора должен был жертвовать в общий фонд все свое состояние. Каждый, кто покидал братство, получал сумму вдвое большую, чем первоначальное пожертвование, и в память о нем воздвигалась надгробная плита. Пифагорейское братство было элитной школой, и среди учащихся были не только мужчины, но и женщины. Любимой ученицей Пифагора была дочь Мило – прекрасная Теано.

Вскоре после основания братства Пифагор придумал слово «философ» и тем самым провозгласил цели школы.

Достоверно известно, что Пифагор установил этос, изменивший ход развития математики. По существу пифагорейское братство было

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

религиозным сообществом, и одним из идолов, которым поклонялись пифагорейцы, было Число. Пифагорейцы считали, что все тела состоят из фундаментальных частиц –«единиц бытия», которые в тех или иных комбинациях соответствуют различным геометрическим фигурам. В сумме эти единицы представляют материальный объект. Число было материей и формой Вселенной. Отсюда и основной тезис пифагорейцев: «Все есть число». А поскольку число выражало сущность всего, то объяснять явления следовало только с помощью чисел.

Учение пифагорейцев может показаться странным, так как для нас числа – абстрактные понятия, а вещи – материальные или физические объекты. Привычное для нас понятие числа возникло в результате абстрагирования – а ранним пифагорейцам абстракция была чужда. Для них числа были точками или частицами. Говоря о *треугольных, квадратных, пятиугольных числах*, которые мы сегодня называем фигурными, пифагорейцы имели в виду наборы точек, камешков и других мелких предметов, расположенных в форме треугольников, квадратов и других геометрических фигур.

Хотя дошедшие до нас фрагменты исторических документов не позволяют установить точную хронологию событий, не вызывает сомнения, что пифагорейцы, развив и усовершенствовав свои учения, начали рассматривать числа как абстрактные понятия, а объекты – как конкретные реализации чисел. Именно в смысле такого позднего различия, по-видимому надлежит рассматривать высказывание пифагорейца **Филолая**: «Если бы ни число и его природа, ничто существующее нельзя было бы постичь ни само по себе, ни в его отношении к другим вещам… Мощь чисел проявляется, как нетрудно заметить … во всех деяниях и помыслах людей, во всех ремеслах и музыке.»

Свести музыку к простым отношениям чисел пифагорейцам удалось после того, как они совершили два открытия:

- высота тона, издаваемого колеблемой струной, зависит от ее длины;

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

- гармонические созвучия издают одинаково натянутые струны, длины которых относятся между собой как целые числа.

На современном языке интервал между тонами, издаваемыми двумя струнами, длины которых относятся как 1:2, называется *октавой*. Другое гармоническое созвучие издают две струны, длины которых относятся как 3:2. В этом случае более короткая струна издает ноту, которая на квинту выше тона, издаваемого более длинной струной. Пифагорейцы разработали музыкальную шкалу. Многие греческие математики, в том числе Евклид и Птолемей, посвятили музыке, в частности гармоническим созвучиям и построению музыкальной шкалы, специальные сочинения.

Движения планет пифагорейцы также свели к числовым отношениям. Они считали, что тела, двигаясь в пространстве, издают звуки. Согласно астрономическим воззрениям пифагорейцев, планеты движутся тем быстрее, чем дальше они находятся от Земли. Звуки, издаваемые планетами, изменяются в зависимости удаления от Земли и образуют гармоническое созвучие. Но эта «музыка сфер», подобно всякой гармонии, сводится к числовым отношениям, поэтому и движения планет также сводятся к числовым отношениям. Мы не слышим музыку небесных сфер потому, что привыкли к ней с самого рождения.

Другие явления природы также были сведены пифагорейцами к числам. Особую роль в учении пифагорейцев играли числа 1, 2, 3, 4, образовывавшие тетрактис, или четверицу. Пифагорейцы считали, что все объекты в природе состоят из четверок, таких как четыре геометрических элемента: точка, линия, поверхность и тело. Впоследствии Платон придавал особое значение четверке материальных элементов: земле, воздуху, огню и воде.

Сумма чисел, входящих в тетрактис, равна десяти, поэтому десять считалось идеальным числом и символизировало Вселенную. А поскольку число 10 идеально, то в небесах должно быть ровно 10 тел. Поэтому пифагорейцы ввели центральный огонь, вокруг которого вращаются Земля, Солнце, Луна и пять известных в древности планет, а также Противоземля,

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

расположенная по другую сторону от центрального огня. Центральный огонь и противоземля невидимы, потому что поверхность Земли, на которой мы живем, скрывает их от нас.

После того как пифагорейцы «свели» астрономию и музыку к числу, астрономия и музыка оказались связанными с арифметикой и геометрией и все четыре дисциплины стали считаться математическими. Они вошли в программу общего образования, причем это положение сохранилось вплоть до средневековья. В средние века комплекс общеобразовательных дисциплин, состоящий из арифметики, геометрии, музыки и астрономии, получил название *квадривиум.*

Особое внимание члены братства уделяли натуральным числам и дробям. Среди бесконечного множества чисел пифагорейцы высматривали те, которые имеют особое значение. Среди наиболее значимых были так называемые «совершенные» числа.

По мнению пифагорейцев, совершенство числа зависит от его делителей (т.е. тех чисел, которые делят без остатка исходное число). Например, делителями числа 12 являются 1,2,3,4,6. Если сумма делителей числа больше самого числа, то такое число называется «избыточным», если меньше – «дефектным», а вот если сумма делителей в точности равна самому числу – «совершенным».

Совершенными являются числа 6 и 28. Совершенный характер этих чисел был признан и другими культурами, обратившими внимание на то, что Луна совершает оборот вокруг Земли каждые 28 дней, и утверждавшими, что Бог сотворил мир за шесть дней. Третье совершенное число 496, четвертое – 8128. Пифагорейцы заметили, что совершенное число всегда равно сумме нескольких последовательных натуральных чисел. (496=1+…31, 8128=1+…127).

Пифагорейцам были известны некоторые свойства правильных многоугольников и правильных многогранников.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Они показали, как заполнить плоскость системой правильных треугольников, или квадратов, или правильных шестиугольников, а пространство – системой кубов. Впоследствии Аристотель пытался дополнить это неверным утверждением, что пространство можно заполнить правильными тетраэдрами. Возможно, что пифагорейцы знали правильный октаэдр и додекаэдр.

Что касается теоремы Пифагора, пифагорейцы приписывали ее своему наставнику и передавили, что он принес в жертву богам сто быков в знак благодарности.

Уделом истины не может быть забвенье,
Как только мир увидит ее взор;
И теорема та, что дал нам Пифагор,
Верна теперь как в день ее рожденья.

За светлый луч с небес вознес благодаренье
Мудрец богам не так, что было до тех пор:
Ведь целых сто быков послал он под топор,
Чтоб их сожгли, как жертвоприношенье.

Быки с тех пор, как только весть услышат,
Что новой истины уже следы видны,
Отчаянно мычат и ужасом полны:

Им Пифагор навек внушил тревогу.
Не в силах преградить той истине дорогу,
Они, закрыв глаза, дрожат и еле дышат.

Альберт фон Шамиссо

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Наиболее важным из приписываемых пифагорейцам открытий было открытие иррационального в виде несоизмеримых отрезков прямой линии. Возможно, что оно было сделано в связи с исследованием геометрического среднего $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, величиной, которая интересовала пифагорейцев и служила символом аристократии. Чему равно геометрическое среднее двух священных символов единицы и двойки? Это вело к изучению отношения сторон и диагонали квадрата, и было обнаружено, что такое отношение не выражается «числом», то есть тем, что мы теперь называем рациональным числом, а только такие числа допускались пифагорейской арифметикой. Вокруг этого открытия выросло много легенд и более или менее правдоподобных предположений. Все же можно сказать, что теорема о несоизмеримых отрезках привела к расколу среди пифагорейцев из-за того, что это открытие скрывалось в тайне. Одни требовали свободного обмена информацией, явности результатов исследований, - другие, наоборот, стремились к сохранению их в тайне. Разглашение тайны о несоизмеримости катета и гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника приписывается **Гиппасу** из Метапонта. Это привело к разрыву со школой пифагорейцев и изгнанию Гиппаса. Позднее, когда он погиб во время кораблекрушения, его противники утверждали, что это было наказанием за совершенное им осквернение святыни.

Пифагорейский союз был разгромлен в середине 5 в. до н.э. Спустя сто лет после этого события продолжали существовать различные группы пифагорейцев, и каковы были их взаимоотношения между собой и сектами математиков и акузматиков (от слова «акузмата» - священные изречения) неизвестно.

Выводы

Натурфилософию пифагорейцев лишь с большой натяжкой можно назвать состоятельной. Пифагорейцам не удалось сколько-нибудь

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

существенно продвинуть ни одну из областей физической науки. **Тем не менее им удалось сформулировать два тезиса, общезначимость которых подтвердило все последующее развитие науки:**

1. основополагающие принципы, на которых зиждется мироздание, можно выразить на языке математики.
2. объединяющим началом всех вещей служат числовые отношения, которые выражают гармонию и порядок природы.

Современная наука разделяет пифагорейскую приверженность числу, хотя, как мы увидим далее, современные теории представляют собой более искусную форму пифагореизма.

Элеаты. Философская школа элеатов, как и пифагорейский союз, возникла в Элладе, в городе-полисе Элея. Главные представители этой школы – Ксенофан, Парменид, Зенон и Мелисс. Хотя элеаты (V в. до н.э.) строили свои рассуждения не на математической, а на физической сущности мироздания, вклад их в развитие математики благодаря знаменитым *апориям Зенона* велик.

Зенон (ок. 490 –ок. 430 до н.э.) – любимый ученик и последователь Парменида. В Афинах давал уроки Периклу. Аристотель назвал Зенона изобретателем диалектики. Апории Зенона чрезвычайно глубоки. До нас дошли 9 из 45 его апорий, из которых общеизвестны четыре:

- дихотомия (от греч. $\delta\iota'\chi\alpha$ - на две части и $\tau o\mu\eta'$ - сечение)
- Ахиллес и черепаха
- стрела
- стадион.

Зенон пытался остроумно доказать истинность остро критиковавшегося учения Парменида о невозможности движения и множественности вещей. При этом он пользовался *методом непрямого доказательства*: он доказывал, что принятие опыта, множественности, движения и делимости приводит к неразрешимым противоречиям.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Остановимся на некоторых из апорий.

