ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Автор: А. В. Шаталина, Е.М. Родионова

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Учебно – методическое пособие для учащихся средних образовательных школ, студентов специального профессионального образования и высших учебных заведений

Саратов
2017

Содержание

Введение

Данное методическое пособие представляет собой материалы для разработки электронного образовательного курса «Преобразование тригонометрических выражений». Данный образовательный курс предназначен для учащихся и преподавателей СОШ, СПО, ВУЗов и содержит элементы, относящиеся как к обучению на базовом уровне, так и в классах с профильной подготовкой.

Электронный образовательный курс «Преобразование тригонометрических выражений» – это электронный ресурс, который содержит комплекс учебно-методических материалов, необходимых для освоения данной темы. Основные цели создания электронного образовательного курса:

– предоставление обучающимся возможности освоения образовательных программ в максимально удобной форме, независимо от места нахождения, мобильности, состояния здоровья;

– создание электронной информационно-образовательной среды, позволяющей осуществлять индивидуальный подход в образовательном процессе;

– повышение качества обучения при реализации образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий;

– оптимизация деятельности педагогического состава, работающего с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий.

Задачи создания электронного образовательного курса:

– обеспечение образовательного процесса учебно-методическими и контрольно-измерительными материалами по теме «Преобразование тригонометрических выражений», реализуемой в системе дистанционного образования Ipsilon;

– проведение всех видов занятий, процедур оценки результатов обучения, реализация которых предусмотрена с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий;

– постоянное совершенствование и обновление комплекса учебно-методических материалов по данной теме;

– взаимодействие между участниками образовательного процесса, в том числе синхронное и (или) асинхронное взаимодействие посредством сети «Интернет».

Изучение тригонометрических тождеств в курсе алгебры является разделом традиционным и достаточно важным. Данная тема является весьма актуальной, так как с помощью рассмотренного материала изучают и другие разделы алгебры и начала анализа: производные, интегралы, пределы.

Базовые навыки и умения, которыми должен обладать учащийся перед изучением курса:

– иметь представление о тригонометрических функциях;

– знать основные правила преобразования алгебраических выражений;

– знать свойства тригонометрических функций;

– знать и уметь переводить градусную меру в радианную и обратно;

– уметь формулировать и доказывать теоремы.

Диагностируемые цели обучения теме «Преобразование тригонометрических выражений» с помощью электронного курса. Умения и навыки, которые формируются курсом.

Цель 1: контроль усвоения теоретических знаний при работе: а) с основными формулами тригонометрии; б) с теоремами; в) с типами и классами задач. Цель считается достигнутой, если ученик на уровнях:

Базовом:

а) воспроизводит основные тригонометрические формулы, может их классифицировать;

б) формулирует теоремы, заполняет пропуски в доказательстве, используя готовую схему; переходит от одной модели теоремы к другой;

в) решает задачи базового уровня сложности.

Среднем:

а) формулирует теоремы и воспроизводит все формулы тригонометрии, умеет их применять;

б) выполняет доказательство на своей модели; заполняет пустую готовую схему доказательства; называет базис доказательства; воспроизводит план доказательства;

в) решает задачи среднего уровня сложности.

Повышенном:

а) безошибочно формулирует теоремы и воспроизводит все формулы тригонометрии, умеет их применять, выводить одну из другой;

б) описывает основную идею доказательства; указывает область применения теорем; описывает способы рассуждений на этапах “открытия”, поиска доказательства теорем;

в) решает задачи повышенного уровня сложности.

Цель 2: применение знаний и интеллектуальных умений при решении задач.

Цель считается достигнутой, если ученик на всех уровнях: решает задачи своего уровня сложности, составляет аналогичные, обратные задачи и решает их, используя помощь.

Цель 3: формирование коммуникативных умений через включение в групповую работу; взаимопомощь, рецензирование ответов, организацию взаимоконтроля и взаимопроверки на всех уровнях.

Цель считается достигнутой, если ученик:

а) работая в группе, оказывает помощь, рецензируют ответы товарищей по выполненным заданиям предыдущих уровней с обоснованием, организует взаимоконтроль;

б) оказывает помощь работающим на предыдущих уровнях;

в) составляет контрольную работу в соответствии со своим уровнем освоения темы.

Данная тема достаточно сложная, поэтому осваивать её нужно постепенно. Сначала необходимо изучить основные формулы тригонометрии, начиная от простых формул приведения, заканчивая формулами преобразования суммы в произведение и обратно. Затем рекомендуется изучить доказательства основных тригонометрических тождеств и попытаться аналогично восстановить недостающие. Далее необходимо разобраться в примерах, а также пройти тренировочные здания трех уровней сложности, проверить себя можно, просмотрев решение. Полный набор задач можно посмотреть в сборнике тестов по данной теме, выложенном в электронной библиотеке СГУ. После освоения теории предлагается ответить на контрольные вопросы с выбором правильного ответа.

1 Преобразование тригонометрических выражений

1.1 Тригонометрические формулы

Для решения задач на упрощение тригонометрических выражений требуется достаточно хорошо знать правила преобразования алгебраических выражений и тригонометрические формулы (уметь применять их как по одной, так и в комплексе).

Для начала рассмотрим основные тригонометрические тождества, а именно соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента [1].

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1; \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}; \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \tag{3}$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1, \quad x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; \tag{4}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}; \tag{5}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Формулы сложения.

Одними из важнейших являются формулы синуса и косинуса суммы аргументов:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \tag{7}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \tag{8}$$

Эти формулы поистине можно назвать самыми важными, так как практически все основные формулы тригонометрии можно вывести с их помощью.

Так можно получить формулы синуса и косинуса разности аргументов

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \tag{9}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \tag{10}$$

Формулы суммы и разности аргументов для тангенса выглядят следующим образом:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \tag{11}$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \tag{12}$$

где все тангенсы имеют смысл, то есть $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ (для формулы (11), $x - y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ (для формулы (12), при $n \in \mathbb{Z}$.

Если в качестве аргумента тригонометрической функции выступает выражение вида: $\frac{\pi}{2} + t$, $\frac{\pi}{2} - t$, $\pi + t$, $\pi - t$, $\frac{3\pi}{2} + t$, $\frac{3\pi}{2} - t$ и вообще любое выражение вида $\frac{\pi n}{2} \pm t$, где $n \in \mathbb{Z}$, то такое выражение можно привести к более простому виду, в котором аргументом тригонометрической функции будет выступать только аргумент t. Такие формулы носят название формулы приведения. Для удобства основные из них выписаны в таблице 1.

Таблица 1 - Формулы приведения.

	Название функции не изменяется			**Название функции изменяется на сходное**			
	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
	$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z$			$\alpha \neq \pi n,\ n \in Z$			
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
	$\alpha \neq \pi n,\ n \in Z$			$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z$			

Далее рассмотрим формулы тригонометрии, называемые формулами двойного аргумента, позволяющие выразить $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$ через $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \tag{13}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \tag{14}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}, \tag{16}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}, \tag{17}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}. \tag{18}$$

Перечисленные выше формулы также носят названия – формулы половинного аргумента.

Далее рассмотрим особенно полезные формулы, поскольку они позволяют сумму или разность синусов или косинусов разложить на множители.

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{19}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}, \tag{20}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{21}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \tag{22}$$

Теперь рассмотрим "движение в обратном направлении а именно преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

$$\sin s\cos t = \frac{\sin(s+t)+\sin(s-t)}{2}, \tag{23}$$

$$\cos s\cos t = \frac{\cos(s+t)+\cos(s-t)}{2}, \tag{24}$$

$$\sin s\sin t = \frac{\cos(s-t)-\cos(s+t)}{2}. \tag{25}$$

На практике часто встречаются выражения вида $A\sin x + B\cos x$, причем возникает необходимость свести эту сумму к одной тригонометрической функции. Это возможно сделать по следующей формуле

$$A\sin x + B\cos x = C\sin(x+t), \quad \text{где} \quad C = \sqrt{A^2+B^2}, \tag{26}$$

где $t = \arcsin\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \arccos\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ – называют вспомогательным (дополнительным) аргументом.

Таким образом приведены все основные формулы, необходимые для решения задач, связанных с преобразованием тригонометрических выражений.

1.2 Доказательство некоторых тригонометрических тождеств

Теорема 1.1. Для любого числа α справедливо равенство

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{27}$$

Доказательство. Известно, что окружность радиуса 1 с центром в начале координат имеет уравнение

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{28}$$

Как следует из определения синуса и косинуса угла α, точка $A(x; y)$, принадлежащая этой окружности и соответствующая углу α, имеет координаты

$$x = \cos\alpha, \quad y = \sin\alpha,$$

которые удовлетворяют уравнению (28). Подставляя их значения в уравнение (28), получим равенство (27). Теорема доказана. ■

Теорема 1.2. Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Доказательство. Пусть даны два угла α и β. Пусть точка B на единичной окружности соответствует углу α, а точка C – углу β.