1. Дихотомия. В этой апории Зенон утверждает, что движение невозможно, ибо до того, как движущееся тело пройдет расстояние от точки A до точки B, оно должно пройти $\frac{1}{2}$ этого расстояния, затем $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,… его, но последовательность этих отрезков бесконечна, значит, точка B никогда не будет достигнута. Апория состоит в том, что сумма бесконечного множества слагаемых конечна.
2. Ахиллес и черепаха. Быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепахи, если она находится впереди него даже на малом расстоянии. Доказательство сводится к следующему: пусть Ахиллес бежит в n раз быстрее черепахи и пусть их разделяет расстояние d. Когда Ахиллес пройдет это расстояние, одновременно с ним начавшая движение черепаха отойдет на $\frac{d}{n}$; когда Ахиллес покроет и это расстояние, черепаха будет находиться впереди него на расстоянии $\frac{d}{n^2}$ и т.д. Т.о. между Ахиллесом и черепахой всегда будет оставаться определенное расстояние.
3. Стрела. Движение летящей стрелы невозможно ввиду того, что в каждый неделимый момент времени она покоится, а промежуток времени является суммой бесконечного числа неделимых моментов. Затруднение состоит в том, что если время складывается из неделимых моментов, в каждом из которых тело покоится (иначе неделимое подразделялось бы на части, соответствующие различным положениям тела), то и в итоге не можем получить движения. К такому же выводу приводит и четвертая апория движения «Стадион».

На нематематическом языке Зенон впервые указал на внутреннюю противоречивость понятий непрерывного и дискретного, конечного и бесконечного.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Философия **Эмпедокла (ок. 490 – ок. 430 до н.э.),** последнего представителя италийской философии, сочетает в себе италийскую и ионическую традиции. Учителя Эмпедокла – пифагорейцы и элеаты Ксенофан и Парменид. Он – современник Филолая и Зенона – сочетал в себе искусство оратора, ритора, врача, инженера, поэта, философа.

За начало всего сущего Эмпедокл принимал все четыре стихии: землю, воздух, воду, огонь. Гениальная догадка Эмпедокла – конечность скорости света. За тысячелетия был предсказан основной постулат теории относительности.

II. Афинский период.

От афинского периода дошел лишь один цельный математический фрагмент, принадлежавший ионийскому философу **Гиппократу из Хиоса** (2-ая пол. 5 в. до н.э.). Математические рассуждения в этом фрагменте на весьма высоком уровне, и достаточно типично то, что в нем рассматривается совсем «непрактический», но теоретический вопрос о так называемых луночках – плоских фигурах, ограниченных двумя круговыми дугами.

Этот вопрос – найти площадь таких луночек, у которых площадь рационально выражается через диаметр, - имеет прямое отношение к центральной проблеме греческой математики – квадратуре круга. Анализ этой проблемы у Гиппократа показывает, что у математиков золотого века Греции была упорядоченная система плоской геометрии, в которой в полном объеме применялся принцип логического заключения от одного утверждения к другому. Гиппократ был автором первого систематического сочинения по геометрии (не дошедшего до нас). Были заложены основы аксиоматики, на что указывает название книги «Начала» - название всех греческих аксиоматических трактатов, включая трактат Евклида. Гиппократ исследовал площади плоских фигур, ограниченных как прямыми линиями, так и дугами окружности. Ему была известна теорема Пифагора, а также соответствующее неравенство для непрямоугольных треугольников.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

В этот период времени стали предметом исследования так называемые «три классические задачи на построение» или **«три знаменитые проблемы античности»**. Эти проблемы таковы:

1) Удвоение куба.

2) Трисекция угла.

3) Квадратура круга

Удвоение куба. Исторический очерк.

О возникновении задачи удвоения куба сохранилась следующая легенда: «… во время эпидемии чумы послали афиняне в Дельфы просить оракула, что им сделать, чтоб чума прекратилась. Бог ответил им: удвоить алтарь и принести на нем жертвы. А так как алтарь был кубической формы, они взгромоздили на него еще один такой же куб, думая тем исполнить повеление оракула. Когда же чума после этого не прекратилась, отправились они к Платону и спросили, что же теперь делать. Тот отвечал: «Сердится на вас бог за незнание геометрии», - и объяснил, что следовало подразумевать здесь не простое удвоение, но найти некое среднее пропорциональное и произвести удвоение с его помощью; и как только они это сделали, чума тотчас же кончилась». Эта легенда значительно поздняя; в ней многое искажено: задачей удвоения куба Гиппократ Хиосский занимался задолго до Платона. Но эту легенду сохранило несколько источников. В ней много интересного: для древних греков совсем не чуждым было мнение, что боги могут гневаться за незнание геометрии.

Гиппократ Хиосский переформулировал проблему так: «По отрезкам а и 2а построить такие отрезки х и у, что а:х=х:у=у:2а». В самом деле, тогда $x^3 = 2a^3$. Эта переформулировка была существенна. Алгебра возникла значительно позже, и древнегреческие математики произведение двух отрезков представляли как прямоугольник; для сложения двух произведений отрезков приходилось преобразовывать прямоугольники в равновеликие им прямоугольники с общей стороной, чтобы их можно было прикладывать друг

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

к другу. Произведение трех отрезков приходилось рассматривать как параллелепипед. Преобразовывать параллелепипеды было уже сложно, но замечание Гиппократа позволяло работать с отношениями отрезков. В дальнейшем все решали задачу именно в формулировке Гиппократа.

По разным причинам древнегреческие математики при построениях циркуль и линейку предпочитали всем другим инструментам. Здесь, впрочем, нужно сделать уточнение. Ни о циркуле, ни о линейке в их сочинениях речи нет; говорится лишь о «построениях посредством прямых и окружностей». В Греции циркуль был изобретен в X веке до н.э. в связи с потребностями керамического производства. В это время широкое распространение получил геометрический стиль, и циркуль был нужен для изображения на керамике концентрических окружностей.

Греческая мифология связывает изобретение циркуля с именем Талоса (согласно другим источникам Пердикса), племянника Дедала. О Талосе пишет древнегреческий историк Диодор Сицилийский (I в. до н.э.): «Точно так же, изобретя циркуль и некоторые другие технические приспособления, он достиг большой славы». Римский писатель Гигин сообщает «Пердикс, сын сестры Дедала, изобрел циркуль и пилу из рыбьего хвоста». Об этом изобретении двенадцатилетнего мальчика упоминает Овидий в поэме «Метаморфозы»:

Первый железным узлом два железных конца съединил он,
Чтобы, когда друг от друга они в расстоянии равном,
Часть стояла одна, другая же круг обводила.

Скорее всего, древнегреческие математики достаточно быстро поняли, что задачу удвоения куба нельзя решить с помощью циркуля и линейки, хотя доказать они этого не могли и, по-видимому, даже не пытались. По поводу того, чем помимо циркуля и линейки можно пользоваться при построениях, у них были различные мнения. Первое решение задачи удвоения куба, полученное Архитом, трудно даже назвать построением. Он получил

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

решение как пересечение цилиндра, конуса и тора. Ни о какой практической реализации такого решения не могло быть и речи. Несколько более позднее решение Менехма было уже в некотором смысле оптимальным: он находил решение как пересечение двух конических сечений. Оптимальным это решение было в следующем смысле. На последнем этапе развития древнегреческой математики сложилась следующая классификация задач на построение, изложенная александрийским математиком Паппом:

1) плоские задачи (решаемые с помощью прямых и окружностей, т.е. с помощью циркуля и линейки);
2) пространственные задачи (решаемые с помощью конических сечений);
3) граммические задачи, решаемые с помощью других, более сложных кривых линий ($\gamma\rho\alpha\mu\mu\eta$ - линия).

Классификация Папа неполная. Она не включает построения, использующие специальные инструменты.

Трисекция угла. Исторический очерк.

О возникновении задачи трисекции угла никаких интересных легенд нет. По-видимому, она появилась внутри самой математики в связи с решением задачи о построении правильных многоугольников. Попытки построить правильный девятиугольник приводит к задаче трисекции угла, потому что для построения нужно было построить угол $360^\circ/9 = 120^\circ/3$, т.е. разделить угол в 120 градусов на три равные части.

По классификации Папа задача трисекции угла относится к «пространственным построениям». Для деления угла в произвольном заданном отношении нужны более сложные кривые.

Квадратура круга. Исторический очерк.

Задача построения квадрата, равновеликого данному кругу, в Древней Греции была очень популярна. Плутарх сообщает, что Анаксагор в тюрьме

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

занимался этой задачей. О ней говорится и в комедии Аристофана «Птицы». Упоминание в комедии говорит о том, что задача была широко известна.

Странным образом задача квадратуры круга и обратная ей задача «кругатуры квадрата», т.е. построения круга, равновеликого данному квадрату, была известна также и Древней Индии. Индийские алтари были самой разной формы: в виде квадрата, круга, полукруга, сокола, черепахи, но все они должны были иметь одну и ту же площадь.

Наиболее ранние дошедшие до нас древнегреческие решения задачи квадратуры круга на первый взгляд кажутся просто глупостью. Афинянин Антифонт вписывал в круг многоугольник, затем делил дуги пополам и строил вписанный многоугольник с удвоенным числом сторон и т.д. Он думал, что в результате получится многоугольник, который благодаря крайней малости своих сторон совпадет с окружностью. Бризон взял квадрат, вписанный в круг, и квадрат, описанный вокруг круга, а затем взял квадрат лежащий между ними. Он утверждал, что площадь последнего квадрата равна площади круга. В этих рассуждениях много неточного, но есть кое-что и важное: созданный впоследствии метод исчерпывания много у них перенял. Архимед при вычислении числа π использовал как идею Антифонта, так и идею Бризона. Сам Архимед использовал для решения этой задачи спираль.

Более поздних философов, пришедших на смену пифагорейцам не в меньшей степени интересовали природа реальности и математический план лежащий в их основе. Самой влиятельной после пифагорейцев группой мыслителей, расширивших и распространивших учение о математическом плане, лежащем в основе природы, были **платоники**, возглавляемые **Платоном Афинским**. Хотя Платон (427-347 гг. до н.э.) и заимствовал некоторые фрагменты учения пифагорейцев, в 4 в. он был ведущей фигурой духовной жизни Греции. Платон основал в Афинах Академию – центр,

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

который привлек к себе ведущих мыслителей его времени и существовал в течение 9 столетий.

Платон утверждал, что реальность и рациональность физического мира могут быть постигнуты только с помощью математики идеального мира. То, что идеальный мир устроен на математических началах, не вызывало сомнений. Плутарх приводит знаменитое изречение Платона: «Бог всегда является геометром.» Математические законы платоники считали не только сущностью реальности, но и вечными и неизменными. Числовые отношения также были частью реальности, а скоплениям вещей отводилась роль подобия чисел.

Платон пошел дальше пифагорейцев в том, что **хотел не только понять природу с помощью математики, но и заменить математикой природу.** Он считал, что более проницательный взгляд на физический мир дал бы возможность открыть основные истины, которые позволили бы разуму уже самостоятельно достроить все остальное. С момента обнаружения первичных истин дальнейшее было бы чистой математикой. Математика бы заменила физическое исследование.