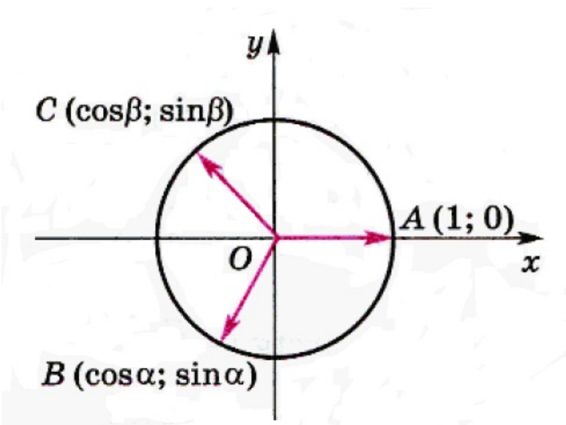


Рисунок 1.

Тогда, используя определение синуса и косинуса угла, получаем, что точка B имеет координаты $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, а точка C - координаты $x = \cos\beta$,

$y = \sin\beta$. Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OB}$ имеет координаты $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, а вектор $\vec{b} = \overrightarrow{OC}$ имеет координаты $(\cos\beta; \sin\beta)$.

Вычислим скалярное произведение этих векторов:

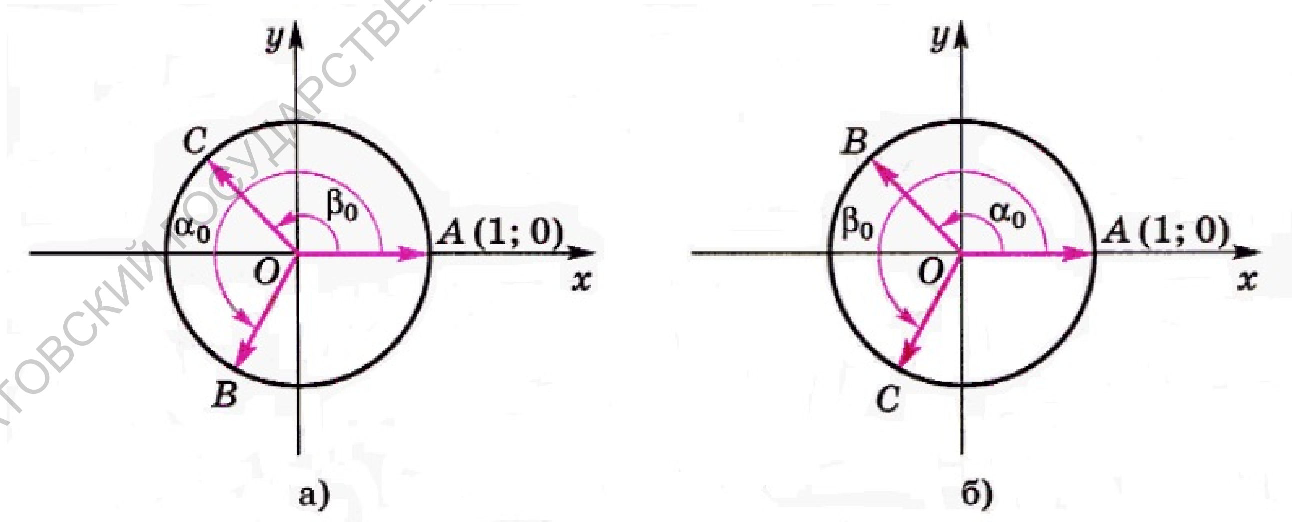
$$\vec{a}\,\vec{b} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (29)$$

Но, как известно из геометрии, скалярное произведение двух векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними. Обозначим через γ угол между векторами a и b. Учитывая, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, получаем

$$\vec{a}\,\vec{b} = \cos\gamma. \qquad (30)$$

Под углом между векторами понимается неотрицательный угол из промежутка от 0 до π. Таким образом $0 \le \gamma \le \pi$.

Запишем углы α и β в виде $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, $\beta = \beta_0 + 2\pi l$, где $0 \le \alpha_0 < 2\pi$, $0 \le \beta_0 < 2\pi$, а k и l – некоторые целые числа. Тогда можно считать, что точка B соответствует углу α_0, а точка C – углу β_0. Очевидно, что либо $\gamma = \alpha_0 - \beta_0$ (рис 2.а), либо $\gamma = \beta_0 - \alpha_0$ (рис. 2.б), либо $\gamma = 2\pi - (\alpha_0 - \beta_0)$(рис. 2.в), либо $\gamma = 2\pi - (\beta_0 - \alpha_0)$ (рис. 2.г), но в любом из этих случаев $\cos\gamma = \cos(\alpha_0 - \beta_0)$.



Так как $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha_0 - \beta_0 + 2\pi(k - l)) = \cos(\alpha_0 - \beta_0)$, то

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\gamma. \qquad (31)$$

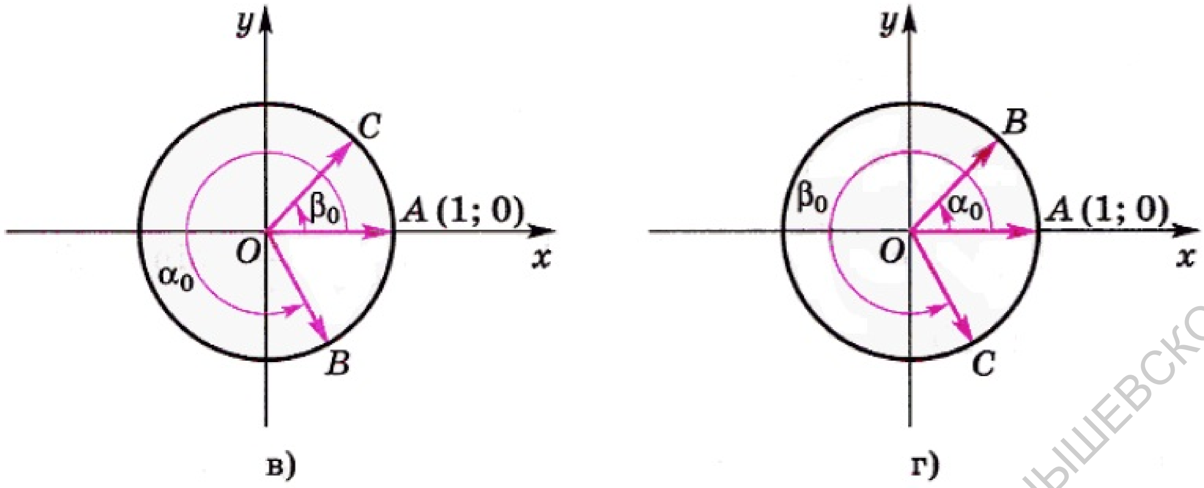


Рисунок 2.

Тогда из равенств (31), (30) и (29) следует равенство

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Что и требовалось доказать. ■

Аналогично доказывается формула косинуса суммы аргументов.

Теорема 1.3. Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Доказательство.

Пусть

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2},$$

тогда

$$\alpha = x + y, \quad \beta = x - y.$$

Используя формулы синуса суммы и разности, получим

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x+y) + \sin(x-y) =$$

$$= (\sin x\cos y + \cos x\sin y) + (\sin x\cos y - \cos x\sin y) =$$

$$= 2\sin x\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Что и требовалось доказать. ■

Остальные формулы доказываются аналогично [2].

Теорема 1.4. Для любого угла α справедливо равенство

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Доказательство. Используя формулу синуса суммы двух углов, получим

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Теорема доказана. ■

Аналогичным образом приводится доказательство для косинуса двойного угла.

Теорема 1.5. Для любого угла α справедливы равенства

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \tag{32}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}. \tag{33}$$

Доказательство.

Используя формулу косинуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество, имеем

$$\cos\alpha = \cos\left(2\times\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получим

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

Поделив обе части выражения на 2 получаем формулы (32) и (33). ■

Теорема 1.6. Для любых углов α и β справедливы равенства:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right), \tag{34}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right), \tag{35}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right), \tag{36}$$

Доказательство. Выпишем известные формулы синусов и косинусов суммы и разности двух углов

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha, \tag{37}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha, \tag{38}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta, \tag{39}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \tag{40}$$

Сложив почленно равенства (37) и (38), имеем

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta,$$

откуда получаем справедливость равенства (34).

Сложив почленно равенства (39) и (40), имеем

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta,$$

откуда получаем справедливость равенства (35).

Вычитая почленно из равенства (40) равенство (39), имеем

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta,$$

откуда получаем справедливость равенства (36). ■

1.3 Примеры решения задач с применением формул тригонометрии

В этом разделе рассматриваются основные примеры на использование формул тригонометрии.