В «Жизни Марцелла» Плутарх сообщает, что знаменитые современники Платона Архит и Евдокс использовали физические соображения для доказательства математических истин. Но Платон с негодованием отвергал такие доказательства как подрывающие основы геометрии, ибо они построены не на чистых рассуждениях, а на чувственных восприятиях.

С Академией Платона связаны по меньшей мере три больших математика – **Архит, Теэтет, Евдокс.** Теэтету приписывают теорию иррациональных, которая изложена в десятой книге Евклида. Имя Евдокса связано с теорией отношений – пятая книга Евклида, а также с так называемым методом исчерпывания, который позволил строго проводить вычисление площадей и объемов. Это говорит о том, что именно Евдокс преодолел «кризис» в греческой математике и что его строгие формулировки

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

помогли определить направление развития греческой аксиоматики и всей греческой математики.

Евдоксова теория отношений покончила с арифметической теорией пифагорейцев, применимой только к соизмеримым величинам. Это была строго геометрическая теория, изложенная в строгой аксиоматической форме. Современная теория иррационального числа, построенная Дедекиндом и Вейерштрассом, почти полностью следует ходу мыслей Евдокса, но она открывает более широкие перспективы благодаря использованию современных математических методов. Евдокс решил проблему несоизмеримых следующим образом: длины, углы, площади и объемы, величины которых, если выразить их численно – могли оказаться иррациональными, следует трактовать *геометрически*. Это направление в развитии математики получило название *геометрической алгебры.* Превращение всей греческой математики в геометрию привело к ряду важных последствий. Это усилило разрыв между теорией чисел и геометрией, ибо несоизмеримые величины (иррациональные числа) – арифметике были «неподсудны» . А поскольку геометрия охватывала значительную часть математики, то она стала до 17 в. основой почти всей строгой математики. Мы до сих пор называем «икс квадратом» и «икс кубом», а не «икс во второй» или «икс в третьей степени», потому что некогда под ними понимался лишь геометрический смысл.

«Метод исчерпывания» (сам термин впервые встречается у Сен Венсана в 1647 г.) был ответом школы Платона Зенону. Метод обходил все ловушки бесконечно малого, попросту устраняя их. Например, если требовалось доказать, что объем V тетраэдра равен одной трети объема С призмы с тем же основанием и той же высотой, то доказательство состояло в том, чтобы показать абсурдность как допущения, что $V > \frac{1}{3}P$, так и допущения, что $V > \frac{1}{3}P$. Для этого была введена аксиома, известная теперь как аксиома Архимеда. Она лежит в основе теории отношений Евдокса, а

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

именно: «о тех величинах говорят, что они находятся в некотором отношении одна к другой, которые могут, будучи умножены, превзойти одна другую». Этот метод, который у греков стал стандартным методом точного доказательства при вычислении площадей и объемов, был вполне строг.

Большим недостатком этого метода было то, что надо было заранее знать результат, чтобы его доказать, так что математик должен был сперва прийти к результату менее строгим путем, с помощью проб и ошибок.

Совершенно иную концепцию изучения реального мира и отношения математики к реальность развил **Аристотель.** Основополагающими в схеме Аристотеля были физические науки. Математике отводилась вспомогательная роль в изучении природы при описании таких внешних свойств, как форма и размеры. Кроме того, математика помогала объяснять причины тех явлений, которые можно наблюдать в материальном мире. Так, геометрия может помочь в объяснении наблюдений из области оптики и астрономии, а арифметические пропорции могут служить основой гармонии. Но математические понятия и принципы заведомо являются абстракциями, корни которых уходят в реальный мир. Поскольку они абстрагированы от реального мира, то они применимы к нему.

Даже нашего беглого обзора взглядов тех философов, которые сформировали духовный мир греков, достаточно, чтобы понять главное: **все они подчеркивали необходимость изучения природы для понимания и оценки лежащей в основе всего сущего реальности.** Кроме того, со времен пифагорейцев почти все философы утверждали, что **природа устроена на математических основах.** К концу классического периода окончательно сформировалось учение о природе, основанной на математических принципах, и начался планомерный поиск математических законов. Это учение оказало влияние на величайших математиков, в том числе и на тех, кто непосредственно не разделял его.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Греки исполнились решимости доискаться до истин и, в частности до истин о математических основах природы. Как следует приступить к поиску истин и как при этом гарантировать, что поиск действительно приведет к истинам? Греки предложили «план» такого поиска. Хотя он создавался постепенно на протяжении нескольких веков и историки науки расходятся во мнениях относительно того, когда и кем он был впервые задуман, к 3 веку до н.э. план поиска истин был доведен до совершенства.

Первые принцип, которого неуклонно придерживались греки, состоял в том, что **математика должна иметь дело с абстракциями.** Чтобы обрести мощь, математика должна охватывать в едином абстрактном понятии существенные черты всех физических реализаций этого понятия. Так, математическая прямая должна отражать наиболее существенные особенности натянутых нитей, краев линеек, границ сельскохозяйственных угодий и траекторий лучей света. Математическая прямая, следовательно, не должна иметь толщину, свет, молекулярную структуру или испытывать натяжение. В «Государстве» Платон говорит о геометрах: «в действительности геометры стремятся постичь то, что открыто лишь мысленному взору».

Итак, математика должна заниматься прежде всего изучением таких абстрактных понятий, как точка, прямая и целое число. Другие понятия, например, треугольник, квадрат и окружность, можно определить через основные понятия, которые, как отметил Аристотель, должны оставаться неопределимыми, ибо в противном случае у нас не было бы отправной точки. О степени изощренности греческой математики можно судить хотя бы по тому, что определяемые понятия должны были иметь аналоги в реальности либо по доказанному, либо по построению. Так, нельзя было ввести в рассмотрение трисектор угла и доказывать о нем теоремы: трисектор мог бы и не существовать. И так как грекам не удалось решить задачу о трисекции любого угла при требуемых ограничениях, то они так и не ввели понятия трисектора.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Второе. Свои рассуждения о математических понятиях греки начинали с *аксиом* – истин столь очевидных, что в справедливости их невозможно усомниться. Платон обосновал принятие аксиом своей теорией воспоминаний. Пробуждаемая к воспоминаниям, душа восстанавливает накопленные ранее впечатления, чтобы признать истинность аксиом геометрии. Никакой земной опыт ей не требуется. Аристотель подошел к проблеме иначе. Истинность аксиом мы познаем посредством безошибочной интуиции. Кроме того, аксиомы нам необходимы как основа для рассуждений. Если бы при рассуждении мы использовали факты, истинность которых нам не известна, то для установления их истинности нам потребовались бы новые рассуждения и так до бесконечности. В результате мы бы бесконечно спускались в наших доказательствах и нигде бы не останавливались.

Среди аксиом Аристотель различал **общие понятия и постулаты.** Общие понятия истинны во всех областях мысли. К их числу относятся такие утверждения, как «если от равного отнять равные части, то остаются равные же части». Постулаты же применимы к такой специфической области, как геометрия. Например, «две разные точки определяют прямую и притом только одну». Математики требовали самоочевидности постулатов.

Третье. Из аксиом с помощью рассуждений выводятся заключения. Существует много видов рассуждений, например рассуждения по индукции, по аналогии и дедукции. Правильность заключения гарантирует лишь один из многих видов рассуждений. Заключение « Все яблоки красные», сделанное на основании того, что тысяча просмотренных яблок оказались красными, индуктивно и не абсолютно надежно. Заключение «Джон сможет закончить этот колледж», сделанное на основании того, что его брат закончил этот колледж, получено с помощью рассуждений по аналогии и заведомо ненадежно. С другой стороны дедуктивное рассуждение, несмотря на множество различных форм, гарантирует истинность заключения. Так, допуская, что все люди смертны и Сократ – человек, следует прийти к

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

заключению, что Сократ смертен. Используемое в этом рассуждении правило логики является одной из форм суждения, которое Аристотель назвал *силлогистическим выводом.* К правилам дедуктивного рассуждения Аристотель относил также закон противоречия (никакое высказывание не может одновременно быть и истинным, и ложным) и закон исключенного третьего (каждое высказывание должно быть или истинным или ложным).

Аристотель, а вслед за ним и весь мир приняли неоспоримую истину, что применение правил дедуктивного вывода к любым посылкам гарантирует получение заключений, не уступающих в надежности посылкам. Иначе говоря, если посылки истинны, истинны и заключения.

Хотя почти все греческие философы считали дедуктивный вывод единственно надежным методом получения истины, Платон придерживался иных взглядов. Не выдвигая возражения против дедуктивных выводов, он тем не менее считал, его поверхностным, поскольку аксиомы и теоремы существуют в некоем объективном, независимом от человека мире, и в соответствии с учением об анамнезисе, необходимо лишь вспомнить эти аксиомы. Теоремы подобны птицам в птичнике. Они существуют сами по себе и необходимо лишь «схватить» их. В диалоге «Менон» Сократ с помощью искусно заданных вопросов вытягивает из раба утверждение, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, вдвое больше площади квадрата, построенного на любом из катетов. Сократ торжествующе заключает, что искусно заданные вопросы помогли рабу, никогда не изучавшему геометрию, вспомнить теорему.

Важно правильно оценивать, *сколь радикальной была приверженность дедуктивному доказательству,* хотя не вполне ясно, кто из философов или какая группа мыслителей впервые продемонстрировала эту приверженность. Наши знания учений и трудов философов до Сократа, к сожалению, носят фрагментарный характер. Мы можем лишь утверждать, что во времена Аристотеля требование дедуктивности соблюдалось неукоснительно.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

III. Эллинистический период.

Действующие лица: Евклид, Архимед, Аполлоний

Историческая характеристика. В 334 г. до н.э. Александр Македонский начал завоевание Персии. В 323 г, когда он умер, весь Ближний Восток был в руках греков. Полководцы Александра разделили между собой его завоевания, и со временем возникли три его империи: Египет, под властью Птолемеев, Месопотамия и Сирия, под властью Селевкидов, Македония, под властью Антигона и его приемников. Даже в долине Инда были греческие князья. Началась эпоха эллинизма.

Прямым последствием похода Александра было то, что ускорилось проникновение греческой цивилизации в обширные районы восточного мира. Так и греческая математика была пересажена в новую среду. Она сохранила многие свои прежние особенности, но испытала влияние тех административных и астрономических запросов, которые выдвигал Восток. Такое соприкосновение греческой науки с Востоком оказалось исключительно плодотворным. Фактически вся действительно творческая работа была проделана за сравнительно короткий срок от 350 до 200 г. до н.э. от Евдокса до Аполлония. Замечательно также, что наибольшего расцвета

эллинистическая математика достигла в Египте Птолемеев, а не в Месопотамии. Возможно это было обусловлено центральным положением Египта той эпохи в средиземноморском мире. Его новая столица, Александрия, построенная на берегу моря, стала центром эллинистического мира. Однако коренная вавилонская астрономия и математика как раз при Селевкидах достигли своей высшей точки. Кроме Александрии, другими научными центрами были Афины и Сиракузы.