Задания на вычисление значений тригонометрических выражений

Одним из наиболее распространенных типов несложных задач по тригонометрии является вычисление значений тригонометрических функций по значению одной из них.

Пример 1.1. Найти $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

Решение.

Из основного тригонометрического тождества получаем, что

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},$$

то есть $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$, а так как угол α в четвертой четверти положителен, то $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Пример 1.2. Известно, что $\cos(\alpha - 60^\circ) = \frac{3}{5}$. Найдите $\sin\alpha$.

Решение.

Из основного тригонометрического тождества получаем, что

$$\sin(\alpha - 60^\circ) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha - 60^\circ)} = \pm\frac{4}{5}.$$

Рассмотрим

$$\sin\alpha = \sin((\alpha - 60^\circ) + 60^\circ) = \sin(\alpha - 60^\circ)\cos 60^\circ + \cos(\alpha - 60^\circ)\sin 60^\circ =$$

$$= \pm\frac{4}{5}\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}\pm 4}{10}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}\pm 4}{10}$.

Задания на упрощение тригонометрических выражений

Формулы приведения должны быть учащимися хорошо усвоены, так как они необходимы для изучения смежных дисциплин, таких как геометрия, физика и др.

Пример 1.3. Упростить выражение

$$\frac{3\cos(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(\beta+3\pi)}.$$

Решение.

Воспользуемся формулами приведения

$$\frac{3\cos(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(\beta+3\pi)}=\frac{3(-\cos\alpha)+\cos\alpha}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-3\cos\alpha+\cos\alpha}{-\cos\alpha}=$$

$$=\frac{-2\cos\alpha}{-\cos\alpha}=2.$$

Ответ: 2.

Задания на преобразование числовых тригонометрических выражений

При отработке данной темы также следует обратить внимание на знание таблицы значений тригонометрических функций и их свойств.

Пример 1.4. Вычислить

$$42\sqrt{8}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}.$$

Решение.

$$42\sqrt{8}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}=42\sqrt{8}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=84.$$

Ответ: 84.

Задания смешанного типа

Особое внимание все же следует уделить заданиям, связанным с применением нескольких тригонометрических формул [3].

Пример 1.5. Вычислите без таблиц значение выражения

$$\sin 18^\circ \cos 36^\circ.$$

Решение.

Умножим и разделим данное выражение на $4\cos 18^\circ$, затем дважды воспользовавшись формулой синус двойного угла, имеем

$$\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{4\sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{\sin(90^\circ - 18^\circ)}{4\cos 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 1.6. Упростить выражение

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{4}\right) \sin\frac{\alpha}{4}.$$

Решение.

К произведению первых двух сомножителей применим формулу преобразования произведения в сумму, получим

$$A = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{6}\right) \sin\frac{\alpha}{4}.$$

Воспользуемся формулой приведения

$$A = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right) \sin\frac{\alpha}{4}.$$

Раскрыв скобки, снова воспользуемся формулой преобразования произведения в сумму

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4}\left(-\sin\frac{\alpha}{4}\right) + \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4}\sin\frac{3\alpha}{4}.$$

Ответ: $A = \frac{1}{4}\sin\frac{3\alpha}{4}$.

Пример 1.7. Представить в виде произведения

$$A = 2\cos^2 3\alpha + \sqrt{3}\sin 6\alpha - 1.$$

Решение.

Заметим, что, по формуле (17) $2\cos^2 3\alpha - 1 = \cos 6\alpha$, тогда

$$A = \cos 6\alpha + \sqrt{3}\sin 6\alpha.$$

Домножим и поделим каждое слагаемое на 2

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\cos 6\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6\alpha\right),$$

учитывая, что $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, а $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$, получим

$$A = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 6\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin 6\alpha\right).$$

Так как выражение, стоящее в скобках – развернутая формула для разности косинуса, по окончательно, имеем

$$A = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 6\alpha\right).$$

Ответ: $A = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 6\alpha\right)$.

1.4 Контрольные вопросы

Вариант №1.

1. Выберите формулу для косинуса разности двух углов

1. $\cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,

2. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$,

3. $\cos(x-y) = \sin x \cos y + \sin x \cos y$,

4. $\cos(x-y) = \sin x \cos y - \sin x \cos y$.

2. Выберите формулу для суммы синусов

1. $\sin x + \sin y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,
2. $\sin x + \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$,
3. $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,
4. $\sin x + \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

3. Выберите формулу для синуса двойного угла

1. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$,
2. $\sin 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
3. $\sin 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$,
4. $\sin 2x = \frac{1}{2}\sin x\cos x$.

4. Выберите формулу для суммы косинусов

1. $\cos x + \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,
2. $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$,
3. $\cos x + \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,
4. $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

5. Выберите формулу для тангенса суммы аргументов

1. $\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y}{1 - \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y}$,
2. $\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y}{1 + \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y}$,
3. $\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\, y}{1 - \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y}$,
4. $\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\, y}{1 + \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y}$.

Вариант №2.

1. Выберите формулу для синуса разности двух углов

1. $\sin(x - y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,

2. $\sin(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$,

3. $\sin(x - y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,

4. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.

2. Выберите формулу для разности синусов

1. $\sin x - \sin y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,

2. $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$,

3. $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,

4. $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.

3. Выберите формулу для косинуса двойного угла

1. $\cos 2x = 2 \sin x \cos x$,

2. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

3. $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$,

4. $\cos 2x = \frac{1}{2} \sin x \cos x$.

4. Выберите формулу понижения степени для косинуса

1. $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos^2 x}{2}$,

2. $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos^2 x}{2}$,

3. $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$,

4. $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$.

5. Выберите формулу преобразования произведения косинусов в сумму

1. $\cos s \cos t = \frac{\sin(s-t)-\sin(s+t)}{2}$,

2. $\cos s \cos t = \frac{\cos(s-t)-\cos(s+t)}{2}$,

3. $\cos s \cos t = \frac{\cos(s-t)+\cos(s+t)}{2}$,

4. $\cos s \cos t = \frac{\sin(s-t)+\sin(s+t)}{2}$.

Вариант №3.

1. Выберите формулу для косинуса суммы двух углов

1. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,

2. $\cos(x + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$,

3. $\cos(x+y) = \sin x \cos y + \sin x \cos y$,

4. $\cos(x+y) = \sin x \cos y - \sin x \cos y$.

2. Выберите формулу для разности косинусов

1. $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$,
2. $\cos x - \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$,
3. $\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,
4. $\cos x - \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

3. Выберите формулу для синуса суммы двух углов

1. $\sin(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
2. $\sin(x+y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$,
3. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,
4. $\sin(x+y) = \sin x \cos y - \sin x \cos y$.

4. Выберите формулу понижения степени для синуса

1. $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos^2 x}{2}$,
2. $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos^2 x}{2}$,
3. $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$,
4. $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$.

5. Выберите формулу преобразования произведения синусов в сумму

1. $\sin s \sin t = \frac{\sin(s-t)-\sin(s+t)}{2}$,
2. $\sin s \sin t = \frac{\cos(s-t)-\cos(s+t)}{2}$,
3. $\sin s \sin t = \frac{\cos(s-t)+\cos(s+t)}{2}$,
4. $\sin s \sin t = \frac{\sin(s-t)+\sin(s+t)}{2}$.

Ответы на контрольные вопросы

	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1.	2	4	1
2.	3	2	1
3.	1	2	3
4.	4	4	3
5.	1	3	4

2 Тренировочные задания

2.1 Тренировочный вариант базового уровня сложности

1. Вычислить значение $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = 0.3$, причем α – угол в первой четверти.

1. -0.9,
2. $-\sqrt{0.91}$,
3. $\sqrt{0.91}$,
4. 0.91.

2. Вычислить $\sin 225^\circ \cos 120^\circ \operatorname{tg} 330^\circ \operatorname{ctg} 240^\circ$.

1. $\dfrac{1}{2}$,
2. $\sqrt{2}$,
3. $-\dfrac{\sqrt{2}}{12}$,
4. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Вычислить $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\cos\alpha = -0.5$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

1. $-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,
2. $\dfrac{1}{2}$,
3. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$,
4. $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

4. Вычислить $\cos\dfrac{21\pi}{10}\sin\dfrac{3\pi}{20} + \cos\dfrac{3\pi}{20}\sin\dfrac{\pi}{10}$.

1. $\dfrac{1}{2}$,
2. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,
3. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
4. 0.

5. Найти $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

1. $-\dfrac{527}{625}$,
2. $-\dfrac{1}{3}$,
3. $-\dfrac{336}{625}$,
4. $\dfrac{120}{169}$.

6. Представьте в виде произведения $\cos(\alpha - 2\beta) - \cos(\alpha + 2\beta)$.

1. $2\sin\beta\cos\alpha$,
2. $\cos\alpha\sin\beta$,
3. $\cos\alpha\cos\beta$,
4. $2\sin\alpha\sin 2\beta$.

7. Представьте в виде суммы $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2}\right)$.

1. $\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta$,
2. $-\dfrac{1}{2}(\cos 2\beta + \cos 2\alpha)$,
3. $\dfrac{1}{2}(\cos\beta + \cos\alpha)$,
4. $\dfrac{1}{2}(\cos 2\beta + \cos 2\alpha)$.

8. Вычислить $8\sin^2\dfrac{15\pi}{16}\cos^2\dfrac{17\pi}{16} - 1$.

1. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
2. 2,
3. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,
4. $-2\sqrt{2}$.

9. Преобразовать в произведение $\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha + \sin 8\alpha$.

1. $4\cos\frac{\alpha}{2}\ \cos\alpha\ \sin\frac{13\alpha}{2}$,
2. $4\sin 3\alpha\ \cos 2\alpha\ \cos\alpha$,
3. $4\cos\frac{3\alpha}{2}\ \cos 2\alpha\ \cos\frac{17\alpha}{2}$,
4. $-4\sin\frac{\alpha}{2}\ \sin\alpha\ \cos\frac{9\alpha}{2}$.

10. Вычислить $\sin 2004^\circ\cos 1974^\circ - \sin 1974^\circ\cos 2004^\circ$.

1. 1,
2. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
3. $\dfrac{1}{2}$,
4. 0.

2.2 Решение тренировочного варианта.

Задание №1. Вычислить значение $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = 0.3$, причем α – угол в первой четверти.

Решение.

Из основного тригонометрического тождества следует

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha, \text{тогда} \quad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Подставив заданные значение, получим

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-0.09} = \pm\sqrt{0.91}.$$

Так как угол α находится в первой четверти, то

$$\sin\alpha = \sqrt{0.91}.$$

Ответ:$\sqrt{0.91}$**.**

Задание №2. Вычислить $\sin 225^\circ \cos 120^\circ \operatorname{tg} 330^\circ \operatorname{ctg} 240^\circ$.

Решение.

Воспользуемся формулами приведения

$$\sin 225^\circ \cos 120^\circ \operatorname{tg} 330^\circ \operatorname{ctg} 240^\circ = \sin(180^\circ+45^\circ)\cos(90^\circ+30^\circ)\times$$

$$\times \operatorname{tg}(360^\circ-30^\circ)\operatorname{ctg}(180^\circ+60^\circ) = -\sin 45^\circ(-\sin 30^\circ)(-\operatorname{tg} 30^\circ)\operatorname{tg} 60^\circ =$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Ответ:$-\frac{\sqrt{2}}{12}$**.**

Задание №3. Вычислить $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\cos\alpha = -0.5$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение.

По формуле синус разности аргументов, имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Из основного тригонометрического тождества получим

$$]\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \text{следовательно} \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ:$-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$**.**

Задание №4. Вычислить $\cos\frac{21\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{20}+\cos\frac{3\pi}{20}\sin\frac{\pi}{10}$.

Решение.

Воспользовавшись формулой приведения и свернув выражение по формуле синус суммы, получим

$$\cos\frac{21\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{20}+\cos\frac{3\pi}{20}\sin\frac{\pi}{10}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{10}\right)\sin\frac{3\pi}{20}+\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{20}=$$

$$=\cos\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{20}+\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{20}=\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3\pi}{20}\right)=\sin\frac{5\pi}{20}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ:$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$**.**

Задание №5. Найти $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

Решение.

Вспомним формулу косинус двойного угла

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Из основного тригонометрического тождества следует

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{49}{625}=\frac{576}{625}.$$

Таким образом

$$\cos 2\alpha=\frac{49}{625}-\frac{576}{625}=-\frac{527}{625}.$$

Ответ:$-\dfrac{527}{625}$**.**

Задание №6. Представьте в виде произведения $\cos(\alpha-2\beta)-\cos(\alpha+2\beta)$.

Решение.

$$\cos(\alpha-2\beta)-\cos(\alpha+2\beta)=-2\sin\frac{\alpha-2\beta+\alpha+2\beta}{2}\sin\frac{\alpha-2\beta-\alpha-2\beta}{2}=$$

$$=-2\sin\alpha\sin(-2\beta)=2\sin\alpha\sin 2\beta.$$

Ответ:$2\sin\alpha\sin 2\beta$**.**

Задание №7. Представьте в виде суммы

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right).$$

Решение.

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}[\cos\beta+\cos\alpha].$$

Ответ:$\frac{1}{2}[\cos\beta+\cos\alpha]$**.**

Задание №8. Вычислить $8\sin^2\dfrac{15\pi}{16}\cos^2\dfrac{17\pi}{16}-1$.

Решение.

$$8\sin^2\frac{15\pi}{16}\cos^2\frac{17\pi}{16}-1=8\left(\sin\frac{15\pi}{16}\cos\frac{17\pi}{16}\right)^2-1.$$

Воспользуемся формулой преобразования произведения в сумму

$$8\left(\sin\frac{15\pi}{16}\cos\frac{17\pi}{16}\right)^2-1=8\left(\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{15\pi}{16}-\frac{17\pi}{16}\right)+\sin\left(\frac{15\pi}{16}+\frac{17\pi}{16}\right)\right]\right)^2-1=$$

$$=\frac{8}{4}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\sin\frac{32\pi}{16}\right)^2-1=2\left(-\sin\frac{\pi}{8}+\sin 2\pi\right)^2-1=2\sin^2\frac{\pi}{8}-1=$$

$$=-\cos\frac{2\pi}{8}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ:$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$**.**

Задание №9. Преобразовать в произведение $\sin 5\alpha+\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha$.

Решение.

Перегруппируем слагаемые и воспользуемся формулой суммы синусов, имеем

$$\sin 5\alpha+\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha=(\sin 5\alpha+\sin 6\alpha)+(\sin 7\alpha+\sin 8\alpha)=$$

$$=2\sin\frac{11\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{15\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{11\alpha}{2}+\sin\frac{15\alpha}{2}\right)=$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2} 2\sin\frac{13\alpha}{2}\cos\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}.$$

Ответ:$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}$**.**

Задание №10. Вычислить $\sin 2004^\circ \cos 1974^\circ - \sin 1974^\circ \cos 2004^\circ$.

Решение.

Свернем выражение с помощью формулы синус разности

$$\sin 2004^\circ \cos 1974^\circ - \sin 1974^\circ \cos 2004^\circ = \sin(2004^\circ - 1974^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Ответ:$\frac{1}{2}$**.**

2.3 Тренировочный вариант среднего уровня сложности

1. Найти $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

1. $\frac{12}{13}$ и $-\frac{5}{12}$,
2. $\frac{24}{25}$ и $-\frac{7}{24}$,
3. $-\frac{24}{25}$ и $\frac{7}{24}$,
4. $-\frac{12}{13}$ и $\frac{5}{12}$.

2. Вычислить $\cos(-7.9\pi)\operatorname{tg}(-1.1\pi) - \sin(5.6\pi)\operatorname{ctg}(4.4\pi)$.

1. 1,
2. 0,
3. -1,
4. $\frac{1}{2}$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$.

1. $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$,
2. 2 и -2,
3. 5 и -5,
4. $2\sqrt{2}$ и $-2\sqrt{2}$.

4. Вычислить $\dfrac{\cos\frac{21\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{20} + \cos\frac{3\pi}{20}\sin\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{7\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{24} + \cos\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8}}$.

1. $\sqrt{3}$,

2. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

3. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

4. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Вычислить $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}$.

1. $\dfrac{1}{32}$,

2. $\dfrac{1}{8}$,

3. $\dfrac{1}{4}$,

4. 1.

6. Упростить выражение $0.125\cos 4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

1. 1,

2. 0,

3. $\dfrac{1}{2}$,

4. $\dfrac{1}{8}$.

7. Преобразовать в произведение $\sin 6\alpha-2\sqrt{3}\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}$.

1. $2\sin(6\alpha-60^\circ)$,

2. $\sin 60^\circ$,

3. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin(4\alpha-60^\circ)$,

4. $-8\cos 4\alpha$.

8. Упростить выражение $1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

1. $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$,

2. $-\sin^2\alpha$,

3. $\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{3\alpha}{2}$,

4. $-\dfrac{1}{2}\sin 8\alpha$.

9. Упростить выражение $\sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}}$, $90^\circ<\alpha<135^\circ$.

1. $-\sqrt{3}\operatorname{ctg}2\alpha$,

2. $-\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$,

3. $-\cos^2 4\alpha$,

4. $-\sin 4\alpha$.

10. Найти $\cos 2\alpha$, если известно,что $2\operatorname{ctg}^2\alpha+7\operatorname{ctg}\alpha+3=0$ и число α удовлетворяет неравенству $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$.

1. $\dfrac{4}{5}$,

2. $-\dfrac{3}{5}$,

3. $\dfrac{3}{5}$,

4. $-\dfrac{4}{5}$.