Особую известность приобрел Александрийский музей, основанный Птолемеем Сотером. Музей стал родным домом ученых, его библиотека насчитывала около 400 тыс томов. Поскольку ее хранилища не могли вместить все рукописи, еще 300 тыс. томов было сохранено в храме

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Сераписа. Ученые не только проводили исследования, но и занимались с учениками.

Одним из первых связанных с Александрией ученых был **Евклид.** Он жил во времена первого Птолемея (306-283), которому, согласно преданию, он заявил, что к геометрии «нет царского пути». Его наиболее знаменитое произведение - тринадцать книг его «Начал», но ему приписывают и несколько других меньших трудов. Это первые математические произведения, которые дошли до нас от древних греков полностью.

Изложение Евклида построено в виде строго логических выводов теорем их системы определений, постулатов и аксиом.

Книги 1-4: рассматривается геометрия на плоскости

Книга 5: евдоксова теория несоизмеримых

Книга 6: теория Евдокса применена к подобию треугольников

Книги 11-13: геометрия в пространстве: от телесных углов, объемов параллелепипедов, призм и пирамид до шара и до того, что по замыслу должно венчать весь труд: исследование пяти правильных «платоновых» тел и доказательства, что их существует только пять.

Книги 7-9: теория чисел: вопросы делимости, суммирование геометрических прогрессий, свойства простых чисел. Алгоритм Евклида для определения НОД заданной системы чисел, теорема Евклида о том, что простых чисел бесконечно много. Особый интерес вызывает теорема, в которой доказывается что из прямоугольников заданного периметра наибольшую площадь имеет квадрат – первая дошедшая до нас задача на максимум.

Какую цель ставил Евклид, когда писал «Начала»? Он хотел совместно изложить три великих открытия недавнего времени: теорию отношений Евдокса, теорию иррациональных Теэтета и теорию пяти правильных тел Платона.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Величайшим математиком эпохи эллинизма и всего древнего мира был **Архимед** (287-212), живший в Сиракузах, где он был советником царя Гиерона. Сохранились некоторые сведения о его жизни и творчестве. Наиболее важный вклад Архимеда в математику относится к той области, которую мы теперь называем интегральным исчислением: теоремы о площадях плоских фигур и объемах тел. В «измерениях круга» он нашел приближенное выражение для окружности, пользуясь вписанными и описанными многоугольниками. Дойдя в этом приближении до многоугольников с 96 сторонами, он нашел, что $3{,}1409 < \pi < 3{,}1419$. Обычно об этом сообщают, говоря, что π примерно равно 3 1/7. В книге о «сфере и цилиндре» приводятся формулы для нахождения площади и объема сферы (объем сферы равен 2/3 объема описанного цилиндра).

В книге «Квадратура параболы» Архимед дал выражение для площади параболического сегмента (4/3 площади вписанного треугольника с основанием таким же, как у сегмента, и с вершиной в точке, в которой касательная параллельна основанию). В книге «О спиралях» мы находим «спираль Архимеда» и вычисление площадей, в книге «О коноидах и строфоидах» - объемы некоторых тел, образованных вращением кривых второго порядка.

Обилие вычислений отличает его от большинства греческих математиков. Это придает его трудам восточный оттенок. Пример – задача о быках- сводящаяся к уравнению вида $t^2 - 4729494u^2 = 1$.

Третий великий математик эллинизма – Аполлоний из Перги (ок. 260-170)- по-видимому вел обучение в Александрии и в Пергаме, написал трактат из восьми книг о конических сечениях («О кониках»). Семь книг сохранились, три из них – только в арабском переводе. Мы называем эти кривые, следуя Аполлонию. Эти названия выражают одно из свойств этих кривых, связанное с площадями и выражаемое в наших обозначениях, уравнениями

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$y^2 = px, \quad y^2 = px \pm \frac{p}{d}x^2$$

(запись однородная, у Аполлония p и d - отрезки, знак «+» дает гиперболу, знак «-» дает эллипс). Парабола значит «приложение», эллипс – «приложение с недостатком», гипербола – «приложение с избытком» (т.к. в греческой геометрии превращение прямоугольника данной площади y^2 в равновеликий ему прямоугольник с данным основанием p называлось приложением данного прямоугольника к этому основанию). Аполлоний не располагал нашим координатным методом, потому что он не располагал алгебраическими обозначениями. Книги Аполлония содержат «алгебраическую геометрию» на геометрическом языке. У Аполлония впервые встречается требования, чтобы геометрические построения выполнялись только с помощью циркуля и линейки.

С точки зрения логики математика александрийского периода представляла смешение эмпирического и дедуктивного подходов. Наиболее выдающиеся математики этой эпохи Архимед и Аполлоний следовали образцу дедуктивной геометрии Евклида. Даже в своих трудах по механике Архимед начинал с аксиом и доказывал теоремы, став предшественником Ньютона. Но под влиянием более прагматичных египтян и вавилонян александрийцы начали использовать математику и для удовлетворения запросов практики.

IV. Завершающий период.

Действующие лица: Гиппарх, Никомах, Птолемей, Менелай, Герон, Диофант, Папп.

Историческая характеристика. Период господства Рима. Рим завоевал Сиракузы в 212 г., Карфаген в 146г, Грецию в 146 г., Месопотамию в 64, Египет в 30 г. до н.э. Все чем римляне завладели на Востоке было сведено до уровня колоний, управляемых римскими администраторами. Пока Римская империя сохраняла известную устойчивость, восточная наука

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО

продолжала процветать. Постепенно снижалась оригинальность, слабела движущая сила, но установленный римлянами мир (pax Romana) позволял без помех заниматься традиционными теориями. В течение нескольких столетий с «римским миром» существовал и «китайский мир». Евразийский континент за всю свою историю не имел такого долгого мирного периода, как при Антонинах в Риме и династии Хань в Китае. Это облегчало проникновению знаний по континенту. Эллинистическая наука, как и прежде проникала в Китай и Индию, испытывая в свою очередь влияние науки этих стран. Пример – распространение в Римской империи деления угла и часа на шестьдесят частей.

Александрия оставалась центром античной математики. Особенности упадка: неуклюжий геометрический способ выражения при отказе от алгебраических обозначений, делали невозможными какие-либо продвижения «за» конические сечения. Алгебру и вычисления оставляли презренным людям Востока.

Одним из самых ранних александрийских математиков римского периода был **Никомах** из Герасы (ок. 100 г. до н.э)., чье «Арифметическое введение» - наиболее полное из сохранившихся изложений пифагорейской арифметики. Там рассматриваются большей частью те же вопросы, что и в арифметических книгах Евклида, но тогда как числа у Евклида изображаются отрезками, Никомах пользуется арифметическими обозначениями и, если имеет дело с неопределенными числами, обычной речью. Т.о. арифметические понятия впервые получают не геометрическую, а цифровую интерпретацию.

Греки внесли еще один крупный вклад в изучении пространства и пространственных фигур: они создали *тригонометрию.* Ее основы были заложены **Гиппархом**, который жил на Родосе и в Александрии и умер ок. 125 г. до н.э. Его труд был продолжен **Менелай** (ок.100 г.). В его «Сферике» содержится геометрия сферы и рассматриваются сферические треугольники – предмет, которого нет у Евклида. Тригонометрия занимается

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

изучением количественных соотношений между сторонами и углами треугольника. Греков интересовали главным образом треугольники на поверхности сферы со сторонами, образованными дугами больших кругов, поскольку именно такие треугольники находили применение при изучении движения планет и звезд. Но ту же теорию можно перенести и на случай треугольников на плоскости. Введение тригонометрии потребовало весьма основательных познаний в арифметике и даже некоторого знакомства с алгеброй.

Одно из крупнейших произведений этого второго александрийского периода – «Великое собрание» **Птолемея**, более известное под арабизированным названием «Альмагест» (ок 150 г.). В нем есть тригонометрия с таблицей хорд для углов от нуля до ста восьмидесяти градусов, соответствующая таблице синусов для от углов от нуля до девяносто градусов через полградуса. Для синуса угла в 1^0 Птолемей нашел значение 0,017268 (точное 0,017453…), для π его значение 3.14166. В «Альмагесте» мы находим формулу для синуса и косинуса суммы и разности двух углов и зачатки сферической тригонометрии. Теоремы формулируются геометрически, наши современные обозначения появятся в 18 в. (Эйлер). В «Планисферии» Птолемея рассматривается стереографическая проекция, а в его «Геометрии» положение на Земле определяется с помощью долготы и широты – первый пример координат на сфере.

Высшим достижением александрийцев стало создание Гиппархом и Птолемеем количественной астрономии – геоцентрической системы мира, позволившей человеку предсказывать движение планет, Солнца, Луны.

К эпохе Менелая относится **Герон**. Именно Герон связал математику с практическими потребностями человека. В своей «Метрике» он выводит «формулу Герона» для площади треугольника чисто геометрическим образом; сам же результат приписывается Архимеду. Вычисление площади по формуле Герона нередко приводит к иррациональным числам. Еще одна особенность: в отличие от греков эпохи высокой классики, которые считали

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

бессмысленным произведение четырех и более чисел, поскольку ему нельзя придать геометрический смысл, Герон далек от таких предрассудков. В своей «Геометрике» Герон говорит о сложении площади круга, длины окружности и диаметра. Разумеется, под этим он понимает сложение численных значений этих величин. Тем самым Герон как бы *осуществил перевод многого из того, что достигла геометрическая алгебра древних греков, на язык арифметики и алгебры.* Некоторые из задач, рассмотренных Героном, в точности совпадает с задачами, встречающимися у вавилонян и египтян за 2000 лет до н.э. В той же «Метрике» мы находим типично египетские основные дроби. Формула Герона для объема усеченной пирамиды без труда сводится к формуле, имеющейся в Московском папирусе. Напротив, определение объема правильных многогранников у Герона – в духе Евклида. Герон оставил много трудов по механике. Эти его работы носят энциклопедический характер и содержат почти весь объем тогдашних знаний в этой области. Герон формулировал и решал алгебраические задачи чисто арифметическими средствами. Например, чтобы решить квадратное уравнение, Герон добавляет к обоим частям равенства одно и тоже число и извлекает корень. Герон не доказывает правильность своих действий, он лишь указывает, в какой последовательности их следует выполнять. Следует подчеркнуть, что свои алгебраические работы греки излагали в описательной манере. Ни к какой символике они не прибегали. Не приводили они и доказательств правильности используемых приемов. Со времен Герона, задачи, приводящиеся к уравнениям, стали довольно распространенным видом головоломок.