2.4 Решение тренировочного варианта.

Задание №1. Найти $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, имеем

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}, \text{тогда} \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{576}{625}}.$$

Так как угол α находится в третьей четверти, то $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$. По определению

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{7}{24}.$$

Ответ:$-\dfrac{24}{25}$ **и** $\dfrac{7}{24}$**.**

Задание №2. Вычислить $\cos(-7.9\pi)\operatorname{tg}(-1.1\pi) - \sin(5.6\pi)\operatorname{ctg}(4.4\pi)$.

Решение.

Воспользуемся формулами приведения, получим

$$\cos(-7.9\pi)\operatorname{tg}(-1.1\pi) - \sin(5.6\pi)\operatorname{ctg}(4.4\pi) = \cos(0.1\pi)\operatorname{tg}(0.9\pi)+$$

$$+\sin(0.4\pi)\operatorname{ctg}(0.4\pi) = \cos(0.1\pi)(-\operatorname{tg}0.1\pi) + \sin(0.4\pi)\frac{\cos(0.4\pi)}{\sin(0.4\pi)} =$$

$$-\cos(0.1\pi)\frac{\sin(0.1\pi)}{\cos(0.1\pi)} + \cos(0.4\pi) = -\sin(0.1\pi) + \cos(0.4\pi) =$$

$$= -\sin(0.1\pi) + \sin(0.1\pi) = 0.$$

Ответ:0.

Задание №3. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$.

Решение.

Для начала преобразуем исходное выражение

$$\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha = 2\left(\frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right) = 2\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3} - \cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right).$$

Так как $-1 \le \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \le 1$, то $-2 \le 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \le 2$, таким образом наименьшее значение -2, а наибольшее 2.

Ответ: -2 **и** 2.

Задание №4. Вычислить $\dfrac{\cos\frac{21\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{20} + \cos\frac{3\pi}{20}\sin\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{7\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{24} + \cos\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8}}$.

Решение.

Воспользуемся формулами приведения, а затем свернем числитель и знаменатель по формулам синус суммы аргументов и косинус разности аргументов, имеем

$$\frac{\cos\frac{21\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{20} + \cos\frac{3\pi}{20}\sin\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{7\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{24} + \cos\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{10}\right)\sin\frac{3\pi}{20} + \cos\frac{3\pi}{20}\sin\frac{\pi}{10}}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)\sin\frac{7\pi}{24} + \cos\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{20} + \cos\frac{3\pi}{20}\sin\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{24} + \cos\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{20} + \frac{\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{7\pi}{24} - \frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Задание №5. Вычислить $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}$.

Решение.

Умножим и поделим на $\cos\frac{\pi}{10}$ и примени формулу для синуса двойного угла, имеем

$$\frac{\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{10}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{10}\right)}{2\cos\frac{\pi}{10}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}}{2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{10}\right)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{4\pi}{10}}{4\sin\frac{4\pi}{10}} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

Задание №6. Упростить выражение $0.125\cos 4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Решение.

Преобразуем выражение, применив формулы синуса и косинуса двойного угла

$$0.125\cos 4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{1}{8}\cos 4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{1}{8}\left(1-2\sin^2 4\alpha\right)+$$
$$+\frac{1}{4}\sin^2 4\alpha=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\sin^2 4\alpha+\frac{1}{4}\sin^2 4\alpha=\frac{1}{8}.$$

Ответ:$\frac{1}{8}$.

Задание №7. Преобразовать в произведение $\sin 6\alpha-2\sqrt{3}\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}$.

Решение.

$$\sin 6\alpha-2\sqrt{3}\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}=\sin 6\alpha-2\sqrt{3}\left(\frac{1+\cos 6\alpha}{2}\right)+\sqrt{3}=\sin 6\alpha-\sqrt{3}\cos 6\alpha=$$
$$=2\left(\frac{1}{2}\sin 6\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 6\alpha\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin 6\alpha-\sin\frac{\pi}{6}\cos 6\alpha\right)=2\sin\left(6\alpha-\frac{\pi}{3}\right).$$

Ответ:$2\sin\left(6\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$**.**

Задание №8. Упростить выражение $1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

Решение.

Воспользуемся формулами приведения и основным тригонометрическим тождеством

$$1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}=1+\sin\left(3\pi-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}=$$
$$=1+\sin\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}=\sin^2\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{4}=2\sin^2\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{2}=$$
$$=2\sin^2\frac{\alpha}{4}+\sin\left(2\frac{\alpha}{4}\right)=2\sin^2\frac{\alpha}{4}+2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}=2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right)=$$
$$=2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\right)=2\sin\frac{\alpha}{4}2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$
$$=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(\frac{\alpha+\pi}{4}\right).$$

Ответ:$2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(\frac{\alpha+\pi}{4}\right)$**.**

Задание №9. Упростить выражение $\sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}}$, $90^\circ < \alpha < 135^\circ$.

Решение.

Воспользуемся формулой косинуса двойного угла и преобразуем выражение

$$\sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}} = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \sqrt{(\sin\alpha\cos\alpha)^2} = |\sin\alpha\cos\alpha|.$$

Так как угол $90^\circ < \alpha < 135^\circ$ находится во второй четверти, а в ней косинус принимает отрицательные значения, а синус положительные, то

$$|\sin\alpha\cos\alpha| = -\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = -\frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

Ответ:$-\frac{1}{2}\sin 2\alpha$**.**

Задание №10. Найти $\cos 2\alpha$, если известно,что $2\operatorname{ctg}^2\alpha + 7\operatorname{ctg}\alpha + 3 = 0$ и число α удовлетворяет неравенству $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$.

Решение.

Решим квадратное уравнение относительно $\operatorname{ctg}\alpha$, имеем

$$(\operatorname{ctg}\alpha)_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{-7\pm 5}{4},$$

то есть $(\operatorname{ctg}\alpha)_1 = \frac{-7+5}{4} = -\frac{1}{2}$, а $(\operatorname{tg}\alpha)_1 = -2$, $(\operatorname{ctg}\alpha)_2 = \frac{-7-5}{4} = -3$, а $(\operatorname{tg}\alpha)_2 = -\frac{1}{3}$.

Так как $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$, то $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2} < \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$, следовательно $-\infty < \operatorname{tg}\alpha < -1$, то есть нам подходит решение $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Таким образом

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-4}{1+4} = -\frac{3}{5}.$$

Ответ:$-\frac{3}{5}$**.**

2.5 Тренировочные варианты повышенного уровня сложности

Вариант №1.

1. Найти $\dfrac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}{4\sin\alpha + \cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

1. $\dfrac{3}{7}$,
2. $\dfrac{1}{9}$,
3. $\dfrac{1}{4}$,
4. 0.

2. Вычислить $1 + \sin\dfrac{\pi}{6} + \sin^2\dfrac{\pi}{6} + \sin^3\dfrac{\pi}{6} + \ldots$.

1. $2 - \sqrt{2}$,
2. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$,
3. 1,
4. 2.

3. Найти наименьшее значение выражения $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \cos 4\alpha}$, при $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

1. 2,
2. $\dfrac{1}{2}$,
3. 4,
4. $\sqrt{2}$.

4. Упростить выражение $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{(a^2-3)a}$, если $\sin x + \cos x = a$.

1. 0,
2. $\dfrac{1}{2}$,
3. 1,
4. $-\dfrac{1}{2}$.

5. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = m$, найти значение выражения

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \cos\frac{5\pi}{12}\sin\left(\frac{5\pi}{12} - 2\alpha\right).$$

1. $-\dfrac{38}{125}$,
2. $\dfrac{m(m^2+1)}{2}$,
3. $\dfrac{3m^2+1}{4}$,
4. $\dfrac{2m}{1+m^2}$.

Вариант №2.

1. Найти $\dfrac{2\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

1. $\dfrac{3}{7}$,
2. $\dfrac{1}{9}$,
3. $\dfrac{1}{4}$,
4. 0.

2. Вычислить $1 - \cos\dfrac{\pi}{4} + \cos^2\dfrac{\pi}{4} - \cos^3\dfrac{\pi}{4} + \ldots$.

1. $2-\sqrt{2}$,
2. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$,
3. 1,
4. 2.

3. Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

1. 2,
2. $\dfrac{1}{2}$,
3. 4,
4. $\sqrt{2}$.

4. Упростить выражение $\dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$, $0 < \alpha < 90^\circ$.

1. 0,
2. $\dfrac{1}{2}$,
3. 1,
4. $-\dfrac{1}{2}$.

5. Зная, что $\cos 2\alpha = m$, найти значение выражения $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

1. $-\dfrac{38}{125}$,
2. $\dfrac{m(m^2+1)}{2}$,
3. $\dfrac{3m^2+1}{4}$,
4. $\dfrac{2m}{1+m^2}$.