Еще сильнее восточный колорит в «Арифметике» **Диофант**а (ок. 250 г.). Уцелели только шесть книг оригинала, общее их число – предмет догадок. В собрание Диофанта входят весьма разнообразные задачи, а их решения часто в высшей степени остроумны. «Диофантов анализ» состоит в нахождении решений неопределенных уравнений вида $Ax^2 + Bx + C = y^2$,

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^2$ или системам таких уравнений. Типично для Диофанта то, что его интересуют только *положительные рациональные* решения. Иррациональные решения он называет «невозможными» и тщательно подбирает коэффициенты так, чтобы получались искомые положительные рациональные решения.

У Диофанта *впервые мы встречаем систематическое использование алгебраических символов.* У него есть особые знаки для неизвестного, минуса, для обратной величины. Эти знаки еще скорее сокращения, чем алгебраические символы в нашем смысле, тем не менее они способствовали решению задач значительно более сложных, чем любые ранее поставленные.

Труды Диофанта стали исходной точкой исследований в области теории чисел таких знаменитых ученых, как Ферма, Эйлер, Гаусс. Один из разделов теории так и называется «диофантовы приближения», которые касаются решений линейных уравнений и неравенств в целых числах. В математику прочно вошел термин «диофантовы уравнения», это название относится к проблеме решения уравнений с большим числом неизвестных, чем самих уравнений, при том в целых и рациональных числах.

Последний из больших математических трактатов написан Паппом. Его «Собрание» - нечто вроде учебника для изучающих греческую геометрию, с историческими справками, с улучшением и видоизменением известных теорем и доказательств. «Собрание» состояло из восьми книг. Первая и вторая (обе утеряны) посвящены греческой арифметике. Многие результаты древних авторов известны только в той форме, в какой они сохранились у Паппа, например три знаменитые проблемы античности – в третьей книге. В четвертой книге Папп приводит общую для любого треугольника теорему Пифагора, а в пятой рассматривает вопрос изометрических фигур (то есть фигур с равными периметрами). При случае, Папп утверждает, что из всех фигур, имеющих равные периметры, наибольшую площадь имеют фигуры с наибольшим числом углов, причем из всех фигур, наибольшее число углов вписанного многоугольника и

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

наибольшую площадь имеет круг. В этой же книге Папп отмечает, что мир по форме является шаром, великолепнейшим и наибольшим телом с равновеликой площадью, но философам еще не удалось доказать, что объем шара всегда больше объема многогранника с равновеликой площадью сторон. Шестая книга – комментарии к работам Аполлония, восьмая – по механике. Как и «Арифметика» Диофанта, «Собрание» Паппа – книга, которая вдохновляла многих исследователей более поздних времен.

Работы Диофанта, Герона, Архимеда и Птолемея по различным вопросам арифметики и алгебры не отличались по своему стилю от рецептурных текстов египтян и вавилонян. Дедуктивные доказательства, используемые в геометрии, были забыты. Все проблемы решались индуктивно: автор указывал способ решения той или иной задачи. Нужно ли говорить, что различные типы чисел не определялись. Не существовало и аксиоматической основы, на которой можно было бы построить дедуктивную систему, пригодную для решения арифметических и алгебраических проблем.

Таким образом, греки завещали потомкам две совершенно различные математические науки: с одной стороны, дедуктивную, хорошо разработанную геометрию, хотя и не свободную от ошибок, с другой стороны – эмпирическую арифметику и алгебру как ее обобщение. Это привело к одной из величайших аномалий в истории математи
ки.

Созданная греками цивилизация распалась по нескольким причинам. Первой причиной ее заката было постепенное завоевание римлянами Греции, Египта и Ближнего Востока. Распространяя свое владычество, римляне не ставили своей целью распространение своей культуры. Завоеванные римлянами территории быстро превращались в колонии, из которых грабежом и поборами выкачивали колоссальные богатства.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Другой удар по языческой культуре греков нанесло возникновение христианства. Создатели новой религии включили в нее множество греческих и восточных мифов и обычаев с очевидным намерением сделать христианство более доступным для новообращенных, но в то же время заняли непримиримую позицию по отношению к языческой науке и даже осмеивали математику, астрономию и естественные науки. Несмотря на преследования римлян, христианство продолжало распространяться и достигло такого могущества, что римский император Константин Великий Миланским индиктом 313 г. провозгласил христианство официальной религией Римской империи. Несколько позднее Феодосий (правивший в 379-392 г.г.) запретил языческие религии и в 392 г. приказал разрушить языческие храмы.

Тысячи книг были сожжены. В 47 г. до н.э. римляне подожгли египетские суда, стоявшие в Александрийской гавани. В огне пожара погибла знаменитая Александрийская библиотека. В 392 г. христиане разрушили храм Сераписа в Александрии. Многие сочинения греческих авторов были стерты христианами, которые использовали пергамент для записи собственных текстов.

Александрийская школа медленно умирала вместе с упадком античного общества. В целом она оставалась оплотом язычества против распространявшегося христианства. **Прокл** – один из наших главных источников по истории греческой математики, возглавил школу неоплатоников в Афинах. В Александрии ту же школу представляла **Ипатия,** которая писала комментарии к классикам математики. Ипатия, дочь профессора математики, прославилась на весь известный тогда мир своими диспутами и умением решать логические задачи. Безграничная вера Ипатии в человеческий разум стала причиной ее смерти, когда Кирилл, патриарх Александрийский, начал преследовать философов, естествоиспытателей и математиков. Зверское убийство Ипатии в 415 г. символизировало конец Александрийской математической школы.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Философские школы вместе со своими комментаторами то процветали, то хирели. Академия в Афинах была закрыта в 529 г. императором Юстинианом как языческая.

Завоевание Египта в 640 г. сторонниками набиравшего силу ислама нанесло греческой культуре такой удар, от которого она уже не смогла оправиться. Все ранее уцелевшие книги были сожжены. Почти полгода бани Александрии топились пергаментными свитками.

После захвата Александрии приверженцами пророка Мухаммеда большинство ученых уехали в Константинополь, ставшей столицей Восточной Римской империи. И хотя традиционная греческая культура не могла процветать в неблагоприятной для нее атмосфере Византии, приток ученых и возможность продолжить научную работу в условиях относительной безопасности способствовали приумножению сокровищницы знаний, ставшей через 800 лет достоянием Европы.

Свой вклад в дальнейшее развитие математики как науки внесли индийцы и арабы.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Математика Востока

1. Историческая характеристика.

Древняя культура Ближнего Востока, несмотря на эллинистические влияния, никогда не исчезала. Политическое господство греков над ближним Востоком почти полностью сошло на нет после внезапного возникновения ислама. После 622 г. арабы с поразительной стремительностью овладели значительной частью Западной Азии и до конца седьмого столетия они стали обладателями части западно-римского государства – в Сицилии, Северной Африке, в Испании. Везде, куда они проникали, они пытались заменить греко-римскую культуру культурой ислама. Однако, в течение всего времени господства ислама непрерывно существовала греческая традиция, сохранившая свой особый характер в отличие от различных местных культур.

За тысячелетие (200-1200 гг.) индийцы (не без влияния греческих источников) получили важные результаты в области арифметики и алгебры. Арабы – созданный ими арабский Халифат в период расцвета простирался по всему побережью Средиземного моря, глубоко вторгался на Ближний Восток и объединял разноплеменные народы, исповедующие ислам, - усвоили лучшие достижения греческой и индийской математики и получили ряд новых результатов. Действуя в духе греков александрийского периода, арабы в своих трудах опирались и на дедуктивные рассуждения, и на эксперимент. Арабские ученые сказали свое слово в алгебре, астрономии, оптике, географии. Заботясь о передаче знаний, они создавали школы и даже высшие учебные заведения. Арабы переводили труды греческих ученых и составляли обширные комментарии, в том числе и критические. К 1500 г. Арабский халифат распался, теснимый христианами на западе и раздираемый междоусобицами на востоке.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Индийцы и арабы, подхватившие эстафету развития математики после окончательного уничтожения арабами греческой цивилизации, в еще большей мере нарушили концепцию математики, сложившуюся у греков классического периода. Подобно своим предшественникам, арабские математики использовали целые числа и дроби, но они, не колеблясь, оперировали и иррациональными числами. Как же им удалось придумать правила, лишенные логического обоснования и тем не менее оказавшиеся верными? Загадка решается довольно просто: индийцы и арабы рассуждали по аналогии. Так, правило $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ они считали верным для любых чисел, так как оно выполнялось, например, в случае $\sqrt{36} = \sqrt{4}\sqrt{9}$. Фактически индийцы считали, не оговаривая специально, что с квадратными корнями из целых чисел можно обращаться также, как с целыми числами.

2. **Математика Индии.**

Исторический период: 300 г. – 1200 г. н.э.

С упадком Римской империи центр математических исследований постепенно перемещался в Индию, а позже – в обратном направлении, в Месопотамию. Первые хорошо сохранившиеся индийские тексты в области точных наук – это «Сиддханты», часть которых, «Сурья», дошла до нас, в достаточно точно соответствующей оригиналу (ок. 300 – 400 г. н.э.) форме. В этих книгах содержатся в основном астрономия. Такие факты как наличие шестидесятичных дробей, позволяют предположить наличие влияния греческой астрономии. Но, кроме этого, в «Сиддхантах» мы находим многочисленные типично индийские особенности. «Сурья» содержит таблицу значений синуса, а не хорд.

Результаты, изложенные в «Сиддхантах», систематически разъяснялись и развивались в индийских математических школах. До нас дошли имена и книги отдельных индийских математиков, начиная с пятого столетия н.э.

Индийцы были менее изощренными математиками, чем греки. Интересуясь алгоритмической стороной вычислений, индийцы не заметили

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

различия между целыми и иррациональными числами, которому греки предавали столь большое значение. Но производя над ними действия по правилами, по которым производятся арифметические операции над рациональными числами, индийцы внесли посильный вклад в развитие математики. Кроме того, *вся их арифметика была полностью независимой от геометрии.*

Наиболее известными математиками Индии были Ариабхата (прозванный «первым», ок. 500 г.) и Брахмагупта (около 625 г.).

С древнейших времен в Индии применялась десятичная система счисления. Индийцы разработали правила арифметических действий, основанной на этой системе счисления. Первыми их применил Ариабхата.