Вариант №3.

1. Найти $\dfrac{\sin\alpha - 2\cos\alpha}{2\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

1. $\frac{3}{7}$,
2. $\frac{1}{9}$,
3. $\frac{1}{4}$,
4. 0.

2. Вычислить $1 - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} + \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{6} - \operatorname{tg}^3\dfrac{\pi}{6} + \ldots$.

1. $2 - \sqrt{2}$,
2. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$,
3. $4 + 2\sqrt{3}$,
4. 1.

3. Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha}$, при $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

1. 2,
2. $\dfrac{1}{2}$,
3. 4,
4. $\sqrt{2}$.

4. Упростить выражение

$$\sin 5\alpha \sin 4\alpha + \sin 4\alpha \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha - 2\sin 3\alpha \sin 5\alpha \cos\alpha.$$

1. 0,
2. $\dfrac{1}{2}$,
3. 1,
4. $-\dfrac{1}{2}$.

5. Зная, что $\cos 2\alpha = m$, найти значение выражения $\cos^8\alpha - \sin^8\alpha$.

1. $-\dfrac{38}{125}$,
2. $\dfrac{m(m^2+1)}{2}$,
3. $\dfrac{3m^2+1}{4}$,
4. $\dfrac{2m}{1+m^2}$.

Вариант №4.

1. Найти $\dfrac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{5\sin\alpha - \cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

1. $-\dfrac{4}{7}$,
2. $\dfrac{1}{9}$,
3. $\dfrac{1}{4}$,
4. 0.

2. Вычислить $1 + \cos\dfrac{\pi}{6} + \cos^2\dfrac{\pi}{6} + \cos^3\dfrac{\pi}{6} + \ldots$.

1. $2-\sqrt{2}$,
2. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$,
3. $4+2\sqrt{3}$,
4. 1.

3. Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{1}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$, при $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

1. 2,
2. $\dfrac{1}{2}$,
3. 4,
4. $\sqrt{2}$.

4. Упростить выражение $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha + 1$.

1. 0,
2. $\dfrac{1}{2}$,
3. 1,
4. $-\dfrac{1}{2}$.

5. Зная, что $\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right) = -\dfrac{4}{5}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, найти значение выражения $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}$.

1. $-\dfrac{38}{125}$,
2. $-\dfrac{41}{125}$,
3. $\dfrac{8}{125}$,
4. $\dfrac{41}{125}$.

Вариант №5.

1. Найти $\dfrac{2\cos^2\alpha-7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-2$.

1. $\dfrac{3}{7}$,
2. $\dfrac{1}{9}$,
3. $\dfrac{1}{4}$,
4. 0.

2. Вычислить $\operatorname{ctg}1^\circ \operatorname{ctg}3^\circ \operatorname{ctg}5^\circ \ldots \operatorname{ctg}89^\circ$.

1. $2-\sqrt{2}$,
2. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$,
3. $4+2\sqrt{3}$,
4. 1.

3. Найти наименьшее значение выражения $\dfrac{\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{1+\sin\left(\frac{5\pi}{2} - 8\alpha\right)}$, при $0 < \alpha < \frac{\pi}{8}$.

1. 2,
2. $\dfrac{1}{2}$,
3. 4,
4. $\sqrt{2}$.

4. Упростить выражение $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} - \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$, если $\sin x - \cos x = a$.

1. $\dfrac{1}{2}$,
2. $\dfrac{a(a^2-3)}{a^2-1}$,
3. $\dfrac{a}{a^2-1}$,
4. $\dfrac{(a^2-3)}{a^2-1}$.

5. Зная, что $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{3}{5}$, найти значение выражения $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha}{2}$.

1. $-\dfrac{38}{125}$,
2. $-\dfrac{41}{125}$,
3. $\dfrac{8}{125}$,
4. $\dfrac{41}{125}$.

2.6 Решение тренировочных вариантов

Задание №1. Найти

$$\frac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}{4\sin\alpha + \cos\alpha}, \text{если } \operatorname{tg}\alpha = 2.$$

Решение.

Для начала разделим числитель и знаменатель выражения на $\cos\alpha$

$$\frac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}{4\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 5}{4\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - 5}{4\operatorname{tg}\alpha + 1} =$$

$$= \frac{3\times 2 - 5}{4\times 2 + 1} = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{9}$**.**

Задание №2. Вычислить

$$1+\sin\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^3\frac{\pi}{6}+\ldots$$

. Решение.

Обозначим

$$1+\sin\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^3\frac{\pi}{6}+\ldots=S.$$

Данная последовательность является геометрической прогрессией с первым членом $b_1=1$ и знаменателем прогрессии $q=\sin\frac{\pi}{6}$, $|q|<1$, она бесконечно убывающая, тогда

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Ответ:2.

Задание №3. Найти наименьшее значение выражения $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{1+\cos 4\alpha}$, при $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

Решение.

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{1+\cos 4\alpha}=\frac{\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}}{2\cos^2 2\alpha}=\frac{\frac{2}{\operatorname{tg}2\alpha}}{2\cos^2 2\alpha}=\frac{2}{2\operatorname{tg}2\alpha\cos^2 2\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha\cos^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 4\alpha}=\frac{2}{\sin 4\alpha}.$$

Это выражение будет принимать наименьшее значение, когда знаменатель будет наибольшим, то есть $\sin 4\alpha=1$, значит $4\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, тогда $\alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$, $k\in\mathbb{Z}$, но так как $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, то $\alpha=\frac{\pi}{8}$. Подставив данное значение в исходное выражение, получим $\frac{2}{\sin 4\frac{\pi}{8}}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{2}}=2$.

Ответ:2 **при** $\alpha=\dfrac{\pi}{8}$**.**

Задание №4. Упростить выражение $\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{(a^2-3)a}$, если $\sin x+\cos x=a$.

Решение.

Для начала возведем обе части данного в условии равенства в квадрат, имеем

$$(\sin x+\cos x)^2=a^2,$$

$$1+2\sin x\cos x=a^2,$$

откуда следует, что

$$\sin x\cos x=\frac{a^2-1}{2}.$$

Далее применим формулу суммы кубов к исходному выражению

$$\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{(a^2-3)a}=\frac{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}{(a^2-3)a}=$$

$$=\frac{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}{(a^2-3)a}=\frac{a\left(1-\frac{a^2-1}{2}\right)}{(a^2-3)a}=\frac{3-a^2}{2(a^2-3)}=-\frac{1}{2}$$

Ответ:$-\frac{1}{2}$**.**

Задание №5. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha=m$, найти значение выражения

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\frac{5\pi}{12}\sin\left(\frac{5\pi}{12}-2\alpha\right).$$

Решение.

Обозначим

$$A=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\frac{5\pi}{12}\sin\left(\frac{5\pi}{12}-2\alpha\right).$$

Для начала воспользуемся формулами понижения степени для синуса и косинуса, а также синус суммы

$$A=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{2}-\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)}{2}-\frac{1}{2}\left(\sin(-2\alpha)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}-2\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)-1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)+\sin 2\alpha-\sin\left(\frac{5\pi}{6}-2\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin 2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)+\sin 2\alpha-\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\right)\right).$$

Применим формулы косинуса суммы и разности

$$A=\frac{1}{2}\left(2\sin 2\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\cos 2\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin 2\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\right).$$

Воспользуемся формулой синус суммы

$$A = \frac{1}{2}\left(2\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha - \sin\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha - \cos\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right) =$$

$$= \sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2m}{1+m^2}.$$

Ответ: $\frac{2m}{1+m^2}$**.**

Решение 2-го варианта.

Задание №1. Найти

$$\frac{2\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}, \text{если} \operatorname{tg}\alpha = 2.$$

Решение.

Поделим числитель и знаменатель данного выражения на $\cos^2\alpha$, имеем

$$\frac{2\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha} = \frac{\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{3\operatorname{tg}^2\alpha + 2} =$$

$$= \frac{2\times 2^2 - 2}{3\times 2^2 + 2} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}.$$

Ответ: $\frac{3}{7}$**.**

Задание №2. Вычислить

$$1 - \cos\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} - \cos^3\frac{\pi}{4} + \ldots.$$

Решение.

Обозначим

$$1 - \cos\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} - \cos^3\frac{\pi}{4} + \ldots = S.$$

Данная последовательность является геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем прогрессии $q = -\cos\frac{\pi}{4}$, $|q| < 1$. Эта геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, следовательно

$$S = 1 - \cos\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} - \cos^3\frac{\pi}{4} + \ldots = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}.$$

Домножим числитель и знаменатель на $\sqrt{2}-1$

$$S=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{2-\sqrt{2}}{2-1}=2-\sqrt{2}.$$

Ответ: $2-\sqrt{2}$.