В сочинении Ариабхаты «Ариабхатиам» изложены математические сведения, необходимые главным образом для астрономических вычислений, встречаются извлечение квадратного и кубического корней из чисел, простейшие задачи на составление решений уравнений (уравнения с двумя неизвестными в целых числах), суммирование кубов натуральных чисел, приводится приближенное значение $\pi = 3{,}1416$. Современником Брахмагупты был Бхаскара I, автор комментариев к трактату Ариабхаты и астрономического сочинения «Маха-Бхаскария» , содержащего математические разделы. Ок. 1150 г. в Удждажайне, где работал Брахмагупта, мы находим другого выдающегося математика, Бхаскару II. Первое общее решение неопределенного уравнения первой степени $ax + by = c,$ где a,b,c – целые числа, встречается у Брахмагупты. Поэтому, строго говоря, нет оснований называть неопределенные линейные уравнения диофантовыми. Диофант допускал еще и дробные решения, индийские математики интересовались только целочисленными. Они пошли дальше Диофанта и в том отношении, что допускали отрицательные корни уравнений, хотя это в свою очередь, должно быть, соответствует более древней практике. Например, для уравнения $x^2 - 45x = 250$ Бхаскара II

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

находил решения $x = 50$ и $x = -5$, но относительно приемлемости отрицательного корня он высказывал известный скептицизм.

Бхаскара пришел к выводу, что квадратный корень из отрицательных чисел не существует, так как иначе его квадрат должен быть отрицательным числом, а отрицательное число не может быть квадратом.

Его «Лилавати» в течение столетий оставалась на Востоке образцовой книгой по арифметике и искусству измерений. Император Акбар перевел ее на арабский язык. Она многократно переиздавалась как учебник математики для мусульманских религиозных школ.

Индийские математики признавали существование отрицательных корней уравнения, толковали положительные числа как представляющие имущества, а отрицательные – долги. Вот правила сложения и вычитания, изложенные Брахмагуптой (628 г.):

$a + b = c$ Сумма двух имуществ есть имущество.

$(-a) + (-b) = -c$ Сумма двух долгов есть долг.

$a + (-b) = a - b$ Сумма имущества и долга равна их разности.

$a + (-a) = 0$ Сумма имущества и равно долга равна нулю.

$0 + (-a) = -a$ Сумма нуля и долга есть долг.

$0 + a = a$ Сумма нуля и имущества есть имущество.

$0 - (-a) = a$ Долг, вычитаемый из нуля, становится имуществом.

$0 - a = -a$ Имущество, вычитаемое из нуля становится долгом.

Бхаскара II выразил правила умножения и деления следующим образом: «Произведение двух имуществ или двух долгов есть имущество, произведение имущества на долг есть убыток. То же правило имеет место и при делении».

Однако, несмотря на широкое использование отрицательных чисел при решении задач с помощью уравнений, в Индии относились к ним с некоторым недоверием. Бхаскара писал: «Люди не одобряют отвлеченных отрицательных чисел».

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Вывод: Индийцам удалось достичь некоторых успехов в алгебре. Для описания операций и неизвестных они ввели сокращенные слова и специальные символы. Их алгебра обладала рядом преимуществ по сравнению с алгеброй Диофанта. Решая задачу, они указывали только основные этапы решения, не приводя никаких обоснований или доказательств. Отрицательные и иррациональные корни они рассматривали вместе с рациональными.

Арифметика и вычислительные возможности математики интересовали индийцев несравненно больше, чем дедуктивные схемы рассуждений. Свою математику они называли *ганита*, что означает «наука о вычислениях». Они предложили немало удобных методов расчетов и усовершенствовали известные ранее приемы счета, но не рассматривали доказательств. Средневековый ученый-энциклопедист аль-Бируни писал о индийцах:

Я могу сравнить то, что содержится в их книгах по арифметике и другим математическим наукам, только с перламутром, смешанным с незрелыми финиками, или с жемчужинами вперемешку с навозом, или с кристаллами, перемешанными с камешками. Обе части имеют для них равную ценность, поскольку у них нет примера восхождения к вершинам логического познания.

Наиболее известным достижением индийской математики является наша современная десятичная позиционная система. Десятичная система – давнего происхождения, тоже относится и к позиционной, но сочетание их, по-видимому, произошло в Индии. Первое известное нам применение позиционной десятичной системы относится к 595 г. – сохранилась плита, на которой число 346 записано в такой системе.

Самый древний письменный документ со значком нуля относится к девятому столетию. Все это более позднего происхождения, чем знак для нуля в вавилонских текстах. В то время, когда вавилонскую точку – знак нуля- писали только между цифрами, индийский нуль появляется также на последнем месте, и таким образом, 0,1,2,…,9 становятся равноправными

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

цифрами. Индийцы осознали, что нуль не только заполняет пробел между цифрами, но и существует сам по себе, независимо от других чисел. Так абстрактное понятие «ничего» впервые обрело осязаемый смысл.

Нам изобретение нуля может показаться тривиальным шагом, но не следует забывать, что именно вторая, более глубокая функция нуля ускользнула от внимания всех греческих философов, в том числе Аристотеля. По мнению Аристотеля нуль должен быть объявлен вне закона, поскольку он нарушал единообразие других чисел: деление на нуль приводило к непостижимому результату. Брахмагупта оказался настолько искушенным, что использовал деление на нуль для определения бесконечности.

Самое древнее упоминание индийской позиционной системы вне Индии мы находим в 662 г. в книге сирийского епископа Севера Себохта. Научный мир ислама получил возможность познакомиться с так называемой индийской системой, когда ал-Фазари перевел на арабский язык «Сиддханты» (ок. 773 г.). Весьма разнообразны знаки, которые применялись для записи цифр позиционной системы, но имеются два главных типа: индийские обозначения, которые применялись восточными арабами, и так называемые цифры «гобар» («губар»), которые применялись западными арабами в Испании. Знаки первого типа и сейчас еще применяются в арабском мире, но наша современная система, по-видимому, произошла из системы «гобар».

Введение десятичной позиционной системы счисления может показаться ничтожно малым продвижением, но попробуйте умножить CLV на DCI, и вы оцените ценность прорыва: задача умножения 155 на 601 гораздо проще. Развитие любой научной дисциплины зависит от ее способности развивать свои идеи и обмениваться ими, а это в свою очередь определяется научным языком, который должен быть достаточно подробным и гибким. Идеи Пифагора и Евклида отличались большим изяществом, несмотря на неуклюжее оформление. После перевода в новую символику они расцвели и принесли много плодов, породив новые понятия.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

3. **Арабская математика**.

Исторический период: 7 в. – 15 в. н.э.

Начиная с 7 века центр математических исследований переместился в арабский халифат, объединивший мелкие арабские государства в огромную империю. Господствующим языком в этом халифате стал арабский. Столицей был Дамаск, а с 8 века – Багдад – новый город, построенный вблизи бывшего Вавилона.

Багдад был крупным научным центром. Халифы покровительствовали астрономии и математике. Аль-Рашид (786-809) и Аль-Мамун (813-833) даже построили в Багдаде Дом мудрости с библиотекой и обсерваторией. Арабская культура впитала в себя культуры многих народов: таджиков, хорезмийцев, египтян, персов, народов Древней Греции и Индии.

После завоевания Багдада турками в 1055 году и его окончательного разрушения в 1256 году монголами центра математических исследований переместился в новую столицу – Марагу (Азербайджан), а в 14-15 веках после завоевательных походов Тамерлана – в Самарканд. Это позволяет выделить у мусульманских народов 7-15 веков *три математические школы:*
- багдадскую;
- марагинскую;
- самаркандскую.

1. Багдадская математическая школа

Исламские работы в области точных наук достигли своей первой вершины в деятельности **Мухаммеда ибн Мусса ал-Хорезми (780-847).** Он родился в Хорезме в семье, относительно поздно принявшей ислам, о чем свидетельствует его произвище ал-Маджуси - из семьи магов. Образование ал-Хорезми получил в Мерве.

С 815 г. ал-Хорезми стал во главе Дома мудрости. Здесь им, а отчасти под его руководством, были выполнены работы по астрономии, географии и

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

математике. Около 820 г. были составлены таблицы «Зидж», в основу которых положены известные таблицы Птолемея. До нас они не дошли и известны лишь в латинской рукописи 1126 г. К этому времени относится измерение дуги меридиана, произведенное в районе между Тадмором и ар-Раккой, причем полученная величина расстояния между 35 и 36 градусами с.ш. составила 111 815 м, т.е. была лишь на 877 м больше истинной величины.

Из матемaтематических работ ал-Хорезми до нас дошли в более или менее цельном объеме два трактата – арифметический и алгебраический, - сыгравшие значительную роль в развитии науки. *Тракт по арифметике является первым в мировой литературе руководством по обучению счету.* Полагают, что он попал в Европу в конце XI или начале XII в. через мавританскую Испанию. Известно его изложение на латинском языке (хранится в библиотеке Кембриджского университета). Начинается оно словами «Dixit Algorizmi», т.е. «Сказал Алгоризм: пусть бог позволит вознести хвалу нашему вождю и защитнику». Рукопись умножается на умножении дробей. О дальнейшем содержании трактата можно судить по другим двум рукописям, также содержащим его изложение: «Книга Алгоризма о практике арифметики» и «Книга введения Алгоризма в астрономическое искусство, составленная магистром А».

Основными разделами трактата являются нумерация, действия с простыми числами и учение о дробях. В первом разделе ал-Хорезми излагает «индийский» способ записи чисел при помощи десяти знаков. Во втором – действия с простыми числами: сложение, вычитание, удвоение, раздвоение, умножение, деление.

Дроби Ал-Хорезми делит на немые и выговариваемые, в связи с особенностью арабского языка, в котором есть специальные слова для дробей со знаменателями от 2 до 9. Эти дроби называются выговариваемыми, а остальные – немыми. Учение о дробях делится на два раздела: действия с шестидесятиричными и обычными дробями. Последовательность шести

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

операций та же, что и при действиях с простыми числами. Действиям с обычными дробями предшествует приведение числителей к единице, т.е. они производятся так же, как в древнем Египте. К этому следует добавить несомненное индийское происхождение действий с шестидесятиричными дробями. Все средневековые руководства по арифметике являлись, в сущности говоря, вариантами и переделками этого сочинения Ал-Хорезми.

Не менее плодотворным было влияние и второго математического трактата Ал-Хорезми, посвященного алгебре. Трактат этот называется «Краткий трактат об исчислении восстановления и противопоставления» и представляет собой практическое руководство по математике. Сохранился в ряде рукописей. Содержит учение об уравнениях первой и второй степеней, тройное правило, правила решения некоторых геометрических задач при помощи алгебры и учения о расчетах по мусульманскому наследственному праву, занимающее почти половину всего сочинения. *Этот трактат Ал-Хорезми является первым в мировой литературе руководством по алгебре.* Изложение в нем ведется в словесной форме, так как Ал-Хорезми не применял символики. Само название трактата дало название науке: от слова «ал-джабр» (восстановление) произошло слово «алгебра». Ал-Хорезми применил это слово, как и слово «ал-мукабала» (противопостановление), в качестве указания на метод решения задач. Противопостановление представляет собой операцию, при которой подобные члены сводятся в один, а восстановление показывает, что члены обеих частей приводятся к положительной форме. Все уравнения Ал-Хорезми приводит к шести типам:

1. $ax^2 = bx.$ 4. $x^2 + bx = c.$

2. $ax^2 = c.$ 5. $x^2 + c = bx.$

3. $bx = c.$ $6x^2 = bx + c.$

Пусть, например, дана некоторая задача, условие которой можно записать в виде

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58,$$

или

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$2x^2 + 100 - 20x = 58.$$

Ал-Хорезми производит следующие преобразования:

ал-джабр - $2x^2 + 100 = 20x + 58$ (прибавление $20x$ к обеим частям уравнения),

ал-мукабала - $x^2 + 21 = 10x$ (делит на два и приводит подобные члены),

в результате чего получается уравнение пятого типа. Он не объясняет, как выполняются эти операции. Можно полагать, что современникам они были достаточно хорошо известны и поэтому не нуждались в пояснениях.

Ал-Хорезми редко пользовался иррациональными величинами, называя их «джиз асамм» (глухой корень). Герардо Кремонский в 12 веке перевел слово «ассам» латинским словом «surdus» (глухой), и до 18 века иррациональные числа в Европе назывались также глухими числами.

Далее в трактате на нетрудных примерах поясняются действия с алгебраическими выражениями. Третий раздел, озаглавленный «Масахат» («Измерения»), посвящен некоторым применениям сведений, полученных в первом разделе, и решению ряда геометрических задач. Ал-Хорезми приводит теорему Пифагора с доказательством, измеряет площадь 12 геометрических фигур, в том числе треугольников, четырехугольников, круга, находит объем призмы, цилиндра, пирамиды, усеченной пирамиды и конуса. Для числа π он дает три значения $\frac{22}{7}$ (для практического употребления), $\sqrt{10}$ и $\frac{62832}{20000}$ (применявшееся геометрами). Этот раздел, равно как и предыдущие, отражает влияние индийской и греческой математики.

В последней части трактата изложены задачи, связанные с мусульманским наследственным правом. В латинских переводах, выполненных в Западной Европе, этой части нет, так как она не представляла для читателя никакого интереса.

Есть сведения, что кроме упомянутых Ал-Хорезми написал еще несколько трактатов, но они не найдены. Сочинения Ал-Хорезми имели большое методическое значение, они послужили образцом для создания учебников в странах как Ближнего Востока, так и Западной Европы. Широта

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

охвата и способность объединить результаты разнородных культур знаменуют переход от замкнутой местной науки к науке, являющейся достоянием каждого.

С Домом мудрости связаны и первые работы по тригонометрии. **Ахмед ибн Абдалла ал-Мервази из Мерва** (ок. 770-870), которого называли ал-Хабаш – «вычислителем», пользовался тангенсом и котангенсом, как отношениями сторон прямоугольного треугольника. Он составил таблицы значений тангенсов и котангенсов для некоторых величин угла с точностью до секунды. Он же ввел понятие косеканса. К этому времени относится и начало применения тригонометрии для астрономических вычислений.

Ал-Джаухари занимался исследованием теории параллельных. Ат-Туси сообщает, что Ал-Джаухари доказал постулат о параллельных, используя свойство накрест лежащих углов. Во всяком случае примечательным является тот факт, что «Начала» Евклида уже вошли в обиход дома ученых.

Одним из выдающихся математиков десятого века был **Абу-л-Вафа (940-980).** Был одним из последних переводчиков греков. Сохранилось его геометрическое сочинение «Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений», руководство по элементам арифметики и геометрии «Книга для писцов». Особенно значительными являются результаты Абу-л-Вафы в области тригонометрии. К известным уже синусу, косинусу, тангенсу и котангенсу, он ввел секанс и косеканс. Синус суммы и разности он выражал только через синусы

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \pm \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Результатами, полученными таким образом, он пользовался на практике, при составлении таблиц. Ему принадлежит способ вычисления данных для этих таблиц, по точности превосходящий все известные до него способы.

Вне математических школ работал **Абу-л-Фатх Омар ибн Ибрахим Хайям** (ок. 1048-1131). Он родился в Нишапуре (Хорасан). О его жизни сохранилось очень немного сведений. После учебы в Нишапуре или Балхе он

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

покинул Хорасан и некоторое время жил в Самарканде, где написал свой алгебраический трактат, затем в Бухаре. В 1074 г. по приглашению сельджукского султана Маликшаха Хайям приехал в Исфаган и начал работать в при астрономической обсерватории. К этому периоду времени относится его второй математический трактат –«Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида».

Некоторое время Хайям жил в Мерве и Балхе. По-видимому, незадолго до смерти он снова поселился в Нишапуре. Последние его годы были омрачены приследованиями мусульманского духовенства, препятствовавшего развитию науки. В сущности, вся история средневековой науки представляет собой непрерывную борьбу духовенства с учеными, представителями «древней науки». Религиозный фанатизм позже явился причиной деградации арабоязычной науки.

Научное наследие Хайяма охватывает кроме математических, один физический трактат и шесть историко-философских сочинений. Однако более известен Хайям как поэт.

Алгебраический трактат Хайяма «О доказательствах алгебраических проблем» написан между 1069 и1074 гг. Он содержит решение уравнений первой, второй и третьей степеней, а также некоторых специальных видов уравнений. Омар Хайам первый среди математиков создал геометрическую теорию решения уравнений третий степени.

Во введении Хайям пишет о истории вопроса, а затем переходит к определению основных понятий науки, используемых им в трактате. При изложении он пользуется геометрическими методами. Этим он добился как наглядности, так и ясности в изложении, чего нельзя было сделать другим путем, учитывая отсутствие символики.

Уравнения до третьей степени Хайям делит на простые и сложные. Простых видов уравнений шесть, сложные уравнения бывают трехчленные и четырехчленные. Трехчленных уравнений 12 видов, четырехчленных – 7. В

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

решении Хайям учитывает только один из корней уравнения – положительный.

Второй трактат Хайяма озаглавлен «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида» и состоит из трех книг. Первая посвящена доказательству постулата Евклида. Хайям считает, что полностью разрешил все сомнения и предлагаемые им положения следовало бы включить в «Начала». Вторая и третья книги посвящены исследованию отношений и пропорций, роль которых в решении арифметических задач была весьма велика. Предполагается, что Хайяму был известен бином Ньютона для целых показателей.

Работы Хайяма являются высшим достижением математики Востока 11-12 вв. Одновременно с ним работали и другие математики, но это уже были ученые меньшего размаха.

2. Марагинская математическая школа

Руководителем марагинской математической школы был выдающийся арабский ученый **Насирэддин ат-Туси (1201-1274).** Он родился в Тусе, получил хорошее образование. Написав ряд научных трудов, приехал в Багдад, где представил эти труды халифу Мутасиму, который их не одобрил. В 50-х годах 13 в. Насирэддин находился в Кухистане (Иран) при дворе Насира. Здесь он написал философское сочинение «Эхлаки Насира» («Мораль Насира»). В результате ссоры с преемником Насира был заточен в крепость Аламут, откуда был освобожден внуком Чингисхана Хулагу-ханом, который сделал Насирэддина своим советником. После завоевания Багдада Хулагу-хан сделал своей столицей азербайджанский город Марага под Тавризом. В 1258-1259 годах в Мараге была построена обсерватория, научным руководителем которой стал Насиреддин. Обсерватория была оборудована лучшими по тому времени наблюдательными приборами. При ней была создана богатая библиотека рукописей. В ней постоянно велись теоретические исследования, способствовавшие развитию тригонометрии и

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

геометрии. К этому периоду относятся важнейшие научные труды Насиреддина - трактаты по теории отношений и сферической тригонометрии, по геометрии и астрономии. Насиреддин сделал тригонометрию самостоятельной наукой. *Он первый дал последовательное изложение плоской и сферической тригонометрии на единой методической основе, значительно упростив изложение и доказательство ряда теорем*. Большую историческую и методическую ценность представляет проведенный им анализ работ его предшественников.

3. Самаркандская математическая школа

Арабская математика достигла своего апогея в работах самаркандской школы, возглавляемой внуком Тамерлана Улугбеком и директором его знаменитой обсерватории аль-Каши.

Улугбек Тарагай (1394-1449) создал в Самарканде высшую школу (медресе) и лучшую в мире обсерваторию. Для исследований в астрономии и математике Улугбек пригласил в Самарканд известнейших людей своего времени. В обсерватории были созданы знаменитые «Новые астрономические таблицы», в которых излагались теоретические основы астрономии и приводился каталог 1019 звезд. По своей точности таблицы оставались непревзойденными свыше 200 лет, т.е. до работ Тихо Браге.

Улугбек разработал алгебраический метод, с помощью которого составлены очень точные тригонометрические таблицы. Этот метод давал возможность практически осуществлять вычисления с произвольной точностью. К сожалению, до нас не дошел его трактат, посвященный задаче о трисекции угла.

Аль-Каши (ум. 1436 или 1437) родился в Кашане (Иран). По приглашению Улугбека стал первым директором его знаменитой обсерватории. В 1427 году был издан его наиболее известный математический труд «Ключ арифметики», явившийся энциклопедией математики.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

В «Ключе арифметики» аль-Каши собрал большое количество известных арифметических и алгебраических методов решения задач, подробно изложил шестидесятиричную арифметику, теорию десятичных дробей, правила перехода от одной системе счисления к другой. Он изложил приемы извлечения корней любой степени, основанные на применении формулы бинома Ньютона для натурального показателя, дал правила приближенного решения уравнений высших степеней, первый в истории математики численный метод последовательных приближений, не уступавший многим современным методам ни в тонкости, ни в элегантности. Формула $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)$ называется формулой аль-Каши.

В «Трактате об окружности» аль-Каши дал значение π с 16 верными десятичными знаками, рассмотрев при этом правильный 805306368-угольник. Постановка задачи у аль-Каши такова: необходимо выразить длину окружности через диаметр с такой точностью, чтобы погрешность в вычислении длины окружности диаметр которой равен 600000 диаметрам Земли, не превышала толщины конского волоса.

Аль-Каши усовершенствовал тригонометрические вычисления, дал способ определения расстояний до небесных тел, изобрел механический прибор для изучения движения планет.

Хотя активная исследовательская работ в самаркандской математической школе продолжалась недолго (после смерти Улугбека наука в Самарканде пришла в упадок), ее влияние на прогресс математических исследований в Европе неоценим.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Итоги и выводы:

Анализируя работы математиков мусульманского мира в VIII-XV веках, убеждаемся, что они сыграли и продолжают играть значительную роль в развитии математической науки.