Задание №3. Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos^2\alpha}{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\cos^2\alpha}{\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\cos^2\alpha}{\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=$$

$$=\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

Это выражение будет принимать наибольшее значение, когда $\sin 2\alpha$ принимает наибольшее значение, то есть $\sin 2\alpha=1$, значит $2\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, тогда $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}k$, $k\in\mathbb{Z}$, но так как $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Подставив данное значение в исходное выражение, получим $\frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$ **при** $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$**.**

Задание №4. Упростить выражение $\dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$, $0<\alpha<90^\circ$.

Решение.

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и формулой синуса двойного угла, имеем

$$\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}-\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Заметим, что выражения стоящие под корнем есть полные квадраты суммы и разности соответственно, поэтому можно снять знак корня и поставить модули, получим

$$=\frac{|\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}|-|\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}|}{4\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Так как $0 < \alpha < 90^\circ$, то выражение, стоящее под знаком первого модуля положительно, поэтому можно убрать знак модуля, а выражение, стоящее под знаком второго модуля отрицательно, поэтому при его раскрытии появится знак "$-$". Таким образом, получим

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Задание №5. Зная, что $\cos 2\alpha = m$, найти значение выражения $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

Решение.

Заметим, что

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3.$$

Применим формулу суммы кубов, имеем

$$(\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha).$$

Заметим, что первую скобку можно заменить на 1, согласно основному тригонометрическому тождеству, имеем

$$\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - \sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Выражение, стоящее в скобках дополним до полного квадрата, для этого прибавим и отнимем $2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$, получим

$$\left((\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right) - \sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= 1 - \frac{3}{4}(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{4}\left(1 - \cos^2 2\alpha\right) =$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\left(1 - m^2\right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}m^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}m^2 = \frac{1+m^2}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{1+m^2}{4}$.

Решение 3-го варианта.

Задание №1. Найти $\dfrac{\sin\alpha - 2\cos\alpha}{2\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

Решение.

Для начала разделим числитель и знаменатель выражения на $\cos^3\alpha$, получим

$$\frac{\sin\alpha - 2\cos\alpha}{2\sin^3\alpha + \cos^3\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{1}{\cos^2\alpha} - 2\frac{\cos\alpha}{\cos^3\alpha}}{2\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} + \frac{\cos^3\alpha}{\cos^3\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha\frac{1}{\cos^2\alpha} - 2\frac{1}{\cos^2\alpha}}{2\operatorname{tg}^3\alpha + 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}(\operatorname{tg}\alpha - 2)}{2\operatorname{tg}^3\alpha + 1} = \frac{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(\operatorname{tg}\alpha - 2)}{2\operatorname{tg}^3\alpha + 1} = \frac{(1+2^2)(2-2)}{2\times 2^3 + 1} = 0.$$

Ответ: 0.

Задание №2. Вычислить $1 - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} + \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{6} - \operatorname{tg}^3\dfrac{\pi}{6} + \ldots$.

Решение.

Обозначим

$$1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}^3\frac{\pi}{6} + \ldots = S.$$

Данная последовательность является геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем прогрессии $q = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, $|q| < 1$. Эта геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, следовательно

$$S = 1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}^3\frac{\pi}{6} + \ldots = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}.$$

Домножим числитель и знаменатель на $\sqrt{3}-1$

$$S = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{3-\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$.

Задание №3. Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha}$, при $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$\frac{1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha} = \frac{1}{(\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3}.$$

Применим формулу суммы кубов и основное тригонометрическое тождество, получим

$$\frac{1}{(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3}=\frac{1}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)}=$$

$$=\frac{1}{(\sin^2)^2+(\cos^2)^2-\sin^2\cos^2\alpha}.$$

Дополним до полного квадрата и применим формулы синуса двойного угла и понижения степени, получим

$$\frac{1}{(\sin^2)^2+(\cos^2)^2-\sin^2\cos^2\alpha}=\frac{1}{1-2\sin^2\cos^2\alpha-\sin^2\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{1-3\sin^2\cos^2\alpha}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}\frac{1}{2}(1-\cos 4\alpha)}=\frac{1}{1-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{8}(5+3\cos 4\alpha)}=\frac{8}{5+3\cos 4\alpha}.$$

Выражение будет принимать наибольшее значение, если знаменатель будет принимать наименьшее, то есть $\cos 4\alpha=-1$, значит $4\alpha=\pi$, тогда $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Подставив данное значение в исходное выражение, получим

$$\frac{8}{5+3\cos 4\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{5+3(-1)}=\frac{8}{2}=4.$$

Ответ:4 **при** $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$**.**

Задание №4. Упростить выражение

$$\sin 5\alpha\sin 4\alpha+\sin 4\alpha\sin 3\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha-2\sin 3\alpha\sin 5\alpha\cos\alpha$$

Решение.

Обозначим $A=\sin 5\alpha\sin 4\alpha+\sin 4\alpha\sin 3\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha-2\sin 3\alpha\sin 5\alpha\cos\alpha$

Преобразуем данное выражение, вынося $\sin 4\alpha$ за скобку и воспользовавшись формулой синус двойного угла

$$A=\sin 4\alpha(\sin 5\alpha+\sin 3\alpha)-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha-2\sin 3\alpha\sin 5\alpha\cos\alpha.$$

Далее, к выражению, стоящему в скобках, применим формулу суммы синусов, а затем, вынесем за скобки $\cos\alpha$

$$A = 2\sin 4\alpha \sin 4\alpha \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha - 2\sin 5\alpha \sin 3\alpha \cos\alpha =$$

$$= \cos\alpha(2\sin^2 4\alpha - 2\sin^2\alpha - 2\sin 5\alpha\sin 3\alpha).$$

Применяя формулы произведения синусов и понижения степени, окончательно имеем

$$A = \cos\alpha(1 - \cos 8\alpha - (1 - \cos 2\alpha) - (\cos 2\alpha - \cos 8\alpha)) = 0.$$

Ответ: 0.

Задание №5. Зная, что $\cos 2\alpha = m$, найти значение выражения $\cos^8\alpha - \sin^8\alpha$.

Решение.

$$\cos^8\alpha - \sin^8\alpha = (\cos^4\alpha)^2 - (\sin^4\alpha)^2 = (\cos^4\alpha - \sin^4\alpha)(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha).$$

Выражение, стоящее в первой скобки распишем с помощью формулы разности квадратов, а во-второй – дополним до полного квадрата

$$(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha)(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\times$$

$$\times\left((\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\right).$$

Преобразовав выражение с помощью формул косинуса двойного угла, синуса двойного угла, а также основного тригонометрического тождества, получим

$$\cos 2\alpha(1 - 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha) = \cos 2\alpha\left(1 - \frac{1}{2}(4\cos^2\alpha\sin^2\alpha)\right) =$$

$$= \cos 2\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right) = \cos 2\alpha\left(1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2\alpha)\right) =$$

$$= m\left(1 - \frac{1}{2}(1 - m^2)\right) = m\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}m^2\right) = \frac{m}{2} + \frac{m^3}{2} = \frac{m(m^2+1)}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{m(m^2+1)}{2}$.

Решение 4-го варианта.

Задание №1. Найти $\dfrac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{5\sin\alpha-\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-2$.

Решение.

Поделим числитель и знаменатель данного выражения на $\sin\alpha$, имеем

$$\frac{2\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}+3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{5\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{2+3\operatorname{ctg}\alpha}{5-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{2+3(-2)}{5-(-2)}=\frac{-4}{7}$$

Ответ: $-\dfrac{4}{7}$

Задание №2. Вычислить $1+\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos^2\dfrac{\pi}{6}+\cos^3\dfrac{\pi}{6}+\ldots$.

Решение.

Обозначим

$$1+\cos\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}+\cos^3\frac{\pi}{6}+\ldots=S.$$

Данная последовательность является геометрической прогрессией с первым членом $b_1=1$ и знаменателем прогрессии $q=\cos\frac{\pi}{6}$, $|q|<1$. Эта геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, следовательно

$$S=1+\cos\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}+\cos^3\frac{\pi}{6}+\ldots=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{2-\sqrt{3}}.$$

Домножим числитель и знаменатель на $2+\sqrt{3}$

$$S=\frac{2(2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{4+2\sqrt{3}}{4-3}=4+2\sqrt{3}.$$

Ответ: $4+2\sqrt{3}$.

Задание №3. Найти наибольшее значение выражения $\frac{1}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$, при $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$\frac{1}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}=\frac{1}{(\sin^2\alpha)^2+(\cos^2\alpha)^2}=\frac{1}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1-\cos 4\alpha)}=\frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\alpha}=$$

$$= \frac{4}{3+\cos 4\alpha}.$$

Дробь будет принимать наибольшее значение, когда знаменатель будет наименьшим, то есть $\cos 4\alpha = -1$, значит $4\alpha = \pi$, а $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Таким образом наибольшее значение дробь будет принимать при $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Подставим это значение в выражение

$$\frac{4}{3+\cos 4\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3-1} = 2.$$

Ответ:2 **при** $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$**.**

Задание №4. Упростить выражение

$$\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha + 1.$$

Решение.

Для начала преобразуем слагаемое, стоящее в середине. Для этого воспользуемся формулой $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а затем неоднократно применим формулу преобразования произведения в сумму

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}\operatorname{tg}\alpha =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\frac{\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha-\frac{\pi}{3}-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha+\frac{\pi}{3}+\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha-\frac{\pi}{3}-\alpha)+\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha+\frac{\pi}{3}+\alpha)} =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\frac{\cos 2\alpha - \cos\frac{2\pi}{3}}{\cos 2\alpha + \cos\frac{2\pi}{3}} = \operatorname{tg}\alpha\frac{\cos 2\alpha + \frac{1}{2}}{\cos 2\alpha - \frac{1}{2}} =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\frac{2\cos 2\alpha + 1}{2\cos 2\alpha - 1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{2\cos 2\alpha + 1}{2\cos 2\alpha - 1} = \frac{2\cos 2\alpha\sin\alpha + \sin\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha - \cos\alpha} =$$

$$= \frac{-\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha - \cos\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha.$$

Таким образом, исходное выражение имеет вид

$$\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha + 1 = 1$$

Ответ: 1.

Задание №5. Зная, что $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{4}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, найти значение выражения $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}$.

Решение.

Воспользуемся формулой преобразования произведения в сумму

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\sin(-2\alpha)+\sin 3\alpha\right)=\frac{1}{2}(-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha).$$

Далее, применяя формулы синуса двойного и тройного аргумента, имеем

$$\frac{1}{2}(-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha)=\frac{1}{2}\left(-2\sin\alpha\cos\alpha+3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right).$$

Воспользуемся заданными условиями

$$\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{4}{5}, \text{следовательно} \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\frac{4}{5},$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha=-\frac{4}{5}, \text{тогда} \sin\alpha=\frac{4}{5}.$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}, \text{следовательно} \cos\alpha=\pm\frac{3}{5}.$$

Так как $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

Подставляем полученные значения в исходное выражение

$$\frac{1}{2}\left(-2\sin\alpha\cos\alpha+3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}+3\times\frac{4}{5}-4\times\left(\frac{4}{5}\right)^3\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{24}{25}+\frac{12}{5}-\frac{256}{125}\right)=-\frac{38}{125}.$$

Ответ: $-\dfrac{38}{125}$.

Решение 5-го варианта.

Задание №1. Найти $\dfrac{2\cos^2\alpha-7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-2$.

Решение.

Поделим числитель и знаменатель данного выражения на $\sin^2\alpha$, имеем

$$\frac{2\cos^2\alpha-7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\operatorname{ctg}^2\alpha-7}{3\operatorname{ctg}^2\alpha+4\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{2(-2)^2-7}{3(-2)^2+4(-2)}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

Задание №2. Вычислить $\operatorname{ctg}1^\circ\operatorname{ctg}3^\circ\operatorname{ctg}5^\circ\ldots\operatorname{ctg}89^\circ$.

Решение. Перегруппируем данное выражение

$$\operatorname{ctg} 1^\circ \operatorname{ctg} 3^\circ \operatorname{ctg} 5^\circ \ldots \operatorname{ctg} 89^\circ = (\operatorname{ctg} 1^\circ \operatorname{ctg} 89^\circ)(\operatorname{ctg} 3^\circ \operatorname{ctg} 87^\circ) \ldots \operatorname{ctg} 45^\circ =$$

$$(\operatorname{ctg} 1^\circ \operatorname{tg} 1^\circ)(\operatorname{ctg} 3^\circ \operatorname{tg} 3^\circ) \ldots 1 = 1.$$

Ответ: 1.

Задание №3. Найти наименьшее значение выражения $\dfrac{\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 8\alpha\right)}$, при $0 < \alpha < \frac{\pi}{8}$.

Решение.

$$\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 8\alpha\right)} = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \cos 8\alpha} = \frac{\frac{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}}{2\cos^2 4\alpha} = \frac{\frac{2}{\operatorname{tg} 4\alpha}}{2\cos^2 4\alpha} =$$
$$= \frac{2}{\operatorname{tg} 4\alpha 2\cos^2 4\alpha} = \frac{2}{2\sin 4\alpha \cos 4\alpha} = \frac{2}{\sin 8\alpha}.$$

Обозначим $\frac{2}{\sin 8\alpha} = A(\alpha)$.

Выражение $A(\alpha)$ будем наименьшим, когда знаменатель данного выражения наибольший, то есть $\sin 8\alpha = 1$, а это возможно когда $8\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, следовательно $\alpha = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}k$, но так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{8}$, то наименьшее значение выражение будет принимать при $\alpha = \frac{\pi}{16}$. Подставим это значение в исходное выражение, получим

$$A(\frac{\pi}{16}) = \frac{2}{\sin 8\frac{\pi}{16}} = 2.$$

Ответ:2 при $\alpha = \dfrac{\pi}{16}$.

Задание №4. Упростить выражение $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} - \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$, если $\sin x - \cos x = a$.

Решение.

Приведем исходное выражение к общему знаменателю и применим формулу разности кубов, имеем

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x \cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin x \cos x} =$$
$$= \frac{(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)}{\sin x \cos x}.$$

Возведем в квадрат обе части условия

$$(\sin x - \cos x)^2 = a^2,$$

$$\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = a^2,$$

$$1 - 2\sin x \cos x = a^2,$$

$$\sin x \cos x = \frac{1 - a^2}{2}.$$

Подставим данное выражение

$$\frac{(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)}{\sin x \cos x} = \frac{a(1 + \frac{1-a^2}{2})}{\frac{1-a^2}{2}} = \frac{a(3 - a^2)}{1 - a^2}.$$

Ответ: $\frac{a(3 - a^2)}{1 - a^2}$**.**

Задание №5 Зная, что $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$, найти значение выражения $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha}{2}$.

Решение.

Для начала воспользуемся формулой приведения $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{3}{5}$, а значит $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$.

Теперь рассмотрим исходное выражение

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{4\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{6\alpha}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos 2\alpha - \cos 3\alpha\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\cos^2\alpha - 1 - (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)\right] = \frac{1}{2}\left[2\cos^2\alpha - 1 - 4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha\right].$$

Подставим в полученное выражение найденные значения, получим

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[2 \times \frac{9}{25} - 1 - 4 \times \frac{27}{125} + 3 \times \frac{3}{5}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{90 - 125 - 108 + 225}{125}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{82}{125} = \frac{41}{125}.$$

Ответ: $\frac{41}{125}$.

Список использованных источников

1 Никольский, С.М. Алгебра и начала математического анализа.10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни /С.М. Никольский. М.: Просвещение, 2009. 430 с.

2 Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа:учебник для учащихся общеобразовательных учреждений.10-11 классы.В 2 ч. Ч. 2./ А.Г. Мордкович. М.: Мнемозина, 2013. 400 с.

3 Сборник задач по алгебре: учебное пособие для 8-9 классов с углубленным изучением математики / М.Л. Галицкий [и др]. М. : Просвещение, 2001. 271 с.

4 3000 конкурсных задач по математике/ Е.Д. Куланин [и др]. М. : Айрис-пресс, 2003. 624 с.

5 Сборник задач по математике для поступающих во втузы /под ред. М.И. Сканави. 6-е изд. М.: ООО"Издательство "Мир и образование: ООО "Издательство "ОНИКС-ЛИТ, 2013. 608 с.

6 Потапов, М.К. Алгебра и начала математического анализа:дидактические материалы для 10 кл./М.К. Потапов, А.В. Шевкин. М.: Просвещение, 2005.

7 Потапов, М.К. Алгебра и начала математического анализа: книга для учителя /М.К. Потапов, А.В. Шевкин. М.: Просвещение, 2008.

8 Мартышова, Л.И. Открытые уроки алгебры и начал анализа. 9-11 кл./ Л.И. Мартышова. М.: ВАКО, 2012.

9 Вересова, Е.Е. Практикум по решению математических задач. /Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.П. Полякова. М.: Просвещение, 1979.

10 Понтрягин, Л.С. Математический анализ для школьников /Л.С. Понтрягин. М.: Наука, 1983.

11 Цыпкин, А.Г. Справочник по математике /А.Г. Цыпкин. М.: Просвещение, 1983.

12 Цыпкин, А.Г. Справочное пособие по методам решения задач по математике / А.Г. Цыпкин, А.И. Пинский. М.: Наука, 1984.

13 Яковлева, Г.Н. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы /Г.Н. Яковлева. М.:Наука, 1988.

14 Ишханович, Ю.А. Введение в современную математику / Ю.А. Ишханович. М.: Наука, 1965.