К числу фундаментальных достижений арабских математиков относятся:

В области арифметики и комбинаторики:

1. Усовершенствование позиционной шестидесятиричной системы.

2. Открытие десятичных дробей.

3. Разработка приемов извлечения корней из чисел.

4. Первое точно установленное в истории математики применение формулы бинома Ньютона для любого натурального показателя.

5. Расширение понятия о действительном положительном числе.

В области алгебры:

6. Выделение алгебры в особую математическую дисциплину.

7. Применение числовой алгебры в измерительной геометрии и тригонометрии и открытие итерационного приема решения одного вида кубических уравнений.

В области тригонометрии:

8. Создание плоской и сферической тригонометрии.

9. Вычисление чрезвычайно точных и полных тригонометрических таблиц.

Это – далеко не полный список, в него не включены, например, исследования по теории параллельных, открытия по теории чисел и многое другое.

Наиболее интересной особенностью математики Востока является внутреннее противоречивое представление о природе математического исследования. То, что египтяне и вавилоняне были склонны воспринимать немногие известные им арифметические и геометрические правила на эмпирической основе, само по себе не удивительно. Эмпирическая основа свойственна для всех видов знания. Но индийцам и арабам было известно совершенно новое понятие математического доказательства, доставшееся им

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО

в наследство от греков. Однако они не позаботились применить понятие дедуктивного доказательства в арифметике и алгебре.

О происхождении тригонометрии

Слово «тригонометрия» означает измерение треугольников. Возникновение тригонометрии тесно связано с развитием астрономии и географии.

Зачатки тригонометрии обнаружены в сохранившихся документах Древнего Вавилона, где астрономия достигла значительного развития. В Древней Греции тригонометрия достигла значительного развития.

Древнегреческие ученые впервые поставили задачу решения прямоугольного треугольника, т.е. определения его элементов по трем данным элементам, из которых хотя бы один – сторона треугольника. Для решения этой задачи вначале составляли таблицы длин хорд, соответствующим различным центральным углам круга постоянного радиуса. Первые тригонометрические таблицы хорд были составлены Гиппархом из Никеи. Сочинения Гиппарха до нас не дошли, но легли в основу «Альмагеста» Птолемея. Таблица хорд Птолемея составлена в шестидесятеричной системе счисления и играла такую же роль, как таблица синусов.

Индийские ученые положили начало учению о тригонометрических величинах, которые они рассматривали в пределах первой четверти круга. Синус и косинус встречаются в индийских астрономических сочинениях в 4-5 вв. *Заменив хорду синусом*, индийцы вначале называли синус «ардхаджива», т.е. половина хорды («джива» - хорда, тетива лука), а позже – просто «джива». Это слово было искажено арабами в «джайб», означающее по–арабски «пазуха», «выпуклость». Слово «джайб» было переведено в 12 в. на латынь соответствующим словом sinus. Косинус индийцы называли «котиджива», т.е. синус остатка. В 15 в. Региомонтан применял для понятия «косинус дуги» латинский термин sinus complementi, т.е. синус дополнения,

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

имея в виду sin(90-x). От перестановки этих слов и сокращения одного из них и образовался термин «косинус», встречающийся в 1620 г. у английского астронома Гунтера, изобретателя счетной линейки.

Кроме линий синуса и косинуса, индийские астрономы ввели еще одну величину: обобщенный синус- разность между радиусом окружности и ее косинусом:

$$\sin vers\alpha = 1 - \cos\alpha .$$

В отличие от sin versus европейские математики 12-16 вв. часто называли синус –sinus rectus (прямой синус), а радиус тригонометрической окружности sinus totus, т.е. весь (полный) синус.

Первые немногочисленные дошедшие до нас индийские произведения астрономо- тригонометрического содержания, названные «сиддханты» (науки), относятся к 4-5 вв. В них, как и в трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. **Ариабхатой (476-ок.550)** встречаются синус, косинус и синус-версус. Индусы рассматривали лишь прямоугольные треугольники, а косоугольные разбивали в ряд прямоугольных. Они знали и применяли некоторые зависимости между тригонометрическими величинами, в том числе основное тригонометрическое тождество. Для синуса в $3^0 45'$ **Бхаскара II (1114-1185)** в своих сочинениях указывает 100/1529, которое дает 7 верных десятичных знаков. У него же впервые приводится точное значение $\sin 18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, хотя неизвестно как он пришел к этому.

В 8 в. была переведена на арабский язык одна из «сиддхант», а в 9-10 вв. ученые стран арабского востока усвоили наряду со многими произведениями эллинистических стран и достижения индийской математики. В 9-10 вв. ученые стран ислама ввели новые тригонометрические величины: тангенс, котангенс, секанс, косеканс. Тригонометрия нашла применение в *гномонике* – учении о солнечных часах. Часы представляли из себя шест, вертикально воткнутый в землю ($\gamma\nu\omega'\mu\omega\nu$ - стержень, указатель), и по преданию были изобретены Фалесом.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Циферблатом служила площадка с колышкам, вбитыми в землю. Применялись и горизонтальные гномоны, перпендикулярные стене.

Ахмед ал-Марвази (ок.770-870), названный ал-Хабаш ал-Хасиб – «Вычислитель», занимаясь вопросами гномоники, констатировал, что отношение длины тени u к постоянной длине гномона l солнечных часов зависит от высоты Солнца, измеряемой углом φ, принял *l=60 минут=1* и составил таблицу значений тени, соответствующей значениям углов в 1,2,3,… градусов, т.е. $u = ctg\,\varphi$. Таблица дала возможность определять высоту Солнца по длине тени. Для случая горизонтального гномона ал-Хабаш составил таблицу *обращенных теней,* т.е. $u = tg\,\varphi$.

Таким образом, понятия «тангенс» и «котангенс», как и первые таблицы этих новых тригонометрических величин, родились не из рассмотрения тригонометрической окружности, а из учения о солнечных часах. Ал-Хабаш ввел и понятие «косеканс» также в связи с солнечными часами.

В своем астрономическом трактате «Усовершенствование Альмагеста» сирийский астроном **ал-Баттани (ок.850-929)** рассматривал уже все шесть тригонометрических величин. Он приводил, например, следующие соотношения: котангенс относится к радиусу как синус к косинусу.

Багдадский математик **Абу-л-Вафа (940-998)** впервые вводит в своей «Совершенной книге» тригонометрические линии не через прямоугольный треугольник, а с помощью касательной к окружности. В некоторых местах он принимает радиус окружности равным 1.

В 12 в. при переводе арабских сочинений на латынь новые тригонометрические функции были названы umbra recta – прямая тень и umbra versa – обратная тень. Термины tangens - «касающийся» и secans- «секущий» были введены лишь в 1583 г. датским математиком Томасом Финком в связи с ролью этих линий на тригонометрической окружности. Термины «котангенс» и «косеканс» были образованы по аналогии с

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

термином «косинус», и встречаются впервые в 1620 г. у английского ученого Эдмунда Гунтера.

«Трактат о полном четырехстороннике» **Насир ад-Дина ат-Туси (1201-1274)** считается *первым систематическим курсом тригонометрии*, изложенным независимо от астрономии. Однако обнаружен анонимный трактат в Исфахане, написанный до трактата ат-Туси, оказавший несомненное влияние на него. В обоих трактатах содержаться плоская и сферическая тригонометрия, решение прямоугольных, косоугольных и сферических треугольников.

Самые точные тригонометрические таблицы были составлены в начале 15 в. **ал-Каши (ум. ок.1436 или 1437 или 1429).**

В Европе первым трудом, в котором тригонометрия рассматривалась как самостоятельная область математики было произведение **Региомонтана (1436-1476)** «Пять книг о треугольниках всех видов», написанное в 1462 - 1466 гг. Основное содержание книги было заимствовано из трудов, написанных на арабском языке. Он составил и поместил в книге тригонометрические таблицы, в которых радиус окружности принят 10^7. Труд был напечатан в 1533 г. и оказал большое влияние на дальнейшее развитие тригонометрии.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Практические занятия

Математика Древней Греции

Темы докладов:

1.Фалес Милетский как геометр.
2. Пифагор и учение о числах.
3. Гиппократ Хиосский.
4. Стереометрия 5 в. до н.э. и перспектива.
5.Архит Тарентский.
6. Учение о пропорциональности Теэтета.
7. Евдокс и метод исчерпывания.
8. Евклид.
9. Архимед.
10. Эратосфен Киренский.
11. Никомед.
12. Аполлоний Пергский.
13. Эпигоны великих математиков (Диокл, Зенодор, Гипсикл).
14. Менелай.
15. Герон Александрийский.
16.Диофант Александрийский.
17. Папп Александрийский.

Примеры исторических задач:

1. По данным положительным числам а и b на числовой оси изобразите с помощью циркуля и линейки числа ab и $\sqrt{ab}$.
2. На сторонах прямоугольного треугольника ABC, как на диаметрах, построены окружности. Докажите, что сумма площадей луночек, опирающихся на катеты, равна площади треугольника ABC (задача Гиппократа).
3. Методом Евдокса найдите рациональное число между отношениями $\sqrt{2}/(1+\sqrt{3}) < \sqrt{3}/(1+\sqrt{2})$.
4. Постройте окружность Аполлония как ГМТ, расстояния которых до двух данных точек находятся в отношении 1:2.
5. Методом Аполлония постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей.
6. Как разделить на 3 равные части произвольный угол α методом Никомеда?
7. Как решить задачу об удвоении куба при помощи циссоиды Диоклеса?

Литература.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

1. Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. Физ.-мат.лит. 1959.
2. История математики с древнейших времен до начала 19 столетия/ под ред. А.П.Юшкевича.т.1.-М.:Наука,1970.
3. Кольман Э.Я. История математики в древности.М.:Физматгиз,1961.
4. Рыбников К.А. История математики. Т.1. – М. 1960.
5. Цейтен Г.Г. История математики в древности и в средние века. М. 1938.

Математика Востока

Темы докладов:

1. Ариабхата.
2. Брахмагупта.
3. Ал-Хорезми и начало становления алгебры.
4. Ал-Караджи.
5. Омар Хайям и кубические уравнения.
6. Тригонометрия Ат-Туси.
7. Улугбек Тарагай.
8. Ал-Каши.
9. Ал-Бируни.

Примеры исторических задач:

1. Геометрическим методом ал-Хорезми решите уравнение $x^2+4x=3$.

Литература.

1. История математики с древнейших времен до начала 19 столетия/ под ред. А.П.Юшкевича. т.1.-М.:Наука,1970.
2. Рыбников К.А. История математики. – М. 1960.
1. Фрейман Л.С. Творцы высшей математики. М.: Наука, 1968.
2. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. М., 1964.
3. Малаховский В.С. Избранные главы истории математики. – Калининград: «Янтарный сказ», 2002.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО